UNIVERSIDAD DE BURGOS

PROGRAMA DE DOCTORADO
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

Departamento de Didácticas Específicas

ESTUDO SOBRE A APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES E GRÁFICOS EM UM CURSO DE ADMINISTRAÇÃO, FUNDAMENTADO NAS TEORIAS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E DOS CAMPOS CONCEITUAIS

TESIS DOCTORAL

LETÍCIA DOS SANTOS FOGAÇA

Burgos, 24 de marzo de 2021

UNIVERSIDAD DE BURGOS

PROGRAMA DE DOCTORADO
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

Departamento de Didácticas Específicas

ESTUDO SOBRE A APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES E GRÁFICOS EM UM CURSO DE ADMINISTRAÇÃO, FUNDAMENTADO NAS TEORIAS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Tese de Doutorado, realizada por Letícia dos Santos Fogaça, para obter o título de Doutor pela Universidade de Burgos, sob a direção de Dr. Marco Antonio Moreira e codireção de Dra. Mª Concesa Caballero.

Burgos, 24 de marzo de 2021

Dedico esta tese:

Aos meus pais, José Deroci e Sirlei Terezinha.

Vocês dois são pessoas maravilhosas, que eu tenho a sorte de chamar de pai e mãe.

Minha eterna gratidão por vocês sempre estarem ao meu lado, sempre me apoiarem e incentivarem, eu amo muito vocês... Essa conquista é nossa!

AGRADECIMENTOS

Sou grata ao Professor Moreira, um verdadeiro orientador! Recordarei para sempre, com muito carinho, de todo o aprendizado e convívio. Sua onipresença e seu legado estão marcados na minha vida pessoal e profissional. Sem dúvidas, uma pessoa muito querida, gentil e especial, que merece todo o carinho e respeito pela pessoa ímpar que é. Por um mundo com mais pessoas como o estimado Professor Marco Antonio Moreira.

Da mesma maneira, expresso meu carinho e reconhecimento à minha querida codiretora, Professora Concesa. Suas contribuições preciosas e certeiras, sua disponibilidade e amabilidade enriqueceram a minha jornada. Meu sincero agradecimento pelo aprendizado adquirido em todos os momentos gentilmente compartilhados.

Sou grata ao Professor Jesús Villagrá e à Professora Ileana Greca Dufranc, por todo o aprendizado, conversas e momentos vivenciados. Além disso, por todo o auxílio que o Professor Jesús sempre concedeu via e-mail. Vocês dois são pessoas muito especiais!

Meu reconhecimento à Universidad de Burgos, pela oportunidade preciosa que tive de enriquecer minha caminhada profissional. Foi uma experiência única e maravilhosa!

Agradeço ao Rodrigo Fioravanti Pereira, que foi meu companheiro de doutorado e de caminhada por alguns anos. Guardo comigo os momentos bons que vivemos, pois apoiamos um ao outro durante todo o processo e isso contribuiu para o meu amadurecimento pessoal e profissional. Nossa amizade é um fruto muito bonito dessa relação.

Agradeço aos meus dois colegas e queridos amigos do peito, Leonardo Dalla Porta e Letícia Oberoffer Stefenon, por nossa parceria no grupo de estudos, no trabalho e na vida. Vocês são pessoas muito especiais e eu carrego vocês no meu coração. Eu amo vocês!

Poderia escrever mais algumas laudas na tentativa de mencionar todos que contribuíram para a realização desta investigação e foram importantes durante o meu processo de doutoramento, o que se tornaria demasiadamente extenso, pois trata-se da construção de uma jornada, que teve a participação de muitas pessoas, que fizeram e fazem parte da minha história de vida. Dessa forma, expressarei o meu carinho e reconhecimento a elas pessoalmente.

RESUMO

Esta tese teve como objetivo verificar em que medida ocorrem indícios de aprendizagem significativa progressiva de conhecimentos na relação de equações e gráficos, em estudantes do primeiro semestre do curso de Administração, mediante o uso de materiais de apoio e metodologias de ensino fundamentadas na Teoria da Aprendizagem Significativa e na Teoria dos Campos Conceituais. Os participantes desta investigação foram 21 estudantes, todos matriculados na disciplina de Matemática I, ofertada no primeiro semestre do curso, em uma universidade privada, localizada na cidade de Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. A metodologia adotada foi de cunho qualitativo, na qual se elaborou uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), fundamentada nos pressupostos de Moreira (2012b). Os registros elaborados pelos discentes foram analisados à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (1963) e da Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1990). Para iniciar a coleta de dados, realizou-se um primeiro estudo, chamado estudo 1, que serviu como piloto, o qual foi aprimorado, pois passou pela revisão de três professores especialistas. A UEPS previamente elaborada sofreu ajustes em virtude do nível de dificuldade e da extensa quantidade de situações apresentadas em sua primeira versão. Após o estudo 1, realizou-se o estudo 2, que caracterizou a fase de implementação didática e contou com situações da Matemática, em sintonia com a área da Administração, que abordaram, articuladamente, o estudo de equações e gráficos. Os registros coletados junto aos dois grupos de estudantes, nos dois estudos, forneceram indícios de que os discentes que mais demonstraram indícios de estarem a caminho de uma aprendizagem significativa e de apresentarem avanços no domínio do campo conceitual das equações foram os mesmos para os quais a UEPS se mostrou mais exitosa, ou seja, o sucesso da Unidade de Ensino esteve intimamente ligado ao avanço do domínio do campo conceitual em questão. Em consequência disso, a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa promoveu diferentes níveis de êxito na turma-alvo do estudo. Além disso, verificou-se que a intersecção entre as duas áreas de conhecimento (Matemática e Administração) mostrou-se como provável fragilidade, por parte dos estudantes, que utilizaram teoremas-em-ação de maneira, aparentemente, compartimentada no enfrentamento das diferentes situações propostas.

Palavras-chave: Aprendizagem Significativa; Campos Conceituais; Matemática; Administração; Unidade de Ensino Potencialmente Significativa; Equações e gráficos.

ABSTRACT

This doctoral thesis aimed to verify to what extent there are signs of significant progressive learning of knowledge in the relationship of equations and graphs, in students of the first semester of an Administration course, through the use of support materials and teaching methodologies based on Theory of Meaningful Learning and the Theory of Conceptual Fields. The participants of this investigation were 21 students, and all enrolled in the subject of Mathematics I, offered in the first semester of the course, in a private university located in Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brazil. The methodology adopted was of a qualitative nature, in which a Potentially Meaningful Teaching Unit (UEPS) was elaborated, based on Moreira's assumptions (2012b). It analyzed the records students prepared in the light of Ausubel's Theory of Meaningful Learning (1963) and Vergnaud's Conceptual Fields Theory (1990). To start data collection, a first study was carried out, called study 1 that served as an improved pilot, as it went through the review of three specialist professors. The UEPS previously elaborated underwent adjustments due to the difficulty and the extensive number of situations presented in its first version. After study 1, study 2 was carried out, which characterized the didactic

implementation phase and included mathematical situations in line with the Administration area, which addressed, jointly, the study of equations and graphs. The records collected from the two groups of students, in both studies, provided evidence that the students who showed the most signs of being on the way to meaningful learning and showing advances in the domain of the conceptual field of equations were the same for which UEPS proved to be more successful, that is, the success of the Teaching Unit was closely linked to the advancement of the domain of the conceptual field in question. As a result, the Potentially Meaningful Teaching Unit promoted different success levels in the study's target group. Besides, it was found that the intersection between the two areas of knowledge (Mathematics and Administration) proved to be likely frail on the part of the students, who used theorems-in-action in an apparently compartmentalized way to face different situations proposals.
Keywords: Meaningful Learning; Conceptual Fields; Math; Administration; Potentially Meaningful Teaching Unit; Equations and graphs.

RESUMEN

Esta tesis tuvo como objetivo verificar en qué medida existen indicios de aprendizaje significativo progresivo de conocimientos en la relación de ecuaciones y gráficas, en estudiantes del primer semestre de un curso de Administración, utilizando materiales de apoyo y metodologías de enseñanza basadas en la Teoría del Aprendizaje Significativo y en la Teoría de los Campos Conceptuales. Los participantes de esta investigación fueron 21 estudiantes, todos matriculados en la asignatura de Matemáticas I, impartida en el primer semestre del curso, en una universidad privada, ubicada en la ciudad de Santa María, Rio Grande do Sul, Brasil. La metodología adoptada fue de carácter cualitativo, en la que se elaboró una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa (UEPS), a partir de los supuestos de Moreira (2012b). Los registros preparados por los estudiantes fueron analizados a la luz de la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel (1963) y la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990). Para iniciar la recolección de datos se realizó un primer estudio, denominado estudio 1, que sirvió como piloto, el cual fue mejorado, a medida que pasó por la revisión de tres profesores especialistas. La UEPS elaborada anteriormente sufrió ajustes debido al nivel de dificultad y al extenso número de situaciones presentadas en su primera versión. Tras el estudio 1, se llevó a cabo el estudio 2, que caracterizó la fase de implementación didáctica e incluyó situaciones matemáticas, en línea con el área de Administración, que abordó, conjuntamente, el estudio de ecuaciones y gráficas. Los registros recolectados de los dos grupos de estudiantes, en ambos estudios, proporcionaron evidencia de que los estudiantes que mostraron más signos de estar en el camino hacia un aprendizaje significativo y que mostraron avances en el dominio del campo conceptual de las ecuaciones fueron los mismos para los que la UEPS demostró ser más exitosa, es decir, el éxito de la Unidad de Enseñanza estuvo íntimamente ligado al avance del dominio del campo conceptual en cuestión. Como resultado, la Unidad Docente Potencialmente Significativa promovió diferentes niveles de éxito en el grupo objetivo del estudio. Además, se encontró que la intersección entre las dos áreas de conocimiento (Matemática y Administración) resultó ser probable fragilidad por parte de los estudiantes, quienes utilizaron teoremas en acción de manera aparentemente compartimentada para enfrentar propuestas de situaciones diferentes.
Palabras clave: Aprendizaje significativo; Campos conceptuales; Matemáticas; Administración; Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa; Ecuaciones y gráficas.

SUMÁRIO

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE APÊNDICES

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

O propósito deste capítulo é fornecer a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora desta investigação. Para isso, no item 1.1, apresenta-se a temática desta tese. Na sequência, no item 1.2, discute-se as asserções e motivações pessoais da autora no que se refere à sua trajetória acadêmica e profissional, com a finalidade de revelar os caminhos que conduziram à escolha do tema de pesquisa.

No item 1.3, disserta-se os objetivos geral e específicos da investigação e, no item 1.4, vislumbra-se um panorama geral da investigação, em forma de compêndio e expõe-se um diagrama V da pesquisa, com a interpretação da autora, para que o leitor faça a preleção dos assuntos que serão aprofundados nos capítulos posteriores.

1.1 Apresentação do objetivo da investigação

Esta pesquisa teve como intuito, verificar em que medida ocorrem indícios de aprendizagem significativa progressiva de conhecimentos na relação de equações e gráficos em estudantes de uma turma do primeiro semestre de um curso de Administração de Empresas, mediante materiais de apoio e metodologias de ensino fundamentadas na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (1963) e na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990).

1.2 Os caminhos que levaram à pesquisa

Durante minha[1] trajetória como estudante de um curso de Licenciatura em Matemática em uma universidade privada, localizada em Santa Maria, RS, Brasil, fui bolsista, por três anos e meio, do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID[2]. As experiências vivenciadas por meio desse programa, desencadearam uma profunda motivação pessoal pela profissão docente, o que me impulsionou a investir em minha formação continuada. Meus

[1] Utiliza-se, nos parágrafos que seguem, a primeira pessoa do singular, por se tratar de uma experiência particular da autora.

[2] O programa, de incentivo federal, vinculado ao Ministério da Educação – MEC, promove a inserção dos estudantes no contexto das escolas públicas desde o início da sua formação acadêmica, para que desenvolvam atividades didático-pedagógicas inovadoras, sob orientação conjunta de um docente da universidade e de um docente da escola pública.

ensaios, enquanto acadêmica do curso de licenciatura, conduziram-me a grandes descobertas e reflexões concernentes ao ensino de Matemática de maneira contextualizada e atraente (com produção de significado) aos alunos, pois percebia que havia uma grande necessidade de conexão entre a "Matemática da sala de aula" e a "Matemática do cotidiano".

Ao vivenciar minha graduação como "bolsista PIBID", verifiquei a relação entre teoria e prática e pude perceber a urgência e a veracidade do que meus mestres diziam. Eu comungava com suas ideias, pois acreditava que a maneira como os conteúdos são apresentados ao futuro professor, enquanto aluno de graduação, pode influenciar, diretamente, na maneira como ele os apresentará aos seus alunos, quando for professor regente.

Simultaneamente, tive a oportunidade de participar de um grupo de discussões do curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, na mesma instituição em que cursava a graduação. Por meio dessa experiência, me senti ambientada no contexto do curso de mestrado e isso me impulsionou a continuar investindo em minha formação docente.

Dessa forma, ingressar no mestrado, ao término da graduação, no ano de 2014, apresentou-se como um caminho natural e agradável para que eu pudesse melhorar minha qualificação e lançar-me no limiar do âmbito da pesquisa, pois acredito que é extremamente importante o docente investigar sua prática, vinculando-a às pesquisas referentes à área de estudo para que, então, possa compartilhar os resultados de seu trabalho com a comunidade acadêmica e fazer parte desse ambiente de investigação que rege o ensino e a aprendizagem.

Quando completei o primeiro ano do curso de mestrado, vivenciei a grata satisfação de lançar-me, de fato, em minha carreira docente, agora como professora regente e não, somente, como estagiária ou bolsista, pois no início do ano de 2015, em um momento de muitas descobertas, engajamento e entusiasmo, iniciei minha trajetória profissional na mesma instituição na qual cursei a graduação e (ainda) cursava o mestrado.

Indubitavelmente, esta grandiosa oportunidade, foi resultado de muito desejo e determinação. Ministrar aulas na mesma universidade que tive minha formação inicial e continuada, antes de ser uma oportunidade, foi uma honra, pois, ser colega de meus mestres, despertou uma alegria quase indescritível.

Além disso, estava inundada do sentimento de gratidão àquela instituição que tanto me acolheu, onde tive tantas oportunidades de aprendizado. Dentre outras coisas, sentia que, atuar como docente naquela universidade, seria uma maneira de agradecer e propagar tudo o que, ali, já tinha experienciado.

Lembro-me de meu primeiro dia, da primeira aula, foi numa disciplina do curso de Biomedicina. Da primeira vez que subi as escadas e entrei na sala, como professora regente.

Coincidentemente, esta disciplina ocorreu em uma sala de aula que eu havia estudado na graduação. Foi muito emocionante olhar para aquele corredor, para aquelas escadas, para aquelas pessoas que ali estavam, sob outra perspectiva, a de professora.

Como disse, isso ocorreu em fevereiro de 2015 e, desde então[3], já lecionei disciplinas nos cursos de Administração, Arquitetura e Urbanismo, Biomedicina, Ciências Contábeis, Ciências Econômicas, Ciências da Computação, Engenharia Ambiental e Sanitária, Engenharia de Materiais, Engenharia Biomédica, Engenharia Química, Farmácia, Física Médica, Jogos Digitais, Matemática, Pedagogia, Radiologia e Sistemas de Informação.

No desenrolar de minhas atividades como docente, quando estava finalizando o mestrado, em dezembro de 2015, surgiu a oportunidade de iniciar os estudos no curso de Doutorado em Ensino de Ciências, na Universidade de Burgos, Espanha. Esta etapa, teve início em janeiro de 2016, o que me motivou a aprofundar os estudos concernentes às teorias de Gérard Vergnaud (1990) e David Ausubel (1963). Ademais, em fevereiro de 2017, iniciei minha trajetória no ensino básico, lecionando aulas de Matemática para duas turmas do primeiro ano do ensino médio de uma escola da rede privada de Santa Maria – RS.

Diante disso, tive a possibilidade de exercício da profissão docente concomitante no ensino médio e no ensino superior. Entretanto, um aspecto relevante e curioso da minha experiência como professora no ensino superior, deveu-se à recorrente incumbência de ministrar a disciplina Matemática I, ofertada no primeiro semestre do curso de Administração.

Na universidade onde atuo, os professores de Matemática ministram aulas em diferentes cursos e isso muda a cada novo semestre, conforme a necessidade e disponibilidade de horários, porém, coincidentemente (e felizmente), de 2015 em diante, a disciplina de Matemática I, sempre esteve presente em minha carga horária.

E, justamente em decorrência desta feliz coincidência, floresceu a problemática "como ensinar Matemática para estudantes do curso de Administração?", pois era notório que os conteúdos que eu havia estudado na disciplina de Cálculo 1, enquanto estudante do curso de Licenciatura em Matemática, não poderiam ser abordados, da mesma forma, junto aos estudantes na disciplina de Matemática I, apesar de estas disciplinas envolverem os mesmos conteúdos programáticos (em ambas as disciplinas, os conteúdos listados são: equações, funções, limites e derivadas).

Ressalto esta concepção, pois na primeira vez que me inteirei a respeito da ementa da disciplina, também nas reuniões de curso e em conversas informais, pelos corredores da

[3] O período a que se refere está compreendido entre fevereiro de 2015 e julho de 2020.

instituição com os colegas, a concepção de que a disciplina de Matemática I era equivalente à disciplina de Cálculo 1, fez-se recorrente.

Contudo, ao iniciar o planejamento das aulas e aprofundar os estudos nos livros que estavam referenciados na bibliografia básica da disciplina, foi possível discernir que esta ideia precisaria ser remodelada, pois, ao ministrar aulas de Matemática para administradores em formação, detectei que seria preciso muito mais do que explicar como dominar algumas técnicas de resolução de cálculos, pois isto não faria sentido, por exemplo, na abordagem das situações de análise do ponto de equilíbrio ou do ponto de nivelamento de uma empresa.

Aliás, inicialmente, estes conceitos e esta análise econômica eram desconhecidos em minha área de atuação, contudo eles são essenciais na carreira administrativa e a Matemática é uma ciência que permite entendê-las e aplicá-las ao cotidiano desses profissionais em formação, porém, em muitos casos, antes de ensinar Matemática aos estudantes é preciso, de certa forma, convencê-los de que são capazes de aprendê-la, tamanho o trauma, a angústia e o temor que carregam consigo.

Foi assim que constatei[4] que seria preciso aprofundar meus estudos sobre esses conceitos para, então, abordar os conteúdos da Matemática por meio de situações aplicadas. Não seria possível ensinar, somente, a Matemática pura, como se a área administrativa não existisse, sem levar em consideração que os estudantes eram oriundos desse curso.

Desse modo, esta investigação está posicionada na área da Educação Matemática e intencionou compreender e analisar novas abordagens de ensino e aprendizagem que pudessem contribuir para o estudo da Matemática nos cursos de Administração. Focalizou-se, particularmente, a construção da relação entre conceitos de equações de primeiro grau e sua respectiva representação gráfica, de estudantes de um curso de Administração de Empresas.

Ademais, nesta tese, defende-se a ideia de que pequenas atitudes em relação à maneira como a disciplina de Matemática é trabalhada, principalmente no primeiro semestre, pode tornar as aulas mais atrativas e contribuir para que ocorra a facilitação de uma aprendizagem com atribuição de significados, pois isso é, justamente, um dos entraves no ensino da Matemática e, muitas vezes, ocasiona abandonos e reprovações nos cursos de Administração, visto que, empiricamente, percebe-se que os estudantes deste curso, em geral, têm certa aversão e/ou dificuldades em relação à Matemática.

Mas esta concepção empírica, também é retificada em outros estudos, por diferentes autores, a exemplo de Macedo (2004) e Pinto (2005) e isto denota a necessidade de investigar

---

[4] A partir deste parágrafo, abandona-se o uso da primeira pessoa do singular e utiliza-se a terceira pessoa do singular.

este cenário. Ciente disso, ressalta-se a relevância do ensino de Matemática ser conduzido de maneira contextualizada à área administrativa, pois, conforme apontado por Bezerra (2009) e Luccas (2011), verifica-se que o ensino de Matemática nos cursos de Administração limita-se, muitas vezes, ao uso de fórmulas, não privilegiando outras dimensões consideradas essenciais para o desenvolvimento do pensamento de um futuro administrador de empresas.

Além disso, cabe destacar a importância de o docente escolher bons e variados materiais de apoio para utilizar como referência em suas aulas, pois, assim como pontua Pinto (2005), existem obras que enfatizam, de maneira geral, a repetição de algoritmos, deixando de lado a interpretação e aplicação dos conceitos no contexto econômico e administrativo.

Outrossim, caso esse tratamento seja feito teoricamente, somente por meio de definições e realização de exercícios repetitivos, isso poderá ser somente uma maneira de “vencer” o programa da disciplina (no sentido de explicitar todos os conteúdos sugeridos), não preconizando a atribuição de significados dos estudantes, que logo serão profissionais incumbidos de tomar decisões, gerir empresas e agir por conta de suas próprias interpretações.

Todos esses motivos, concepções e sentimentos, contribuíram para a autora estudar e aprofundar-se na problemática: **“como ensinar Matemática para estudantes do curso de Administração”**. Julga-se esta indagação como algo extremamente pertinente, pois, conforme mencionado, vivencia-se, diariamente, a aversão e o temor que muitos estudantes deste curso têm em relação à Matemática.

Corroborando esta ideia, Peñaloza, Lima & Guerra (2009), apontam que, muitos estudantes de carreira administrativa, além de temer e, até mesmo, odiar Matemática, não percebem a importância desta disciplina em suas áreas de estudo e carreira profissional. Caso esses estudantes façam as disciplinas que envolvem Matemática somente por obrigação, sem entender sua aplicação e importância, poderão tornar-se profissionais com limitações e traumas.

Sob essa égide, Pinto (2005, p. 35), ressalta que “não basta um ensino de Matemática centrado somente na aquisição de procedimentos algorítmicos: é necessário que o ensino se oriente em direção ao desenvolvimento de estruturas conceituais corretas”. Além disso, infelizmente, as metodologias utilizadas, em algumas instituições de ensino têm sido, normalmente, calcadas em abordagens conservadoras, que fundamentam-se em “quatro pilares: escute, leia, decore e repita”, conforme exaltado por Behrens (2000, p. 45).

Essas constatações vão ao encontro das ideias defendidas por Moreira (2011), o qual pontua que nossa educação superior é, eminentemente, voltada para a aprendizagem mecânica[5],

[5] Na aprendizagem mecânica, as novas informações recebidas não interagem com conceitos relevantes na estrutura cognitiva do aprendiz (Moreira, 2006). A aprendizagem mecânica, é pormenorizada no Capítulo 3.

pois o resultado do modelo adotado em nossas salas de aula, forma meros repetidores de aplicações em vez de geradores de conhecimentos. O autor também destaca que, os egressos que, eventualmente, criam conhecimentos, o fazem, apesar, da educação superior que tiveram.

Considerando-se todos estes aspectos, pontua-se que um dos grandes desafios da profissão docente é o fato de que cada estudante apresenta uma maneira individual de aprender e de se expressar, pois o processo de aprendizagem é desigual e depende de muitos fatores os quais, muitas vezes, não são facilmente diagnosticáveis, pois cada estudante, carrega consigo suas experiências anteriores, angústias, curiosidades e dificuldades individuais, que manifestam-se, por meio de falas, expressões, gestos, atitudes na sala de aula, diante do professor, o qual precisa mediar este processo na tentativa auxiliar os discentes a compreenderem os diferentes conceitos de Matemática.

Conforme Anastasiou, Alves (2003), as aprendizagens dependem, tanto do sujeito que apreende, quanto do objeto de apreensão. No entanto, ela destaca que a variabilidade de apreensão de significados pode comprometer o processo de aprendizagem se os conceitos matemáticos forem assimilados por imitação ou repetição de regras.

Pode-se exemplificar, considerando-se a situação hipotética de um estudante que decorou o algoritmo da adição. Com isso, ele poderá resolver uma infinidade de cálculos, automaticamente, mas será que ele entendeu o seu significado operatório? E se for preciso que ele interprete o significado desse algoritmo no contexto de uma situação-problema? Trata-se, provavelmente, de um método puramente quantitativo, no qual o número de contas efetuadas é mais importante do que o entendimento do estudante acerca do objeto de estudo.

Uma aula que se configura dessa maneira, nas palavras de Duval (2014, p. 37), está "[...] no quadro de um ensino que permanece totalmente focado em uma lista de conceitos e procedimentos a serem adquiridos de forma progressiva".

Em virtude de todas estas constatações, emergiram os questionamentos pessoais: como o professor de Matemática poderá dar conta dessa demanda tão delicada, que é ajudar, ao máximo, seus alunos, mediando suas particularidades e conduzindo-os a um caminho de aprendizagem e conhecimento? Será que ocorre a apreensão dos conceitos e os estudantes conseguem apropriar-se dos seus significados para utilizar essa Matemática fora do ambiente da sala de aula?

E, assim, revelou-se o tema desta tese. Além disso, o objetivo floresceu diante da necessidade de enfrentamento de situações vivenciadas dentro e fora da sala de aula como, por exemplo, a desarticulação do ensino de Matemática com a área administrativa. Justifica-se tal desarticulação por dois motivos:

- ✓ O primeiro deles refere-se à escolha e/ou à condução do trabalho docente de maneira literal, quando opta por seguir, fielmente, determinado livro didático (ou material instrucional). Considera-se, a título de exemplo, o livro Stewart (2009), volume 1, (que contempla os conteúdos matemáticos que são listados na ementa da disciplina de Matemática I). Detecta-se que este material apresenta bastante aprofundamento e explicações Matemáticas (e isto é ótimo), contudo não é enfático em situações da área administrativa (pois não é o propósito ao qual se destina). Ressalta-se que o problema não é o livro didático em si, tampouco questiona-se, aqui, sua utilização. O problema (ou a solução) está, justamente, no enfoque que o docente dará à disciplina, dosando o aprofundamento da Matemática e a articulação desta com a área específica;
- ✓ O segundo motivo, na verdade, é consequência do primeiro, pois trata da relação que os estudantes têm com os conteúdos da Matemática. Corriqueiramente, verifica-se relatos, tanto dos estudantes recém oriundos do ensino médio, quanto dos estudantes repetentes na disciplina de Matemática I, que convergem na concepção de que a disciplina será (ou foi) uma experiência negativa, que exigirá (ou exigiu) a memorização de muitas fórmulas e conteúdos sem aplicação, sem utilidade e que eles já não lembram mais (ou preferem não lembrar).

Em ambos os pontos elencados, examina-se que eles estão diretamente ligados ao trabalho docente, ou seja, sob esta ótica específica, o protagonista é o professor. Pode-se, neste momento, parafrasear Moreira (2017), quando refere-se ao *iceberg* da conceitualização[6], tomando-se emprestada a expressão para reportar-se ao trabalho docente, pois ele é como a parte invisível de um *iceberg*, não se define ao momento no qual pode-se visualizar o profissional em ação.

Esta é, apenas, a etapa culminante, que é visível, mas depende das suas escolhas individuais, do seu planejamento, da sua maneira de relacionar-se com os estudantes e tudo isso influencia no processo de ensino (consequentemente no de aprendizagem). No entanto, nada disso é visível, pois deriva da concepção que o professor carrega a respeito da docência, de suas experiências anteriores, de suas referências pessoais, de sua personalidade.

Esta asserção, integra o corpo de resultados da investigação de Pérez, Jaramillo & Asbahr (2020), os quais investigaram a prática profissional de professores e com base nos resultados obtidos, concluíram que os profissionais tendem a criar uma maneira própria de organizar o ensino de conhecimentos matemáticos, baseada em suas próprias necessidades,

[6] Esta concepção refere-se ao processo de conceitualização e é discutida no Capítulo 3, seção 3.2.

experiências e conhecimentos.

Portanto, justifica-se que, para que o professor possa (tentar) contemplar os diferentes estilos de raciocínio, de aprendizagem e (tentar) possibilitar aulas com produção de significado, faz-se imprescindível, seu investimento pessoal e estudo acerca da utilização de metodologias que propiciem aos estudantes interagirem e modificarem suas descobertas, de modo que ampliem sua capacidade intelectual e associem os conceitos estudados nas aulas às suas vivências diárias. Com isso, a Matemática estudada, possivelmente, não ficará enclausurada no caderno, como se pudesse ser resumida à uma fórmula e, consequentemente, poderá tornar-se menos temida por tantos estudantes.

Utilizou-se, no parágrafo anterior, a palavra “tentar”, pois argumenta-se que não é tarefa fácil conduzir os estudantes no caminho de (indícios de) uma aprendizagem significativa. Do contrário, é um trabalho árduo, lento, descontínuo que exige comprometimento e envolvimento do docente desde o planejamento, passando pela execução, até a avaliação, inclusive da própria ação pedagógica.

Ratifica-se essa concepção nas palavras de D`Ambrósio (1989, p. 15), ao ressaltar que

> sabe-se que a típica aula de Matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus, ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julgar importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender Matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor.

A afirmação impulsiona a reflexão sobre a importância de as aulas de Matemática não se darem apenas por meio do emprego da repetição de algoritmos ou de assimilações estáticas de livros didáticos. Dessa maneira, salienta-se que, para articular suas aulas, o professor precisará munir-se de diferentes estratégias, a fim de mediar o processo de aprendizagem de seus alunos.

Ou seja, justamente esse processo tão desigual, que é um desafio para o professor, pode ser, concomitantemente, um fator desencadeador da troca de ideias e da socialização de diferentes conjecturas, o que pode tornar os estudantes mais engajados em seu próprio processo de aprendizagem educacional pois, quanto mais situações forem vivenciadas, mais chances eles terão de construir sínteses mais bem elaboradas. Esta ideia está amparada de maneira contundente por Freire (2014, p. 134), o qual discorre que

> Ensinar não é transferir conteúdo a ninguém, assim como aprender não é memorizar o perfil do conteúdo transferido no discurso vertical do professor, a aprendizagem não se dá por transferência de conteúdo, mas por interação, que é o caminho da construção.

Diante de todas essas constatações e da importância do ensino de Matemática na formação do futuro administrador, defende-se a necessidade de adotar práticas metodológicas que contribuam para a promoção de indícios de uma aprendizagem significativa da relação entre equações algébricas de primeiro grau e gráficos, criando-se oportunidades para que os estudantes desenvolvam o seu raciocínio matemático neste campo de conhecimentos ou dominem progressivamente este campo conceitual.

Afinal, é imprescindível que um profissional da área administrativa saiba ler e interpretar dados e informações apresentados em diferentes registros (linguagem escrita, linguagem algébrica, linguagem gráfica), além de ser capaz de tomar decisões com base em equações Matemáticas que simulam situações reais (o que é denotado como pesquisa operacional na área administrativa).

Neste ponto, argumenta-se acerca do indubitável ofício de mediador do professor, pois, cabe ao profissional, o minucioso papel de selecionar situações (ou tarefas) a serem propostas em sala de aula, trabalhando-se, tanto quanto for possível, com situações adaptadas ao cotidiano no qual os estudantes encontram-se inseridos, de modo que o saber acadêmico esteja em sintonia com as exigências do mundo contemporâneo.

1.3 Objetivos

Diante das problemáticas discutidas e como forma de delinear as ações para desenvolver esta pesquisa, estabeleceu-se os seguintes objetivos:

1.3.1 Objetivo geral

Verificar em que medida ocorrem indícios de aprendizagem significativa progressiva de conhecimentos na relação de equações e gráficos em estudantes do primeiro semestre do curso de Administração, mediante materiais de apoio e metodologias de ensino fundamentadas na Teoria da Aprendizagem Significativa e na Teoria dos Campos Conceituais.

1.3.2 Objetivos específicos

- identificar os subsunçores dos estudantes em relação ao tema equações e gráficos por meio de um teste diagnóstico;

- elaborar uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS)[7], por meio de situações de ensino de equações e gráficos, direcionadas ao progressivo domínio do respectivo campo conceitual, por parte dos estudantes;

- investigar como os estudantes utilizam invariantes operatórios para resolver situações-problema deste campo conceitual, aplicadas à área administrativa;

- analisar se há evidências de aprendizagem significativa neste processo.

1.4 Estrutura e visão geral da pesquisa

Nos itens precedentes, apresentou-se as motivações pessoais da autora e os objetivos da presente pesquisa. Nesta seção, de caráter introdutório, objetiva-se fornecer um panorama geral da pesquisa, a fim de informar o leitor sobre o que será abordado nos capítulos subsequentes. Além, disso, ao final dela, apresenta-se um "diagrama V" da pesquisa, sob a égide da autora.

Desse modo, estruturou-se o relato desta pesquisa em oito capítulos. No primeiro deles, apresenta-se uma preleção dos assuntos que são aprofundados nos capítulos posteriores e disserta-se acerca dos objetivos geral e específicos da pesquisa. Além disso, denotam-se asserções e motivações pessoais da autora no que se refere à sua trajetória acadêmica e profissional.

No segundo capítulo, detalha-se a busca investigativa por pesquisas que abordam o tema ensino e aprendizagem de Matemática nos cursos de Administração. Os objetivos principais desse levantamento foram descobrir como a Matemática vem sendo abordada em cursos de Administração (perspectivas e caminhos metodológicos), quais os lugares ocupados pela Matemática no contexto dos cursos de Administração e/ou na formação dos estudantes e quais as possíveis implicações destes estudos para qualificar esta pesquisa.

No terceiro capítulo, evidencia-se a base teórica, fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS)[8], de Ausubel (1963) e na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Vergnaud (1990). Apresenta-se, primeiramente, os aspectos individuais de cada uma, suas minúcias e conceitos específicos, que foram levados em conta nesta pesquisa. Na sequência, denota-se um panorama no qual as duas teorias foram entrelaçadas e serviram de aporte para alcançar o objetivo geral desta investigação. Além disso, delineia-se o campo

---

[7] Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS – são sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica (Moreira, 2012b).

[8] Com o propósito de abreviação e facilitação da leitura, a partir deste parágrafo, serão utilizadas, somente, as siglas TAS, para referir-se à Teoria da Aprendizagem Significativa e a sigla TCC, para referir-se à Teoria dos Campos Conceituais.

conceitual das equações algébricas de primeiro grau, que é o campo de conhecimentos abordado neste trabalho.

No quarto capítulo, explicita-se a metodologia de pesquisa, com o detalhamento do contexto da pesquisa, do conteúdo programático da disciplina, dos instrumentos de coleta de dados e de como foi feita a análise dos registros dos estudantes.

No quinto capítulo, explana-se o desenho de investigação, por meio de um protótipo do quadro de atividades planejadas e desenvolvidas no estudo 2, (nomeado de implementação didática). Ademais, antecipa-se uma visão geral de como ocorreu o trabalho no contexto da sala de aula e como a UEPS permeou o desenvolvimento das atividades.

No sexto capítulo, elucida-se a discussão dos resultados verificados no estudo 1, (chamado de estudo piloto), que permitiram direcionar e ajustar as situações no contexto da investigação. Isso ocorreu por meio do amadurecimento de ideias, por parte da autora, diante das teorias adotadas na investigação e da submissão das situações aplicadas para análise de três professores especialistas (um deles da área de Administração e dois da área da Matemática), que sugeriram caminhos para aprimorar a pesquisa, por meio de alguns ajustes a serem feitos, antevendo o estudo 2.

No sétimo capítulo, confere-se os resultados obtidos no estudo 2, desde a busca pelos subsunçores dos estudantes, até o encontro final integrador, perpassando-se e minuciando-se todas as etapas da UEPS.

No oitavo capítulo, disserta-se a respeito das considerações finais e prolongamentos da pesquisa, no qual discute-se as asserções de valor em relação ao conhecimento produzido e, na sequência, verifica-se as referências da pesquisa, além dos apêndices, que contêm todos os documentos elaborados (termo de consentimento, questionário socioeconômico e todas as atividades da UEPS), tanto do estudo 1, quanto do estudo 2.

Atentando-se a este capítulo, de caráter introdutório, ressalta-se que foi elaborado um “diagrama V” da pesquisa, com o intuito de facilitar a compreensão acerca de sua estrutura conceitual e metodológica por parte da autora, pois conforme pontuado por Moreira (2009), este instrumento permite ao próprio pesquisador, explicitar a estrutura do processo de produção do conhecimento.

Esta construção mostrou-se como um instrumento muito benéfico, pois oportunizou a compreensão e a visualização das particularidades da pesquisa para que, então, as ponderações fossem colocadas em prática, ou seja, este esquema foi construído na fase inicial, com o intuito de clarificar o entendimento da autora acerca da própria pesquisa e de como ocorreria o processo de interação entre o “pensar” e o “fazer” ao longo da investigação, para responder ao objetivo geral da pesquisa.

Desse modo, por meio da Figura 1, ilustra-se um apanhado da tese, na concepção da autora, por meio do "diagrama V" (ou V epistemológico de Gowin).

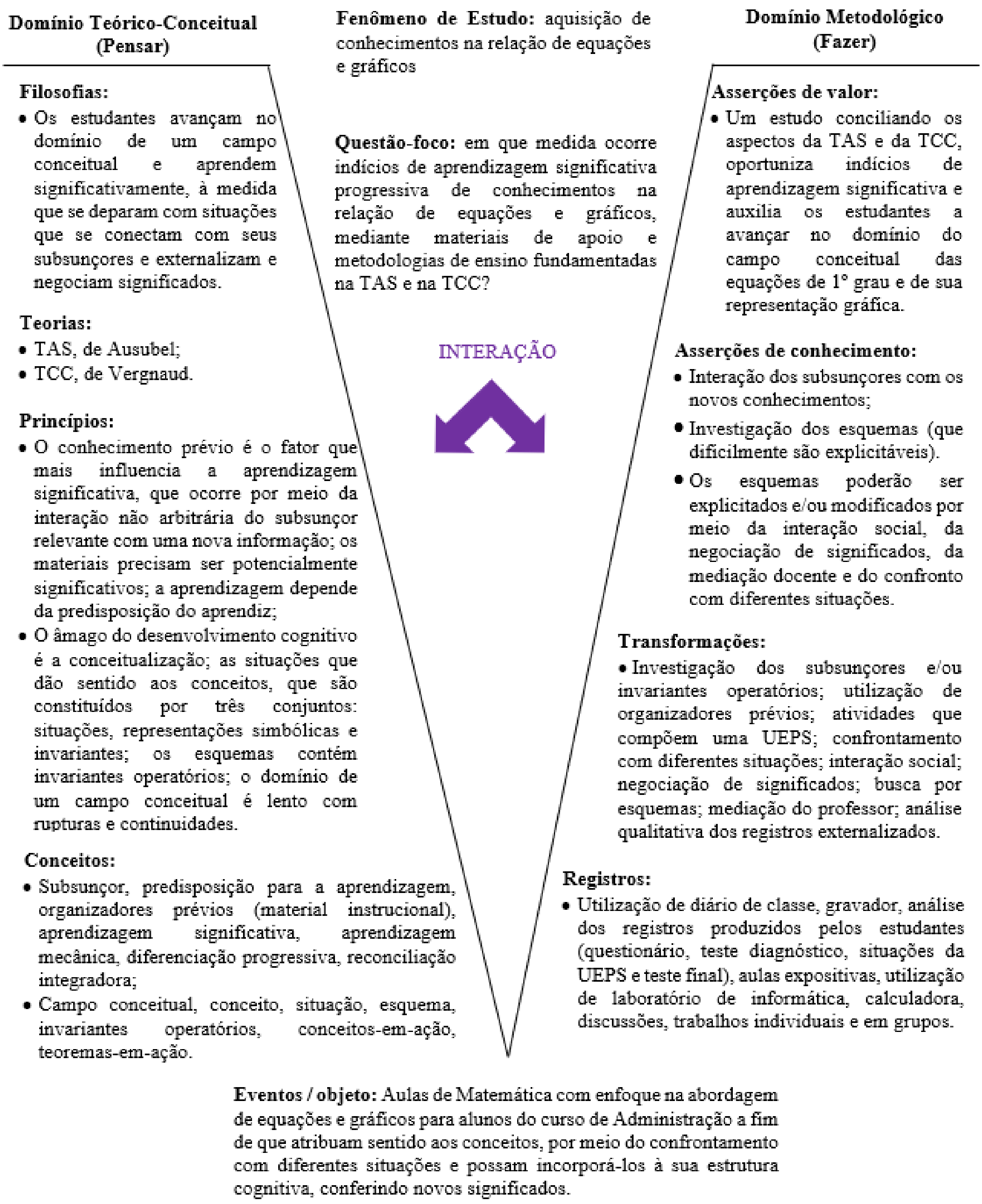


Figura 1: diagrama V da pesquisa, sob a visão da autora.

Fonte: a autora.

CAPÍTULO 2
REVISÃO DA LITERATURA: UM OLHAR PARA AS PESQUISAS PROPOSTAS NO CAMPO DO ENSINO DE MATEMÁTICA APLICADA À ADMINISTRAÇÃO

Pontua-se que os avanços das pesquisas, nas mais diversas áreas, provocam a produção contínua de novos e numerosos estudos acadêmicos. Contudo, esse acúmulo de produções, muitas vezes, pode gerar uma desorganização de informações acerca dos conhecimentos já divulgados. Sob esta concepção, entende-se que a revisão da literatura, possibilita a verificação das tendências já elaboradas e a observação de lacunas que podem, ainda, ser exploradas.

Desse modo, a revisão que aqui propõe-se, visou examinar os estudos que já foram realizados alusivos ao ensino de Matemática aplicada à área administrativa, buscando resultados de pesquisa que pudessem contribuir com o objetivo do presente estudo. A partir dessa ação, tencionou-se desenvolver um trabalho inovador, que colabore para o processo de produção do conhecimento nesta área.

Para isso, organizou-se os trabalhos catalogados de maneira que fosse possível identificar os aspectos já explorados em trabalhos anteriores, a fim de contribuir para o direcionamento de uma nova pesquisa, que tenha relevância para professores de Matemática que ministram aulas em cursos de Administração.

2.1 Metodologia para a busca investigativa

Com o propósito de inteirar-se a respeito do que vem sendo pesquisado na área, para estabelecer um panorama referente ao papel da Matemática nos cursos de Administração, realizou-se uma revisão de literatura compreendida entre os anos de 1995 e 2020[9], na busca por pesquisas que abordam o tema.

As curiosidades principais que guiaram esta revisão foram: como a Matemática vem sendo abordada nos cursos de Administração (perspectivas e caminhos metodológicos), quais os lugares ocupados pela Matemática no contexto dos cursos de Administração e/ou na formação dos estudantes e quais as possíveis implicações destes estudos para qualificar esta pesquisa.

[9] Inicialmente, o período estimado para a revisão de literatura era entre 1995 e 2019 (ano no qual fez-se a implementação didática das atividades da tese), contudo estendeu-se, em um semestre, o período, pois as análises das atividades ocorreram no primeiro semestre do ano de 2020 e considerou-se pertinente incluir este período na investigação.

O critério adotado para a seleção das obras foi averiguar o título, o resumo e as palavras-chave. Em português, as principais expressões pesquisadas foram "Matemática e Administração", "ensino de Matemática na Administração", "Matemática para futuros administradores" e "Matemática aplicada à Administração" e, em inglês, as expressões pesquisadas foram "*Administration and Mathematics*", "*teaching Mathematics for Administration*" e "*Management and teaching Mathematics*".

Os trabalhos foram encontrados por meio de consultas ao banco de dissertações e teses da Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior – CAPES[10], da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD[11], em um sítio espanhol (*Dialnet*), em seis revistas científicas brasileiras (Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT, Revista do Professor de Matemática – RPM, Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, Revista Novas Tecnologias na Educação – RENOTE, Revista de Educação Matemática – ZETETIKÉ e Revista Ciência & Educação).

Além disso, revisou-se seis revistas científicas internacionais (*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* – RELIME, *Science Education*, *Research in Mathematics Education*, *Educational Studies in Mathematics*, *For the Learning of Mathematics* e *International Journal of Science and Mathematics Education*) e anais de eventos de Aprendizagem Significativa (Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa – ENAS, Encontro Regional de Aprendizagem Significativa – ERAS e Encontro Internacional de Aprendizagem Significativa – EIAS).

Entretanto, julgou-se pertinente investigar, também, os bancos de dados voltados ao público da área de Administração de Empresas. Desse modo, foram consultados artigos do Encontro Nacional da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração – ENANPAD e do Encontro Nacional da Associação Nacional dos cursos de graduação em Administração – ENANGRAD.

Como resultado desta análise, os trabalhos selecionados foram separados em dois grandes grupos, conforme o seu enfoque: 1) Pesquisas com atividades práticas de Matemática junto à estudantes de cursos de Administração; 2) Pesquisas com estudos teóricos sobre ensino de Matemática em cursos de Administração. Considerou-se esta divisão, pois verificou-se, de maneira geral, estas duas diferentes linhas de abordagem do tema.

De maneira mais específica, detectou-se que 10 pesquisas discutiam estratégias de ensino e propostas metodológicas direcionadas ao trabalho em sala de aula, com aplicação,

[10] CAPES: http//www.capes.gov.br/
[11] BDTD: http//bdtd.ibict.br/

análise e discussão de atividades práticas de Matemática junto à estudantes do curso de Administração. Estas 10, foram contabilizados no grupo 1. As demais 16 pesquisas exploravam levantamentos bibliográficos e/ou contribuições por meio de estudos teóricos para aprofundar-se na temática e, por esta diferenciação, foram contabilizadas no grupo 2.

Disso, depreendeu-se que 26 trabalhos foram selecionados para análise por se enquadrarem, de alguma forma, nos objetivos da revisão de literatura. Destes, 14 são artigos, nove são dissertações de mestrado e três são teses de doutorado (não foram identificados trabalhos apresentados em eventos de aprendizagem significativa). Todos eles estão denotados por uma sigla, no Quadro 1, conforme o seu tipo, sendo A – artigo, D – dissertação e T – tese.

Por meio desta revisão, pode-se evidenciar elementos que cooperaram para justificar a importância desta investigação. Além disso, foi possível situar esta pesquisa no contexto acadêmico e contribuir para análise dos resultados e argumentações futuras.

Apresenta-se a seguir, em ordem cronológica de publicação, o Quadro 1, com os trabalhos selecionados na revisão de literatura.

Quadro 1: produções selecionadas e distribuídas conforme o seu grupo.

GRUPO	TÍTULO	TIPO	AUTOR(ES)	FONTE / ANO
1	Tecnologia e prazer: O ensino da Matemática aplicada a Administração.	D	Macintyre, A. B. L.	Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFSC. / (2002)
	Novo enfoque da disciplina Matemática e suas aplicações, no curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista-Unip.	T	Paulette, W.	Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102087. / (2003)
	A aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos e seus reflexos em alunos dos cursos de Administração de Empresas.	D	Macedo, L. R. D.	Pontifícia Universidade Católica do Paraná. http://www.biblioteca.pucpr.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=187. / (2004)
	O ensino do conceito matemático de função por meio de *softwares* gráfico-visuais: Criação de desenhos digitais por alunos iniciantes do curso de Administração.	D	Pinto, F. R.	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. / (2009)
	Modelagem Matemática e ambiente de trabalho: Uma combinação pedagógica voltada para a aprendizagem.	A	Ferreira, D. H. L. & Jacobini, O. R.	Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 1(1), 9-26. / (2010)
	Resolução de problemas: Uma metodologia no primeiro período de um curso de Administração: Possibilidades e limitações na prática educativa em Matemática.	D	Sosa, J. M. B.	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFJF. / (2011)

	A problematização como metodologia de ensino para aprendizagens significativas na Matemática: Um estudo de caso em curso de Administração.	D	Zimmer, L. A.	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES. / (2011)
	O ensino introdutório de Matemática em cursos de Administração: Construção de uma proposta pedagógica.	T	Luccas, S.	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL. / (2011)
	O *software Maple* como ferramenta auxiliar no processo ensino-aprendizagem de cálculo para alunos do curso de Administração.	A	Zarpelon, E., Germano, E. D. T., Silva, S. D. C. R., Resende, L. M. M., & Neves, M. C. D.	*Revista Espacios 37(33)*. / (2016)
	Los estudios de caso: Enseñanza de las Matemáticas en una escuela de Administración.	A	Pérez, D. A., Jaramillo, D. V., & Asbahr, F.	*Praxis & Saber*, *11*(26), e10093-e10093. / 2020
2	É relevante o estudo da Matemática na formação do administrador contemporâneo?	A	Santos, A. K., Capelari, R., & Sperandio, D.	Enangrad, 9. http://www.angrad.org.br/. / (1998)
	Uma nova forma de ensinar Matemática para futuros administradores: uma experiência que vem dando certo.	A	Biaggi, G. V.	Revista de Ciências da Educação, XXXX, 20, 103-113. / (2000)
	Um estudo sobre o referencial matemático dos alunos do curso de Administração de Empresas da PUCPR.	D	Araújo, C. L. J.	Departamento de Educação. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. / (2002)
	Fatores críticos no ensino da Matemática nos cursos de Administração de Empresas: As dificuldades apresentadas pelos alunos ingressantes e as suas implicações na aprendizagem.	A	Maggi, L.	Enangrad, 13. http://www.angrad.org.br/. / (2005)
	Concepções e práticas de professores de Matemática de um curso de Administração.	D	Pinto, A. L. M. F. A.	Programa de Pós-Graduação da PUC São Paulo. / (2005)
	Redescobrindo as funções elementares nos cursos de Ciências Administrativas.	D	Ribeiro, R.	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. / (2005)
	Mathematics anxiety and attitude level of students of the faculty of economics and Business Administrator: The Turkey model.	A	Yenilmez, K., Girginer, N., & Uzun, O.	*International Mathematical Forum*, 2(41), 1997-2021. / (2007)
	Actitudes en relación a la Matemática en estudiantes de Administración.	A	Peñaloza Fuentes, V. L., Lima, R., & Guerra, D. D. S.	Psicologia Escolar e Educacional, 13(1), 133-141. / (2009)
	Desafios e dilemas de professores de Matemática atuando em cursos de Administração.	T	Bezerra, F. J. B.	Programa de Pós-Graduação em Educação da UNICAMP. / (2009)
	O papel da matematização em um contexto interdisciplinar no ensino superior.	A	Luccas, S. & Batista, I. D. L.	Ciência & Educação (Bauru), 17(2), 451-468. / (2011)

	A Matemática em cursos de Administração: Seu papel.	A	Roncaglio, V. & Nehring, C. M.	Revista da Universidade Unijui. https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/... /article/.../1795. / (2013)
	A educação Matemática no curso de graduação em Administração de Empresas: Diagnósticos e propostas.	A	Romeu, W. & Bianchini, B. L.	Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul, 2(1). / (2014)
	A importância da Matemática para o administrador.	A	Schneider, E. & Parente, A.	Maiêutica-Ensino de Física e Matemática, 3(1). / (2015)
	Mobile learning: Uma nova forma de aprender Matemática nos cursos de Administração.	D	Silva, R. G. T.	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade estadual da Paraíba (UEPB). / (2016)
	Determinants of Maths performance of first-year Business Administration and Economics students.	A	Laging, A. & Voßkamp, R.	*International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(1), 108-142. / (2017)
	Anxiety about mathematics among university students: a multi-dimensional study in the 21st century.	A	Cumhur, M. & Tezer, M.	*Cypriot Journal of Educational Sciences*, *14*(2), 222-231. / (2019)

Fonte: a autora.

2.2 Análise das produções selecionadas

Das 26 obras catalogadas na revisão de literatura, evidenciou-se que, quer seja na perspectiva do desenvolvimento de atividades práticas de Matemática na sala de aula (grupo 1), quer seja no estudo sobre preocupações de docentes de Matemática e/ou de discentes do curso de Administração (grupo 2), todas elas revestem-se de um propósito básico que é o de entender e buscar ressignificar o papel do ensino da Matemática no contexto do curso de Administração de Empresas.

Inclusive, considera-se primordial começar esta análise destacando a predominância de um fio condutor em (praticamente) todos os trabalhos. Trata-se de duas ideias principais:

- ✓ As dificuldades e lacunas no aprendizado de Matemática básica que os estudantes do curso de Administração apresentam ao ingressar na graduação;
- ✓ A necessidade de trabalhar a Matemática de maneira contextualizada à área específica

do curso[12];

Atreve-se a afirmar que, caso fossem levados em consideração somente estes dois aspectos, poder-se-ia categorizar todos os trabalhos em um único grupo, pois todos os autores ratificam este cenário e, sobretudo, esta preocupação. Mas, é claro que também há pontos que diferenciam e tornam cada obra selecionada única, com suas temáticas específicas e que precisam ser esmiuçadas.

Por este motivo, propõe-se uma discussão e análise das produções, conforme os itens que guiaram esta revisão. Enuncia-se que, nos tópicos 2.2.1 e 2.2.2, serão discutidas as particularidades e desdobramentos de cada obra averiguada para, ao final deste capítulo, no item 2.2.3, tais encaminhamentos culminarem num apanhado de implicações e direcionamentos para a investigação.

2.2.1 Como a Matemática vem sendo abordada nos cursos de Administração: perspectivas e caminhos metodológicos

Neste tópico, considerou-se as pesquisas que se enquadram no grupo 1, pois, como dito, todas elas contêm atividades práticas de Matemática aplicadas em salas de aula de cursos de Administração de Empresas. As tendências aqui descritas, permitiram verificar quais as principais preocupações, dificuldades, conteúdos, estratégias e linhas de investigação que foram e vem sendo utilizadas nesse contexto ao longo dos anos.

O primeiro estudo evidenciado, foi o de Macintyre (2002), que explorou a contextualização do ensino da Matemática aplicada à realidade do administrador em uma universidade de Belo Horizonte. Ela pontuou que o aprendizado de Matemática deveria vir acompanhado de uma sensação de prazer, pois quando este sentimento está ausente, a aprendizagem torna-se algo meramente instrucional. Além disso, defendeu que não há verdadeiro processo de aprendizagem sem conexão com as expectativas e a vida dos aprendentes.

Para realizar sua investigação, a autora utilizou a metodologia qualitativa aliada à modelagem Matemática para estudar funções, cálculo de imposto de renda, aplicação de determinados capitais a juros simples e a juros compostos e um problema de uma prefeitura que dispunha de uma determinada verba para aplicar em construção de casas populares ou em pavimentação de ruas. Também aplicou questionários aos estudantes para conhecer sua

[12] Somente uma das obras selecionadas não aborda a Matemática sob esta perspectiva.

realidade.

Revelou vivenciar nas suas salas de aula, os olhares de temor e confissões de desânimo dos alunos ao tomarem conhecimento da matéria a ser lecionada por ela e que eles não demonstravam compreender a marcante presença da Matemática na vida de um administrador. Direcionou, como solução para esta ansiedade, o uso de novas tecnologias, pois averiguou que elas podem enriquecer os ambientes de aprendizagem.

Os resultados do seu estudo, sugeriram que a modelagem Matemática, aliada à utilização do *software Excel*, permitiu a valorização da relação entre a teoria e a prática profissional, pois transformou a Matemática "fria e acabada" (grifo da autora), baseada apenas nos livros didáticos, em uma "ciência viva" (grifo da autora), que se desenvolve a cada modelo matemático elaborado. Ademais, discerniu que os alunos apresentaram um melhor desempenho, tendo como resposta um maior nível de aprovação além de melhorarem seu relacionamento com a disciplina. A autora concluiu que, por meio dessa prática, modificou sua postura profissional, pois ela se tornou menos autoritária e mais companheira de seus alunos.

Um ano após este estudo, outra pesquisa com intenções semelhantes fora realizada por Paulette (2003), que elaborou e desenvolveu um novo enfoque para a disciplina Matemática I, com ênfase em situações Matemáticas aplicadas à área de Administração, em uma universidade de São Paulo. A metodologia escolhida pela autora foi a pesquisa de Romberg[13], na perspectiva da resolução de problemas. Além disso, ela utilizou questionários para conhecer o perfil dos discentes e dos docentes.

No questionário aplicado aos estudantes, verificou que eles não possuíam conhecimentos elementares básicos necessários para acompanhar a disciplina nos moldes tradicionais do ensino que, até então, eram vigentes na instituição. No questionário aplicado aos professores, detectou que os conteúdos eram apresentados aos estudantes por meio de definições, propriedades e exercícios, o que exigia deles, apenas repetições das técnicas apresentadas.

Em decorrência de seu estudo, ela propôs mudanças na ementa e no conteúdo programático da universidade. Além disso, verificou que a disciplina de Matemática se tornou mais atraente aos estudantes e denotou a importância de o professor explorar problemas adequados a situações da vida real, pois isso despertou nos discentes, o interesse pela disciplina. Também evidenciou que, nos trabalhos em grupo, os alunos aprimoraram sua capacidade de

---

[13] Thomas A. Romberg, é matemático e professor emérito de Curriculum and Instruction of Wisconsin Center for Education Research, University of Winsconsin, Madison, USA. Essa metodologia propõe 10 atividades a serem cumpridas, não necessariamente na ordem por ele sugerida.

interpretar textos, de discutir ideias, de propor soluções e que essas atitudes os proporcionaram assumir uma postura mais crítica, participativa e reflexiva.

Também com um intervalo de um ano, um contexto semelhante foi escolhido como tema para a pesquisa de Macedo (2004), o qual verificou se a prática pedagógica adotada pelos professores pode vir a melhorar a aprendizagem da Matemática nos cursos de Administração de uma faculdade do Paraná.

O autor aplicou questionários para estudantes e professores. No questionário respondido pelos professores, verificou que nem todos os profissionais que ministram aulas de Matemática nesse curso, têm formação específica em Matemática. O autor ressaltou que estes docentes podem ser muito bons profissionais nas suas áreas específicas, mas não devem ter tido contato com as disciplinas de preparo de docentes, podendo não ter a habilidade pedagógica suficiente para minimizar e responder as dúvidas dos alunos. Além disso, possivelmente, não desfrutam da formação sólida necessária no campo da Matemática.

Para além desse aspecto, os demais resultados obtidos em ambos os questionários foram muito semelhantes, pois professores e estudantes foram incisivos em ressaltar a importância de um trabalho calcado na aplicabilidade da Matemática à área de Administração. Um dos aspectos mais ressaltados foi o impacto do trabalho do professor. Os estudantes mencionaram que a prática pedagógica do professor pode influenciar no relacionamento em sala de aula, que isso pode ser um fator de motivação e de incentivo para diminuir o temor pela disciplina. Eles enfatizaram que é importante o professor ser amigo dos alunos, sem perder a autoridade, para que se construa uma parceria no caminho do conhecimento e não a mera reprodução de conhecimentos para alunos ouvintes e repetidores de procedimentos muitas vezes inúteis, assim denotados pelos estudantes participantes da pesquisa.

Houve a elaboração de uma atividade para encontrar o ponto de equilíbrio de uma empresa, de modo que os estudantes escolheram uma empresa, recolheram os seus dados (produtos vendidos e tabela de preços) e os levaram para a sala de aula. Por meio desses dados, foram abordadas e modeladas as funções custo, lucro e receita da referida empresa o que culminou na sua representação gráfica. Conforme evidenciado pelo autor, esta proposta de trabalho inovadora para a determinação do ponto de equilíbrio de uma empresa, além de aumentar a motivação dos estudantes em estudar a disciplina, mostrou a aplicabilidade das funções Matemáticas básicas no cotidiano de um administrador de empresas.

Quatro anos mais tarde, foi divulgado o trabalho de Pinto (2009), que estudou a apreensão do conceito matemático de função por meio da utilização de um *software* gráfico-visual e a possibilidade da criação de desenhos digitais que pudessem ser associados, a partir da observação de suas formas, aos conceitos do dia a dia das empresas, tais como custo, receita, lucro, oferta, demanda e ponto de equilíbrio.

Ancorou sua pesquisa na perspectiva do Construcionismo de *Papert* para coletar os dados de três turmas de alunos iniciantes do curso Administração de uma faculdade de Belo Horizonte. Aplicou questionários estruturados, representados por uma escala (*Likert*) de atitudes frente à Matemática, um teste de sondagem e um pós-teste. Analisou e apresentou os dados por meio de um estudo quantitativo.

No teste de sondagem, constatou que os alunos apresentavam uma série de defasagens relativas aos conteúdos matemáticos necessários para a sequência do curso. Julgou pertinente atuar na base Matemática do aluno e decidiu estudar a possibilidade de tal aprendizagem acontecer quando utilizada a informática.

A partir dos depoimentos dos estudantes nos questionários, com relação ao ensino de Matemática que tiveram quando ainda eram estudantes da educação básica, verificou que, grande parte deles, nunca havia utilizado um programa de computador para o estudo da Matemática. Também evidenciou que, vários deles, chegaram ao ensino superior com a concepção de que a Matemática não passava de um amontoado de cálculos e de regras que lhes serviriam como suporte. Mencionou que tal fato poderia explicar a pouca maturidade – em Matemática – daqueles estudantes. Além disso, destacou que os alunos expressaram ainda não compreender bem o papel da disciplina de Matemática no seu curso superior.

Os resultados obtidos no pós-teste, demonstraram que a visualização, associada à utilização de *software*, produziu melhora na aprendizagem da Matemática, tendo favorecido, especialmente, o entendimento do conceito de função, tornando possível a construção de desenhos digitais plenos em significados, alguns destes relacionados ao cotidiano empresarial.

Tal como Macintyre (2002), Ferreira & Jacobini (2010), abordaram a modelagem Matemática como opção metodológica em uma pesquisa junto à disciplina de Matemática em um curso de Administração de uma universidade de São Paulo, onde realizaram um estudo qualitativo. Outro aspecto convergente destes dois estudos é que Ferreira & Jacobini (2010), também verificaram que muitos estudantes apresentavam severas dificuldades e mencionaram sentir medo de cursar a disciplina (os autores citaram a matefobia e a ansiedade Matemática).

Seu objetivo foi analisar as contribuições pedagógicas quando se faz uso da associação entre conteúdos curriculares e o desenvolvimento de aplicações, por meio de projetos de modelagem, em situações do cotidiano do aluno, principalmente quando essas situações se relacionam com suas atividades profissionais, atuais ou futuras.

As atividades permitiram estabelecer uma relação entre os conteúdos matemáticos abordados na disciplina com alguns problemas vinculados à realidade de um administrador. Como principais resultados, destacaram a potencialidade de trabalhos em grupo em relação à contribuição que cada integrante pode dar, tanto para o desenvolvimento do projeto, quanto no auxílio aos seus colegas de classe e as percepções dos estudantes acerca da relevância da disciplina, tanto para a sua formação intelectual, quanto para a sua valorização profissional.

Mencionaram que as dificuldades em relação à aprendizagem dos conteúdos matemáticos, decorrem, em grande parte, da formação inadequada desses alunos em seus estudos precedentes, comuns entre alunos nas universidades brasileiras, sobretudo em cursos noturnos. Essas dificuldades, aliadas ao cansaço dos estudantes que, geralmente, trabalham durante o dia, contribuem para a dispersão deles na sala de aula, e esta, por sua vez, prejudica, ainda mais, o processo de aprendizagem. Defenderam que romper esse círculo vicioso é um dos desafios da Educação Matemática.

Justificaram que o envolvimento do estudante em questões que dizem respeito ao seu cotidiano profissional, principalmente se tratando de um aluno ingressante na universidade, favorece a sua imersão em discussões que extrapolam as questões Matemáticas e contribuem, de um lado, para que ele venha, ainda que precocemente, envolver-se com conceitos que vão acompanhá-lo pela sua vida no ambiente de trabalho.

Além do já mencionado trabalho de Paulette (2003), o estudo de Sosa (2011), também contou com a metodologia de ensino de resolução de problemas. O autor utilizou exemplos e aplicações que simulassem a realidade da atividade profissional de um administrador, em uma turma do primeiro semestre do curso de Administração de uma faculdade em Juiz de Fora.

Por meio de uma pesquisa-ação, elaborou e aplicou situações-problema envolvendo os conceitos de função linear, quadrática, discreta, contínua, função custo, lucro, receita, demanda e oferta, seguindo os passos da metodologia de resolução de problemas. Inclusive, ao longo de seu estudo, o autor manifesta que algumas das situações da sua pesquisa foram adaptadas do trabalho de Paulette (2003).

Os resultados apontaram para uma mudança na dinâmica da sala de aula. O autor confirmou que os estudantes assumiram uma postura mais autônoma e que as aulas se tornaram mais envolventes, pois os alunos exprimiram que se sentiram mais valorizados.

No mesmo ano, revelou-se a obra proposta por Zimmer (2011). A autora denotou que, em decorrência das dificuldades evidenciadas no exercício docente, optou por adaptar o ensino de Matemática voltado à compreensão das relações entre conteúdos curriculares e a realidade profissional dos estudantes do curso de Administração de uma universidade do Rio Grande do Sul.

Para isso, considerou as habilidades e competências exigidas pelo Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes – ENADE[14] – e investigou como graduandos do curso de Administração percebem as relações entre os conteúdos curriculares que se referem ao conceito de funções e as práticas inerentes ao cotidiano profissional.

O trabalho teve um enfoque qualitativo, por meio de um estudo de caso. A autora utilizou a TAS e a resolução de problemas para desenvolver atividades contextualizadas a respeito de custo, lucro e receita. No teste diagnóstico, investigou os conhecimentos prévios dos estudantes acerca da percepção das relações entre a Matemática e o exercício profissional. Os resultados apontaram uma incipiente percepção que, ao longo do estudo, evoluiu conceitualmente.

Percebeu uma discrepância entre os resultados da investigação formal (cálculos e resoluções expostas nas provas e trabalhos formais) e as manifestações orais e informais apresentadas nos diálogos de sala de aula. Evidenciou a importância de trabalhos em grupo, percebeu uma maior interação entre professora e estudantes e destacou que houve mudança na sua prática docente.

Ainda neste mesmo ano, consolidou-se o estudo de Luccas (2011), que propôs investigar a construção e adequação de uma proposta pedagógica de ensino introdutório de Matemática, para o curso de Administração de uma instituição particular do Paraná, mediante uma abordagem qualitativa que se fundamentou nos aportes teóricos da matematização, segundo uma ação interdisciplinar que permeia a dinâmica estabelecida pelo desenvolvimento do conhecimento matemático em meio às contexturas de redução e de complexidade.

Para realizar tal pesquisa, a autora realizou um estudo epistemológico da natureza do conhecimento matemático e da Administração destacando uma relação interdisciplinar entre ambos (modelos matemáticos contextualizados) e atribuiu, ao modelo metodológico adotado, o nome de abordagem metodológica para uma integração conciliadora. Entrevistou cinco professores (das áreas de Matemática e Administração) e solicitou a análise prévia das atividades antes de serem aplicadas aos estudantes. Estes profissionais destacaram que o ponto forte do trabalho foi a ação interdisciplinar entre Matemática e Administração empregada da proposta pedagógica.

Utilizou a análise textual discursiva ao coletar e analisar os dados obtidos junto aos estudantes, os quais apontaram que as contribuições didático-metodológicas do trabalho favoreceram a superação do senso comum conteudista, frequentemente observado nas

---

[14] É uma prova que avalia os cursos de Ensino Superior brasileiros. A aplicação desta prova é de responsabilidade do INEP, uma entidade federal vinculada ao Ministério da Educação / MEC.

disciplinas de Matemática voltadas para o público de Administração. Além disso, evidenciou que há uma precária formação Matemática dos estudantes na área da Administração.

Cinco anos após este estudo, Zarpelon, Germano, Silva, Resende & Neves (2016), realizaram um estudo qualitativo para verificar a concepção dos acadêmicos do curso de Administração de uma universidade do Paraná, a respeito de limites de funções de uma variável real e avaliaram em que medida a utilização do *software Maple* poderia contribuir e/ou facilitar a aprendizagem de tal assunto, especialmente no que concerne à análise gráfica.

Um levantamento feito junto à coordenação do curso evidenciou que, nos últimos cinco anos (de 2012 a 2016), 294 alunos haviam sido matriculados na disciplina de Matemática Aplicada à Administração, que era ofertada em caráter anual, entretanto apenas 36% destes haviam obtido aprovação.

Além disso, em conversas com professores que já haviam lecionado essa disciplina, evidenciaram relatos de que os obstáculos do cenário eram inúmeros. Pelo fato de o curso ser noturno, a maioria dos acadêmicos trabalhavam e, consequentemente, não tinham tempo suficiente para se dedicar à disciplina, resolver exercícios e tirar suas dúvidas junto ao professor em momentos extraclasse.

Outro agravante diagnosticado por eles, foi que, além das dificuldades inerentes ao conteúdo da disciplina, a maioria dos alunos apresentava lacunas associadas à Matemática básica. Os autores ressaltaram que era corriqueiro encontrar alunos que demonstravam desconhecer como representar uma função graficamente e, mais do que isso, quando o esboço de gráficos era solicitado, era perceptível sua aversão e descontentamento.

Os estudantes relataram que as maiores dificuldades estavam associadas à construção e análise gráfica, e que a utilização do *software* contribuiu para minimizar tais dificuldades. Também demonstraram inúmeros equívocos por não manusearem, de forma correta, as funções da calculadora científica.

Por meio desse estudo, concluíram que o uso de apenas uma metodologia, a tradicional, não parece ser a melhor opção. É necessário buscar uma reformulação na educação com o intuito de preparar os alunos a desenvolver o senso crítico, o pensamento improvável e dedutivo, a capacidade de observação, de pesquisa, estratégia de comunicação, conexão de conceitos, contribuindo para seu desenvolvimento mental.

Pontuaram que ferramentas tecnológicas como o computador, projetor multimídia e a calculadora, têm sido usadas por professores com o objetivo de aumentar a eficácia do ensino, porém, muito ainda é preciso ser feito. Enfatizaram que a tecnologia não substitui materiais como o giz, a lousa, o caderno, mas é uma ferramenta aliada ao desenvolvimento de novas metodologias para o ensino da Matemática, pois permite enfatizar as conexões entre diferentes áreas, como álgebra e geometria, religando os conhecimentos que tem sido abordados de forma fragmentada e estanque.

O estudo mais recente divulgado é o de Pérez, Jaramillo & Asbahr (2020), que relatam o processo de organização do ensino de três professores de Matemática em uma instituição de Administração universitária da Colômbia, com base na criação coletiva de estudos de caso sobre oferta e demanda.

Realizaram um estudo qualitativo, sob o enfoque do método dialético. Os registros e instrumentos de produção de dados utilizados foram mapas de casos, entrevistas semiestruturadas, áudios, vídeos, ideogramas e mapas conceituais.

O trabalho de campo da investigação teve três momentos. No primeiro, os professores criaram um ideograma e um mapa conceitual em que expressavam suas ideias sobre sua própria atividade docente, a universidade e o conhecimento matemático. Por meio dessa atividade, os autores concluíram que a história de vida de cada professor, suas experiências e processos de formação inicial e contínua, constituíam sua subjetividade como professores de Matemática.

No segundo momento, os professores realizaram o processo de redação de estudos de caso, a fim de projetar sua própria estrutura para orientar sua atividade de criação das situações. No final da redação, os professores socializaram alguns estudos com seus colegas e, com base na troca de experiências, refinaram os textos criados.

No terceiro momento, os professores realizaram os estudos de caso, para que os alunos, por meio da análise dos textos criados, encontrassem soluções que mostrassem como o conhecimento matemático possibilitava entender as realidades dos negócios e mostrassem maneiras de tomar decisões que organizações seriam beneficiadas.

Com base neste trabalho coletivo, os professores criaram um caso de oferta e demanda e apresentaram conhecimentos matemáticos para contribuir com a análise e solução de problemas de negócios. Os autores analisaram que o processo de escrita dos professores foi permeado pela intenção de criar uma maneira própria de mostrar conhecimentos matemáticos, com base em suas próprias necessidades, experiências e conhecimentos.

Ao longo das análises e das descrições de todos estes estudos aqui detalhados, é notável que há similaridades e diferenças de enfoque entre eles, contudo ponderou-se seus principais aspectos para, então, direcionar o tema desta tese.

Isto porque, desde o início do planejamento dos objetivos e das atividades desta pesquisa, tinha-se como intuito, a utilização de um *software*. Além disso, pretendia-se entrelaçar subsídios da TAS e da TCC como referencial teórico para elaborar as situações de ensino. Como planejamento para a metodologia de pesquisa, tencionava-se uma abordagem qualitativa, mas antes de tudo, fez-se necessário verificar se estudos anteriores já haviam levado em conta alguns – ou todos – destes aspectos e quais seriam os possíveis caminhos a serem estudados para complementar este cenário.

Desse modo, elaborou-se o Quadro 2, que contém um apanhado dos principais aspectos identificados nos trabalhos que já foram realizados (tipo de metodologia de pesquisa e de ensino, se houve a utilização de *software* e quais os conteúdos abordados).

Quadro 2: principais aspectos das produções selecionadas no grupo 1.

	Metodologia de Pesquisa	**Metodologia de Ensino**	**Utilização de *Software***	**Conteúdos trabalhados**
Macintyre (2002)	Qualitativa	Modelagem Matemática	*Excel*	Funções, porcentagens, juros simples e compostos
Paulette (2003)	Qualitativa	Resolução de problemas	*Winplot*	Funções, limites, derivadas e integrais
Macedo (2004)	Qualitativa	Resolução de problemas	–	Funções
Pinto (2009)	Quantitativa	Criou uma metodologia própria	*Grafmatica*	Funções
Ferreira & Jacobini (2010)	Qualitativa	Modelagem Matemática	–	Funções
Sosa (2011)	Qualitativa	Resolução de problemas	–	Funções
Zimmer (2011)	Qualitativa	TAS e resolução de problemas	–	Funções
Luccas (2011)	Qualitativa	Integração conciliadora	–	Funções
Zarpelon, Germano, Silva, Resende & Neves (2016)	Qualitativa	Criaram uma metodologia própria	*Maple* e calculadora	Limites de funções
Pérez, Jaramillo & Asbahr (2020)	Qualitativa	Estudo de caso – Método dialético	–	Funções

Fonte: a autora.

Sob respaldo destas obras divulgadas, pode-se afirmar que o estudo de funções vem sendo abordado nos cursos de Administração de maneira contextualizada, com predominância na utilização da metodologia de resolução de problemas ou de modelagem Matemática. O conteúdo de funções mostrou-se uma unanimidade em todas elas, o que permitiu depreender que as funções Matemáticas são a base para o estudo aplicado à área empresarial.

Além disso, a utilização de *softwares* foi evidenciada, somente, em quatro investigações e a implementação de atividades com o manuseio de calculadoras científicas, somente, em uma delas, o que explicitou um caminho que ainda pode ser explorado em futuras pesquisas sobre o ensino de Matemática nos cursos de Administração.

2.2.2 Lugares ocupados pela Matemática no contexto dos cursos de Administração e/ou na formação dos estudantes

Neste tópico, apresenta-se as obras que se enquadram no grupo 2, que é representado por pesquisas teóricas relacionadas à importância da Matemática ou do ensino de Matemática ou, ainda, relacionadas aos sentimentos e concepções de estudantes e professores de Matemática que ministram disciplinas nos cursos de Administração.

O primeiro estudo encontrado, foi proposto por Santos, Capelari & Sperandio (1998), que apresentaram uma visão geral sobre o curso de Administração de uma universidade do Paraná, detalharam a estruturação curricular do curso, discutiram quais são as características esperadas de um bacharel em Administração e dissertaram sobre qual é o papel da Matemática na formação deste profissional.

Na visão dos autores, dentre os principais objetivos do ensino de Matemática para futuros administradores, está o fato de que ele pode contribuir com a estruturação do pensamento lógico, demonstrativo, intuitivo, criativo, de imaginação e de raciocínio, que são características essenciais para o administrador. Eles também alegaram que a Matemática tem influência decisiva, pois pode ser um importante instrumento para equacionar situações em técnicas administrativas.

Contudo, alertaram que ainda são impostas barreiras quanto ao aprendizado de Matemática, já que, em virtude de um ensino centrado em resoluções carentes de significado, nem sempre os estudantes verificam sua aplicabilidade na realidade de sua profissão. Diante disso, concluíram que seu ensino ainda é muito limitado e dificultado, fato que também pode ser entendido como uma das diversas consequências dos problemas gerados por toda a complexidade do sistema educacional.

Dois anos após este estudo, Biaggi (2000), apontou caminhos para aplicar atividades de Matemática sob o formato de *cases*, com situações retiradas do cotidiano de empresas (os dados foram coletados pelos estudantes). O objetivo geral do projeto desenvolvido em uma universidade de São Paulo foi propiciar, aos estudantes, uma aplicação prática dos conceitos teóricos ministrados em sala de aula, pois o autor justificou que elaborou o projeto na tentativa de minimizar o sentimento negativo que seus estudantes demonstravam e verbalizavam em relação à disciplina.

O autor afirmou que tais atividades vêm dando certo, pois confirmam uma atitude positiva dos estudantes com relação à Matemática. Mais do que isso, denotou que outros professores do curso também demonstraram interesse em participar do projeto e, em decorrência disso, expandiu sua ideia inicial, tornando o estudo piloto em um projeto interdisciplinar que abrangeu quatro das disciplinas do primeiro ano do curso de Administração.

Também com um intervalo de dois anos após, Araújo (2002), enfatizou os diferentes olhares que estudantes e professores do curso têm em relação à disciplina Matemática I. Em busca dessa resposta, a autora aplicou questionários aos estudantes e aos professores de uma universidade do Paraná e os dados obtidos sinalizaram duas preocupações divergentes: a dos estudantes, em colocar na prática o que estavam aprendendo na teoria, sem se sobrecarregarem de conteúdos; e a dos professores, que denotaram a falta de base Matemática dos estudantes, fazendo prevalecer a ideia de que pré-requisito em Matemática é o mais importante, além da visão conteudista em detrimento da importância da formação do pensamento.

Ademais, a autora evidenciou, por meio de documentos do departamento de Estatística da instituição, dados sobre o rendimento dos discentes do curso de Administração, os quais apontaram índices preocupantes como, por exemplo, aproximadamente 42,6% no total de reprovações e desistências na disciplina.

Ao concluir sua investigação, refletiu que a mesma contribuiu amplamente na sua formação continuada, pois reformulou o formato de suas aulas de modo que não fosse mais a autora principal, aquela que "pensava pelos alunos". Dentre as mudanças ocorridas em sua postura, ela destaca a ideia de que o professor deve mediar este processo de construção de conhecimento e não percorrê-lo pelo estudante.

Três anos após, Maggi (2005), realizou sua pesquisa em uma universidade de Minas Gerais, por meio de um levantamento socioeconômico, para delinear o perfil dos estudantes do curso de Administração e comparou as avaliações formais feitas por eles no início e no final da disciplina de Matemática Instrumental.

Os dados revelaram que alguns estudantes conseguiram superar as dificuldades iniciais, adquirindo a capacidade de raciocinar lógica e formalmente sobre as questões que lhes eram propostas, contudo outros não efetuaram essa transição, se mantendo presos a um modo de saber matemático relacionado com a reprodução de fórmulas e procedimentos, sem preocupação com a compreensão dos diversos conceitos envolvidos nas operações.

A respeito disso, a autora destacou que, provavelmente, esta postura era decorrência de uma formação Matemática deficiente e evidenciou que, em geral, a formação Matemática no ensino médio, concentra seus esforços em tornar os alunos capazes de reproduzir um conhecimento que lhes é dado como algo acabado, onde o raciocínio lógico e formal só é solicitado na maneira de se efetuar um encadeamento das ideias pré-concebidas.

Como sugestão para minimizar este cenário, defendeu que promover situações contextualizadas, que instiguem a capacidade de raciocínio e de interpretação das respostas, pode ser uma possibilidade. Também mencionou que o trabalho conjunto de professores que ministram disciplinas diferentes, pode favorecer a aprendizagem.

No mesmo ano, Pinto (2005), investigou e analisou as concepções e os aspectos da prática de três professores de Matemática de um curso de Administração de Empresas de uma universidade de São Paulo.

Os profissionais participantes relataram que a formação continuada influenciou muito nas suas concepções e no gerenciamento de suas aulas. Eles ressaltaram que, na pós-graduação, poderiam ser realizadas pesquisas que preconizassem a especificidade de determinadas áreas, pois concluíram que é difícil para um professor que nunca teve contato com a área de Administração, dar uma aula que não seja, puramente, Matemática.

Além disso, afirmaram que a metodologia de resolução de problemas ajuda a despertar o interesse dos alunos, pois permite que sejam trabalhados problemas ligados à Administração. Apontaram que, na maioria das vezes, os estudantes chegam despreparados à universidade e não houve consenso a respeito do fator "realizar revisão ou não", pois a falta de tempo na grade curricular foi pontuada como um empecilho.

A seguinte questão foi debatida pelos professores: "quem deve ensinar Matemática no curso de Administração, o licenciado em Matemática ou o administrador?". Eles discorreram que, provavelmente, o professor de Matemática não tem experiência na área de Administração. Em contrapartida, falta ao administrador o conhecimento a respeito da sala de aula, no que se refere ao ensino e, consequentemente, no que se refere à aprendizagem em Matemática. A respeito dessa problemática, uma sugestão apresentada por um deles, foi realizar reuniões pedagógicas com todos os professores do curso, ou a criação de grupos de estudo, onde todos os interessados pudessem discutir sobre suas aulas.

Ainda no mesmo ano, Ribeiro (2005), analisou quais as funções elementares que são utilizadas nas disciplinas de Matemática e quais os pré-requisitos matemáticos considerados importantes pelos professores do curso de Administração de uma universidade do Rio Grande do Sul. Para isso, realizou entrevistas e analisou os programas oficiais das disciplinas.

Detectou que as funções polinomiais do primeiro e do segundo graus e as funções exponenciais, são utilizadas por todos os professores. Eles ressaltaram que o domínio sobre esse assunto, possibilitará ao estudante uma maior desenvoltura em tópicos pertinentes a sua formação profissional. Sobre as contextualizações em relação ao conteúdo, foram citadas as funções demanda, oferta, ponto de equilíbrio e função custo.

Em relação aos pré-requisitos, os professores enfatizaram a falta de base Matemática como um obstáculo para os estudantes avançarem e os principais conteúdos citados foram: operações elementares, resolução de equações do 1º grau e do 2º grau, potenciação e radiciação, proporções, divisão de polinômios, conceito de funções, construção e interpretação de gráficos.

Como possível contribuição de seu trabalho, o autor levou em consideração os argumentos dos professores, juntamente com a análise feita do programa das disciplinas do curso e concluiu que os conteúdos desenvolvidos nas disciplinas de Matemática, nos cursos de Administração, deveriam passar por uma análise rigorosa, para evitar assuntos que não sejam relevantes dentro do curso, e incluir aqueles que possibilitem uma contextualização real. Também defendeu que essa reformulação deveria ser realizada envolvendo professores não só de Matemática, mas também aqueles das disciplinas afins.

Yenilmez, Girginer & Uzun (2007), realizaram um estudo quantitativo em busca de identificar se havia relação entre ansiedade Matemática e atitude Matemática e o sucesso em Matemática dos alunos de nove universidades de economia, finanças e Administração da Turquia.

Eles escolheram este tema em busca de caminhos para amenizar o perceptível nível de ansiedade dos estudantes em relação à Matemática. Um objetivo secundário do estudo, foi determinar se esse sentimento dependia da idade, sexo, nível de classe e sucesso em Matemática dos alunos.

Os resultados mostraram que alunos com formação educacional inferior tendem a apresentar maior ansiedade Matemática. Não houve relação entre o nível de ansiedade Matemática, o gênero e a idade, mas o nível de ansiedade Matemática, o nível de classe, o sucesso em Matemática e sucesso acadêmico, em geral, estão relacionados.

Foram indicadas algumas estratégias para minimizar a ansiedade Matemática: os alunos devem ter tempo para fazer anotações, perguntar e expressar suas ideias nas aulas de Matemática; devem ter a oportunidade de resolver problemas em vez de apenas observar suas resoluções; devem ter a oportunidade de fazer exercícios, o máximo possível, demonstrar e explicar seus estudos de pesquisa; as aulas de Matemática devem contar com o auxílio de diferentes materiais; os alunos devem ser incentivados a usar dispositivos como calculadoras e computadores.

Estes resultados evidenciados por Yenilmez, Girginer & Uzun (2007), foram corroborados, dois anos após, no estudo de Peñaloza Fuentes, Lima & Guerra (2009), que investigaram, também por meio de um estudo quantitativo, a predisposição dos alunos de Administração em relação à Matemática. Os dados sugeriram que diferenças de gênero, idade ou mesmo estar cursando ou não a disciplina de Matemática, não explicariam qualquer atitude negativa.

Contudo, os testes mostraram-se significativos com relação à variável área de conhecimento preferida antes da faculdade, indicando, com isso, que a experiência anterior, dimensionada pelas preferências prévias declaradas, explica a atitude em relação à Matemática manifestada pelos alunos. Os resultados mostraram uma associação direta entre atitude positiva e enfoque de aprendizado profundo, porém essa relação mostrou-se, estatisticamente, não significativa.

Dois anos mais tarde, Bezerra (2009), analisou os desafios e os dilemas enfrentados pelos professores de Matemática no processo de construção dos conteúdos matemáticos aplicados em sala de aula, no curso de Administração. A metodologia da pesquisa, de caráter qualitativo, envolveu o desenvolvimento de ações que priorizaram a dimensão subjetiva por meio da história oral de cada professor entrevistado.

O autor descobriu que os professores de Matemática vivem dilemas tais como: os conteúdos matemáticos que se apropriaram e mobilizaram na graduação e aqueles que devem ser apreendidos pelos alunos do curso de Administração; priorizar a aquisição de conhecimentos fundamentais em Matemática; promover os alunos sem as condições necessárias para a sua aprovação; privilegiar a Matemática acadêmica necessária à formação dos profissionais da Administração em detrimento da Matemática básica que dá suporte a essa Matemática acadêmica.

Suas reflexões apontaram preocupações relativas à forma e ao conteúdo da educação Matemática a ser desenvolvida neste curso. A predominância do tipo de aula deu-se na forma expositiva. Apenas um professor citou uma atividade interdisciplinar e, também, somente um professor mencionou fazer uso do laboratório de informática. A utilização da calculadora em sala de aula foi lembrada como proibida por dois professores.

Ao concluir sua investigação, o autor afirmou que o ensino de Matemática se encontra em crise, seja na forma como se trabalha em classe, seja no conteúdo propriamente dito. Ele complementou que, muitas vezes, não se percebe a relevância dos conteúdos matemáticos na formação do profissional e é preciso estar atento a essas alterações e mudanças para se garantir que a Matemática seja valorizada no curso de Administração a fim de evitar que ela seja deportada, aos poucos, na ilusão de que os problemas do insucesso serão resolvidos.

Luccas & Batista (2011), apresentaram um estudo a respeito das contribuições que o ensino de Matemática pode proporcionar à formação de alunos de um curso de Administração. Além disso, evidenciaram como um ensino estruturado de Matemática pode subsidiar a formação de um administrador, não somente no sentido da compreensão do conhecimento matemático, mas na análise de fenômenos ou problemas existentes em seu entorno sociocultural, implicando, necessariamente, uma ação interdisciplinar.

A pesquisa focou os processos de matematização horizontal e vertical, por meio de um estudo teórico, que mostrou que o ensino da Matemática ultrapassa a atividade de aprender técnicas Matemáticas para utilizá-las na resolução de problemas. O foco passa do ensino de Matemática e da aplicação de técnicas de resolução de problemas para um contexto amplo e complexo, desempenhando as funções de linguagem, metodologia e avaliação de processos diversos com um papel interdisciplinar integrador.

Roncaglio & Nehring (2013), realizaram uma pesquisa documental para discutir sobre a importância do ensino de conceitos matemáticos nos cursos de Administração e para identificar que conceitos matemáticos são necessários para o administrador.

As autoras utilizaram como aporte, os resultados anteriormente obtidos por Santos, Capelari & Sperandio (1998), Bezerra (2009), Macedo (2004) e Pinto (2005) e acrescentaram, que tanto a relação professor-aluno, quanto a forma como muitos profissionais transmitem os ensinamentos matemáticos, afetam o ensino e podem ser motivadores de obstáculos de aprendizagens, caso sejam permeados por uma relação de autoritarismo e repetição de técnicas.

Enfatizaram que a aprendizagem de Matemática possibilita uma série de competências essenciais para o administrador como, por exemplo, que ele seja preciso na definição das variáveis de uma situação, que estabeleça hipóteses, ou que seja lógico no desenvolvimento de análises. Além disso, concluíram que o papel do professor é fundamental para desencadear esse processo e destacaram a necessidade de pesquisas que analisem as práticas dos professores que trabalham com Matemática nesse contexto.

Um ano mais tarde, Romeu & Bianchini (2014), pretenderam ocasionar modificações no sistema didático do ensino da Matemática no curso de Administração de uma universidade de São Paulo. O primeiro autor relatou as dificuldades encontradas pelos seus alunos que, além de demonstrarem certa resistência com os conteúdos matemáticos, não conseguiam interpretar, nem utilizar os conceitos matemáticos nos seus processos decisórios.

Esse trabalho continha uma proposta para uma pesquisa de mestrado voltada ao estudo e aplicação de funções junto a estudantes do último ano do curso. Os autores basearam-se nos estudos anteriores de Santos, Capelari & Sperandio (1998), Macedo (2004), Ribeiro (2005), Luccas (2011) e Roncaglio & Nehring (2013).

O objetivo era utilizar a modelagem Matemática por meio de uma sequência didática com auxílio do *software Geogebra*, elaborada a partir de problemas reais obtidos de empresas atuantes no mercado, para estabelecer uma relação entre aluno e conteúdo teórico, promover o pensamento crítico, construção, raciocínio e solução dos próprios problemas, demonstrando que a Matemática é prioritária para os processos de decisão.

Schneider & Parente (2015), realizaram um apanhado histórico e sintetizaram que as primeiras organizações, e seus administradores, surgiram com o objetivo de organizar os recursos disponíveis e as comunidades que utilizavam destes artifícios para sua sobrevivência. Eles evidenciaram que a Matemática já era uma ferramenta essencial para a Administração de recursos desde este período.

Além disso, detectaram que a Matemática está presente no cotidiano das empresas. Mais do que isso, por meio dela, o administrador desenvolve o pensamento lógico, intuitivo, além de compreender e avaliar atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos nas diversas áreas da empresa, identificando causas de possíveis variações nos resultados com relação ao planejado e os efetivos resultados, reduzindo custos e aumentando as receitas.

Afirmaram, ainda, que a Matemática pode auxiliar o administrador na avaliação do desempenho da empresa em um determinado período, na análise de novos projetos e investimentos, considerando o prazo de retorno esperado pelos investidores.

Silva (2016), averiguou a possibilidade de utilização de dispositivos móveis como uma interface facilitadora do ensino de Matemática no curso de Administração de uma universidade da Paraíba.

Nesse contexto, destacou duas questões principais: a necessidade de o professor contextualizar o conteúdo da disciplina de Matemática com as atividades e as aplicações práticas dos conteúdos que requerem a análise administrativa; o ensino de Matemática não pode ficar alheio à utilização de tecnologias (*softwares*, aplicativos, dispositivos móveis, calculadoras), pois ela é uma das demandas da profissão de administrador para solucionar seus problemas cotidianos.

Ele realizou um ensaio de atividades com a utilização de alguns aplicativos, contudo não apresentou tais atividades no corpo da obra, nem nos seus apêndices, apenas expôs os aplicativos que utilizou, mas esclareceu que os estudantes se mostraram satisfeitos com as tarefas, pois alegaram que as aulas foram mais lúdicas e interessantes.

O autor finalizou seu estudo pontuando que os professores têm desafios a encarar na utilização de *softwares* em sala de aula, pois, antes de tudo, eles precisam estudá-los e adequar os conteúdos à proposta pedagógica, além de depender da estrutura física da instituição. Também sugeriu uma série de aplicativos que podem auxiliar na prática do professor para ensinar Matemática financeira nos cursos de Administração.

Laging & Voßkamp (2017), analisaram os fatores determinantes do desempenho em Matemática, de alunos matriculados em cursos de Administração de Empresas e economia de diferentes universidades da Alemanha. Este estudo ocorreu em duas etapas, pois os dados coletados junto aos estudantes foram verificados no início do primeiro semestre e revisitados nove semanas depois.

Os autores consideraram inúmeras variáveis que representam estudos específicos, socioeconômicos e biográficos, motivacionais e aspectos cognitivos, bem como variáveis que refletem o comportamento de aprendizagem e hábitos de trabalho. Para analisar os dados, realizaram um estudo teórico e utilizaram testes estatísticos. Verificaram que a formação escolar, notas finais da escola, conhecimentos anteriores que os estudantes apresentam e a autoconfiança, são determinantes essenciais para um bom desempenho em Matemática. Apesar de não mencionarem em sua investigação, seus resultados corroboraram os de Yenilmez, Girginer & Uzun (2007) e os de Peñaloza Fuentes, Lima & Guerra (2009).

Cumhur & Tezer (2019), examinaram a ansiedade de estudantes de cursos de Administração de universidades do Chipre para determinar se tal sentimento está relacionado ao gênero, cultura do ensino fundamental e médio, notas médias em Matemática e as atitudes dos professores de Matemática. Além disso, investigaram as ações que os alunos realizam para superá-los.

Os dados foram coletados por meio de uma abordagem integrada de modelos qualitativos e quantitativos. Os autores também não citam no texto, mas os resultados obtidos, corroboraram os de Yenilmez, Girginer & Uzun (2007), pois o nível de ansiedade Matemática dos estudantes mostrou-se semelhante em relação as notas médias que obtiveram em Matemática (desempenho acadêmico) e em relação as atitudes dos professores de Matemática na escola primária e secundária. Fatores como gênero, idade ou mesmo estar cursando ou não a disciplina de Matemática, não explicariam qualquer atitude negativa.

O medo do insucesso e o estresse, foram apontados como as razões da ansiedade Matemática pelos estudantes, mas eles justificaram que acreditavam que poderiam minimizar esta ansiedade, estudando regularmente. Além disso, os estudantes alvo da pesquisa, também defenderam que o ensino de Matemática deveria incluir atividades suficientes, começando com tarefas em um nível mais simples até um mais complicado, que eles deveriam receber lição de casa e precisariam gostar de Matemática. Referindo-se aos seus professores, argumentaram que não gostariam que eles fossem muito exigentes, preferiam profissionais positivos, que permitissem a utilização de calculadoras em sala de aula.

Ao longo das análises e das descrições destas 16 pesquisas, verificou-se que a importância da Matemática na formação do administrador é indiscutível, contudo, há problemas evidentes nesse caminho, como a dificuldade dos estudantes devido às experiências anteriores negativas, ou por apresentarem dificuldades em Matemática básica. Outro problema urgente, apontado pelos autores, é o ensino de Matemática de maneira desconexa com o contexto da área administrativa, pois isso pode contribuir para que os estudantes não verifiquem a importância da Matemática na sua formação e, consequentemente, na sua atividade profissional.

Enquanto realizava-se as leituras e apontamentos das pesquisas mencionadas, identificou-se certa predominância de aspectos comuns em muitos deles e, por este motivo, elaborou-se um quadro contendo estas ideias. Cabe relembrar que, no início do item 2.2, indicou-se dois aspectos principais que estavam diluídos em todos os trabalhos. Retomando-se:

- ✓ As dificuldades e lacunas no aprendizado de Matemática básica;
- ✓ A necessidade de trabalhar a Matemática de maneira contextualizada à área específica do curso de Administração.

Desse modo, no Quadro 3, estes dois itens poderiam ser acrescidos, mas optou-se por suprimi-los para não sobrecarregar a visualização, de forma que são apresentados os demais aspectos evidenciados nos 16 trabalhos que compõem o grupo 2.

Quadro 3: principais aspectos das produções selecionadas no grupo 2.

	Sentimento negativo em relação à Matemática	**Ensino de Matemática centrado em fórmulas**	**Trabalho conjunto entre professores das duas áreas**	**Necessidade de utilizar tecnologias**
Santos, Capelari & Sperandio (1998)		X		
Biaggi (2000)	X			
Araújo (2002)				
Maggi (2005)		X	X	
Pinto (2005)			X	
Ribeiro (2005)		X	X	
Yenilmez, Girginer & Uzun (2007)	X			X
Peñaloza Fuentes, Lima & Guerra (2009)	X			X
Bezerra (2009)		X		X
Luccas & Batista (2011)				
Roncaglio & Nehring (2013)	X	X		
Romeu & Bianchini (2014)				X
Schneider & Parente (2015)				
Silva (2016)				X
Laging & Voßkamp (2017)	X			
Cumhur & Tezer (2019)	X			X

Fonte: a autora.

Evidentemente, outros fatores foram esmiuçados ao longo do texto, mas aponta-se neste quadro, as convergências entre as diferentes obras, pois isso auxiliou a delinear o tema de pesquisa, apontou caminhos que ainda poderiam ser percorridos e tendências que precisariam ser levadas em consideração nesta tese.

Por meio desta análise, verificou-se que a Matemática ocupa um lugar crucial no contexto e na formação do administrador. Ela está presente no cotidiano da profissão, contudo esta ideia sugere ainda não ser evidenciada como um consenso, tampouco difundida entre os estudantes (administradores em formação).

Ao realizar esta revisão de literatura, pode-se identificar inúmeras experiências e sentimentos já vivenciados em sala de aula, pois detectou-se que muitos estudantes trazem consigo experiências negativas ou não gostam de Matemática, mas que isso não pode ser um impeditivo para que eles percebam a importância da Matemática em sua profissão.

Também verificou-se que outros professores compartilham de sentimentos análogos diante da incumbência de ministrar aulas de Matemática para administradores em formação. Inclusive, ao realizar a busca investigativa, teve-se a grata satisfação de conhecer, ainda que virtualmente, o professor Geraldo Biaggi, um dos autores mencionados na revisão e, conjuntamente, tenciona-se, o encaminhamento de um trabalho, colaborativo, entre cursos de Administração de instituições distintas.

2.2.3 Possíveis implicações destes estudos para qualificar esta pesquisa

Além de todos os assuntos já discutidos ao longo deste capítulo, esta seção, tem o intuito de realizar um compêndio de quais caminhos foram levados em consideração para serem explorados, a partir das pesquisas que já foram elaboradas e divulgadas até o momento. Dentre as implicações para os propósitos desta pesquisa, priorizou-se:

- **Investigar as lacunas em Matemática básica**

Absolutamente todas as pesquisas mencionaram que os estudantes possuem dificuldades em Matemática básica devido ao ensino de Matemática anterior que tiveram, contudo, nenhuma delas investigou os conhecimentos prévios dos estudantes. Então, nada mais oportuno do que iniciar um trabalho pela investigação de quais são os conhecimentos anteriores que os estudantes apresentam, para que, a seguir, sejam oportunizadas as situações de ensino.

Este mapeamento dos conhecimentos prévios dos estudantes, remete à busca pelos subsunçores, ação indispensável no contexto da TAS. Inclusive, um aspecto curioso observado nas obras selecionadas, foi a utilização do termo “aprendizagem significativa”, porém sem relacionar-se com a teoria proposta por Ausubel (1963), consequentemente, sem levar em conta seus aspectos. Somente uma das 26 obras encontradas, de fato, baseou seus estudos na TAS, trata-se do estudo de Zimmer (2011).

Mas, pontua-se que a autora investigou os conhecimentos prévios dos estudantes para averiguar se eles faziam conexões entre Matemática e Administração. Ela não investigou os conhecimentos prévios de Matemática básica dos estudantes. Dessa forma, investigar os subsunçores dos estudantes, revelou-se um caminho crucial e necessário para iniciar o trabalho.

- **Trabalhar a Matemática de maneira aplicada à área administrativa**

Essa ação revelou-se primordial para contribuir com o cenário do ensino de Matemática para estudantes do curso de Administração. Bezerra (2009), inclusive, justificou que a Matemática pode perder espaço nos cursos de Administração por não ser abordada de maneira contextualizada. Perder espaço no sentido figurado, ou seja, alguns estudantes encaram a disciplina como um empecilho, em vez de percebê-la como uma ferramenta, sobretudo, uma ciência, indispensável em sua profissão.

Além disso, Roncaglio & Nehring (2013), atentaram para a importância de eleger os conteúdos matemáticos que são relevantes para a área administrativa, não apenas focar na listagem de conteúdos, como se o professor "desse o conteúdo ao aluno" e o aluno "recebesse tal conteúdo". Isto porque a Matemática está ligada a uma série de competências exigidas do administrador, porém vem sendo encarada como um emaranhado de fórmulas por muitos estudantes.

Para que isto não ocorra, o docente precisa ser proficiente na sua área de formação, mas ter a consciência de que a área para a qual está direcionando o ensino não é igual a sua, ela possui nuances e carece ser estudada, aprofundada. Também é preciso investir na troca de ideias, na realização de discussões, participação em reuniões e grupos de estudos com os colegas, conforme apontam Maggi (2005), Pinto (2005) e Ribeiro (2005).

- **Utilizar tecnologias (*softwares* e calculadoras)**

Verificou-se que há uma disparidade a respeito da utilização de calculadoras nas aulas de Matemática para cursos de Administração, pois ela foi mencionada como proibida por dois professores que participaram do estudo de Bezerra (2009), como necessária por Yenilmez, Girginer & Uzun (2007) e Silva (2016) e como um desejo de estudantes que foram entrevistados por Cumhur & Tezer (2019).

Inclusive, esta proibição que Bezerra (2009), retratou há mais de uma década em sua investigação, infelizmente, ainda é recorrente na sala de aula, pois vivenciam-se inúmeros relatos de estudantes que dizem não poder utilizar a calculadora científica em outras disciplinas, porque os professores não permitem sua prática.

Contudo, defende-se a sua utilização, pois, saber manuseá-la, faz parte da demanda do administrador. Acredita-se que não há problema algum em utilizar calculadoras em sala de aula, elas apenas obedecem a comandos da ação humana, ou seja, necessitam de um comando correto para fornecerem a resposta correta. Além disso, não fornecem interpretações, isso pode ser feito, somente, por seres humanos.

Esta afirmação ampara-se em orientações de documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[15], que propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras, inclusive, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, Brasil (2017).

A respeito do uso de *softwares*, das 26 investigações consideradas, 10 abordaram o assunto, seja por meio de práticas de sala de aula (Quadro 2), seja para discutir a respeito de sua importância (uma delas no Quadro 2 e as demais no Quadro 3).

Um destes trabalhos analisados, evidenciava uma proposta de dissertação de mestrado, mas verificou-se que a pesquisa foi interrompida. Ela tinha como um dos propósitos, a utilização do *Geogebra* e, por não ter sido levada adiante, isso impactou na decisão de utilizá-lo, pois ainda não há nenhuma pesquisa com a mesma temática desta tese, que aborde a utilização deste *software*.

Optou-se, portanto, pela investigação dos subsunçores dos estudantes, para elaborar atividades direcionadas à área administrativa, que demandem a utilização do *software Geogebra* e da calculadora científica. É claro que estes são os principais aspectos que definiram as estratégias para a investigação, contudo outras implicações destes estudos, aqui descritos, estão diluídas e são mencionadas, no momento oportuno, ao longo desta investigação.

Evidenciou-se que somente uma obra contou com aportes da TAS e nenhuma delas mencionou a TCC. Dessa forma, propõe-se um estudo que abrange o entrelaçamento da TAS, de Ausubel (1963) e da TCC, de Vergnaud (1990), para delinear as ações de um estudo centrado na relação de equações de primeiro grau e sua representação gráfica, que são conteúdos denotados como necessários à formação dos estudantes do curso de Administração, entretanto são permeados pela dificuldade de compreensão, principalmente o registro gráfico.

Outrossim, compactuando-se com Duval (2003), não aposta-se em uma aprendizagem atrelada à abordagem de somente um tipo de registro, dessa forma, o entrelaçamento de, ao menos estes dois registros, mostrou-se imprescindível. Este autor revela que, ao ficar enclausurado dentro de um mesmo tipo de registro, o estudante realiza, somente, os chamados “tratamentos” e defende que, para que a aprendizagem de um objeto matemático ocorra, é imprescindível que ocorram as “conversões”, ou seja, que os estudantes sejam capazes de identificar, por exemplo um mesmo objeto, no caso específico desta investigação, uma equação,

---

[15] Documento que norteia quais são as aprendizagens essenciais a serem trabalhadas nas escolas brasileiras, em todos os níveis de ensino.

na linguagem algébrica e na linguagem gráfica, além, é claro, de outras (linguagem escrita, verbal, tabular, etc.).

Além disso, os estudos identificados na revisão, sugeriram a necessidade de novas pesquisas como forma de investigar estratégias e alternativas para o ensino de Matemática nos cursos de Administração, que possibilitem a interpretação de informações utilizando *softwares* e calculadoras científicas, pois essa é uma das demandas da profissão. Ademais, entendeu-se que trabalhar com situações familiares à área administrativa, permite que os discentes compreendam a relação da Matemática com sua profissão e isso pode favorecer o desenvolvimento do seu pensamento crítico e reflexivo.

Discerniu-se, portanto, que nenhum dos trabalhos anteriores já abordou, exatamente, o foco desta pesquisa, contudo, todos eles oferecem guarida à esta proposta, que poderá fornecer um diferencial para professores que se interessam pelo tema.

CAPÍTULO 3
FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para responder ao objetivo geral deste estudo, que foi investigar em que medida ocorrem indícios de aprendizagem significativa progressiva de conhecimentos na relação de equações e gráficos em estudantes do primeiro semestre do curso de Administração, mediante materiais de apoio e metodologias de ensino fundamentadas na Teoria da Aprendizagem Significativa e na Teoria dos Campos Conceituais, aprofundou-se os estudos concernentes às duas teorias.

Desse modo, neste capítulo, apresenta-se como base teórica, no item 3.1, a TAS, de Ausubel (1963), no item 3.2, a TCC, de Vergnaud (1990) e no item 3.3, os aspectos que as unificam. Além disso, na seção 3.4, delineia-se o campo conceitual das equações de primeiro grau, campo de conhecimentos no qual focalizou-se a abordagem dos conceitos nesta pesquisa.

3.1 A Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS)

No âmbito acadêmico, a expressão “aprendizagem significativa” é amplamente utilizada, contudo, não necessariamente, atrelada à teoria proposta por David Ausubel[16], pois verifica-se, em conversas informais e, inclusive, em trabalhos acadêmicos, a exemplo de Macedo (2004), que a expressão por vezes, é empregada como um termo da língua portuguesa e não como uma teoria de aprendizagem.

Pondera-se que, de maneira alguma, estas situações representam aspectos ou produções negativas, mas, para uma melhor compreensão acerca da expressão, evidencia-se em Cunha (2002) que a palavra “significativa(o)” deriva do latim, *significativu*, e representa o que serve para significar, exprimir ou manifestar algo com clareza. Por conseguinte, entende-se que, significativo, é aquilo que provém de algo interno, como um produto do indivíduo, que exprime seu pensamento em função de uma informação externa.

Todas estas informações são basilares para ancorar o entendimento referente à ideia de aprendizagem significativa, que é o conceito central da Teoria da Assimilação da Aprendizagem e da Retenção Significativas, como dito, idealizada por David Ausubel, no ano de 1963. Desde então, sua teoria foi reiterada pelo próprio autor em 2000 e tem sido interpretada, complementada e divulgada por colaboradores como Elsie Masini, Joseph Novak,

[16] David Ausubel (1918-2008), nasceu nos Estados Unidos, na cidade de Nova York. Graduou-se em psicologia e em medicina, doutorou-se em Psicologia do Desenvolvimento na Universidade de Columbia, onde foi professor no *Teacher’s College* por muitos anos e dedicou sua vida acadêmica à Psicologia Educacional.

Helen Hanesian e Marco Antônio Moreira em diversas obras (Moreira e Masini, 2001; Moreira, 1999, 2006, 2011, 2012a; Novak, 2000; Ausubel, Novak & Hanesian, 1978, 1980).

Em uma destas obras, ao detalhar os estudos de David Ausubel, Moreira (2011), evidencia que, em virtude de inúmeros eventos e artigos sobre a teoria original já terem sido divulgados pelo mundo, ocorreu uma apropriação superficial, com o uso indiscriminado da teoria como referencial teórico, ou seja, houve uma polissemia do conceito de aprendizagem significativa, pois o modelo adotado nas escolas, continua fomentando a aprendizagem mecânica de conhecimentos (que será comentada mais adiante).

Justamente por este motivo, iniciou-se este capítulo ressaltando o que norteia o conceito de aprendizagem significativa, pois respeita-se a grandiosidade da Teoria Ausubeliana e defende-se que ela é algo complexo, desde sua interpretação, até sua implementação. Acredita-se que assumir a postura de facilitador de aprendizagem significativa, requer mudança de concepção, desacomodação da conduta de avaliador da aprendizagem dos estudantes, entre outros aspectos que, muitas vezes, já estão enraizados e/ou consolidados na crença e na prática do professor.

Esta postura de um professor tradicional, geralmente, não leva em consideração iniciar um trabalho pautado nos conhecimentos prévios dos estudantes e é exatamente este fator que Ausubel (1963), destaca como premissa, ou seja, o autor afirma que o sujeito aprende a partir do que já sabe. Além disso, aprende por meio da interação de conhecimentos preexistentes, que são relevantes na sua estrutura cognitiva, com um novo material de aprendizagem, que pode ser recebido pelo aprendiz (chamada aprendizagem por recepção), ou descoberto por ele (aprendizagem por descoberta).

Com o intuito de sintetizar a ideia principal de sua teoria, Ausubel (2000), denota que o aspecto mais importante, que influencia na aprendizagem, é aquilo que o aprendiz já conhece e que, para iniciar o processo de ensino, é primordial realizar esta investigação. Contudo, após esta etapa, um novo conhecimento deve ser introduzido ou descoberto, o qual precisa relacionar-se à estrutura cognitiva do aprendiz de maneira não imposta e não literal, ou seja, é preciso que o sujeito atribua significado ao novo conhecimento.

Isto quer dizer que é de extrema importância que os novos conhecimentos sejam entrelaçados com os conhecimentos prévios adequados dos estudantes, mas que, ambos, sejam modificados e que não ocorra, simplesmente, o abandono de antigas ideias para dar lugar às novas ideias.

Ratifica-se esta afirmação nas palavras de Moreira (2009, p. 6), pois ele ressalta que

> Na aprendizagem significativa o conhecimento nunca é internalizado de maneira

> literal, porque no momento em que passa a ter significado para o aprendiz, entra em cena o componente idiossincrático da significação. Aprender significativamente implica atribuir significados e estes têm sempre componentes pessoais.

Em sua descrição da teoria original, o autor afirma que a nova informação deve interagir com uma estrutura de conhecimentos específica, onde existem os chamados conceitos subsunçores (ou ideias-âncora), assim denominados por Ausubel (1963).

Para pormenorizar a TAS, foi crucial compreender o que o autor quer dizer quando menciona que um sujeito precisa ter subsunçores relevantes em sua estrutura, que interajam com novos conhecimentos e, juntos, produzam um novo significado para ele. De acordo com essa ideia, atreveu-se a elaborar um esquema, ilustrado na Figura 2, que representa, na visão da autora, como ocorre este processo na estrutura cognitiva do aprendiz.

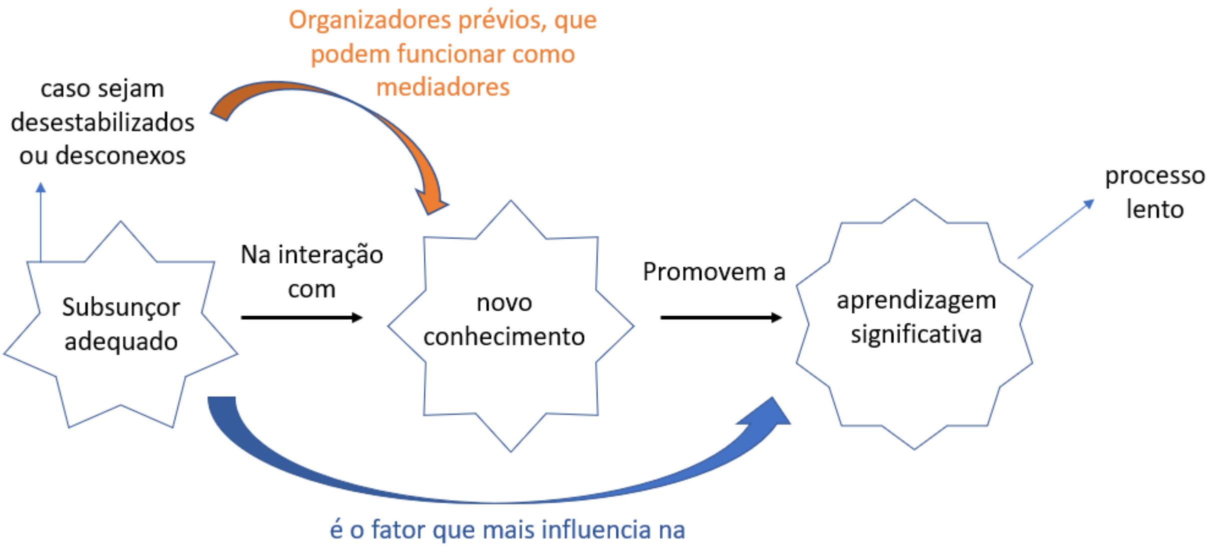


Figura 2: o processo de interação do subsunçor com o novo conhecimento na TAS, sob a perspectiva da autora.
Fonte: a autora.

Neste esquema, evidentemente, não foram apresentados todos os aspectos que configuram o cenário da aprendizagem significativa, mas ressalta-se a interação – no sentido de diálogo, de troca de significados – entre o subsunçor relevante com o novo conhecimento para que, ambos, sejam modificados e se tornem mais elaborados, mais estabilizados. Devido a esta interação, se modificam reorganizando a estrutura da mente do aprendiz.

Teve-se o intuito de apresentar figuras em formatos diferentes para representar o subsunçor adequado e o novo conhecimento com a pretensão de ilustrar que ambos permanecem na estrutura cognitiva do aprendiz, porém mais estabilizados (ou aprimorados). Ou seja, o novo conhecimento adquire significado para quem aprende e o subsunçor pode ficar mais rico, mais diferenciado, mais capaz de ancorar novos conhecimentos.

Contudo, na ilustração, apresentou-se a estratégia dos organizadores prévios, mas ressalta-se que eles não fazem parte da ideia central da TAS, pois Ausubel (1963), apenas destacou a possibilidade de utilização dos organizadores prévios (ou organizadores avançados), como um caminho – caso necessário, após a busca por subsunçores – para preparar a estrutura cognitiva a fim de facilitar a aprendizagem significativa.

Sob este aspecto, levou-se em consideração as equações algébricas de primeiro grau, que denotam o campo conceitual abordado nesta pesquisa. Neste contexto, sugere-se, a seguinte interpretação: para iniciar o estudo de equações, no ensino superior, precisa-se verificar se os estudantes possuem subsunçores estabilizados no campo algébrico. Neste caso, seria pertinente, dentre outros conhecimentos, por exemplo, os estudantes possuírem subsunçores adequados referentes à ideia de equivalência e à utilização de letras como incógnitas.

Nesta busca, poderiam ser ofertadas atividades que exigissem aspectos conceituais e procedimentais, não, somente, de maneira mecânica, que demandassem, apenas, resoluções de algoritmos, mas que requisitassem a tradução da linguagem escrita para linguagem algébrica e sua respectiva resolução. Conforme os aspectos evidenciados nas resoluções, seria possível inferir quais os subsunçores que os estudantes apresentam, se aparentam estar estabilizados e quais são necessários de serem retomados, antes de introduzir a nova informação.

Por exemplo, suponhamos que a seguinte questão fosse ofertada, na busca por subsunçores: o triplo de um número, menos 3 unidades, resulta em 27. Que número é esse? Hipoteticamente, supõe-se que um estudante tenha explicitado a seguinte resolução:

$$3x - 3 = 27$$

$$3x = 27 - 3$$

$$3x = 24$$

$$x = 24 - 3$$

$$x = 21$$

Neste caso, o aluno teria transitado da linguagem escrita para a algébrica, demonstrando indícios do reconhecimento de letras como incógnitas, contudo, teria demonstrado evidências de não verificação da ideia de equivalência e/ou de não compreensão da resolução de uma equação. Esta é apenas uma hipótese, representa uma das inúmeras maneiras de resolução que poderiam ser evidenciadas e uma das diversas outras situações que poderiam ser ofertadas.

Aliás, variadas tarefas precisam ser ofertadas, pois defende-se que um único tipo de situação é insuficiente para verificar se um subsunçor está presente e é relevante na estrutura cognitiva do aprendiz. Conforme mencionado, quando se configura o cenário de um estudante não dispor de conhecimentos prévios específicos e relevantes para dar significado ao novo conhecimento, ou que estejam desconexos, com alguma obliteração, Ausubel (1963), sugere a estratégia de utilização de organizadores prévios. São recursos instrucionais, materiais que têm a função de mediadores (pontes cognitivas) entre o conhecimento que o estudante já possui e o que ele deveria possuir para aprender um novo conhecimento, de forma significativa.

Na situação hipotética, recém sugerida, na busca por subsunçores referentes às equações, poderia ser ofertado, por exemplo, um material em formato de uma videoaula que estabelecesse, de maneira mais ampla, a retomada de aspectos de resolução de equações, que reforçassem a ideia de equivalência entre os membros de uma equação. Ou, ainda, caso o estudante não verificasse a utilização de letras como incógnitas, poderia ser oportunizada uma atividade que estabelecesse a comparação de uma situação do cotidiano dele, de tal maneira que fosse necessária a utilização de uma grandeza desconhecida, que carecesse da substituição por uma letra.

Este tipo de material (organizador prévio), é introdutório, ou seja, pode ser utilizado para ancorar as informações que ainda não estão estabilizadas na estrutura cognitiva e pode servir para dar uma visão geral do assunto, em nível de abstração mais alto, antes de confrontar o estudante com o material de aprendizagem. Moreira (2009), discorre que, em algumas situações, os estudantes possuem conhecimentos prévios, porém não verificam sua relação com o novo conhecimento e, nestes casos, se os organizadores prévios permitirem a explicitação dessa relacionabilidade, sua utilização pode ser bem-sucedida.

Ressalta-se alguns aspectos similares desta situação com a zona de desenvolvimento proximal, definida por Vygotsky (1988), pois, por meio da interação social, poderá ocorrer a maturação de ideias que estão prestes a emergir. É preciso deixar claro, porém que o autor se refere à interação entre pessoas, não entre o material (organizador prévio) e o aprendiz. Neste ponto, salienta-se a importância de um contexto que propicie o intercâmbio de ideias entre os integrantes e da oferta de situações que suscitem a negociação de significados e, neste cenário, a linguagem tem papel fundamental. Ausubel, Novak & Hanesian (1980), discorrem que ela desempenha um papel de facilitador da aprendizagem significativa, por meio da recepção e descoberta e, sem ela, a aprendizagem pode ser elementar, mecânica.

Anteriormente, apresentou-se, na visão da autora como ocorre este processo de aquisição e organização de significados na estrutura cognitiva do sujeito que aprende, contudo ancorou-se o entendimento na ilustração da Figura 3, proposta por Moreira e Masini (2001), na qual os autores destacam o princípio da assimilação, simbolicamente.

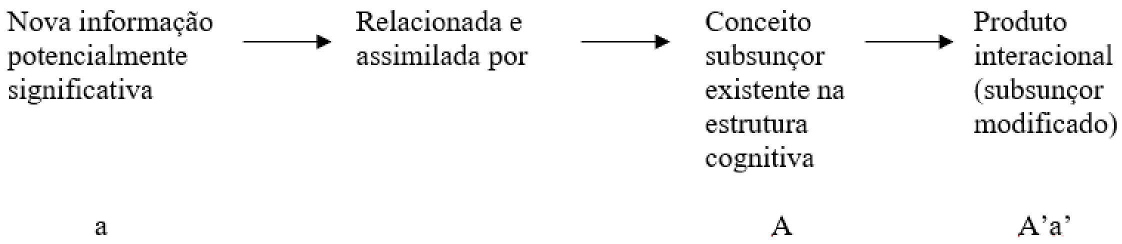


Figura 3: princípio da assimilação.

Fonte: Moreira, Masini (2001, p. 25).

Este diagrama ratifica a ideia central da teoria de Ausubel (1963), pois denota que, para que a aprendizagem de conceitos seja significativa, é necessário que a nova informação se relacione com um subsunçor relevante, disponível na estrutura cognitiva do sujeito que aprende para que, então, ambos interajam e sejam diferenciados, aprimorados. Com isso, tanto a nova informação, quanto o subsunçor, permanecem presentes na estrutura cognitiva, porém mais bem elaborados. Assim, progressivamente, o subsunçor vai ficando mais estável e rico em significados, podendo, cada vez mais, facilitar novas aprendizagens.

Detalhando-se, especificamente, o conceito de subsunçor, cabe ressaltar que este pode ser caracterizado de diversas formas, por exemplo, uma concepção, um signo, um modelo mental, uma ideia prévia especificamente relevante, inclusive como "invariantes operatórios"[17] (Moreira, 2011, p. 28) e serve para ancorar novas informações. Em suma, a noção de subsunçor refere-se a um conhecimento estabelecido na estrutura cognitiva do aprendiz e que permite, por interação, dar significado a novos conhecimentos. Ademais, os subsunçores de uma pessoa podem sofrer inúmeras alterações a longo de sua vida, pois, Moreira (2011, p. 18), aponta que

> a clareza, a estabilidade cognitiva, a abrangência, a diferenciação de um subsunçor, variam ao longo do tempo, ou melhor, das aprendizagens significativas do sujeito. Trata-se de um conhecimento dinâmico, não estático, que pode evoluir e, inclusive, involuir.

Isto denota que os subsunçores são específicos de cada sujeito, pois integram a estrutura cognitiva que os contém, variam conforme as experiências individuais, que são construídas em diferentes contextos e dependem de como ocorreu o processo de aprendizagem ao longo da vida escolar. Levando-se todos estes aspectos em consideração, os novos conhecimentos interagirão com conceitos individuais já adquiridos por cada aprendiz e, a partir disso, o novo conhecimento ganhará significados aceitos no contexto da matéria de ensino, assim como significados pessoais.

E, justamente, na estrutura cognitiva é que os subsunçores estão hierarquicamente

---

[17] Resumidamente, pode-se dizer que são as formas que o indivíduo irá disponibilizar para expressar seu raciocínio diante de uma classe de situações. Seu conceito é crucial para o entendimento da TCC e é detalhado no item 3.2.

organizados, de tal modo que sua dinâmica se modifica a todo tempo, dependendo do campo de conhecimentos que leva-se em consideração.

3.1.1 Diferenciação progressiva e reconciliação integradora

Esta dinamicidade dos subsunçores na estrutura cognitiva de um aprendiz, é caracterizada por dois processos chamados diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

Com a finalidade de compreender estes processos, estabeleceu-se um modelo pessoal da autora: quando obteve-se o título de licenciada em Matemática, foi preciso elaborar o Trabalho Final de Graduação (TFG) – que é o equivalente a uma monografia. Para isso, recorreu-se ao subsunçor projeto, que, no início da graduação, concebia-se como um plano, um esboço.

Mas, ao longo do curso, verificou-se que um projeto acadêmico, teria que seguir determinados padrões e apresentar normas específicas. Na sequência, concluiu-se o curso de Mestrado e iniciou-se o curso de Doutorado, nos quais também foi preciso elaborar outros dois projetos. Com isso, novos significados foram atribuídos ao subsunçor projeto, pois teve-se que acrescentar mais riqueza de detalhes, pela necessidade de aprofundamento que as etapas exigiram, além de outras normas terem sido verificadas.

Neste contexto, houve a sucessiva utilização do subsunçor projeto, exigindo direcionamentos específicos para sua elaboração em diferentes contextos, o que caracterizou a diferenciação progressiva. Além disso, houve a reconciliação integradora, pois, em todos os casos, utilizou-se uma estrutura semelhante, seguindo um eixo norteador.

Elaborou-se a Figura 4 com a pretensão de complementar esta ideia.

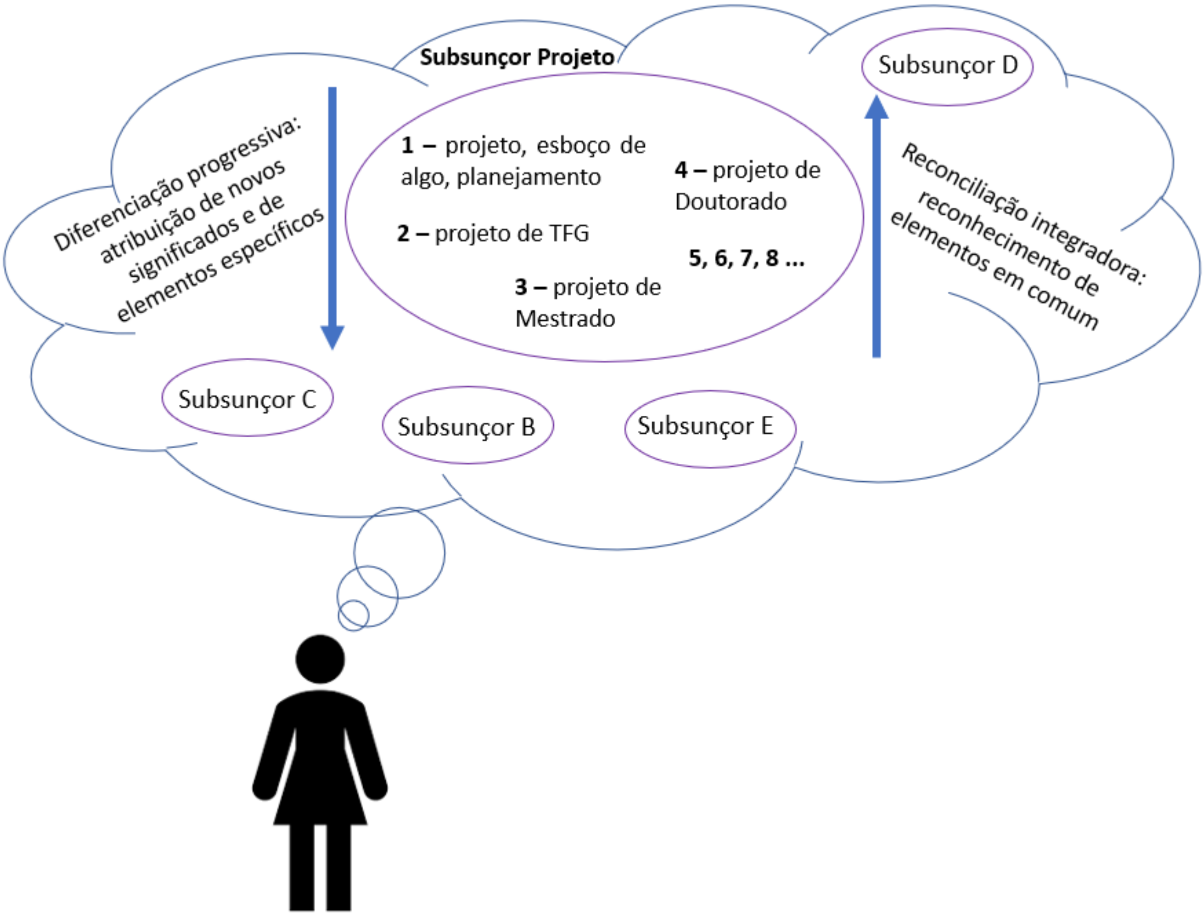


Figura 4: diferenciação progressiva e reconciliação integradora do subsunçor "projeto", na estrutura cognitiva da autora.
Fonte: a autora.

Sob esta égide, na estrutura cognitiva da autora desta investigação, a ideia de projeto vem se tornando, progressivamente, mais refinada e capaz de servir de ancoradouro para novos projetos, ao mesmo tempo que vem consolidando-se a ideia básica de projeto, com características gerais e abrangentes. Na figura 4, também foram explicitados outros subsunçores na tentativa de representar a ideia de que a estrutura cognitiva abarca inúmeros subsunçores, os quais podem estar relacionados ou não com o de projeto, caracterizando uma estrutura dinâmica, hierarquicamente organizada, dependente do campo de conhecimentos que está sendo evidenciado.

Além destes processos, Ausubel (2003), assegura que, para uma aprendizagem ser considerada significativa, duas condições são necessárias:

- O material apresentado pelo professor deve ser potencialmente significativo;
- O aprendiz deve apresentar uma predisposição para a aprendizagem, relacionando o material com seus conhecimentos prévios.

A primeira condição, depende da natureza do material a ser aprendido, pois ele deve possibilitar a interação não aleatória de novas ideias com os subsunçores pertinentes dos sujeitos. E na segunda condição, entretanto, é importante discernir que a predisposição a qual o autor se refere, não está relacionada ao fato de o professor motivar o aluno, mas com a intencionalidade do sujeito para aprender, pois é necessário que ele queira compreender determinado conceito de maneira não literal. Isto também dependerá da natureza do material, que deve ser potencialmente significativo, e da existência de subsunçores relevantes na sua estrutura cognitiva, que sejam relacionáveis a este material.

Entretanto, caso haja pouca associação de novos conceitos com os subsunçores do aprendiz, sua aprendizagem poderá ser considerada mecânica, sendo, portanto, aquela na qual os conteúdos estarão relacionados entre si de uma maneira arbitrária, isentas ou carentes de significado. Neste ponto, cumpre reafirmar que "independentemente de quão potencialmente significativo possa ser o material a ser aprendido, se a intenção do aprendiz for, simplesmente, a de memorizá-lo arbitrária e literalmente o processo de aprendizagem será mecânico". (Moreira, 2006, p. 20).

Sob essa ótica, na aprendizagem mecânica, o novo conhecimento fica na memória do aprendiz de maneira literal, ou seja, não há interação entre o novo conhecimento com algum aspecto especificamente relevante da estrutura cognitiva preexistente. O novo conhecimento não se incorpora à estrutura cognitiva, nem a modifica. Além disso, o aprendiz não dá significados ao que aprende, apenas armazena, mecanicamente, a informação que recebe. Conforme evidenciado por Moreira (2011), isso é o que ocorre quando o estudante decora fórmulas, leis, macetes, mas esquece logo após a prova.

Contudo, Moreira e Masini (2001) ressaltam que a distinção entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica não é dicotômica, pois estes dois tipos de aprendizagem estão em extremos opostos de um mesmo contínuo. Isso significa que pode haver uma progressividade na aprendizagem durante este processo.

Para elucidar esta ideia, Moreira (2012a), ratifica que uma aprendizagem não necessariamente precisa ser eleita como significativa ou mecânica, pois existe uma zona cinza intermediária, na qual muitas aprendizagens acontecem, conforme ilustrado no esquema proposto pelo autor, por meio da Figura 5.

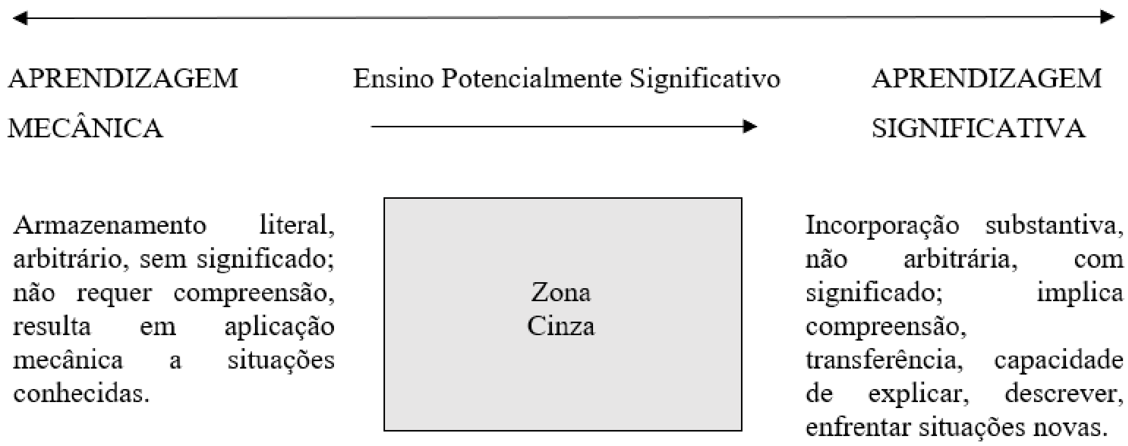


Figura 5: o contínuo da aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica.
Fonte: Moreira, (2012a, p. 12).

Nesta zona cinza, é onde destaca-se o trabalho do professor como um mediador da aprendizagem dos estudantes, pois a passagem da aprendizagem mecânica para a aprendizagem significativa, depende da existência de subsunçores adequados, da predisposição do aluno para aprender e da utilização de materiais potencialmente significativos.

Além disso, podem ocorrer situações nas quais a aprendizagem mecânica seja desejável ou necessária, por exemplo, em uma fase inicial da aquisição de um novo corpo de conhecimentos.

Pode-se ratificar estas ideias tomando-se como exemplo a aprendizagem das letras, dos números e de nossos processos de fala e escrita. Para isso, foi preciso que alguém nos ensinasse os símbolos que compõem nosso alfabeto e nosso sistema de numeração decimal. Por vezes, foi necessário que decorássemos algumas palavras, sílabas e sons para que, depois de algumas experiências, internalizássemos seus significados e pudéssemos expandir nossas concepções iniciais.

Outrossim, existe a possibilidade de um subsunçor ser esquecido, com relativa perda de significados com o passar do tempo, caso não seja frequentemente utilizado. Este esquecimento pode ocorrer mesmo que uma aprendizagem tenha sido significativa, o que Ausubel (2000) nomeou assimilação obliteradora. Além disso, Moreira (2011), enfatiza que esse processo de esquecimento é inevitável, mas que, quando a aprendizagem é significativa, o resgate ou a reaprendizagem de um conceito é viável e, relativamente, rápido.

3.1.2 Os tipos e formas de aprendizagem significativa

Outro aspecto da TAS, que considerou-se neste estudo, são os três tipos e as três formas de aprendizagem significativa:

- A aprendizagem representacional, aproxima-se da aprendizagem por memorização, pois ocorre quando uma pessoa atribui os significados de símbolos particulares ou palavras, especificamente ao objeto que representam. Pode-se considerar, por exemplo, a ideia de borracha que uma criança atribui à palavra escrita. Essa palavra significa a simbolização da borracha que ela utiliza para apagar seus escritos a lápis, ela ainda não domina o conceito de borracha, apenas uma representação do objeto. Entretanto, ainda que a aprendizagem representacional seja próxima à aprendizagem mecânica, ela é significativa porque o símbolo significa um referente concreto.
- A aprendizagem conceitual pode ser considerada, inicialmente, uma aprendizagem representacional, já que conceitos podem ser representados por símbolos. (Ausubel, 1978, p. 89), define conceitos como "objetos, eventos, situações ou propriedades que possuem atributos criteriais comuns e são designados, em uma dada cultura, por algum signo ou símbolo aceito". No tipo de aprendizagem anterior, considerou-se a ideia que uma criança atribui à palavra borracha, quando aprende seu significado. Pode-se dizer que a aprendizagem conceitual, neste caso, ocorrerá, quando ela perceber que existe uma infinidade de borrachas, de diversos formatos e tamanhos e que o material pode ser utilizado na confecção de muitos outros objetos. Para isto, necessitará de diversas confrontações com este(s) objeto(s).
- A aprendizagem proposicional refere-se ao significado de ideias em forma de proposição. "A tarefa não é aprender o significado dos conceitos e sim, o significado das ideias expressas verbalmente, por meio desses conceitos, sob forma de proposição" (Moreira, 2006, p. 27), ou seja, a tarefa é aprender o significado que está além da soma dos significados das palavras ou conceitos que compõem a proposição. Novamente, referindo-se ao exemplo da borracha, pode-se afirmar que, nesta fase, a criança será capaz de compreender frases, proposições verbais que envolvam a palavra borracha dentro de diferentes contextos e, juntamente, com outros conceitos.

Verifica-se que os dois primeiros tipos de aprendizagem (representacional e conceitual), são basilares para que ocorra o terceiro tipo (proposicional), pois, para dominar um conceito de maneira mais ampla, dentro de diferentes contextos e proposições, é preciso, sobretudo, saber identificá-lo e isso passa, necessariamente, pela diferenciação progressiva, ou seja, aprende-se do fácil para o complexo e não o contrário.

De mesmo modo, a aprendizagem significativa pode ocorrer de três formas: por subordinação, superordenação ou de modo combinatório.

- Na primeira, por subordinação, as novas informações adquirem significado por um processo de ancoragem a subsunçores relevantes, mais gerais e inclusivos, existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, ou seja, o novo conceito aprendido encontra-se subordinado, sob a dependência dos subsunçores. Como esta estrutura cognitiva tende a uma organização hierárquica em relação a abstração e generalidade de ideias e conceitos, a emergência de novos significados conceitos ou proposições, reflete uma subordinação do novo conhecimento à estrutura cognitiva existente.
- Na aprendizagem superordenada, o novo conhecimento é mais geral e inclusivo. Este é obtido a partir da abordagem de conceitos ou de proposições relacionadas a ele, existentes na estrutura cognitiva do aprendiz e sua aquisição envolve processos de abstração, indução e síntese. Após alcançado, esse novo conhecimento passa a subordinar aqueles que lhe originaram. Contudo, Moreira (2012a), ressalta que este tipo de aprendizagem é mais incomum, sendo o primeiro, por subordinação, a maneira mais usual de ocorrer a aprendizagem significativa.
- E, por último, a aprendizagem é dita combinatória, se um novo conceito, aprendido a partir das interações com vários conhecimentos prévios, não é subordinado a nenhum específico, mas também não é tão geral e inclusivo, que possa subordinar algum conhecimento específico.

Além de todos estes aspectos da TAS, até aqui detalhados, na tentativa de responder aos objetivos traçados neste estudo, considerou-se as oito etapas propostas por Moreira (2012b) para compor uma unidade de ensino potencialmente significativa – UEPS, que é uma sequência de ensino fundamentada teoricamente e plenamente compatível com a teoria idealizada por Ausubel (1963), pois fornece subsídios para alicerçar o trabalho do docente na busca pela facilitação da aprendizagem significativa. Essa sequência será detalhada mais adiante.

Após as elucidações feitas nesta seção, defende-se que as atividades que o professor fornece em sala de aula, são de fundamental importância, pois estas podem despertar no aluno a predisposição para aprender. Mas, para isso, é essencial que as atividades façam sentido para o estudante, ou seja, elas precisam estar relacionadas com o seu cotidiano, com seu contexto e, sobretudo, com os subsunçores disponíveis em sua estrutura cognitiva.

Neste âmbito, é indiscutível a importância do trabalho do docente. Faz-se necessário um redimensionamento no seu papel, pois prospecta-se que a aprendizagem significativa só será facilitada se o professor oportunizar meios para que o estudante se aproprie, efetivamente, dos conteúdos e conceitos envolvidos, proporcionando momentos de reflexão, de interação e de construção do saber matemático.

Desse modo, pontua-se a concepção de que a aprendizagem é algo subjetivo, não é quantificável, dificilmente as estratégias de resolução e pensamentos são explicitadas pelos aprendizes (sendo o professor essencial nesse processo de investigação), além de ser caracterizada por uma jornada lenta e acidentada. Portanto, neste estudo, defendeu-se a busca por indícios, evidências de aprendizagem significativa e não descobrir, simplesmente, se ela ocorreu ou não.

3.2 A Teoria dos Campos Conceituais (TCC)

Esta teoria foi concebida por Gérard Vergnaud[18], que teve como orientador, em sua tese de doutoramento, Jean Piaget[19]. Por ser discípulo de Piaget, o autor da TCC herdou e ampliou algumas referências de seu orientador, por exemplo os conceitos de esquema, de adaptação, de desequilibração e de reequilibração. Mas, também possui raízes na teoria de Vygotsky[20], pois calcou seus estudos, levando em consideração aspectos como a interação social, a linguagem, a simbologia e a zona de desenvolvimento proximal. Dessa forma, Vergnaud (1990, 2017), assegura que concilia e utiliza aquilo que o interessa das ideias de Piaget e Vygotsky, pois, para ele, não se trata de teorias opostas, mas que se completam de forma frutífera.

É importante salientar que, diferentemente de seu orientador, o autor da TCC trabalhou dentro da sala de aula e, por este motivo, foi instigado a se interessar por questões de dificuldades de aprendizagem dos alunos diante dos conteúdos escolares (mais especificamente no que se refere à Matemática), pois esta teoria surgiu, inicialmente, com o estudo das estruturas aditivas e multiplicativas. Porém, sua grandiosidade não se limita à aprendizagem de Matemática, sendo referenciada em inúmeras áreas do conhecimento como aporte para o ensino de ciências e a pesquisa nesta área, a exemplo de Moreira (2004).

Além disso, cabe distinguir entre a TAS de Ausubel (1963), que é uma teoria cognitiva, que sugere etapas a serem implementadas pelo professor na execução das atividades em sala de aula, com o intuito de promover a aprendizagem significativa e a TCC de Vergnaud (1990),

---

[18] Gérard Vergnaud nasceu em 1933, graduou-se em Matemática, Filosofia e Psicologia pela Universidade de Genebra. É doutor Honoris Causa da Universidade de Genebra e é um dos fundadores da Escola Francesa de Didática da Matemática. Foi fundador do Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREM) nas universidades da França, na década de 60.

[19] Jean Piaget (1896-1980), foi um biólogo, psicólogo e epistemólogo suíço que defendeu uma abordagem interdisciplinar para a investigação epistemológica e fundou a epistemologia genética, teoria do conhecimento com base no estudo da gênese psicológica do pensamento humano.

[20] Lev Vygotsky (1896-1934), foi um psicólogo e pensador importante em sua área e época. Foi pioneiro no conceito de que o desenvolvimento intelectual das crianças ocorre em função das interações sociais e condições de vida.

que é uma teoria psicológica, que visa minuciar como ocorre o processo de funcionamento cognitivo do sujeito em situação na conceitualização do real, o qual exige o domínio progressivo de situações, conceitos, teoremas e representações.

Porém, apesar de diferirem um pouco quanto à sua natureza, pode-se dizer que, neste ponto, a TAS e a TCC são similares, pois ambas derivam de uma perspectiva cognitivista, na qual descrevem e analisam processos complexos, lentos e particulares, que dependem das experiências pessoais e aprendizagens de cada sujeito. Aliás, mais do que simplesmente afirmar que são similares neste aspecto, compactua-se com Moreira (2004), quando pontua que as teorias complementam-se e podem ser aliadas do trabalho do professor em sala de aula.

Para o entendimento da teoria proposta por Vergnaud (1990), denota-se como campo conceitual, um corpo de conhecimentos, um conjunto de problemas, situações cujo domínio requer a mobilização de conceitos e procedimentos de naturezas distintas. O autor considera que o domínio progressivo de um campo conceitual, exige que o aprendiz seja confrontado com uma variedade de situações que, por sua vez, necessitam do domínio de inúmeros conceitos e, disso, surge a necessidade de utilizar seus esquemas, representações simbólicas, raciocínios, linguagem, gestos, enfim, todos os artifícios que dispõe em sua estrutura cognitiva para expressar e ampliar seu entendimento diante de diferentes classes de situações.

À medida que isto ocorre, o indivíduo se adapta às situações. Mais especificamente, a aprendizagem ocorre quando seus esquemas se adaptam, ou seja, as formas de organização da atividade humana se modificam diante do recursivo enfrentamento com novas situações. O desenvolvimento cognitivo é um processo com continuidades e rupturas, pois, diante do confronto com diferentes situações e conceitos, os esquemas de pensamento ora se estabilizam, ora se desestabilizam.

Esta interpretação repousa na descrição de Vergnaud (2017, p. 18), quando discorre que "os novos conhecimentos se constroem tanto apoiados nos conhecimentos anteriores, como se opondo por vezes a estes". Este processo configura a experiência e, como dito anteriormente, é lento, demanda vários anos e possui continuidades e rupturas, não ocorre de maneira linear. Um indivíduo se torna competente na mobilização de determinado conceito, à medida que enfrenta este processo inúmeras vezes, ou seja, considera-se que as competências que um indivíduo possui, desenvolvem-se ao longo da sua vida toda e dependem das situações com as quais se depara e com os conceitos que elas exigem para serem dominadas.

Como pode-se verificar, para explicitar a ideia central da TCC, é preciso recorrer ao significado da palavra "situação", pois, nesta teoria, as situações exercem papel fundamental. Vergnaud (1993), assegura que o desenvolvimento cognitivo está atrelado ao conteúdo de ensino e, portanto, é dependente das situações a serem enfrentadas pelo sujeito. Coaduna-se, portanto, que as situações representam as tarefas oportunizadas pelo professor, ou seja, as situações enfrentadas pelo aprendiz, denotam o ponto de partida da conceitualização. Esta ideia é corroborada por Vergnaud (1990, p. 52), o qual destaca que

> [...] o saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer, de situações para dominar. [...] por 'problema' é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução.

Por meio dessa afirmação, evidencia-se a grandiosidade do papel do professor como provedor de intervenções didáticas adequadas aos campos de conhecimentos abordados e de mediador, que acompanha a evolução temporal do desenvolvimento cognitivo de seus estudantes, que investiga e está atento ao contexto de suas enunciações, pois, disso, depende o progresso do domínio de um campo conceitual, por parte dos aprendizes.

Neste processo de desenvolvimento cognitivo, que é dependente das situações a serem enfrentadas pelo sujeito, a conceitualização é apontada como o cerne desse processo, assim evidenciado em Vergnaud (1998). Disso, percebe-se a conceitualização como uma construção cognitiva de conceitos, a maneira como o sujeito aprende e desenvolve seus esquemas em um determinado contexto ou situação. Ela ocorre por meio de dois mecanismos, a forma operatória e a forma predicativa. Nas palavras de Vergnaud (2017, p. 19), "expressamos nossos conhecimentos tanto pelo que dizemos (forma predicativa) como através do que fazemos em situação (forma operatória)".

Complementando-se esta ideia, Moreira (2017), explicita que a fase predicativa das aprendizagens ocupa apenas a parte visível de um *iceberg* – no sentido figurado – e a parte muito maior, a que fica invisível, é constituída pela fase operatória, nas quais o fazer tem prioridade sobre o dizer. Além disso, Vergnaud (1990), averigua que, nesta parte escondida, estão contidos os invariantes operatórios que ainda permanecem implícitos e, na parte visível, os conceitos e teoremas explícitos.

Por meio destas constatações, reforça-se a ideia de que, por mais que em determinados momentos de seu processo de conceitualização, os sujeitos façam uso de somente uma dessas formas, compactua-se com Vergnaud (2016, p. 14), quando afirma que "os diferentes níveis de complexidade do conhecimento referem-se tanto à forma predicativa quanto à forma operatória, de tal forma que nem um nem o outro são autossuficientes".

Contudo, o autor afirma que, mesmo os conceitos e teoremas implícitos, podem, progressivamente, tornarem-se explícitos e cientificamente aceitos, mas, para isso, bastante tempo será demandado. Neste cenário, parafraseia-se Vergnaud (1998), quando postula que o caráter do conhecimento é modificado à medida que é compartilhado e debatido e que esta é a principal e, provavelmente, mais árdua tarefa do professor: prover situações frutíferas que promovam o desenvolvimento do repertório de esquemas e representações dos estudantes, por meio da mediação, da interação e da externalização dos invariantes operacionais utilizados por eles.

3.2.1 O conceito

Já que na forma predicativa, explicitável do conhecimento, estão contidos os conceitos, atentemo-nos para sua definição. Reiterando-se, Vergnaud (1990, 1993), anunciou que um campo conceitual é formado por um conjunto de situações que dão sentido aos conceitos. Verificou-se, anteriormente, que as situações são as tarefas de aprendizagem oportunizadas pelo professor ao aprendiz. Como elas dão sentido aos conceitos, recorre-se à explicação do autor para minuciar seu significado. Confere-se que Vergnaud (1993), define conceito como um conjunto interligado de três elementos, representado, simbolicamente por $C = (S, I, R)$, no qual

- S (é o referente) é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito;
- I (é o significado), um conjunto de invariantes operatórios (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade dos conceitos. Eles podem ser reconhecidos (implícitos ou explícitos) e utilizados pelos sujeitos para dominar as situações do primeiro conjunto;
- R (é o significante), um conjunto de representações simbólicas verbais e não verbais (linguagem natural, sentenças formais, gráficos, diagramas etc.), que permitem representar os procedimentos e invariantes operatórios do segundo conjunto e, consequentemente, as situações do primeiro conjunto.

Sob esta guarnição, entende-se que o sujeito atribui significado a um conceito, por meio de uma variedade de situações com as quais é confrontado. Além disso, utiliza seus invariantes operatórios (que podem ser reconhecidos, externalizados), para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto, contando, para isso, com o auxílio das representações simbólicas.

Direcionando-se a definição de conceito dada pelo autor da TCC, para o campo conceitual das equações de primeiro grau, bem como a relação com sua representação gráfica, que é o tema de estudo desta pesquisa, propõe-se a ilustração da Figura 6.

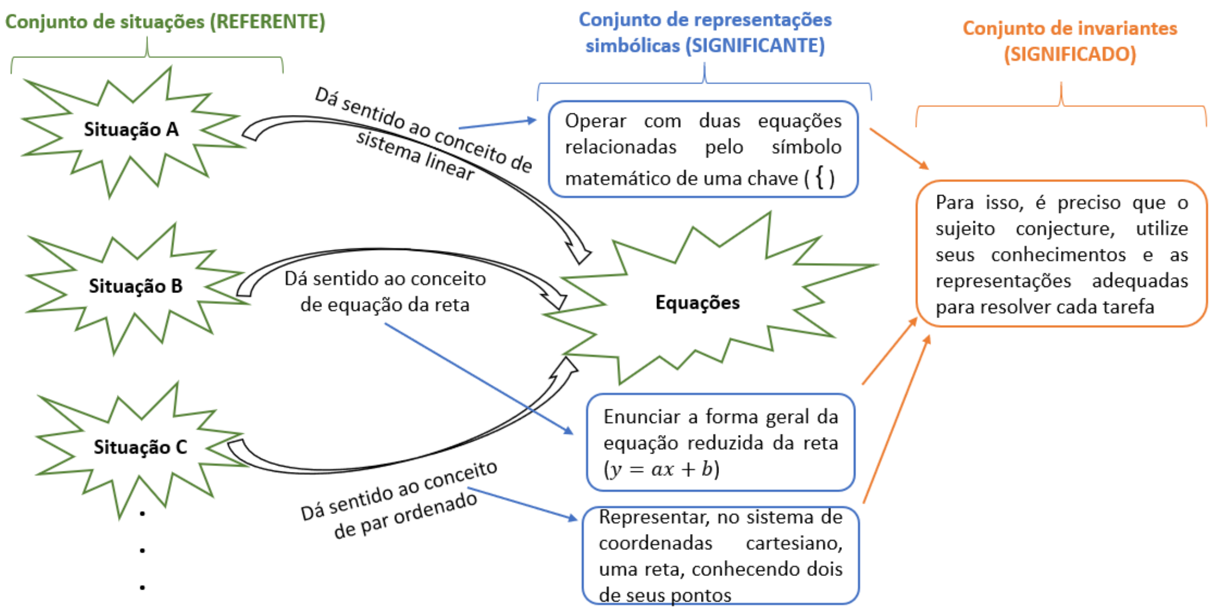


Figura 6: proposta de conceito para o campo conceitual das equações, conforme a visão da autora da pesquisa.
Fonte: a autora.

Nesta ilustração proposta, é evidente que apresenta-se, um pequeno excerto na tentativa de exemplificar os três elementos do conjunto ($C = S, I, R$) que integram o conceito na perspectiva do campo conceitual das equações algébricas de primeiro grau, pois seria improvável ilustrar todas as situações e todos os conceitos que compõem este contexto. Isto porque há inúmeros conceitos e, sobretudo, uma infinidade de situações que fazem parte deste campo conceitual. Além disso, considerando-se o público-alvo desta investigação, incluiu-se no primeiro conjunto, as situações que dão sentido aos conceitos de demanda, oferta, custo, lucro, receita, ponto de equilíbrio, ponto de nivelamento, dentre outros.

Para enunciar o conceito de campo conceitual, Vergnaud (1996), elenca três justificativas como forma de análise para a questão da obtenção de conhecimento:

1) um conceito não se forma por meio da análise de um só tipo de situação. Isto sugere a necessidade de ofertar situações diversificadas, as quais permitam ao estudante detectar que os mesmos aspectos de um mesmo conceito podem diferir, conforme os procedimentos de tratamento que cada uma delas exige;
2) uma situação não pode ser analisada com um só tipo de conceito. Ou seja, da mesma forma, o estudante deve ser submetido a tarefas diversificadas, nas quais possa construir, comparar, testar e validar seus próprios modelos explicativos;
3) a construção e apropriação das propriedades de um conceito ou dos aspectos de uma situação é um processo longo. Esta afirmação, remete ao processo de conceitualização do real, que depende da progressão dos modelos pessoais para os modelos científicos

do estudante e isto pode demandar vários anos, pois não ocorre de maneira contínua.

Com base nesta ideia, na Figura 6, por exemplo, a "situação A", pode necessitar de mais de um conceito para ser dominada, inclusive os mesmos conceitos demandados nas demais situações. Da mesma forma, o conceito de equação reduzida da reta pode estar atrelado a mais de uma situação e, assim, estabelece-se relações entre as situações e os conceitos.

Diante de tais constatações, evidencia-se a riqueza de detalhes que Vergnaud (1983), sugere ao anunciar que é inviável estudar conteúdos de maneira compartimentada, pois campos conceituais contém entrelaçamentos, imbricações, ramificações e uns podem ser importantes para a compreensão de outros. Referindo-se, especificamente, ao campo conceitual das equações, Vergnaud (1996), destaca que a principal funcionalidade da álgebra é se constituir em um instrumento que permite a resolução de problemas que não poderiam ser resolvidos somente com recursos do campo da aritmética. Contudo, Moreira (2002) descreve a importância dada pelo autor da TCC aos recortes que precisam ser feitos para que seja possível delimitar um campo conceitual.

Resgatando-se a ideia principal da teoria, por meio da afirmação de Vergnaud e Plaisance (2003), um aprendiz atribui sentido a um conceito à medida que tal conceito for abordado em uma variedade de situações. Complementando-se esta afirmação, Moreira (2017, p. 73), exprime que "o sentido é uma relação do sujeito com as situações e com os significantes". Dessa forma, atenta-se, novamente, ao conceito de situação, pois ele remete ao conceito de esquema. Logo, o sentido de um conceito é atribuído por meio de um conjunto de esquemas, que representam as formas de um indivíduo estruturar seu pensamento diante das atividades com as quais é confrontado.

3.2.2 O esquema

Na Figura 6, apresentou-se um recorte do campo conceitual das equações algébricas de primeiro grau, na perspectiva da autora. Nesta mesma figura, poder-se-ia denotar os esquemas na terceira coluna, pois estão relacionados ao "significado", aos comportamentos estruturados do sujeito. Disso, entende-se que diante de uma determinada situação, o sujeito organiza seus métodos de resolução e, como esclarece Moreira (2002), essa organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações é chamada, por Vergnaud, de esquema.

Julgou-se pertinente destacar que Vergnaud (1998), estabelece uma comparação entre esquemas e algoritmos, quando julga que algoritmos são esquemas, mas a recíproca não é sempre verdadeira, pois esquemas só se tornam algoritmos caso sejam utilizados repetidamente para tratar as mesmas situações. Neste caso eles se transformam em esquemas ordinários ou em hábitos. Ademais, Vergnaud (1998), aprofunda-se em sua definição e acrescenta quatro componentes para a formação de um esquema:

1) *objetivos* (metas, submetas, subobjetivos e antecipações), pois um esquema é dirigido sempre para a resolução de uma determinada classe de situações. Um esquema pode apresentar diversos objetivos, além disso, orienta os comportamentos observáveis e as atividades de pensamento implícitas;
2) *regras de ação, do tipo* "se... então", que são regras de busca de informação, dão a direção e o controle da sequência de ações elegidas na conduta do sujeito;
3) *raciocínios* (possibilidade de inferência), que permitem determinar as regras em relação às informações e à prática dos invariantes operatórios disponíveis pelo sujeito.
4) *invariantes operatórios* (são formados por conceitos-em-ação e teoremas-em-ação), que constituem a base conceitual dos esquemas. São as formas de raciocínio e de representação. Guiam o sujeito em situação, fazem a articulação entre teoria e prática e são largamente implícitos.

Por meio da definição dos quatro componentes do esquema, corrobora-se que todos eles orientam a conduta do sujeito diante da tomada de decisões, mas dentre eles, atenta-se para os invariantes operatórios, que contém dois ingredientes (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação), pois Vergnaud (1996), pondera que eles compõem a base conceitual implícita que permite obter as informações necessárias para alcançar os objetivos e inferir as regras de ação mais pertinentes para representar a resolução de uma situação.

Ao descrever o que são estes dois ingredientes, Vergnaud (1996, 1998, 2017), alega que conceitos-em-ação são predicados ou uma categoria de pensamentos, considerados como pertinentes pelo sujeito na ação em situação. Eles captam as informações adequadas para lidar com determinadas tarefas e selecionam os teoremas-em-ação necessários para prosseguir e utilizar as regras de conduta para, então, alcançar as metas e submetas traçadas para obter êxito (o êxito se refere à interpretação dada pelo aprendiz, não está atrelado, necessariamente, ao raciocínio correto, aceito cientificamente).

Dessa forma, interpreta-se que os conceitos-em-ação são utilizados quando se realiza uma busca para identificar ideias pertinentes e relevantes para resolver determinada situação. Após esta etapa, precisa-se estabelecer o caminho a ser percorrido para alcançar o objetivo traçado e, neste ponto, utiliza-se os teoremas-em-ação, que são as regras de ação ou as proposições que norteiam a conduta do sujeito.

Estes ingredientes são cruciais no cenário da conceitualização e, infelizmente, conforme Vergnaud (2009), em sua maioria, eles permanecem implícitos ao longo da ação do sujeito, mas isto pode ser minimizado, por meio da ação pedagógica. Compactuando-se com o autor, considera-se que o desenvolvimento temporal dos modelos explicativos dos estudantes, induzido a partir dos conceitos-em-ação e dos teoremas-em-ação utilizados por eles, podem ser estimulados e explicitados com auxílio do professor.

Para um melhor entendimento do que são os ingredientes dos invariantes operatórios, atreveu-se a ilustrar uma situação que, empiricamente, julga-se ser corriqueira em sala de aula. Apresenta-se a Figura 7 como um possível modelo explicativo para os invariantes operatórios nessa situação do campo conceitual das equações algébricas de primeiro grau. Ela apresenta uma sequência numérica, a qual sugere-se que seja obedecida no momento da leitura.

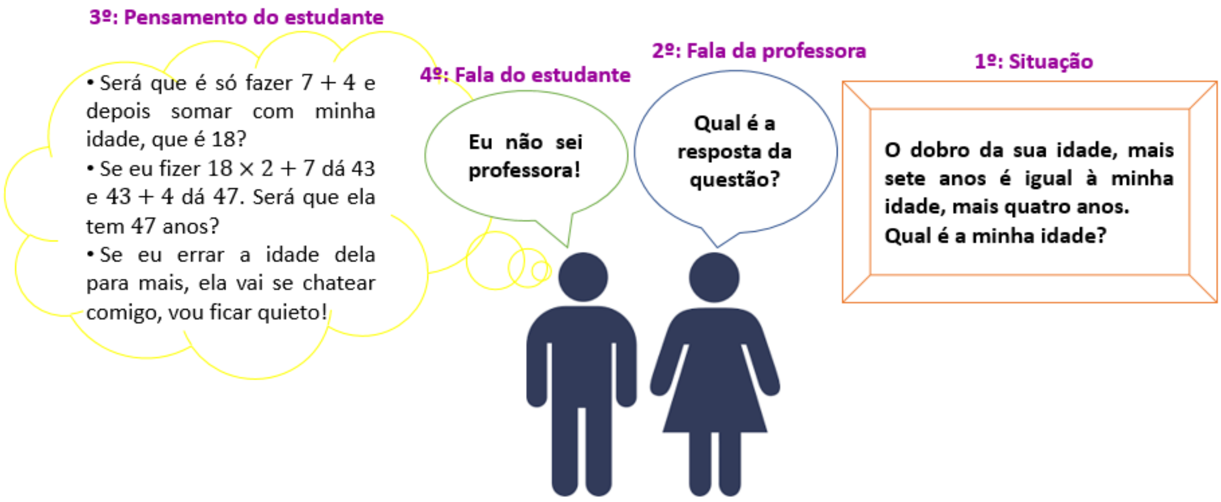


Figura 7: situação hipotética para analisar possíveis invariantes operatórios na conduta do sujeito.
Fonte: a autora.

Nesta situação, denota-se que a forma operatória do conhecimento do estudante para a utilização de letras como incógnitas, bem como para a resolução de uma equação, hipoteticamente permaneceu implícita diante da situação e a forma predicativa o fez externalizar um conhecimento inferior ao que estava presente em sua bagagem cognitiva, pois ele conjecturou algo, mas não externalizou verbalmente seu pensamento. Retoma-se, então, a ideia sugerida por Moreira (2017), de que, na forma operatória, o fazer tem prioridade sobre o dizer. Dessa forma, precisa-se tomar cuidado quando se configura um cenário com estas características, pois, caso somente a resposta externalizada pelo aluno fosse levada em consideração, poder-se-ia concluir que ele não possui conhecimentos específicos relevantes em sua estrutura cognitiva para esta classe de situações. Mas, ao contrário, ele carrega invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação), porém ainda implícitos diante da suposta situação.

Além disso, Vergnaud (2017), explica que todos os registros de atividade do sujeito, determinam se ele é competente diante de uma classe de situações, ou seja, para averiguar uma competência, é necessário levar em consideração todo o caminho percorrido, tudo que foi produzido (gestos, linguagem e diálogo, representações) e não, somente, o resultado ou a resposta final.

Por meio desta concepção, reforça-se a importância do professor ser mediador, captador e investigador dos significados atribuídos pelos estudantes frente à uma classe de situações. No caso indicado na ilustração, em vez de, simplesmente, buscar pela resposta final, outros tipos de perguntas mais básicas poderiam ter sido enunciados pelo professor, para auxiliar o estudante a externalizar, de alguma forma, seus esquemas iniciais de pensamento, que se mantiveram, hipoteticamente, implícitos.

Condensando-se as ideias da TCC ora expostas, depreende-se que o desenvolvimento das competências, ou capacidades, dos estudantes, deriva de sua experiência frente ao confrontamento com diferentes situações, pois, para percorrer este processo, os aprendizes utilizam o conhecimento adquirido em situações mais básicas e adaptam seus esquemas para enfrentar as novas situações. Estes esquemas, por sua vez, contém os invariantes operatórios (que abarcam os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação). Neles, há conceitos não científicos implícitos que podem ser externalizados e "quando houver explicitação, negociação e transformação destes invariantes operatórios em conceitos e teoremas científicos, haverá desenvolvimento cognitivo", Santarosa (2013, p. 90).

Além disso, a maneira como os sujeitos utilizam seus esquemas está intimamente ligada à duas classes de situações, conforme sugere Vergnaud (1993, p. 2):

- Aquelas em que o sujeito dispõe, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento, e sob certas circunstâncias, de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
- Aquelas em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o, eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

Referindo-se à utilização dos esquemas diante do enfrentamento destes dois tipos de situação, o estudioso, salienta que ela não ocorre da mesma forma nos dois casos. No primeiro, os comportamentos derivam de condutas instintivas e mecânicas, que provém de um único esquema. No segundo caso, entretanto, verifica-se a utilização consecutiva de diferentes esquemas que podem, inclusive, competir entre si, mas que são acomodados, descombinados e recombinados para atingir a solução desejada.

Pontua-se, portanto, que a TCC leva em consideração tanto os conceitos já formalizados e consolidados, quanto os conhecimentos em via de formalização e, neste ponto, novamente, evidencia-se a indiscutível importância do papel de mediação do professor na organização de atividades que oportunizem a interação social no contexto educativo, pois estas são características cruciais para a aquisição de novos conceitos que podem estar contidos na zona de desenvolvimento proximal, ainda em processo de maturação. Essa tarefa exige uma imersão profunda no universo da pesquisa, de tal modo que o pesquisador esteja atento ao contexto de cada enunciação feita pelo estudante.

Dessa forma, é primordial focalizar-se na observação dos esquemas para compreender a evolução temporal do conhecimento dos sujeitos, uma vez que, são nos esquemas que encontram-se os elementos que regem a conduta, a organização do pensamento e as formas predicativa e operatória do conhecimento. Evidencia-se, desse modo, o sujeito-em-ação como foco principal da teoria e o professor como provedor de situações que envolvem um mesmo conceito ou diferentes conceitos. Em consonância com o autor da TCC, por meio dessa postura, acredita-se que é possível contribuir para que os estudantes dominem, progressivamente, determinado campo conceitual.

3.3 Entrelaçamento da TAS e da TCC: implicações para a pesquisa

Resgatando-se os assuntos discutidos nas seções 3.1 e 3.2, a TAS, de Ausubel (1963, 2000), é uma teoria cognitiva de aquisição de um corpo organizado de conhecimentos em situações formais de ensino, ou seja, é uma “teoria de sala de aula”. Não é uma teoria de ensino, no entanto, possui um referencial muito adequado para organizar o ensino, de modo a promover a aprendizagem significativa. A ideia básica dessa teoria é a de que, se fosse possível isolar um único fator como o mais importante para a aprendizagem cognitiva, este seria aquilo que o aprendiz já sabe, ou seja, o conhecimento já existente em sua estrutura cognitiva com clareza, estabilidade e diferenciação. Consequentemente, o ensino deveria levar em conta tal conhecimento e, para isso, seria necessário averiguá-lo previamente (Moreira, 2011).

Na TAS, o significado do novo conhecimento surge da interação com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do aprendiz com um certo grau de estabilidade e diferenciação. Nessa interação, não só o novo conhecimento adquire significado, mas, também, o conhecimento anterior fica mais rico, estável, mais elaborado e adquire novos significados. Desse modo, pode-se apurar que a interação entre conhecimentos novos e prévios configura a característica primordial da teoria.

Diante de tais constatações, é factível discernir que, tanto a ideia de progressividade como a de predisposição para aprender, até aqui mencionadas, são plenamente compatíveis e relacionáveis com a TCC de Vergnaud (1990), pois o autor detecta que um campo conceitual é um campo de conhecimentos, entretanto utiliza essa terminologia para denotar um conjunto de situações que dão sentido aos conceitos e pontua que o aprendiz conceitualiza, à medida que expressa seu conhecimento contido nos seus esquemas, tanto pela maneira como opera em situação (forma operatória), como pelos enunciados e explicações que é capaz de externalizar (forma predicativa). Além disso, alega que o domínio de um campo conceitual é lento, progressivo, com continuidades e rupturas. Verifica-se, portanto, que a ideia de progressividade a qual Vergnaud (1990) defende, é compatível com a defendida por Ausubel (1963).

Ademais, verifica-se que há mais pontos de intersecção nas duas teorias como, por exemplo, o fato de Ausubel (2003), defender que o professor necessita averiguar os subsunçores dos estudantes, conhecer sua estrutura cognitiva para, então, organizar as atividades facilitadoras da aprendizagem. Concomitantemente, detecta-se que Vergnaud (2017), assinala sobre a importância de o professor conhecer as dificuldades das tarefas cognitivas de seus alunos e, para isso, eles devem ter a oportunidade de explicitar seus esquemas (que abarcam suas concepções prévias), pois eles contêm teoremas-em-ação e conceitos-em-ação que, uma vez explicitados, podem evoluir para conhecimentos científicos.

Desse modo, é possível estabelecer relações entre o que são subsunçores na TAS e o que são invariantes operatórios, na TCC. Faz-se esta interpretação, inclusive, sob respaldo da definição de Ausubel (1963), quando discorre que o conhecimento prévio do aluno é fator determinante na assimilação de novas informações e, concomitantemente, na definição posta por Vergnaud (1990), quando explica que os invariantes operatórios são constituídos de teoremas e conceitos não científicos que, por meio do confronto com novas situações e da explicitação, podem tornar-se conceitos científicos.

Outro aspecto comum é que, nas duas teorias, o professor assume a missão de mediador e a linguagem constitui papel fundamental, pois "uma proposição explícita pode ser debatida, uma proposição tida como verdadeira de maneira totalmente implícita não. Assim, o caráter do conhecimento muda se for comunicável, debatido, compartilhado." (Moreira, 2011, p. 69). Ambas denotam a importância de "facilitar a transformação do conhecimento implícito em explícito e, para isso, a linguagem é imprescindível" (Moreira, 2011, p. 70).

Além disso, o autor da TCC dá importância à conceitualização, pois destaca que o sujeito se desenvolve cognitivamente à medida que conceitualiza. Para ele, o âmago do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização, mas são as situações que dão sentido aos conceitos, ou seja, se as situações não fizerem sentido para o aprendiz, ela ficará prejudicada. Esta concepção pode ser relacionada com a predisposição para a aprendizagem enunciada por Ausubel (2003), como condição para a aprendizagem significativa: se as situações não fizerem sentido para o aprendiz, a aprendizagem será mecânica, não significativa.

Disso interpreta-se que, nas duas teorias, pelo menos as primeiras situações, devem ser do contexto do aprendiz. Novas situações devem ser propostas em níveis crescentes de complexidade, mas as primeiras devem ser relacionáveis aos conhecimentos prévios dos aprendizes, precisam fazer sentido para eles e despertar a predisposição para a aprendizagem.

Outra relação que sinaliza-se entre as duas teorias é descrita por meio dos princípios de diferenciação progressiva e reconciliação integradora, que são mencionados por Ausubel (2003). É evidente que Vergnaud (1990), não nomeou tais princípios, contudo, leva em consideração que o sujeito conceitualiza à medida que atribui sentido aos conceitos, por meio do confrontamento com inúmeras situações. Considera-se, dessa forma, que isto caracteriza a diferenciação progressiva, pois, atribuir novos significados ao mesmo conceito diante de uma classe de situações, leva o sujeito a diferenciar progressivamente tal conceito.

Da mesma forma, a reconciliação integradora não é mencionada na TCC, mas quando Vergnaud (1990), adianta que um mesmo conceito pode permear diversas situações, consequentemente, isto possibilita ao sujeito, integrar significados e verificar similaridades de um mesmo conceito frente a diferentes situações, ou seja, realiza a reconciliação integradora de tal conceito.

A aprendizagem significativa é um processo lento, progressivo, que depende da existência/construção de subsunçores no campo conceitual em questão e da captação e reconciliação de significados. De maneira análoga, o domínio de um campo conceitual é lento, progressivo, com rupturas. Ambas dependem do domínio progressivo de situações-problema.

Analisando-se as duas teorias, assumidas para a pesquisa, verifica-se que a TAS é uma teoria de aprendizagem que preconiza a aquisição do conhecimento, em situação formal de ensino, enquanto, a TCC é uma teoria psicológica, que se propõe a localizar e estudar as continuidades e rupturas entre conhecimentos de seu ponto de vista conceitual.

Em outras palavras, Ausubel preocupa-se com a aquisição de conceitos explícitos e formalizados, chegando a propor princípios programáticos, como a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora e a consolidação. Neste último princípio, Ausubel, Novak & Hanesian (1980), abordam a ideia de que um novo tópico não deve ser introduzido antes que o precedente esteja estável e organizado.

Desse modo, pode-se interpretar que o que para Ausubel são corpos organizados de conhecimento, para Vergnaud são campos conceituais. A TCC não é uma teoria de ensino de conceitos explícitos e formalizados, mas subjacente, como já citado anteriormente, sugere que os conhecimentos-em-ação podem evoluir para conhecimentos científicos com o auxílio da mediação do professor.

Assim, Vergnaud (1993), por meio da sua teoria, fornece um referencial muito rico para compreender, explicar e investigar o processo da aprendizagem significativa de Ausubel (1963). Para o autor da TCC, não basta copiar e repetir, é necessário refletir sobre as ações e, por meio delas, superar as dificuldades que forem encontradas, pouco a pouco; logo, o processo de aprendizagem acontece aos poucos e a formação de um conceito pode durar um longo tempo.

Com base neste aprofundamento, verifica-se que há um entrelaçamento e complementação entre as teorias propostas pelos dois autores. Tenciona-se que, ambas, constituem um referencial teórico adequado para a problemática, para os objetivos e para as estratégias propostas nesta pesquisa. Dessa forma, elaborou-se a Figura 8 contendo a perspectiva da autora para a elucidação da simbiose das duas teorias nesta tese, sob amparo metodológico da UEPS.

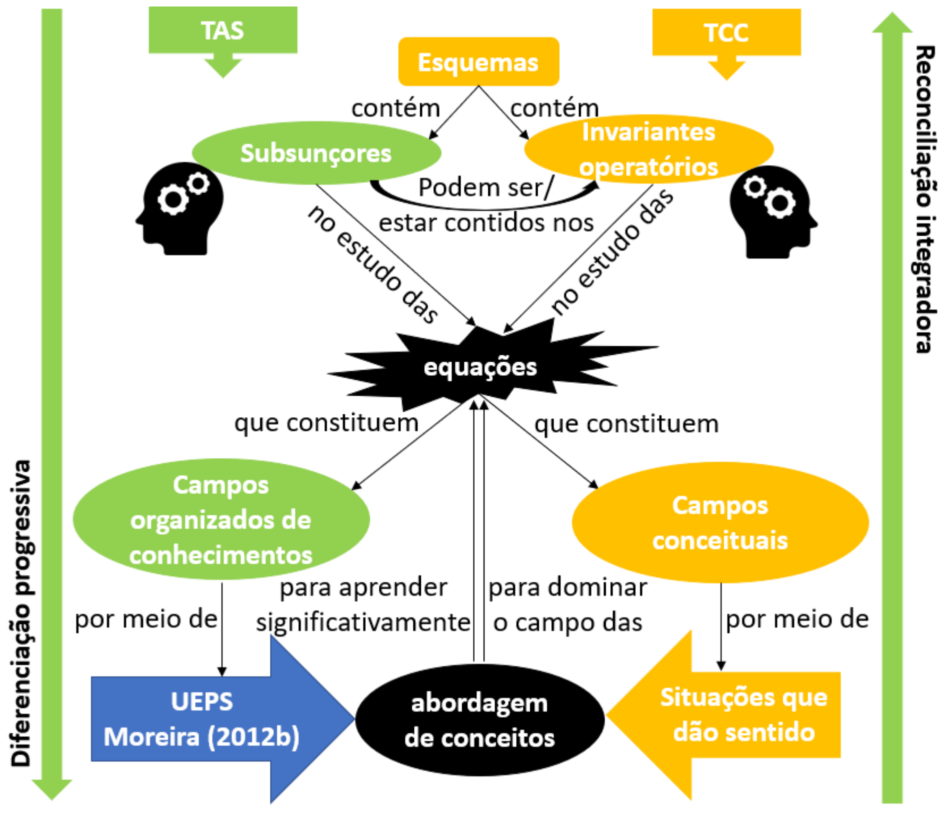


Figura 8: reconciliação integradora da utilização das duas teorias nas atividades da investigação.
Fonte: a autora.

Nesta figura, vislumbrou-se explicitar como utilizou-se de uma reconciliação integradora para integrar significados que unificam e complementam a utilização das duas teorias nas atividades desta pesquisa, de tal forma que, do lado esquerdo, na cor verde, localizam-se os aspectos da TAS utilizados e, do lado direito, na cor laranja, os da TCC. Somente uma ilustração está em cor diferente (azul), pois contém um aspecto que não foi proposto por nenhum dos dois autores, mas por Moreira (2012b), e vai ao encontro das ideias da TAS, por isto está representada do lado esquerdo.

A elaboração da Figura 8 revelou um marco extremamente importante, pois clarificou o discernimento da autora a respeito da própria investigação. Além disso, foi com base neste esquema, que foi elaborado após o estudo 1, mas antes do estudo 2, que, realizou-se a investigação dos subsunçores que os estudantes dispunham referentes ao conceito de equações de primeiro grau.

Nesta etapa, considerou-se que tais subsunçores poderiam estar integrados ou ser, também, possíveis invariantes operatórios contidos nos esquemas dos estudantes. É claro que se teve consciência de que ainda poderia ser muito cedo para decidir tal concepção, pois é preciso de tempo e do confrontamento com diversas situações a fim de possibilitar a externalização de significados, contudo, deu-se início ao mapeamento de possíveis subsunçores/invariantes operatórios, por meio de um teste diagnóstico.

Para prosseguir, levou-se em conta que as equações constituem um corpo organizado de conhecimentos (na TAS) e um campo conceitual (na TCC), ou seja, para contemplar a TAS, elaborou-se uma UEPS que, sob a perspectiva de Moreira (2012b), visa oportunizar a aprendizagem significativa de conceitos. Concomitantemente, no contexto da TCC, oportunizou-se diferentes situações (as mesmas da UEPS), com o intuito de dar sentido ao conceito de equação na relação com o seu registro gráfico. Desse modo, teve-se a ambição de auxiliar os estudantes na aquisição de novos significados para aprender significativamente e para ampliar o seu domínio do campo conceitual das equações de primeiro grau.

Interpretando-se as ideias de Vergnaud (1993) e Ausubel (2003), para o contexto abordado nesta pesquisa, conjecturou-se que a aprendizagem dos estudantes, matriculados na disciplina de Matemática I, poderia fornecer indícios de uma aprendizagem significativa, desde que fossem oportunizadas situações da área administrativa, que pudessem dar sentido aos conceitos matemáticos necessários para manipular tais situações.

Com isso, as situações propostas tiveram como principal intenção, configurar um material potencialmente significativo, que contemplasse a integração entre conceitos de equações algébricas de primeiro grau e gráficos, com conceitos da área administrativa. Tais situações foram desenvolvidas de um nível introdutório (partindo dos conhecimentos prévios averiguados) a um nível mais alto de abstração. Por meio dessa configuração, tencionou-se oportunizar a abordagem de diferentes classes de situações que permitissem a utilização dos mesmos conceitos com enfoques distintos e de diferentes conceitos em situações análogas, tal como Vergnaud (1996), propõe e configurando o que Ausubel (1963), denota como diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

3.4 O campo conceitual das equações de primeiro grau

Reportando-se à ideia de campo conceitual, apresentada na seção anterior, pode-se constatar que se trata de um conjunto organizado de situações. Além disso, tal como abordado no item 3.2.1, um conceito é definido a partir de três instâncias: as situações de uso, suas propriedades invariantes e seus sistemas de representações, representado por $C = \{S, I, R\}$. Entende-se, portanto, que aprender um conceito matemático, implica coordenar um conjunto de propriedades, em diferentes situações, que são mediadas por diferentes sistemas de representação. Ou seja, dominar um campo conceitual significa ter competência ou, ainda, capacidade, para resolver problemas em situações diversas, nas quais determinados conceitos estão inseridos, utilizando-se, para isso, de diferentes representações.

De acordo com a interpretação da teoria de Vergnaud (1990), que construiu-se nesta pesquisa, o conceito de equação de primeiro grau, abordado por meio dos conteúdos da disciplina de Matemática I do curso de Administração, é articulado recorrendo-se a um conjunto de elementos, conforme a representação $C_{equações} = \{S, I, R\}$, os quais são detalhados nos parágrafos que seguem.

- **Situações (referente):** constituem um conjunto “S” de situações, que abarcam fenômenos e problemas matemáticos do campo algébrico, que estão diluídas nos conteúdos do currículo e que dão sentido ao conceito de equação, tornando-o significativo. Nesse caso, assume-se que o campo conceitual das equações de primeiro grau envolve diversas situações da área administrativa, como, por exemplo, calcular a quantidade e o preço que demarcam o marco zero do lucro de uma fábrica (ponto de nivelamento), verificar quantas unidades ofertar e qual o preço ideal para definir o ponto de equilíbrio de uma empresa, encontrar a equação de demanda e de oferta de um determinado produto, calcular custos, receitas, etc.
- **Invariantes operatórios (significado):** compõem um conjunto “I” de invariantes operatórios matemáticos, que são cientificamente aceitos e se aplicam às situações

(problemas, fenômenos, objetos matemáticos), que mediante suas propriedades, relações e transformações, nas diferentes classes de situações, dão significado ao conceito de equação. Este conjunto de invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), contempla os significados matemáticos do conceito de equação que os estudantes utilizam para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto.

- **Representações simbólicas (significante):** denotam o conjunto "*R*", das formas simbólicas (verbais ou não-verbais) que permitem representar o conceito de equação, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento, ou seja, é um conjunto de representações (linguagem natural, verbal, algébrica, gráficos, diagramas, gestos, etc.), que podem ser utilizados para indicar e representar os elementos do primeiro e do segundo conjuntos.

Considerando-se esta perspectiva, nesta seção, vislumbrou-se delimitar[21] o campo conceitual das equações de primeiro grau, que, por sua vez, está inserido no campo algébrico, mas possui, em determinadas situações, entrelaçamentos com o campo aritmético. Desse modo, tomou-se como premissa o fato de que o campo conceitual das equações de primeiro grau abarca uma diversidade de situações-problema que dão sentido a conceitos:

- noções básicas de geometria analítica (axiomas de ponto, reta e plano);
- conjuntos numéricos e suas formas de representação (por exemplo, reconhecer uma quantidade na forma fracionária, percentual e decimal);
- operações aritméticas (por exemplo, regras de multiplicação e divisão e operações com números inteiros);
- par ordenado (reconhecer que um ponto é formado por uma abscissa e uma ordenada);
- noção de equivalência;
- resolução de sistemas de equações;
- resolução de equações (operações algébricas);
- forma geral da equação reduzida da reta;
- significado dos coeficientes angular e linear;
- função polinomial do 1º grau;
- crescimento e decrescimento linear;
- incógnitas;
- variáveis;
- operações com monômios e polinômios;

[21] No sentido de elencar ou dissertar a respeito dos conteúdos que interagem e/ou estão interligados com o conceito de equação.

- gráficos, simbologia e linguagem algébrica.

Além de mobilizar todas estas situações, para que o campo conceitual das equações seja dominado pelos aprendizes, faz-se necessária a capacidade de transitar entre os diferentes tipos de registros (língua natural, registro algébrico e registro gráfico). São as chamadas conversões, assim denominadas por Duval (2003), o qual assegura que a aprendizagem Matemática ocorre, somente, se o sujeito for capaz de transitar dentre, pelo menos, dois tipos de representações (esse processo é chamado de conversão), pois, se permanecer dentro de um mesmo tipo de registro, só os tratamentos serão feitos e, neste caso, não haverá acesso a compreensão em Matemática.

Defende-se que todos esses conhecimentos e capacidades são necessários para que se possa dominar o campo conceitual das equações e, diante disso, verifica-se a existência de uma rede complexa de conceitos interligados entre si. Tal constatação ratifica a ideia de Vergnaud (1993), o qual categoriza que não se pode estudar um conceito matemático de forma isolada, mas sim relacionando-o com outros conceitos, por meio de situações problematizadoras.

Referindo-se, especificamente, ao contexto da disciplina Matemática I, na tentativa de elaborar um esquema acerca dos conteúdos que se pretendia ensinar, levou-se em consideração todos estes aspectos, além da ideia defendida por Moreira (2012a, p. 43), o qual expõe que

> (...) o conteúdo curricular deveria, inicialmente, ser mapeado de maneira conceitual, de modo a identificar as ideias mais gerais, mais inclusivas, os conceitos estruturantes, as proposições-chave do que vai ser ensinado. Essa análise permitiria identificar o que é importante e o que é secundário, supérfluo, no conteúdo curricular.

Em consonância com estas ideias, ambicionou-se que as atividades da disciplina de Matemática I proporcionassem um enfoque direcionado para a área administrativa, área específica de formação dos estudantes, ao invés de configurar, apenas, uma disciplina teórica, voltada para a utilização memorística de algoritmos em diferentes problemas, em nível puramente técnico, como forma de suprir todos os conteúdos listados na ementa da disciplina.

Além disso, para elaborar as situações que compunham a UEPS e, concomitantemente, estavam em harmonia com a base teórica da TAS e da TCC, levou-se em consideração, que o campo algébrico, abarca o campo conceitual das equações de primeiro grau. Este campo de conhecimentos é trabalhado desde os anos finais do ensino fundamental e durante todo o ensino médio. Esta afirmação está em conformidade com as orientações da BNCC, um documento norteador, que denota o conjunto de aprendizagens essenciais que os estudantes precisam desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica.

O estudo das equações de primeiro grau de maneira articulada com sua representação gráfica, por meio de aplicações à realidade, ao longo da formação dos estudantes na educação básica, é incitado em diversos trechos deste documento, por exemplo, quando menciona que "as técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problemas, e não como objetos de estudo em si mesmos." (Brasil, 2017, p. 271).

Dessa forma, a Figura 9, apresenta, sob a perspectiva da autora, o recorte[22] feito no campo conceitual das equações algébricas de primeiro, grau para sistematizar os conceitos abordados nesta investigação.

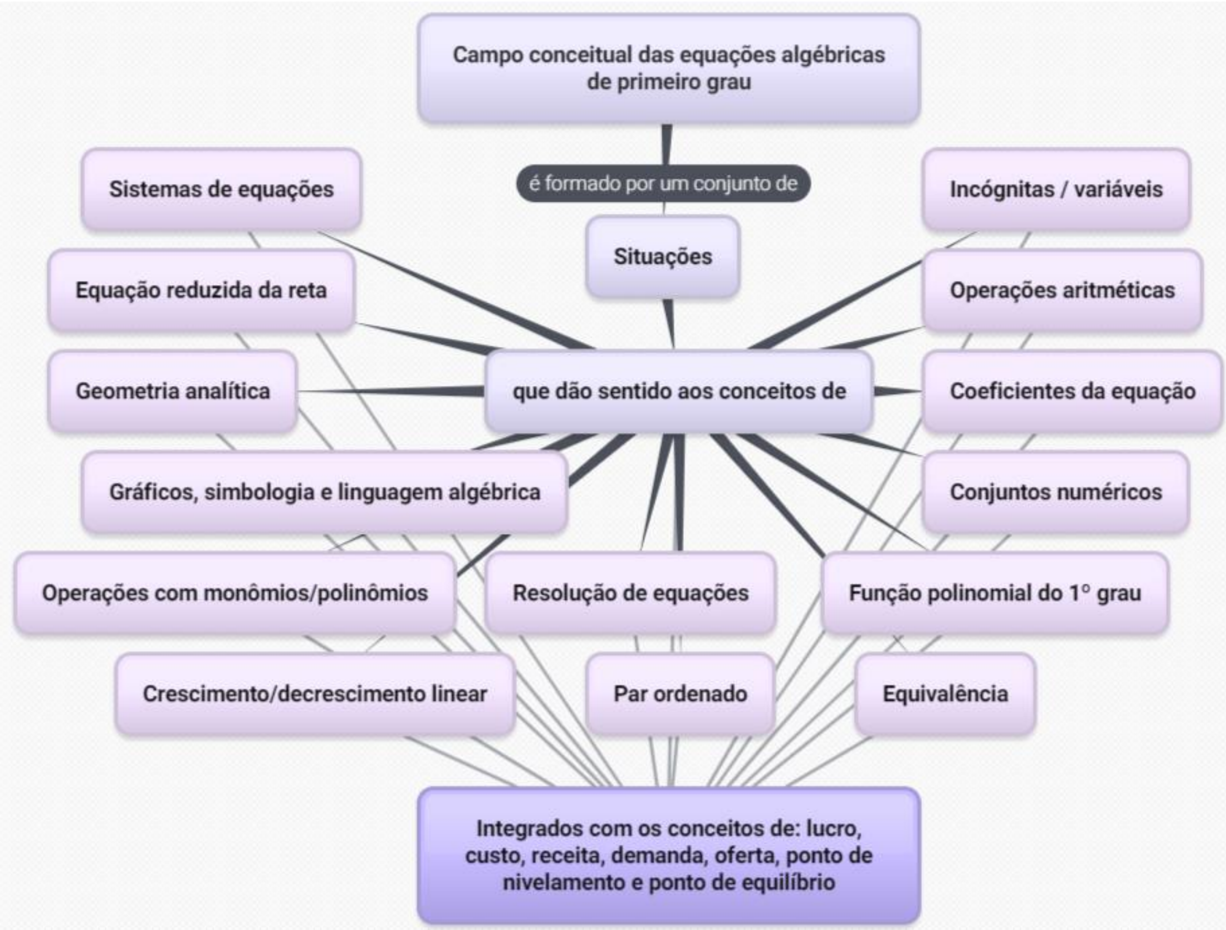


Figura 9: ilustração do corpo de conhecimentos abordados na disciplina de Matemática I, sob a égide da autora.
Fonte: a autora.

Acredita-se, que outros conceitos possam fazer parte deste vasto campo conceitual, contudo, neste caso, para esta disciplina, estes conceitos foram escolhidos como imprescindíveis. A delimitação de um campo conceitual, a ser progressivamente dominado pelos aprendizes, depende, sobretudo, do contexto a ser investigado e do enfoque que deseja-se dar às situações.

---

22 Refere-se ao enfoque dado na disciplina, ao delineamento do campo conceitual das equações que contemplou as situações oportunizadas.

Desse modo, preconizou-se estes conceitos para serem abordados de maneira articulada com os conceitos da área administrativa, por meio de variadas situações, com o intuito de auxiliar os estudantes a verificarem a importância da Matemática no contexto de sua profissão, mediando o processo na busca por indícios de aprendizagem significativa dos discentes envolvidos no estudo e, de mesmo modo, visando o progressivo domínio do campo conceitual em questão.

No capítulo seguinte, será abordada a metodologia de pesquisa usada nesta investigação.

CAPÍTULO 4
METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste capítulo, descreve-se a abordagem metodológica adotada para alcançar os objetivos desta investigação. Além disso, detalha-se o contexto dos sujeitos, os materiais e instrumentos utilizados, como os dados foram coletados, quais as escolhas feitas na sua análise e como as estratégias foram articuladas e fundamentadas ao longo das etapas da UEPS.

Nesta investigação, foram realizados dois estudos (ou duas fases de coleta de dados), a primeira delas foi o estudo 1 (estudo piloto) e a segunda foi o estudo 2 (a implementação didática). De antemão, ressalta-se que os delineamentos que seguem neste tópico, referem-se ao estudo 2, pois as ações do estudo 1, encontram-se detalhadas no Capítulo 6.

Todavia, eventualmente, ao longo deste capítulo, são descritas algumas decisões que foram tomadas no estudo 1 e permitiram ajustar as atividades para que elas estivessem em sintonia com os objetivos da investigação e, sempre que isto ocorrer, o leitor será informado que se trata do estudo piloto.

4.1 Abordagem metodológica

Considerando-se o entrelaçamento da TAS e da TCC, pela perspectiva da transformação pessoal do aluno, auxiliado pela mediação do professor, nesta investigação, optou-se por utilizar uma abordagem, predominantemente, qualitativa para a metodologia de pesquisa, visto que ela permite levar em conta fatores subjetivos que, embora pareçam mais difíceis de serem coletados, manifestam com mais riqueza o nível de envolvimento dos estudantes e as sensações experimentadas, ou seja, considera a atribuição de significados feita por eles durante o percurso.

Aprofundando-se esta concepção, destaca-se a importância do contexto da sala de aula presente nesta investigação, pois este foi o local onde vivenciou-se grande parte das etapas, juntamente com os discentes participantes do estudo. Ao minuciar o ambiente da sala de aula, Moreira (2009, p. 24), confere que

> a sala de aula, por exemplo, é vista como um ambiente organizado social e culturalmente no qual ações mudam constantemente, significados são adquiridos, trocados, compartilhados. Naturalmente, o contexto assume então um papel de destaque, pois os significados e as ações são contextuais.

Esta afirmação, ampara a ideia de que, em uma pesquisa de abordagem qualitativa, é necessário descrever, ricamente, os detalhes, pois, caso outro pesquisador queira replicá-la em um contexto diferente, isso possa ser viável. Aliás, considera-se esta característica indispensável em uma investigação: ser passível de reaplicações, adaptações por outros autores. Ser compartilhada na íntegra, com seus apêndices, anexos e detalhamento do contexto, mostra-se crucial para a interpretação e entendimento de como ocorreu todo o processo.

E é justamente como ocorreu todo o processo que atreveu-se a defender como o aspecto mais relevante desta investigação. O desenrolar das atividades, os diálogos, as percepções, as conjecturas, as expressões dos estudantes, tudo isso compôs e permitiu diagnosticar os resultados. Se é que se pode nominar assim quando se refere ao processo de aprendizagem, que é contínuo, não linear e nunca acaba. Talvez, parafraseando o autor da TAS, seja mais prudente falar em indícios ou em evidências de resultados obtidos.

Além disso, ao minuciar o tipo de enfoque presente em uma pesquisa dessa natureza, Laperriére (2010), explicita que ela tem um caráter interativo que leva à reflexividade da pesquisa e preconiza um conhecimento do contexto e da diversidade dos atores engajados na situação de pesquisa. Desse modo, nesta investigação, priorizou-se esta atitude, pois sob respaldo de Bogdan & Biklen (1994), apresenta-se dados, predominantemente descritivos, ricos em detalhes dos sujeitos envolvidos e do contexto sociocultural, por meio de uma análise indutiva e interpretativa, com ênfase nos significados, na qual, conforme descrito, preocupou-se mais com o processo do que com seus resultados ou sua culminância.

Complementando-se este cenário, Lüdke & André (2013, p. 11), enfatizam que o método qualitativo "tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal elemento; os dados coletados são predominantemente descritivos; a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto [...]". Desse modo, amparou-se nas ideias destes autores mencionados, para discernir a respeito da natureza e do processo de desenvolvimento desta investigação.

Conforme esta perspectiva, para a realização deste estudo, optou-se por utilizar um diário de campo para levantar os dados referentes ao contexto em que as atividades foram desenvolvidas, bem como as impressões da autora e os comentários dos participantes. Fiorentini & Lorenzato (2006), salientam que o diário de campo é um dos mais ricos instrumentos de coleta de dados, pois é nele que o pesquisador registra suas percepções, descrições de pessoas, cenários, situações e ocorrências. Além disso, (ibid., p. 119), afirmam que

> [...] espera-se que contenha impressões, comentários e opiniões do observador sobre o meio social em que realiza suas observações, seus erros, dificuldades, confusões, incertezas e temores, suas boas perspectivas, acertos e sucessos, suas reações e as dos participantes (gestos, expressões verbais e faciais, etc.).

Sob guarida desta concepção, além de um caderno para fazer anotações ao final de cada encontro, também atreveu-se a considerar como uma "variação de diário de campo", o celular da autora, pois sempre que verificava-se algo que pudesse fornecer subsídios para a pesquisa, recorria-se ao referido objeto para fazer gravações de áudio (verbalizações da autora, para a própria autora), a fim de ganhar tempo e não esquecer de detalhes importantes nas descrições e análises das atividades. Este recurso foi bastante útil, pois permitiu a dinamicidade de gravar pequenos áudios enquanto os encontros aconteciam.

Considerou-se esta atitude necessária, pois, na sala de aula, o improviso tomou conta, os estudantes questionavam concomitantemente, faziam gestos, enfim... foi tudo muito intenso. Projetou-se que seria improvável lembrar de tudo isso para escrever, somente, ao final dos encontros, então esta gravação de excertos específicos, foi uma ação que auxiliou a autora a organizar o pensamento e coletar dados com mais riqueza de detalhes.

Entretanto, esta decisão não esteve presente desde o começo do planejamento, ela surgiu após o estudo 1 (estudo piloto), no qual não foram utilizadas gravações de áudio e discerniu-se que algumas informações, que não foram anotadas no diário de campo, instantaneamente, esvaíram-se. Logo, para o estudo 2 (implementação didática), conjecturou-se que seria mais oportuno, lançar mão do celular que estava sempre na bolsa da professora pesquisadora, para ser um aliado na fase de coleta e descrição dos dados.

Dessa forma, na implementação didática, as anotações e gravações de áudio, foram feitas durante e após cada encontro, para que não se perdesse nenhum dado importante na descrição dos aspectos ocorridos. Ademais, na segunda fase de aplicação das atividades, foram feitas gravações de áudios dos estudantes para analisar os registros verbais produzidos por eles, como instrumentos de coleta de informações para posterior análise. Contudo, ressalta-se que, antes de iniciar esta ação, foi solicitada prévia autorização, por meio de um termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice A), de todos os sujeitos envolvidos.

Outrossim, realizou-se uma entrevista semiestruturada com a coordenação do curso de Administração da instituição, que permitiu direcionar e alinhar o foco da pesquisa e o trabalho docente às demandas específicas da disciplina de Matemática I, no contexto do curso. Para conduzir esta entrevista, elaborou-se um questionário composto de quatro perguntas e sua transcrição é evidenciada no item 4.4.1.

4.2 Contexto e sujeitos da pesquisa

Esta investigação foi realizada junto a um grupo de 21 estudantes, todos matriculados na disciplina de Matemática I, a qual é ofertada no primeiro semestre do curso de Administração, da Universidade Franciscana, instituição privada, de natureza confessional e comunitária, localizada em Santa Maria, cidade de, aproximadamente, 290 mil habitantes, na região central do estado do Rio Grande do Sul, Brasil.

A instituição oferece, atualmente, 35 cursos de graduação presenciais, três cursos de graduação à distância, quatro cursos de especialização à distância, 25 cursos de especialização presenciais, oito programas de pós-graduação *Stricto Sensu* presenciais (a nível de mestrado e doutorado acadêmico e profissional), sendo seis programas de mestrado e dois programas de doutorado, nove programas de residência multiprofissionais e profissionais na área da saúde, além de cursos de extensão e capacitação profissional, que são criados conforme as demandas acadêmico-científicas, de gestão administrativa e da sociedade.

Quanto à disciplina de Matemática I, do curso de Administração, ela tem carga horária de 80 horas, distribuídas em quatro horas semanais, com duração de 20 semanas. Geralmente, ela é ofertada nas sextas-feiras à noite, com início às 18h25min e término às 22h, e conta com um intervalo de 15 minutos (das 20h05min às 20h20min).

Além disso, referindo-se ao projeto político-pedagógico do curso de Administração, sua ementa contempla cinco disciplinas na área específica da Matemática, que vão desde o primeiro até o quarto semestre, sendo que, no terceiro, duas disciplinas estão presentes. Ressalta-se que o curso, em sua totalidade, tem duração de oito semestres e as disciplinas de Matemática, que estão contidas na grade, estão explicitadas na Figura 10, a seguir.

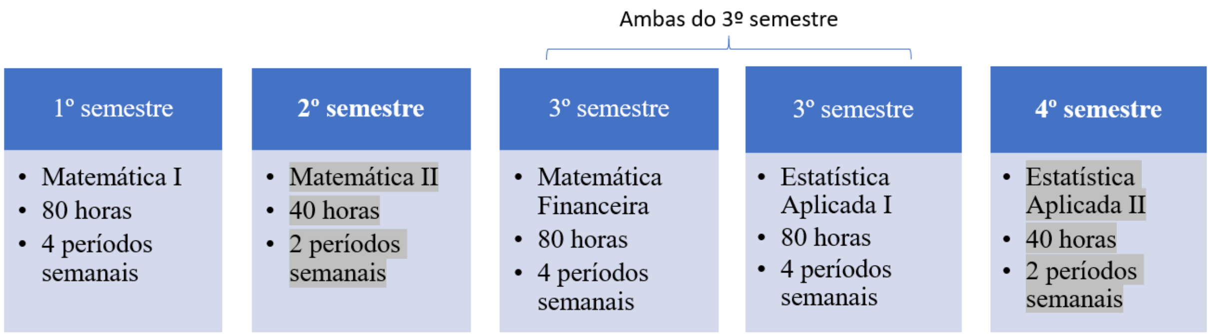


Figura 10: disciplinas de Matemática presentes no currículo do curso de Administração da instituição.
Fonte: elaborado pela autora, com base na grade curricular/2019 do curso de Administração da instituição.

Como pode-se observar na Figura 10, duas disciplinas estão sombreadas para ressaltar que, no ano de 2018, houve uma redução da carga horária de Matemática II, do 2º semestre e de Estatística Aplicada II, do 4º semestre, pois até o ano de 2017 elas continham, cada uma, 68 horas (quatro períodos semanais) e, desde então, passaram a ter 34 horas (dois períodos semanais).

Não obstante, no ano de 2019, foi implementada uma mudança na grade curricular de todos os cursos da instituição. Anteriormente, o calendário acadêmico previa 17 semanas e as disciplinas eram de 68 horas (quatro períodos semanais) ou 34 horas (dois períodos semanais) e, desde janeiro de 2019, os semestres têm duração de 20 semanas, por este motivo, as disciplinas de 68 horas, passaram a ser 80 horas (mantendo os quatro períodos semanais) e as de 34 horas, passaram a ser de 40 horas (mantendo os dois períodos semanais).

Além disso, com esta reformulação, o período reservado aos exames finais (ou provas de recuperação), que eram feitos ao final de cada semestre, para os estudantes que não haviam atingido a média estipulada, também deixou de existir, desse modo, desde 2019, cabe a cada professor, tomar a decisão de realizar uma prova de recuperação ou não.

Após todas estas reformulações, no início de 2019, época na qual ocorreu a implementação didática das atividades descritas nesta tese, evidenciou-se que a área da Matemática perdeu uma carga horária de 40 horas no curso de Administração, pois duas disciplinas que possuíam quatro períodos semanais, passaram a ter dois períodos semanais.

Ademais, um aspecto que, do ano de 2017 em diante, vêm carecendo de atenção, é a diminuição do número de estudantes matriculados no curso de Administração[23], da instituição. Devido a este fator (baixa demanda de estudantes), no segundo semestre do ano de 2018, o curso de Administração, pela primeira vez na sua história, não foi ofertado no processo seletivo, de modo que não houve entrada de estudantes no curso e, por este motivo, no Quadro 4, nas linhas que denotam as turmas do segundo semestre de 2018, um traço demarca a ausência de estudantes.

Neste Quadro 4, a seguir, portanto, apresenta-se informações referentes às turmas de Matemática I, do primeiro semestre do curso de Administração da instituição, compreendidas desde o ano de 2015 (ano no qual iniciou-se a trajetória como docente na instituição), até o ano de 2020 (ano no qual finalizou-se a escrita da presente pesquisa).

Quadro 4: dados compreendidos entre 2015 e 2020, extraídos junto à coordenação do curso de Administração da Universidade Franciscana.

Época	Matrículas	Aprovações	Reprovações	Cancelamentos	Abandonos
1º semestre de 2015 Diurno	54	28	12	14	0
1º semestre de 2015 Noturno – Turma 1	46	12	11	10	13
1º semestre de 2015 Noturno – Turma 2	20	8	5	3	4
2º semestre de 2015 Diurno	48	33	7	6	2
2º semestre de 2015 Noturno	50	26	13	6	5
1º semestre de 2016 Diurno	61	27	8	16	10

[23] Esta diminuição permeou diversos cursos, mas ressaltou-se o de Administração, por ser o curso foco da investigação.

1º semestre de 2016 Noturno	45	13	11	14	7
2º semestre de 2016 Noturno	43	21	7	8	7
1º semestre de 2017 Diurno	51	30	6	12	3
1º semestre de 2017 Noturno	50	17	11	14	8
2º semestre de 2017 Noturno	14	11	0	3	0
1º semestre de 2018 Noturno	17	12	2	1	2
2º semestre de 2018 Diurno	-	-	-	-	-
2º semestre de 2018 Noturno	-	-	-	-	-
1º semestre de 2019 Noturno	21	16	4	1	0
2º semestre de 2019 Noturno	10	6	3	0	1
1º semestre de 2020 Diurno	13	11	1	0	1
1º semestre de 2020 Noturno	12	9	1	1	1

Fonte: elaborado pela autora, por meio de dados fornecidos pela coordenação do curso.

Na configuração do Quadro 4, o item “matrículas”, denota a quantidade de estudantes matriculados na disciplina no início de cada semestre. O tópico “aprovações”, contempla a parcela de estudantes que obtiveram aprovação na disciplina (seja no exame de recuperação ou por média).

Seguindo-se, a coluna “reprovações”, discrimina o número de estudantes que, mesmo tendo realizado a prova final de recuperação, não obteve média final igual ou superior à sete pontos[24] e a coluna “cancelamentos”, pontua o grupo que, em algum momento do semestre, realizou cancelamento da disciplina (mediante justificativa e pagamento de uma taxa de manutenção à instituição). Em muitos casos, os cancelamentos são feitos por estudantes que realizaram a matrícula na disciplina, mas nunca frequentaram as aulas ou foram aprovados em outras instituições de ensino.

Por fim, a última coluna, apresenta a classe “abandonos”, a qual explicita a porção de estudantes que reprovou por frequência, ou seja, desistiu de frequentar às aulas sem realizar o cancelamento da disciplina junto à instituição. Cabe ressaltar que, nesta modalidade, o estudante continua matriculado na disciplina e, portanto, é preciso realizar o pagamento da mensalidade, mesmo sem estar frequentando às aulas.

[24] Em 2018, com a reformulação institucional, a média para aprovação final dos estudantes passou de sete (7,0) para seis (6,0) pontos.

Pondera-se que não são todas as turmas expostas no Quadro 4 que tiveram como professora regente a autora desta tese, pois há outros professores de Matemática que ministram a disciplina, que foi ofertada em dois turnos distintos e, no ano de 2015, mais de uma turma foi ofertada no mesmo turno, pois, até então, havia uma grande demanda de estudantes.

Estes dados, referem-se às turmas dos turnos diurno e noturno, sendo que a maneira de o estudante ingressar na graduação de Administração, até o ano de 2017 era, somente, obtendo aprovação no concurso do vestibular, que era realizado duas vezes ao ano (uma no mês de novembro e outra no mês de julho). Esta modalidade de acesso aos cursos com menor demanda de alunos, foi extinta a partir do ano de 2018, ano no qual passou a ser aceito o ingresso de estudantes por meio da nota obtida no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM[25] ou da escrita de uma redação no formato presencial[26].

4.2.1 Conteúdo programático e bibliografia básica da disciplina

Conforme o projeto político pedagógico do curso de Administração de Empresas da Universidade Franciscana, os conteúdos previstos na disciplina Matemática I, estruturam-se em torno de quatro unidades de ensino, conforme exposto na Figura 11, a seguir.

Unidade 1: números reais

1.1) valor absoluto;

1.2) equações e inequações.

Unidade 2: funções

2.1) funções reais de uma variável real;

2.2) representação gráfica;

2.3) aplicações.

Unidade 3: limite e continuidade

3.1) limites laterais;

3.2) propriedades dos limites;

3.3) funções contínuas;

3.4) propriedades das funções contínuas;

3.5) aplicações.

Unidade 4: derivadas

4.1) derivada de uma função em um ponto;

4.2) interpretação geométrica;

4.3) função derivada;

4.4) regras de derivação;

4.5) funções crescentes e decrescentes;

4.6) máximos e mínimos de funções;

4.7) aplicações.

Figura 11: ementa da disciplina Matemática I, do primeiro semestre do curso de Administração da Universidade

[25] A prova do ENEM é o maior processo seletivo do Brasil, seu resultado serve para acesso ao Ensino Superior em universidades públicas e privadas. Além disso, é utilizada para avaliar a qualidade do Ensino Médio no país.

[26] Em virtude do novo Coronavírus, em 2020, houve um formato especial de ingresso, que contemplou a possibilidade de elaboração da redação de forma *online*.

Franciscana.

Fonte: elaborado pela autora, com base em documentação disponibilizada pela coordenação do curso.

Pontua-se que as atividades elaboradas, descritas e analisadas ao longo desta pesquisa, envolveram, apenas, as unidades 1 e 2, pois são, justamente, as que abarcam os conceitos de equações e sua respectiva representação gráfica. A sequência das aulas, na qual desenvolveu-se as unidades 3 e 4, não é relatada neste estudo, embora tenha sido uma continuidade do trabalho desenvolvido.

Além disso, para planejar e desenvolver as atividades, levou-se em consideração a bibliografia básica da disciplina, que é um documento proposto pelos professores que integram o colegiado do curso. Na sequência, expõe-se, na Figura 12, as obras contidas nesta listagem.

Bibliografia básica

CHIANG, A. Matemática para economistas. 10. Ed. Rio de Janeiro: Mackron Books, 2006.

MORETTIN, P. A; HAZZAN, S; BUSSAB, W. O cálculo de funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2003.

Silva, S. M; SILVA, E. Medeiros da. Matemática para economia, administração e ciências contábeis. São Paulo: Atlas, 1999.

Bibliografia complementar

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 5. ed. São Paulo: LTC, 2001.

GUIDORIZZI, H. L. Matemática para administração. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

LEITHOLD, L. Matemática aplicada à economia e administração. São Paulo: Harbra, 1988.

MARQUES, J. M. Matemática aplicada: para os cursos de administração, economia e ciências contábeis. Curitiba: Juruá, 2001.

WEBER, J. E. Matemática para economia e administração. São Paulo: Harbra, 1986.

Figura 12: bibliografia básica e bibliografia complementar da disciplina Matemática I, do primeiro semestre do curso de Administração da Universidade Franciscana.

Fonte: elaborado pela autora, com base em documentação disponibilizada pela coordenação do curso.

Contudo, ressalta-se a autonomia do professor para utilizar outros materiais como fonte de investigação, pois, para a elaboração e aprimoramento das situações que foram oportunizadas aos estudantes nesta investigação, utilizou-se diversos materiais como subsídio, por exemplo, Morettin, Hazzan & Bussab (2003), Paulette (2003), Tan (2003), Leite & Fuita (2008), Silva & Machado (2010), além das sugestões dos três professores especialistas e materiais da *internet*/televisão.

Nenhuma delas foi copiada na íntegra, pois elaborou-se as situações com um contexto diferente do original, apenas utilizando uma ideia semelhante de abordagem. Optou-se por realizar uma espécie de combinação entre as abordagens dos diferentes autores, alinhada às demandas verificadas no cotidiano da sala de aula.

4.3 Materiais e ambientes utilizados no desenvolvimento das atividades

Levando-se em consideração a ideia central da teoria de Ausubel (1963), a identificação do conhecimento prévio é imprescindível para que ocorra aprendizagem significativa. De maneira análoga, Vergnaud (1990), reflete que o conhecimento prévio é determinante e pode evoluir, progressivamente, dentro do domínio de um campo conceitual, mas, para tanto, é necessário que o aluno possa explicitá-lo. Definiu-se estas ideias como basilares para nortear o delineamento das atividades.

Para isso, planejou-se variadas situações, referentes aos conceitos de equações de primeiro grau e de sua representação gráfica, com ênfase no contexto da área administrativa, que oportunizassem enfoques de abordagem distintos, tais como a utilização da calculadora científica, do *software Geogebra*, de momentos de discussão (aulas expositivo-dialogadas), com atividades ora individuais, ora em grupos, na tentativa de captar o máximo possível de significados e/ou possíveis indícios de invariantes operatórios por parte dos estudantes.

Justifica-se a importância da elaboração de atividades com a utilização da calculadora, pois, conforme D'Ambrosio (2001), no ensino básico, muitos educadores não instigam seus estudantes a manusearem este objeto por acreditarem que ele pode impossibilitar/atrasar o seu raciocínio.

Além disso, acredita-se que, grande parte dessa falta de incentivo à utilização do objeto nas escolas, deve-se ao fato de que, algumas instituições brasileiras, rotulam-se como preparatórias para aprovação em provas de vestibular e ENEM, que são concursos públicos que possibilitam o acesso ao ensino superior, nos quais a utilização de calculadoras é proibida, pois, supostamente, elas facilitariam a utilização da famosa "cola" (respostas copiadas), durante a prova. Supõe-se que, por este motivo, as escolas que se dizem preparatórias para este tipo de avaliação, não permitem sua utilização, pois, dessa forma, acreditariam estar acostumando seus estudantes a raciocinar sem o auxílio de uma máquina.

No entanto, em muitos cursos de ensino superior, como é o caso da Administração, sua utilização é indispensável, desde o primeiro semestre e, muitos estudantes adentram nesta etapa de suas vidas acadêmicas, desconhecendo as principais funções de uma calculadora científica. Nesse contexto, é imprescindível que haja tempo para o aprendizado de tal ferramenta.

Reitera-se esta necessidade, também nos resultados da investigação de Yenilmez, Girginer & Uzun (2007), Silva (2016), Cumhur & Tezer (2019), que discerniram a respeito da ansiedade dos discentes, os quais apontaram que tal sentimento poderia ser minimizado, caso o professor permitisse a utilização da calculadora. Concomitantemente, recorda-se os estudos de Bezerra (2009), que entrevistou professores de Matemática que ministraram a disciplina nos cursos de Administração e, dois deles, pontuaram que não permitiram que seus estudantes utilizassem a calculadora em sala de aula.

Por compactuar com os autores recém mencionados a respeito da necessidade de investir na utilização de calculadoras em sala de aula e por estar ciente da ideia exposta no estudo de Bezerra (ibid.), de que a proibição da utilização do objeto ainda esteja presente na realidade de muitas salas de aula, ofertou-se aos estudantes, momentos de atenção ao manuseio da calculadora, um objeto indispensável no cotidiano de um administrador, mas que por si só não oferece conclusões, necessita da ação humana, tanto para inserir dados corretos, quanto para interpretar e validar as respostas obtidas no visor.

Além da calculadora, durante a aplicação das atividades, optou-se pela manipulação do *software Geogebra*, que é gratuito e para utilizá-lo, basta realizar o *download* de um aplicativo para dispositivos móveis ou acessá-lo *online*. A página para acesso encontra-se disponível em: <https://www.geogebra.org/graphing>. Por meio deste *software*, que agrega, em uma mesma tela, o registro gráfico e o algébrico, foi possível trabalhar situações nas quais os estudantes visualizaram os elementos que compõem uma equação, além de recorrerem ao seu apoio na sala de aula e em casa, conforme sua necessidade.

Sua dinamicidade permitiu que os discentes elaborassem diferentes exemplos em poucos cliques, o que seria mais trabalhoso, caso fosse feito à mão, nos seus cadernos. Além disso, possibilitou que várias equações fossem explicitadas, concomitantemente, para comparação em uma mesma tela e isto facilitou a visualização. Ressalta-se que, em um primeiro momento, os discentes foram levados ao laboratório de informática para realizar as primeiras tarefas contando com o seu auxílio e, nos demais encontros, após familiarizarem-se com o seu *layout*, puderam contar com seu aporte em sala de aula, tanto em seus celulares, quanto em um computador, que esteve disponível para esta finalidade.

Para além das atividades que ocorreram em sala de aula, elegeu-se o ambiente virtual de aprendizagem – *Moodle* – como uma extensão dela, pois foram disponibilizadas tarefas extraclasse (listas de exercícios) e videoaulas. Ao disponibilizar as videoaulas antes dos encontros presenciais, teve-se o intuito de que elas funcionassem como prováveis organizadores prévios (ou materiais instrucionais), dada a verificação de que alguns estudantes apresentavam indícios de aprendizagem mecânica em detrimento da aprendizagem significativa, além de subsunçores desestabilizados ou, até mesmo, uma suposta fragilidade de subsunçores em determinados casos (que são minuciados no Capítulo 7).

Esta concepção de oportunizar materiais instrucionais, esteve subsidiada nos estudos de Moreira (2009) e de Ausubel (1963), pois tencionou-se que pequenas videoaulas com uma espécie de revisão, retomada de ideias principais e apresentação do todo, poderiam estabelecer um elo entre o que os discentes já sabiam e o que eles ainda precisariam saber ou, ainda, como pontes cognitivas entre os conhecimentos já existentes nas suas estruturas cognitivas e os novos conhecimentos, Ausubel (1963).

Além dos materiais instrucionais, como mencionado, foram disponibilizadas tarefas extraclasse (listas de exercícios) para os estudantes praticarem durante a semana. Os exercícios que eram postados no ambiente, possuíam gabarito, contudo, por meio dessa proposta, tencionou-se que o *Moodle* fosse uma extensão da sala de aula, como uma espécie de "rede social da turma", na qual os discentes poderiam interagir uns com os outros e com a professora pesquisadora, pela ferramenta "fórum de dúvidas" e/ou encaminhando mensagens individuais.

Desse modo, por meio da plataforma *Moodle*, o grupo teve a oportunidade de revisar, com antecedência, tópicos pertinentes aos conceitos que seriam abordados na próxima aula presencial. Evidentemente, isso foi proposto aos discentes no início do semestre e derivou de um consentimento do grupo, que, inicialmente, se mostrou predisposto a estudar os materiais antes dos encontros e, inclusive, sugeriu esta ideia no questionário socioeconômico (Apêndice B), que foi aplicado no primeiro dia de aula.

Atentando-se às situações oportunizadas no contexto da sala de aula, defende-se a importância de os estudantes perceberem-nas como problemas, sentindo-se desafiados a desvendá-las e, por este motivo, a maioria das situações foram trabalhadas por meio de modelos adaptados do cotidiano de um administrador, vídeos, representações veiculadas pela mídia, problemas clássicos da matéria de ensino, sempre de modo acessível e contextualizado, ou seja, não foram abordadas, somente, como exercícios de aplicação rotineira de algum algoritmo, sem exigir interpretação da resposta.

Frisa-se que a maioria das situações se enquadraram neste âmbito, todavia em momentos específicos das aulas, a resolução algorítmica também se mostrou necessária, para superar lacunas de aprendizagem e possíveis obstáculos que impediam o entendimento das situações, por parte dos estudantes. Propôs-se as situações em nível inicial, levando-se em consideração o conhecimento prévio dos estudantes, com o objetivo de que estes interagissem com o novo conhecimento que se pretendia abordar.

Dessa forma, iniciou-se o trabalho com a realização de um primeiro estudo, no segundo semestre do ano de 2017, no turno noturno. Por meio do estudo 1, fez-se a análise dos dados coletados e os resultados obtidos nesta primeira fase, como mencionado no início deste capítulo, são apresentados no Capítulo 6.

Contudo, ajustes foram feitos, pois submeteu-se todas as situações à revisão de três professores especialistas, que sugeriram reformulações, pois algumas questões do teste diagnóstico apresentavam nível de dificuldade que poderia ser reduzido. Ademais, verificou-se que havia um excesso de situações selecionadas, ao longo dos encontros, para os estudantes resolverem, possivelmente, fruto da ansiedade e/ou da concepção conteudista que desfrutava-se no período.

Nesta época, tinha-se como propósito, realizar a implementação didática no segundo semestre de 2018, contudo, conforme evidenciado no Quadro 4 (item 4.2), de maneira inesperada e inédita na instituição, não houve oferta da disciplina Matemática I, tampouco entrada de estudantes no curso neste semestre, de forma que, após o estudo 1 e seus devidos ajustes, teve-se que postergar a implementação didática para o primeiro semestre de 2019, também no turno noturno e, esta, é minuciada no Capítulo 7.

Em ambas as fases de coleta de dados (estudo 1 e estudo 2), deu-se início ao processo por meio do convite feito aos estudantes para participarem, voluntariamente, dos estudos e recolheu-se suas autorizações, por escrito, declarando concordarem com a coleta e divulgação de seus dados nesta pesquisa, preservando seu anonimato.

Na sequência, aplicou-se um questionário socioeconômico com o intuito de conhecer o limiar do contexto no qual eles estavam inseridos. Então, aplicou-se um teste diagnóstico, que objetivou investigar, obter pistas dos conhecimentos que eles apresentavam e, a partir dos aspectos evidenciados nesse documento, organizou-se e aplicou-se as situações que fizeram parte da UEPS e nortearam toda a investigação.

Conforme expôs-se no Capítulo 3, item 3.2, o qual aborda o detalhamento da TCC, para que ocorra o surgimento do conhecimento conceitual, ele deve emergir dentro de situações problematizadoras e, consequentemente, para que isso seja possível, o docente deve fornecer situações que possuam significação para o aluno e que tenham como objetivo, oportunizar potencialidades para o surgimento e aquisição do conceito e sua estrutura.

Além disso foi primordial considerar a existência da interligação dos conceitos entre si, formando uma rede complexa de conhecimentos. Neste ponto, retoma-se os desdobramentos feitos no item 3.4, bem como a Figura 9, elaborada ao final deste mesmo item, os quais explicitaram o campo conceitual foco desta investigação, que é definido por um conjunto de situações que dão sentido ao conceito de equações e sua respectiva representação gráfica.

Em pé de igualdade, considerou-se os aspectos da diferenciação progressiva, reconciliação integradora e consolidação, pois todas as situações tiveram de obedecer a um nível hierárquico e para isso, precisaram estar entrelaçadas com os conhecimentos específicos que os discentes traziam consigo, nas suas bagagens cognitivas.

4.4 Instrumentos de coleta de dados

Considerando os objetivos propostos para esta pesquisa, nominou-se os seguintes instrumentos para realizar a coleta de dados: questionário socioeconômico (Apêndice B), teste diagnóstico (Apêndice F), situações que compõem uma unidade de ensino potencialmente significativa – UEPS (Apêndice G), teste individual (Apêndice H), além de gravações de áudio, utilização de um diário de campo e uma entrevista semiestruturada com a coordenação do curso de Administração da instituição.

Não conceituou-se o termo de consentimento (Apêndice A), como um instrumento de coleta de dados, embora ele tenha sido um primeiro passo muito importante, pois, antes de iniciar qualquer ação, necessitou-se da autorização e da disponibilidade de todos os estudantes envolvidos para iniciar as ações. Sem o consentimento dos aprendizes participantes das duas fases de coleta de dados, esta investigação não teria acontecido.

As atividades deste estudo abarcaram oito encontros, de modo que a fase inicial de coleta de dados (primeiro encontro), foi demarcada pela aplicação do questionário socioeconômico e do teste diagnóstico e pautou-se todo o trabalho da fase posterior (demais sete encontros), nos aspectos evidenciados no teste diagnóstico e nos encontros subsequentes.

4.4.1 Entrevista com a coordenação do curso de Administração

Como primeiro passo, no primeiro semestre do ano de 2017, antes mesmo de iniciar a aplicação do estudo 1 – que foi realizado no segundo semestre do mesmo ano – realizou-se uma entrevista, sob o formato de uma conversa, guiada pelas perguntas, que já haviam sido enviadas, previamente, para a coordenação do curso de Administração da Universidade Franciscana.

Este questionário, continha quatro perguntas e teve como intuito, direcionar o trabalho docente, articular os diferentes conceitos da disciplina com as demandas da profissão de administrador, além de dimensionar o papel da disciplina de Matemática I e sua importância no contexto do curso. A seguir, detalha-se as perguntas, seguidas das transcrições das respostas[27]

---

[27] Com o intuito de preservar o contexto, transcreveu-se a fala da coordenação de maneira literal, mas recorda-se que a entrevista aconteceu no formato de uma conversa informal, portanto o texto está em linguagem coloquial.

dadas pela coordenação do curso.

- Pergunta 1: Qual a importância da disciplina Matemática I no contexto do curso de Administração?

– Eu vejo que a Matemática é importante para trabalhar com os alunos o desenvolvimento do raciocínio lógico, e a apresentação... a discussão das equações (tanto de primeiro grau, como de segundo grau), porque muitas das equações da Matemática, eles utilizam nas aplicações das disciplinas, tanto de finanças, quanto nas disciplinas de produção.

Então, aí está a importância da Matemática... ela tem a função de introduzir o conhecimento do cálculo de variáveis, de funções, e isso vai dar o suporte para a aplicação das próximas disciplinas que eles farão, que, basicamente, envolve as disciplinas de Economia, de Produção e de Finanças.

A disciplina de Economia e Microeconomia, já começa no primeiro semestre e tem outra no segundo semestre – Economia I e Economia II – e tem as disciplinas de Produção, que eles vão estudar no quinto e no sexto semestre. Então, eles têm que ter um conhecimento bem sólido da Matemática, precisam ter uma base de conhecimento das equações, principalmente das equações. Muitas vezes, os alunos vêm do ensino médio ou do EJA e não sabem nem fazer um produto notável. Também apresentam muitas dificuldades ao se depararem com as operações, por exemplo: o que vem primeiro? Multiplicação, divisão, soma ou subtração?

Então, muitas vezes eles não têm nem noção de que, quando vão aplicar uma regressão linear, primeiro vão ter que fazer a multiplicação e depois a adição. E aí eles atropelam e fazem primeiro a adição e depois a multiplicação. Esse tipo de conhecimento, influencia muito nessa base que tem que ter.

Eu trabalho com eles na questão da logística. Tem a parte de estoques onde a gente entra na abordagem de custo de estoques. Nesse estudo, tem custos variáveis, custos fixos, tem a equação de custos que envolve multiplicação, divisão e aí tem que fazer todas as operações, por partes, para obter a equação total. Então, muitas vezes, a Matemática vai influenciar no conhecimento, porque não é só colocar na calculadora, se ele não conhecer, realmente, as operações.

E eu percebo que eles têm muita carência nisso, lá no sexto semestre, infelizmente. Eles fazem uma soma e esquecem que tinha uma multiplicação antes, então, a Matemática I, eu vejo que ela proporciona esta base, este conhecimento, tanto das operações, das equações, questões de limites, derivadas, e isso tudo é aplicado na economia.

Eu acho de suma importância a disciplina e penso que, quanto mais o professor *trabalhar em sala de aula, com exercícios, muitos exercícios, melhor vai ser o desenvolvimento dos alunos. É claro que eles têm uma resistência grande para fazer os exercícios, mas aí a gente tem que ter aquela força de introduzir, relacionar os exercícios com a Administração, buscar metodologias diferentes, para que, realmente, eles tenham essa possibilidade de desenvolver seu conhecimento.*

E, também, eu percebo que a Matemática I é uma disciplina que precisa ser feita no primeiro ou no segundo semestre, pelo aluno que entra no curso de Administração, mas eu vejo que têm alunos que estão lá no final do curso e ainda não fizeram Matemática I, aí eu entendo o porquê de estarem indo mal em Custos, em Produção, em Finanças... porque eles não tiveram ainda o conhecimento do cálculo. Vejo formandos, que reprovaram na disciplina, e deixaram para fazê-la por último, por medo de encará-la.

- Pergunta 2: A disciplina de Matemática I é pré-requisito de alguma outra?

– Diretamente, na matriz, formalmente, o pré-requisito da Matemática II é a Matemática I. Porém, as disciplinas de cálculo: Produção, Finanças, Gestão de Custos, Logística, Pesquisa Operacional, todas elas exigem conceitos de Matemática. E, se os alunos não tiverem o conhecimento das operações e, principalmente, das equações Matemáticas, eles não vão conseguir avançar com segurança na cadeira[28]*.*

Só que nós não colocamos isso de maneira formal, para não trancar o segmento do curso deles, mas os conhecimentos dos conteúdos que nós trabalhamos nestas disciplinas, estão diretamente relacionados com a Matemática. A Matemática, ela é base: os problemas, a interpretação, a questão lógica, tudo isso vai exigir a Matemática.

Então ela é um pré-requisito, que está relacionado, indiretamente, com todas as disciplinas de cálculo do curso. E eu vejo uma fragilidade muito grande por parte dos alunos em relação a isso, porque eles têm medo de números, eles têm medo de interpretar. Eu percebo que o maior problema são os cálculos, tu[29] *percebe né? Tu trabalha com Matemática e tu sabe... o grande problema é a interpretação dos cálculos.*

- Pergunta 3: O que se espera do trabalho do professor que ministra a disciplina Matemática I?

– Que ele desenvolva as habilidades dos alunos para trabalhar com os números e as operações Matemáticas, porque inteligentes eles são. A gente toma como pressuposto que todos têm a capacidade de pensar e de raciocinar e que as habilidades que eles trazem que, talvez, sejam pouco trabalhadas. Então, o professor tem que criar métodos, maneiras de desenvolver

[28] Neste contexto, a palavra cadeira é empregada como um sinônimo para a palavra disciplina.
[29] A expressão "tu" é muito utilizada no estado do Rio Grande do Sul para substituir a palavra você.

essas habilidades nos alunos. Por exemplo, a calculadora científica: os alunos não têm o conhecimento da sua utilização e cabe ao professor auxiliá-los nesse processo.

Da mesma forma na questão dos números, das equações, é isso que se espera do professor de Matemática. Não se espera que o professor aprove o aluno, o professor tem que auxiliá-lo a desenvolver as habilidades necessárias e tenha o conhecimento para trabalhar com as questões da Matemática. E ajudá-lo a perceber a importância da Matemática durante o curso, pois muitas vezes, eles chegam aqui e nos questionam sobre a necessidade de cursar uma disciplina de Matemática, sendo que a Matemática é a base que sustenta toda a decisão de um administrador.

Para tomar uma decisão a partir de valores, o administrador vai utilizar números e, para isso, utilizará equações Matemáticas. Até para fazer um planejamento pessoal a Matemática é necessária. Esperamos que o professor dessa disciplina, desenvolva um trabalho pautado tanto na questão do conhecimento, como na questão dos instrumentos, calculadora e utilização de softwares, por exemplo.

- Pergunta 4: Quais os conteúdos da disciplina Matemática I são mais relevantes para um futuro administrador?

Acho que eu até já falei sobre isso antes, mas as equações, as operações Matemáticas, além de aspectos específicos como abordagem do ponto de nivelamento, ponto de equilíbrio, função custo, lucro, receita, demanda e oferta. Tudo isso é de extrema importância para eles, inclusive, na última prova do ENADE caiu uma questão sobre o ponto de nivelamento.

Na Matemática II, que entra o conteúdo de integral, eu não vejo muita aplicação na área da Administração, em Matemática I, as funções e equações são indispensáveis e têm muitas aplicações na área. Na Matemática I e II, as derivadas e suas aplicações também são de extrema importância de serem trabalhadas.

Ao finalizar esta entrevista, detalhou-se como pretendia-se desenvolver as atividades da pesquisa e obteve-se aval da coordenação da instituição. Por meio desta ação, verificou-se a relevância deste estudo na tentativa de suprir determinadas carências da comunidade acadêmica alvo do estudo, que já vinham sendo vivenciadas por meio da experiência docente da autora, no entanto, foram corroboradas pela própria coordenação do curso.

Para grata satisfação da professora-pesquisadora, quando elaborou-se este questionário para realizar a entrevista, discerniu-se que as respostas obtidas ampliariam o entendimento a respeito das demandas da disciplina e justificariam a importância deste estudo, mas, surpreendentemente, obteve-se muito mais benefícios do que o esperado, pois ela contribuiu para o aprimoramento da pesquisa, no que se refere a aspectos de direcionamento do trabalho de sala de aula e de relacionamento com o grupo de colegas de trabalho.

Isto porque, por meio dessa ação, teve-se conhecimento de quais colegas trabalhavam com disciplinas que poderiam ser relacionadas com a Matemática I e, desde então, estabeleceu-se uma maior interação com estes profissionais, pois dialogou-se sobre materiais de apoio, *softwares* e demandas que poderiam vir a ser compartilhadas entre os colegas. Isso causou modificações positivas na elaboração e execução de atividades, sobretudo, na compreensão a respeito de qual é o papel da Matemática no curso de Administração.

A exemplo desta situação, pode-se exemplificar um dos inúmeros diálogos que teve-se com o professor da disciplina de Fundamentos de Microeconomia (também do primeiro semestre), que relatou sentir dificuldades para facilitar a visualização dos discentes na abordagem do ponto de nivelamento de uma empresa. Precisa-se confessar que, antes disso, nem imaginava-se que em tal disciplina, do mesmo semestre, este conceito também era estudado.

Discorreu-se ao professor que utilizava-se o *software Geogebra* e ele aderiu à sua utilização também. Após esta mudança de abordagem, ele exprimiu que sentiu modificações positivas ao trabalhar a análise gráfica em suas aulas, além de ter percebido maior entendimento, por parte de seus estudantes, que mencionaram a ele que este mesmo tipo de abordagem era feito na disciplina de Matemática I.

Diante destas experiências, evidenciou-se que este é um dos motivos pelo qual considera-se importante que o trabalho do professor de Matemática esteja em sintonia com o dos demais professores do curso em que atua, pois, muitas vezes, por ser lotado em seu curso de origem, o docente de Matemática nem imagina – ou, supostamente, desconhece/não tem o conhecimento necessário para fazer aprofundamentos – a importância da sua disciplina no contexto do curso no qual está ministrando uma disciplina específica.

Inclusive, esta ideia é defendida por Macedo (2004), Maggi (2005), Pinto (2005) e Ribeiro (2005) em suas pesquisas, pois todos eles alegam que o professor de Matemática precisa estar atento e se adaptar às necessidades dos cursos no qual atua. Mais do que uma ideia defendida, verifica-se essa postura como uma necessidade, pois Macedo (2004), expõe que há professores sem formação em Matemática ministrando a disciplina de Matemática em cursos de Administração de Empresas.

Este é um dado preocupante, pois, conforme ressaltado por Macedo (ibid.), estes docentes podem ser muito bons profissionais nas suas áreas específicas, mas, provavelmente, não tiveram contato com as disciplinas de preparo de docentes, podendo não ter a habilidade pedagógica suficiente para minimizar e responder as dúvidas dos alunos, isso sem falar na formação Matemática que estes profissionais, consequentemente, não possuem.

Isto sugere que a Matemática pode estar perdendo espaço nos cursos de Administração, ou que o trabalho docente de alguns professores de Matemática pode estar causando insatisfações, a tal ponto que administradores estão ministrando aulas de Matemática em seu lugar. Isto é muito preocupante. Essa percepção é corroborada no estudo de Pinto (2005), que evidenciou o questionamento feito por professores participantes de sua pesquisa: *"quem deve ensinar Matemática no curso de Administração, o professor de Matemática ou o administrador?"*.

Um dos argumentos explicitados pelos professores participantes da investigação de Pinto (ibid.), foi que, muitas vezes, o professor que ministra a disciplina de Matemática no curso de Administração, tem somente a formação específica, sem experiência na área de Administração. Em contrapartida, justificaram que, provavelmente, falta ao administrador o conhecimento sobre a sala de aula, sobre o ensino e, principalmente, sobre a aprendizagem Matemática.

Desse modo, reportando-se aos estudos já realizados, conjecturou-se que o cenário mais adequado para minimizar esta problemática, pode estar fundamentado na consonância do trabalho do professor de Matemática alinhado ao curso no qual está ministrando disciplinas específicas e, para isso, o diálogo e as trocas de experiências entre os profissionais das duas áreas, mostra-se basilar.

Felizmente, por meio da entrevista com a coordenação do curso e da revisão de literatura, pode-se evidenciar esta necessidade e teve-se a oportunidade de investir pequenos passos no caminho de uma postura menos solitária, buscando o compartilhamento de ideias com outros colegas. Acredita-se que esta atitude se assemelha ao caminho da aprendizagem: requer desacomodação, muitas vezes é tortuoso, depende da interação social, apresenta falhas, retrocessos e rupturas, mas, sem dúvidas, é recompensador.

4.4.2 O planejamento da UEPS: em busca de subsunçores, de invariantes operatórios de evidências de aprendizagem significativa e do progressivo domínio do campo conceitual das equações e gráficos

Uma ação que revelou-se primordial para a coleta de dados, foi a elaboração e o entendimento da UEPS, pois, na primeira fase (estudo 1), ela ainda não estava completamente delineada, não tinha-se discernimento a respeito de todas as etapas e devidos entrelaçamentos com a TAS e a TCC. Desse modo, experienciou-se dois casos: o estudo 1 (estudo piloto), no qual não seguiu-se, exatamente, o caminho metodológico proposto em uma UEPS e o estudo 2 (implementação didática), no qual levou-se em consideração as oito etapas sequenciais de desenvolvimento, sugeridas por Moreira (2012b).

É importante salientar que tais etapas podem ser adaptadas ao contexto no qual estão sendo consideradas. Neste Quadro 5, a coluna central (denominada orientação), está calcada nas ideias de Moreira (ibid.) e a coluna da direita (denominada desdobramentos), apresenta a adaptação da autora para a construção das atividades da investigação.

Quadro 5: etapas de desenvolvimento da UEPS.

ETAPA(S)	ORIENTAÇÃO	DESDOBRAMENTOS
Objetivo	Definir o tópico específico a ser abordado, identificando seus aspectos declarativos e procedimentais, tais como aceitos no contexto da matéria de ensino na qual se insere esse tópico.	Oportunizar a aprendizagem significativa progressiva de conceitos de equações de primeiro grau e de sua representação gráfica, no contexto de um curso universitário de Administração.
1. Situação inicial	Propor situações (situações-problema, debates, discussões, questionários, mapas conceituais, mapas mentais etc.), que levem o aluno a externalizar seu conhecimento prévio, aceito ou não aceito no contexto da matéria de ensino, supostamente relevante para a aprendizagem significativa do tópico em pauta.	Aplicar um teste diagnóstico, com o intuito de identificar os subsunçores e/ou possíveis invariantes operatórios dos estudantes em relação aos conceitos de equações de primeiro grau de maneira articulada à sua representação gráfica.
2. Situações-Problema	Propor situações-problema, em nível bem introdutório, levando em conta o conhecimento prévio do aluno, que preparem o terreno para a introdução do conhecimento que se pretende ensinar.	Proporcionar sete situações, em nível inicial, (discussão sobre um vídeo, atividades em grupo, criação/modelação de situações, resolução de equações e problemas com a utilização do *software Geogebra*).
3. Aprofundando Conhecimentos	Uma vez trabalhadas as situações iniciais, apresentar o conhecimento a ser ensinado/aprendido, levando em conta a diferenciação progressiva, isto é, começando com aspectos mais gerais, inclusivos, dando uma visão inicial do todo, do que é mais importante na unidade de ensino, mas logo exemplificando, abordando aspectos específicos do assunto.	Propor quatro situações, que exijam os conhecimentos anteriores para serem resolvidas. Além disso, que requeiram a comparação de duas retas que se interceptam no plano cartesiano, a respectiva análise gráfica e a interpretação financeira de conceitos específicos da área administrativa.
4. Novas situações em nível mais alto de complexidade	Retomar os aspectos mais gerais, estruturantes (aquilo que, efetivamente, se pretende ensinar), do conteúdo da unidade de ensino, em nova apresentação (que pode ser por meio de outra breve exposição oral, de um recurso computacional, de um texto, etc.), porém em nível mais alto de complexidade em relação à primeira apresentação; as situações-problema devem ser propostas em níveis crescentes de complexidade; dar novos exemplos, destacar semelhanças e diferenças relativamente às situações e exemplos já trabalhados, ou seja, promover a reconciliação integradora;	Disponibilizar seis situações que demandem os conceitos e proposições já abordados anteriormente, porém de maneira nova e não familiar aos estudantes. Tais situações abrangerão os conceitos de ponto de nivelamento e ponto de equilíbrio. Para resolver estes problemas, será necessário diferenciar progressivamente os conceitos já estudados, interpretar e explicar (verbalmente e por escrito), o significado destes pontos na área administrativa. Além disso, será demandada a capacidade de elaboração de novas situações.
5. Avaliação somativa	Deve haver uma avaliação somativa individual, a avaliação do desempenho do	Realizar a aplicação de uma prova (teste individual), contendo cinco questões para

Individual	aluno na UEPS deverá estar baseada, em pé de igualdade, tanto na avaliação formativa (situações, registros do professor e tarefas resolvidas colaborativamente), como, também, na avaliação somativa.	averiguar a evolução da aprendizagem dos estudantes. Tais questões deverão implicar compreensão, evidenciar a captação de significados e a capacidade de transferência.
6. Diferenciando Progressivamente: encontro final integrador	Concluindo a unidade, dar seguimento ao processo de diferenciação progressiva retomando as características mais relevantes do conteúdo em questão, porém de uma perspectiva integradora, ou seja, buscando a reconciliação integrativa; isso deve ser feito por meio de nova apresentação dos significados que pode ser, outra vez, uma breve exposição oral, a leitura de um texto, o uso de um recurso computacional ou audiovisual.	Oportunizar a recursividade ao erro. Após a correção feita pelos estudantes, comentar as atividades propostas no teste individual, juntamente com o grupo, realizando a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora dos aspectos relevantes do conteúdo de ensino, retomando tudo o que foi estudado. Esta atividade deve ocorrer de maneira colaborativa, com a mediação do docente.
7. Avaliação da aprendizagem na UEPS	A avaliação da aprendizagem por meio da UEPS deve ser feita ao longo de sua implementação, registrando tudo que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa do conteúdo trabalhado.	Esta etapa ocorre ao longo de todo o processo, de maneira que todas as formas de conhecimento sejam levadas em consideração (forma predicativa e forma operatória). É importante preconizar a interação, a negociação de significados e a realização de atividades individuais e em grupos.
8. Avaliação da própria UEPS	A UEPS somente será considerada exitosa se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer evidências de aprendizagem significativa (captação de significados, compreensão, capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema). A aprendizagem significativa é progressiva, o domínio de um campo conceitual é progressivo; por isso, a ênfase em evidências, não em comportamentos finais.	Para que A UEPS possa ser considerada como exitosa, os estudantes devem demonstrar, ao longo do processo, evidências de aprendizagem significativa, ou seja, devem explicitar captação de significados, ser capazes de explicar e resolver situações-problema. Necessita-se levar em conta, tudo que possa fornecer tais indícios (forma predicativa e forma operatória do conhecimento).

Fonte: elaborado pela autora, em consonância com as sugestões de Moreira (2012b).

Julga-se importante mencionar que o quadro recém exposto, apresenta o produto final, pois foi remodelado e adaptado após a aplicação do estudo 1, ou seja, ele apresenta o planejamento e execução do estudo 2. Um esboço inicial deste quadro foi feito, contudo, ajustou-se algumas de suas ideias após o estudo 1, pois na época ainda não tinha-se clareza a respeito de todos passos da UEPS. As modificações feitas e conclusões obtidas diante da aplicação do estudo 1, são evidenciadas no Capítulo 6.

Dessa forma, elaborou-se uma UEPS, contendo 17 situações, (além de uma avaliação somativa individual com cinco situações), que foram desenvolvidas ao longo de oito etapas, sendo, as duas últimas, caracterizadas pela avaliação da aprendizagem dos estudantes e pela avaliação da própria UEPS, ou seja, a sétima e a oitava etapas estiveram intimamente ligadas e foram diluídas ao longo dos oito encontros, não sendo detalhadas em uma data específica, conforme as demais.

Além disso, considerou-se que todos os materiais elaborados para coleta de registros dos estudantes (teste diagnóstico, situações e teste individual), são compreendidos pela UEPS, embora nos apêndices (ao final desta tese), estejam explicitados separadamente. Optou-se por este tipo de apresentação ao final da pesquisa, somente por questão de separação das atividades e para um melhor entendimento do leitor, pois, do contrário, poder-se-ia confundir os momentos nos quais as situações foram propostas.

Por meio de todas estas etapas, foi possível explorar, e observar em que medida ocorreram indícios de aprendizagem significativa e da evolução do conhecimento matemático dos estudantes, concernente à relação entre equações de primeiro grau e sua representação gráfica, diante de situações-problema à luz da TAS, de Ausubel (1963) e da TCC, de Vergnaud (1993).

A ilustração da Figura 13, a seguir, demonstra a configuração das atividades ao longo desta investigação, conforme essa estruturação. Nela apresenta-se as oito etapas sugeridas por Moreira (2012b), atentando-se para o fato de as duas últimas indicarem o englobamento de toda a UEPS, pois, conforme explicitado, elas foram diluídas ao longo de todas as outras, não sendo evidenciadas em um único momento.

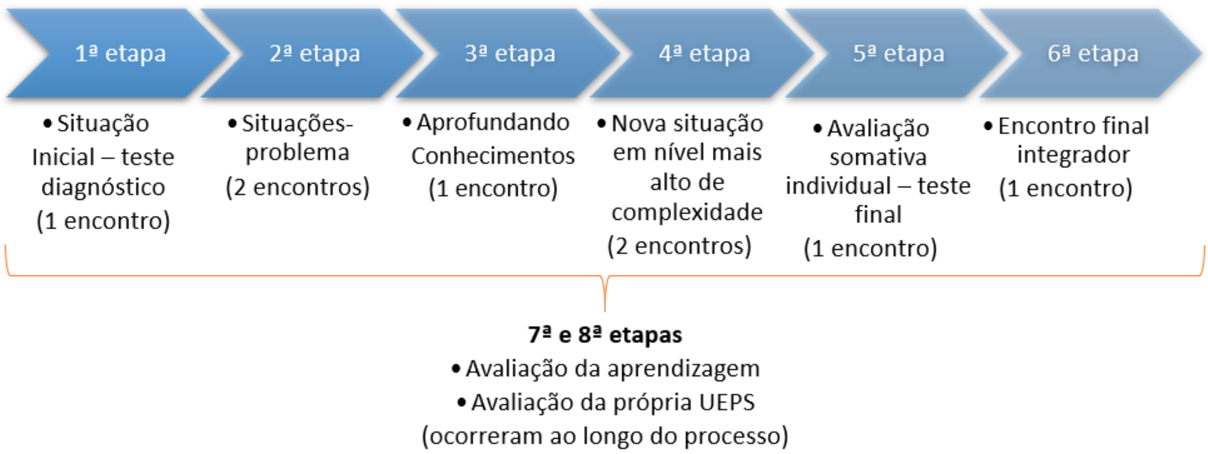


Figura 13: estruturação das etapas da UEPS.
Fonte: a autora.

Contudo, propõe-se uma explicação a respeito do formato como as etapas foram sugeridas, pois elas remetem à uma ideia de linearidade ou de um único sentido. Apresentou-se o esquema dessa maneira, porque elas estão em consonância com a ideia de organização sequencial e da consolidação, assim mencionados por Ausubel, Novak & Hanesian (1980), que sugerem a organização de cada novo tópico de maneira relacionada com ideias já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz e defendem que este novo tópico não deve ser abordado antes que o anterior esteja estável e organizado.

Ou seja, a figura apresenta as etapas propostas para a organização dos conceitos abordados. De modo algum, ela sugere que a aprendizagem ocorre de maneira ininterrupta ou contínua, inclusive, retoma-se às ideias de Vergnaud (2017), para conceber que o processo de aprendizagem é muito mais cíclico ou instável do que linear.

A concepção da UEPS, como pode-se constatar, abrangeu tudo o que foi desenvolvido ao longo de oito encontros e, para explicitar esta ideia, apresenta-se a Figura 14, que contém um compêndio de sua estrutura. Antecipa-se que, a seguir, no Capítulo 5, a UEPS encontra-se pormenorizada e, mais adiante, no Capítulo 7, minucia-se a repercussão de sua implementação em sala de aula.

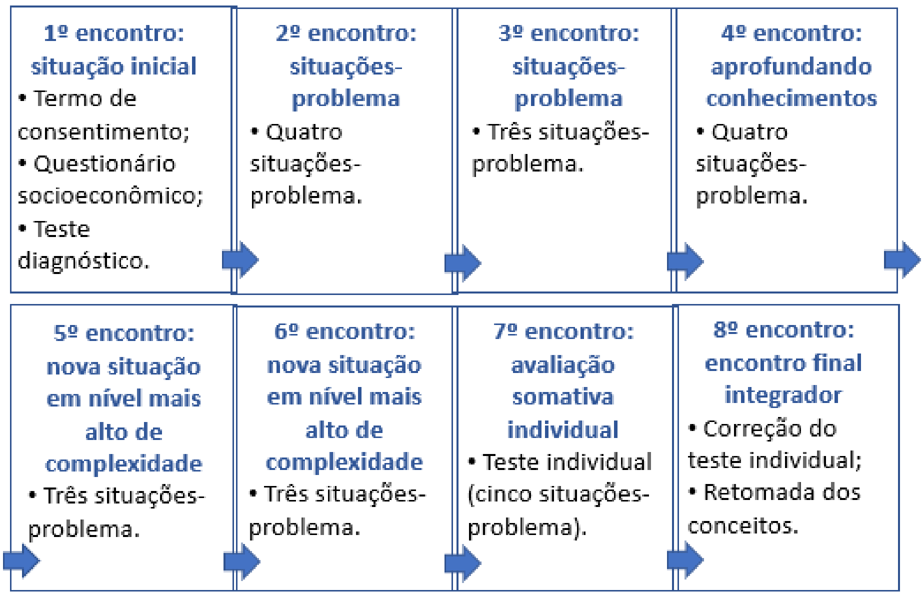


Figura 14: organização sequencial detalhada das atividades da UEPS.
Fonte: a autora.

Ressalta-se que, este, foi o cenário contemplado no estudo 2 (o de implementação didática), pois no estudo 1 (que serviu como estudo piloto), foram necessários diversos ajustes, em virtude da extensa quantidade de situações e do grau de dificuldade de algumas delas o que escancarou certa incompatibilidade das tarefas propostas com o nível de bagagem cognitiva que o grupo de estudantes apresentava, na ocasião. Muitas situações estavam repetitivas, outras precisaram ser ajustadas, para melhor adaptar-se ao nível de conhecimentos prévios dos estudantes envolvidos.

Neste ponto, ressalta-se a necessidade de investigar os possíveis esquemas que o estudante já possui para lidar com uma classe de situações que o conteúdo pode comportar, ou seja, procura-se descobrir seus subsunçores, ou invariantes operatórios, que desencadeiam suas antecipações e permitem conhecer as suas regras-de-ação e, por fim, suas inferências.

Sob esta ótica, a análise dos aspectos evidenciados no teste diagnóstico foi adaptada do trabalho de Llancaqueo, Caballero & Moreira (2003, p. 405) que o utilizou para situações relativas ao conceito de campo, da Física,

> En el instrumento se presentan situaciones con un formato diverso con preguntas de respuesta abierta, de modo que los datos obtenidos permitan inferir invariantes operatorios usados por los estudiantes para dar cuenta de las situaciones y apropiarse de representaciones simbólicas y pictóricas que les ayudan a la conceptualización y asimilación de los significados del campo conceptual del concepto de campo.

Os autores criaram uma escala de níveis, de acordo com os supostos invariantes operatórios necessários para a aprendizagem do conteúdo em questão. De maneira análoga, ajustou-se esta ideia e elaborou-se um teste diagnóstico com situações relativas aos conceitos de equações e sua representação gráfica. Este documento, serviu como aporte para detectar os possíveis subsunçores e/ou invariantes operatórios, que os estudantes traziam em sua bagagem cognitiva.

Foram estabelecidas sete categorias de subsunçores, as quais permitiram identificar o nível (ou carga de subsunçores), no qual se encontrava cada estudante. Os dados levantados neste instrumento, foram analisados, qualitativamente, conforme as categorias, que são expostas no Quadro 6, a seguir.

Quadro 6: categorias elegidas para analisar os subsunçores dos estudantes no teste diagnóstico do estudo 2.

CATEGORIA	OBJETIVO
1	Verificar se o uso de letras como incógnitas é um conceito subsunçor.
2	Verificar se a ideia de equivalência é um conceito subsunçor.
3	Verificar se a ideia de par ordenado é um conceito subsunçor.
4	Verificar se a passagem da representação algébrica (escrita simbólica) para a representação gráfica é um conceito subsunçor.
5	Verificar se a passagem da representação gráfica para a representação algébrica é um conceito subsunçor.
6	Verificar se a passagem da linguagem natural (texto escrito) para a representação algébrica é um conceito subsunçor.
7	Verificar se a equação da reta é um conceito subsunçor.

Fonte: a autora.

Estas sete categorias foram eleitas com base nas competências, ou capacidades, que exigiriam dos estudantes, em relação ao campo conceitual das equações, ao longo das sete questões do teste diagnóstico. Cabe retomar que entende-se por competência, o que Vergnaud (2009), denota como todos os artifícios que o sujeito possui e permitem que ele realize e obtenha sucesso diante de determinada situação – seu conhecimento frente à uma classe de situações. Isto abrange, inclusive, seu raciocínio, seus teoremas-em-ação, enfim, os esquemas que ele possui em sua estrutura cognitiva para expressar seu entendimento ao ser confrontado com diferentes situações, seja pela forma predicativa, pela forma operatória ou por ambas as formas.

Ressalta-se que, coincidentemente, foram elencadas sete questões e sete categorias, mas isto não significa que há uma correspondência do tipo questão 1 – categoria 1. No Quadro 7, a seguir, detalha-se como estas categorias foram desdobradas no teste diagnóstico.

Quadro 7: organização das questões do teste diagnóstico do estudo 2, conforme sua categoria.

QUESTÃO	CATEGORIAS
1	1, 2 e 6
2	1, 2 e 6
3 – a	1 e 2
3 – b	1 e 2
4	1, 2 e 6
5	3, 5 e 7
6	3, 4, 6 e 7
7 – a	1, 2 e 6
7 – b	2 e 3
7 – c	4 e 7

Fonte: a autora.

Na sequência, apresenta-se as questões, juntamente com os comentários referentes às categorias de subsunçores que abarcavam e às capacidades específicas que exigiam para serem resolvidas pelos estudantes.

- ***Questão 1** – O somatório dos salários de um casal totaliza R$ 3.762,00 por mês. Se a mulher ganha 20% a mais que o marido, qual é o salário de cada um?*

Para resolver esta questão, seria preciso que o estudante revelasse subsunçores em três categorias: representar letras como incógnitas (categoria 1), compreender a ideia de equivalência em uma equação (categoria 2) e transitar da linguagem natural para o registro algébrico (categoria 6). Além disso, a questão demandava a resolução de equações e entendimento de porcentagens, mais especificamente, de acréscimos, pois poderiam acrescentar 20% ao salário da mulher.

- ***Questão 2** – Somando-se quatro números naturais consecutivos, obtém-se o número 162. Quais são esses números?*

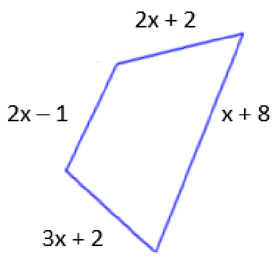
Da mesma forma que na primeira questão, esta compreendia subsunçores em três categorias (1, 2 e 6), mas exigia a capacidade de resolução de equações e o entendimento do que são números naturais consecutivos, para efetuar uma soma.

- ***Questão 3** – Resolva as equações a seguir:*

a) $3(x + 2) = 5x - 12$ ***b)*** $\frac{2x}{4} + 9 = \frac{4x}{4} - 18$

Esta tarefa abrangia subsunçores em duas categorias (1 e 2), além de exigir a capacidade de resolução de equações. Mais especificamente, o item a), requisitava o procedimento da propriedade distributiva da multiplicação e, o item b), a operação com frações (cálculo do mínimo múltiplo comum – m.m.c.) ou a compreensão de que as frações poderiam ser transformadas em números decimais.

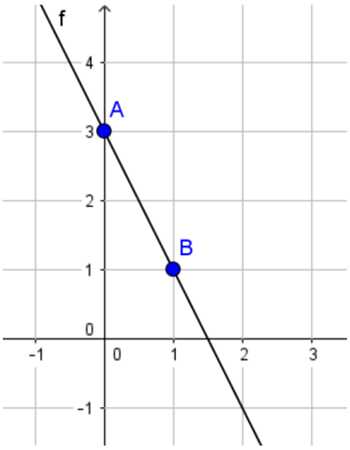
Questão 4 *– Sabendo que o perímetro do quadrilátero abaixo é 27 cm, determine a medida dos lados desse quadrilátero.*



Para resolver a quarta questão, que procurava subsunçores em três categorias (1, 2 e 6), também seria necessário que o estudante dominasse a capacidade de resolução de equações e reconhecesse o que é um perímetro.

Como pode-se verificar, as quatro primeiras questões do teste diagnóstico comtemplavam, de maneira geral, conhecimentos prévios nas categorias 1, 2 e 6. Desse modo, da quinta questão em diante, subsunçores nas categorias 3, 4, 5 e 7 também foram requisitados dos estudantes.

Questão 5 *– De acordo com o gráfico abaixo, qual é a equação que a reta representa?*



Ao desvendar este problema, que incorporava três categorias: dominar a ideia de par ordenado (categoria 3), transitar do registro gráfico para o registro algébrico (categoria 5) e compreender a equação da reta (categoria 7), o estudante precisaria coordenar capacidades de resolução de um sistema de equações, de resolução de equações e de explicitar a equação da reta, o que compreendia o entendimento do significado dos coeficientes angular e linear.

Questão 6 *– Dados os pontos A (2,5) e B (0,3), qual a equação da reta que os contém? Represente graficamente a situação.*

Esta tarefa abraçava quatro categorias: entendimento da ideia de par ordenado (categoria 3), transitar do registro algébrico para o registro gráfico (categoria 4), transitar da linguagem natural para o registro algébrico (categoria 6) e compreender a equação da reta (categoria 7), além disso, exigia do estudante, capacidades de resolução de equações, de um sistema de equações e no entendimento do significado dos coeficientes, para construção de gráficos no plano cartesiano.

- ***Questão 7*** – *Com o início das aulas, Fernanda precisa ir à livraria para comprar cadernos de 200 folhas, cujo preço unitário é R$ 12,00, e canetas, cujo valor unitário é R$ 6,00. Para isso, Fernanda dispõe de R$ 120,00. Suponha que ela queira utilizar todo o dinheiro na compra de cadernos e canetas. Pede-se:*

a) *Descreva uma expressão Matemática que represente essa situação.*

b) *Quais são as quantidades possíveis para se comprar os dois itens?*

c) *Represente graficamente essa situação.*

A última questão do teste diagnóstico, atingia, de um modo geral, seis categorias (1, 2, 3, 4, 6 e 7). Esmiuçando-se esta questão, o item a), investigava subsunçores nas categorias 1, 2 e 6, pois demarcava a capacidade de escrever uma equação de maneira literal, conforme o enunciado, e de diferenciar o objeto caneta do objeto caderno, contemplando-os, cada um, com uma incógnita diferente.

O item b), englobava as categorias 2 e 3, porque requeria capacidades de operações aritméticas com números naturais, de maneira que deveriam utilizar a ideia de par ordenado e de equivalência. Eles poderiam ter feito, por exemplo, uma tabela para verificação de todas as possibilidades. Por último, o item c), pleiteava subsunçores nas categorias 4 e 7, além de reivindicar o entendimento do significado dos coeficientes para construção de gráficos no plano cartesiano.

Com base nestas sete categorias elencadas para análise do teste diagnóstico, foi possível estabelecer quais subsunçores e/ou indícios de invariantes operatórios os estudantes, provavelmente, tinham presentes em suas estruturas cognitivas. Após a aplicação e verificação dos dados coletados neste documento, iniciou-se o delineamento e aplicação das demais atividades que integraram a UEPS.

Durante a aplicação e desenvolvimento da UEPS, que foi implementada por meio do teste diagnóstico, das 17 situações, que foram desenvolvidas nos cinco encontros subsequentes, do teste individual, com cinco situações e culminou no encontro final integrador, foi possível diagnosticar se ocorreu indícios de aprendizagem significativa e, de mesmo modo, acompanhar a evolução dos estudantes no domínio do campo conceitual das equações e sua representação gráfica ao longo do processo.

Para realizar este diagnóstico, comungou-se com a ideia ausubeliana de que este tipo de evidência não é algo simples de ser detectado, contudo, Ausubel, Novak & Hanesian (1978), sugerem algumas iniciativas para o professor:

- formular questões e problemas de maneira nova e não familiar que requeiram máxima transformação do conhecimento adquirido;
- elaborar testes de compreensão de maneira diferente e em contextos diferentes daqueles originalmente encontrados no material instrucional;
- propor ao aprendiz uma tarefa de aprendizagem sequencialmente dependente da outra, a qual não possa ser executada sem uma genuína compreensão da precedente.

Ademais, Ausubel, Novak & Hanesian (1980), sugerem que há evidências de aprendizagem significativa quando o aluno consegue relatar os atributos relevantes de um conceito ou elementos essenciais de uma proposição. Desse modo, elaborou-se uma UEPS, prevendo fomentar a capacidade de externalização e captação de significados por parte dos estudantes para auxiliá-los no processo aprendizagem e para facilitar a busca da professora pesquisadora por evidências de aprendizagem significativa dos estudantes participantes.

Concomitantemente, tencionou-se que a UEPS promovesse, aos discentes, o confrontamento com diferentes conceitos e classes de situações, pois para que ocorra o domínio progressivo de um campo conceitual, é necessário, justamente, tempo, experiência e maturidade diante de inúmeras situações.

Dessa forma, o objetivo metodológico da UEPS foi conciliar os propósitos da TAS e da TCC: fomentar a capacidade de externalização de ideias, pois de acordo com Vergnaud (2017), a forma operatória do conhecimento, em geral, permanece implícita; promover atividades de discussão e negociação de significados; abordar diferentes maneiras de solucionar situações; valorizar o caminho percorrido pelos discentes (construção de significados); levar em consideração os conhecimentos prévios, bem como o seu contexto; utilizar diferentes materiais de apoio; oportunizar aos estudantes a chance de corrigir o seu erro e aprender com ele, bem como entender que o erro faz parte do processo e não significa um fracasso, dentre outros aspectos que são minuciados ao longo das análises feitas nos dois estudos (capítulos 6 e 7).

No próximo capítulo, apresenta-se o detalhamento das atividades da UEPS, que foram desenvolvidas ao longo do estudo 2 (implementação didática), como uma espécie de protótipo da investigação.

CAPÍTULO 5
PROPOSTA METODOLÓGICA DE UMA UEPS

Neste capítulo, expõe-se as situações elaboradas e desenvolvidas ao longo do estudo 2, denominado implementação didática. A todas estas situações, nomeou-se de UEPS e elas compreenderam o teste diagnóstico (Apêndice F), as 17 situações de sala de aula, que totalizaram cinco encontros (Apêndice G) e as cinco situações do teste individual (Apêndice H). A seguir, minucia-se como elas foram diluídas ao longo dos oito encontros.

Ressalta-se que este tópico não contém as impressões nem os diagnósticos da professora pesquisadora a respeito dos registros produzidos pelos discentes, apenas a estruturação do desenho da UEPS. Os resultados e minúcias obtidas em cada dia de aula da implementação didática, são detalhados no Capítulo 7.

5.1 A estruturação da UEPS

- **Tempo previsto:** 32 horas/aula, distribuídas em oito encontros semanais de 4 horas/aula cada um.
- **Contexto:** estudantes matriculados na disciplina de Matemática I, do primeiro semestre do curso de Administração.
- **Objetivo:** oportunizar a aprendizagem significativa progressiva de conceitos de equações e gráficos no contexto de um curso universitário de Administração.
- **Conteúdos:** equações de primeiro grau e funções (linear e afim), porcentagem, frações, decimais, números e operações, sistemas de equações, análise econômica (ponto de nivelamento, ponto de equilíbrio).

5.1.1 Situação inicial: esta etapa foi distribuída em um encontro – total de 4 horas/aula

- **Primeiro encontro:** apresentação inicial, combinações do semestre, junto do convite feito aos estudantes para que participassem do estudo e aplicação do teste diagnóstico, caso fosse de sua livre e espontânea vontade.

Primeiramente, os discentes assinaram o termo de consentimento, para que confirmassem ciência de que suas produções (registros produzidos: escritos, gráficos e verbais), poderiam ser compartilhadas no meio acadêmico e que seu anonimato seria preservado.

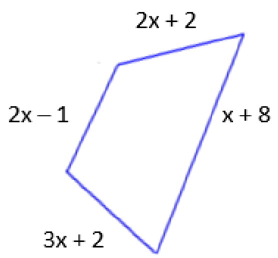
Após, preencheram o questionário socioeconômico, para que se pudesse estar no limiar da realidade na qual eles estavam inseridos. Estas atividades ocorreram durante os dois primeiros períodos.

Na volta do intervalo, entregou-se o teste diagnóstico, contendo cinco situações, com o intuito de verificar seus conhecimentos prévios, ou indícios de invariantes operatórios, referentes aos conceitos de equações de primeiro grau articulados com sua representação gráfica. As situações que compunham o teste diagnóstico são explicitadas a seguir:

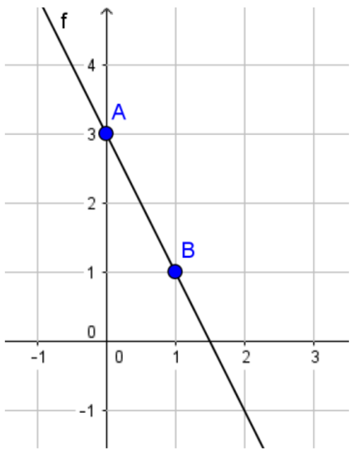
- ***Questão 1** – O somatório dos salários de um casal totaliza R$ 3.762,00 por mês. Se a mulher ganha 20% a mais que o marido, qual é o salário de cada um?*
- ***Questão 2** – Somando-se quatro números naturais consecutivos, obtém-se o número 162. Quais são esses números?*
- ***Questão 3** – Resolva as equações a seguir:*

a) $3(x + 2) = 5x - 12$ ***b)*** $\frac{2x}{4} + 9 = \frac{4x}{4} - 18$

- ***Questão 4** – Sabendo que o perímetro do quadrilátero abaixo é 27 cm, determine a medida dos lados desse quadrilátero.*



- ***Questão 5** – De acordo com o gráfico abaixo, qual é a equação que a reta representa?*



Solicitou-se que escrevessem o máximo de informações que pudessem no teste diagnóstico. Esta atividade, direcionou a ação docente e configurou a primeira etapa da UEPS.

Justifica-se que as situações do teste diagnóstico não estavam direcionadas, necessariamente, ao contexto administrativo, justamente por se tratar do campo de conhecimentos que se pretendia desenvolver ao longo dos oito encontros.

Neste ponto, optou-se por verificar os conhecimentos prévios que os estudantes traziam consigo a respeito do campo algébrico, pois não era esperado que soubessem conceituar custo, lucro, receita, ponto de equilíbrio, etc., mas tinha-se a intenção de investigar qual era a sua bagagem de conhecimentos a respeito de operações aritméticas, reconhecimento da equação da reta, resolução de equações, de sistemas de equações e se eles conseguiam transitar entre os diferentes tipos de registros.

Foi acordado com o grupo, que quando fosse verificada a necessidade, seriam disponibilizadas no *Moodle*, videoaulas, sempre antes do próximo encontro, para que eles assistissem durante a semana. Este ambiente seria uma espécie de extensão da sala de aula e, por meio das ferramentas "fórum de dúvidas" e "mensagem", eles poderiam entrar em contato com a professora e com os colegas, quando desejassem.

Na primeira semana, foram compartilhados dois vídeos, que estão disponíveis para acesso em <https://www.youtube.com/watch?v=8WGJSZ1eBgE> e em https://www.youtube.com/watch?v=mZxc_1vhgls&t=14s>. Estas duas videoaulas, de maneira geral, apresentavam uma visão integradora do que seria discutido no segundo dia de aula, com o adendo de que o segundo vídeo, foi gravado pela professora pesquisadora.

Desse modo, as informações contidas nestes dois materiais, poderiam fornecer uma espécie de resumo dos principais aspectos que seriam progressivamente diferenciados na sequência. Ademais, poderiam funcionar como pontes cognitivas, que é o objetivo dos organizadores prévios (ou materiais instrucionais), ressaltados por Ausubel (1963), ao interligarem-se com os conhecimentos prévios dos estudantes. O arquivo do teste diagnóstico também foi compartilhado com os estudantes no ambiente *Moodle*.

5.1.2 Situações-problema: esta etapa foi distribuída em dois encontros – total de 8 horas/aula

- **Segundo encontro:** nesta etapa, foram trabalhadas quatro situações-problema.
- ***A primeira situação*** *– Disponibilizou-se, por meio de um projetor Datashow, o vídeo, "Minuto do Empreendedorismo". Página disponível em:* <https://www.youtube.com/watch?v=5ikZc5fhHkg>, *no qual um vendedor ambulante nas praias do Rio de Janeiro, conta lições sobre empreender vendendo garrafas de água mineral na praia.*

Seu objetivo, foi evidenciar como a Matemática pode estar presente no cotidiano e ser necessária na tomada de decisões e para investir e empreender, características essenciais no exercício da profissão de um administrador. Além disso, ela foi planejada para que os estudantes pudessem dar sentido ao conceito de equação (nesse caso, equação do lucro, do custo e da receita), mas, para isso, alguns conhecimentos deveriam ser subsunçores como os de porcentagem, operações aritméticas, operações algébricas, acréscimos e descontos.

Após assistirem ao vídeo, fez-se discussões a respeito de porcentagens (acréscimos e descontos), lucro, arrecadação, custos (fixos e variáveis), demanda, oferta, construção de gráficos (reta crescente e decrescente), tabelas, coeficiente angular e linear.

- ***A segunda situação** – Uma balança de dois pratos está em equilíbrio. Em um prato há três pesos iguais de valor desconhecido (medido em gramas) e um terceiro peso de 13g. No outro prato da balança, há um outro exemplar igual aos anteriores de peso desconhecido e um peso de 45g. Qual é o valor do peso desconhecido?*

Ela exigia capacidades no campo algébrico para resolver equações e realizar operações aritméticas e foi planejada para que os estudantes pudessem dar sentido ao conceito de equivalência. Nesse caso, o uso de letras como incógnitas e a passagem da linguagem natural (texto escrito) para a representação algébrica, deveriam funcionar como subsunçores.

Dependendo das capacidades que dispunham, eles também poderiam partir do registro escrito para o registro gráfico, ou seja, elaborar um desenho da situação (caso preferissem, para uma melhor visualização), para, então, desvendá-la algebricamente. Estas duas atividades ocorreram nos dois primeiros períodos.

- ***A terceira situação*** **–** Na volta do intervalo, os estudantes *modelaram uma equação que representava o custo total de uma festa, após decidirem qual o valor da entrada e de cada unidade de bebida*[30] *consumida no local. Nesta tarefa, também tiveram de construir o gráfico e analisar o significado dos coeficientes.*

Ela foi planejada para que os discentes pudessem significar o conceito de equação (nesse caso, equação custo, como a soma do custo fixo e do custo variável) e necessitava de subsunçores no tratamento e resolução de equações, reconhecimento da equação da reta, entendimento do significado dos coeficientes angular e linear e construção de gráficos.

- ***A quarta situação** – Uma pessoa vai ao supermercado e gasta R$ 80,00 em dois produtos, cujos preços são, respectivamente*, *R$ 12,00 e R$ 8,00.*

a) Descreva uma expressão Matemática que relacione a quantidade destes dois produtos.

---

[30] Ressalta-se que não foi incitado o consumo de bebida alcoólica, apesar de se tratar de um grupo de estudantes maiores de 18 anos. A atividade foi elaborada, diante da verificação do questionário socioeconômico, no qual diversos estudantes mencionaram que gostavam de frequentar festas nas suas horas de lazer.

b) Quais são as possibilidades de compra dos produtos para esta pessoa?

c) Esboce graficamente a situação.

d) O que ocorre se os produtos entrarem em promoção com desconto de 20%?

Esta situação, demandava capacidades de trânsito do registro escrito para o registro algébrico, a fim de elaboração de uma equação e, por meio dela, confeccionar uma tabela e um gráfico no plano cartesiano.

Seu objetivo foi dar sentido ao conceito de equação e os subsunçores que abarcava, os quais consistiam na utilização de letras como incógnitas, reconhecimento da equação da reta, entendimento do significado dos coeficientes angular e linear, da ideia de equivalência, de par ordenado, além de conversões entre os registros escrito, algébrico e gráfico.

Ao término deste encontro, anunciou-se que uma videoaula seria compartilhada no ambiente virtual, para que fosse assistida antes da próxima aula. Página disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=6Vnf-u3rSSI>. Ademais, um arquivo com tarefas, para serem feitas em turno extraclasse, também foi anexado ao ambiente *Moodle*, que permitia o contato dos discentes entre si e com a professora pesquisadora, bastaria escrever uma mensagem para qualquer um dos integrantes.

Esta lista tinha o objetivo de que os discentes entrassem em contato com a disciplina durante a semana, para que não fechassem os seus cadernos na sexta-feira e só o abrissem, novamente, uma semana depois. O nível de dificuldade e a linguagem dos exercícios era semelhante com os que eram discutidos presencialmente, para que eles se sentissem autoconfiantes, além disso, continha o gabarito.

- **O terceiro encontro:** neste dia, abordou-se três situações, todas elas foram oportunizadas no laboratório de informática e contaram com a utilização do *software Geogebra*. Página disponível em: <https://www.geogebra.org/graphing>. Elas não possuíam relação com o contexto administrativo, entretanto, possibilitaram a visualização e a vivência diante de algoritmos necessários para o avanço do domínio do campo conceitual das equações de primeiro grau, de maneira articulada com sua representação gráfica.

- ***A primeira situação*** – *Resolva as expressões abaixo e esboce os seus gráficos (indique os coeficientes e os pontos de intersecção com os eixos):*

a) $y - 9 = -3x + 13$ *c)* $-34 + 8x = 2y$

b) $22 = 10x - f(x)$ *d)* $-1{,}5 - 5x = y$

A primeira situação demandava subsunçores referentes à verificação da ideia de equivalência, reconhecimento de letras como incógnitas, da equação da reta. Também exigia a capacidade de resolução de equações e o esboço de seus respectivos gráficos, ou seja, que os estudantes transitassem do registro algébrico para o registro gráfico.

- ***A segunda situação*** – *Os pontos a seguir indicam as retas que passam pelos pontos A e B. Em cada um dos casos, elabore o gráfico e apresente a equação da reta corresponde para responder às seguintes questões:*

a) $A(0,0)$ *e* $B(2,3)$ *c)* $A(0,4)$ *e* $B(1,2)$

b) $A(-4,1)$ *e* $B(1,3)$ *d)* $A(0,3)$ *e* $B(5,1)$

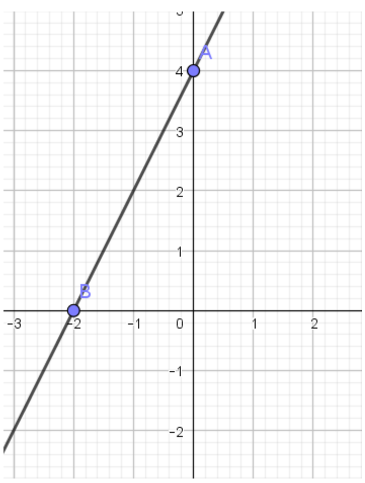
– Qual é o coeficiente angular? E o linear?

– Esta reta é crescente ou decrescente?

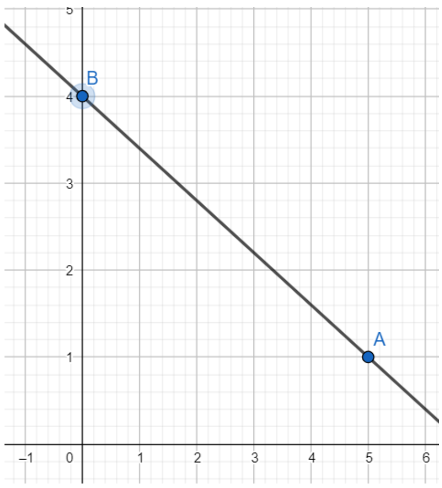
Esta tarefa, implicava subsunçores do entendimento da ideia de par ordenado, da equação da reta, de construção de gráficos, de resolução de um sistema de equações e de significado dos coeficientes. Também demandava a capacidade de transição entre os registros algébrico e gráfico.

- ***A terceira situação*** – *Em cada um dos itens, descubra qual é a equação da reta representada no sistema cartesiano.*

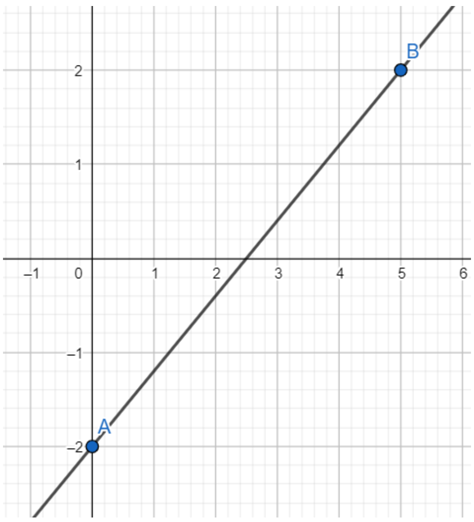
a)



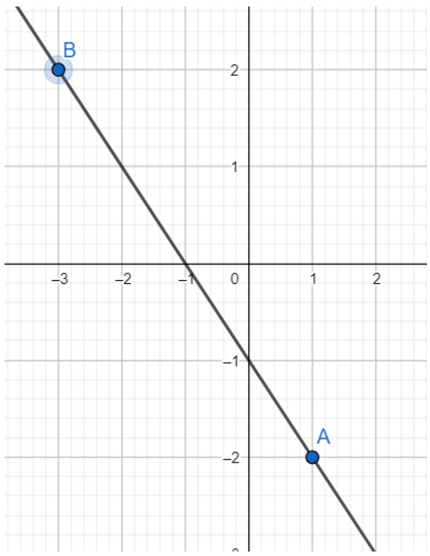
b)



c)



d)



A terceira situação, requeria o caminho inverso das duas primeiras, ou seja, que os discentes transitassem do registro gráfico para o algébrico.

De maneira geral, as três situações tencionavam a compreensão do conceito de equação. Elas demandavam subsunçores referentes à verificação da ideia de equivalência, reconhecimento de letras como incógnitas, da equação da reta, entendimento da ideia de par ordenado, capacidades de resolução de um sistema de equações, entendimento do significado dos coeficientes angular e linear, além de conversões entre os registros escrito, algébrico e gráfico.

Como atividades extraclasse, sugeriu-se que os discentes utilizassem o *Geogebra* para verificar os gráficos das situações exploradas no segundo encontro.

5.1.3 Aprofundando conhecimentos: esta etapa foi distribuída em um encontro – total de 4 horas/aula

- **O quarto encontro:** iniciou-se a aula, diferenciando-se progressivamente os conceitos abordados anteriormente. Na sequência, quatro situações foram oportunizadas para serem discutidas em duplas e entregues, juntamente com as gravações dos registros verbais dos discentes. Esta atividade teve um caráter avaliativo e totalizou 2,0 pontos do total do somatório do módulo (10,0 pontos).

- ***A primeira situação*** – *Uma empresa de garçons "A" cobra, por serviço feito em festas, um valor fixo de* $R\$\ 500{,}00$ *e* $R\$\ 68{,}00$ *por hora trabalhada. Outra empresa de garçons "B" cobra, pelo mesmo serviço, um valor fixo de* $R\$\ 480{,}00$ *e* $R\$\ 73{,}00$ *por hora trabalhada.*

a) escreva duas equações Matemáticas: uma que expresse a situação da "empresa A" e outra que expresse a situação da "empresa B";

b) apresente as duas situações em um mesmo gráfico, especificando todos os valores e o que cada eixo representa;

c) qual o valor pago no momento em que a escolha entre as empresas é indiferente? d) após fazer a análise financeira, escreva um critério que você utilizaria para decidir qual empresa contratar.

- ***A segunda situação*** – *Uma loja de equipamentos para academias estima que um de seus produtos será comprado por* 1.850 *clientes, se vendido a* $R\$\ 10.400{,}00$. *Mas, se vendido a* $R\$\ 9.660{,}00$, *haverá um aumento de* 20% *nas vendas em relação ao previsto anteriormente.*

a) determine a equação de demanda para este produto represente-a graficamente;

b) o que o coeficiente linear significa nessa situação?

- **A terceira situação** – *Uma editora pretende lançar um livro e estima que a quantidade vendida seja* 40.000 *exemplares. Se o custo fixo de fabricação for* $R\$\ 250.000{,}00$ *e o custo variável, por unidade, for* $R\$\ 20{,}00$*, qual o preço mínimo que a editora deverá cobrar por livro?*
- **A quarta situação** – *Qual o custo da disciplina de Matemática I? Elabore uma expressão Matemática que leve em consideração o seu custo fixo e os seus gastos variáveis para se deslocar até a UFN toda sexta-feira. Compare com a de seu colega e elaborem uma expressão que rege o custo médio mensal da disciplina de Matemática I.*

Todas as tarefas selecionadas para este dia, tencionavam dar sentido ao conceito de equação, com ênfase na representação gráfica e demandavam o trânsito entre os diferentes registros (escrito, algébrico, verbal, gráfico). Para isso, requeriam os subsunçores necessários em, praticamente, todos os encontros anteriores e, por este motivo, concentrou-se em um único comentário ao final das situações recém expostas.

Além disso, todas elas demandavam conceitos da área administrativa e exigiam interpretações, por escrito, do ponto de intersecção entre duas retas no plano cartesiano, dos coeficientes, cálculos de porcentagens, tomadas de decisões, equacionamento de situações apresentadas em língua natural (transitar do registro escrito para o registro algébrico), resolução de equações e construção de gráficos. Sua culminância oportunizou a reconciliação integradora dos conceitos estudados.

Ao término desta aula, sinalizou-se a respeito dos vídeos, que seriam disponibilizados no *Moodle* para serem verificados ao longo da semana. Ambos tinham o intuito de relacionar os conhecimentos prévios dos estudantes com os novos conhecimentos, que seriam estudados no quinto e no sexto encontros e foram gravados pela professora pesquisadora.

Um deles, abordava um problema que fornecia pistas a respeito do ponto de equilíbrio (página disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=4V8vAHnnxUo&t=31s>) e o outro abordava indícios para a compreensão do ponto de nivelamento (página disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=pnYEeb7-j_U&t=20s>).

5.1.4 Novas situações em nível mais alto de complexidade: esta etapa foi distribuída em dois encontros – total de 8 horas/aula

- **O quinto encontro:** nesta data, apresentou-se três situações. Para isto, foi requerido dos estudantes que percebessem a ideia de par ordenado nas situações-problema e que conseguissem transitar do registro escrito em língua natural para o registro algébrico. Além disso, que lidassem com situações de demanda, oferta, lucro, custo e receita, que precisariam ser interpretadas economicamente e apresentadas em registro escrito e gráfico. Também foram abordados conceitos de porcentagem, custo fixo, custo variável e o significado dos coeficientes.

- ***A primeira situação*** *– Suponha que o custo fixo de produção de "x" bolsas universitárias seja $R\$\ 450{,}00$ e que o custo variável seja igual a 20% do preço de venda, que é de $R\$\ 125{,}00$ por unidade.*

a) expresse, algebricamente, as funções custo total e receita total;

b) qual será a quantidade mensal produzida quando o custo total mensal for $R\$1.200{,}00$?

c) quantas bolsas o dono precisa vender para obter lucro? Expresse a função lucro graficamente;

d) qual será o lucro mensal se 247 bolsas forem produzidas e vendidas?

e) expresse em um mesmo gráfico as funções custo e receita. Faça uma análise econômica da situação.

Ela teve como intuito, dar sentido ao conceito de ponto de nivelamento e exigia subsunçores de porcentagem, operações aritméticas e algébricas, reconhecimento de letras como incógnitas, da lei da equação da reta, construção gráfica, significado dos coeficientes, além do entendimento do conceito de custo, lucro e receita.

- ***A segunda situação*** *– Para produzir embalagens, uma pequena empresa tem um custo representado por $C(x) = 4500 + 0{,}2x$, na qual "x" representa o número de unidades produzidas.*

Se cada embalagem for vendida por $R\$\ 15{,}5$, qual é o número mínimo de unidades que devem ser vendidas para que o lucro da empresa seja o triplo do custo? Represente a função lucro graficamente.

Seu objetivo foi dar sentido ao conceito de equação e exigia subsunçores de operações aritméticas, algébricas, reconhecimento de letras como incógnitas, significado do símbolo de igualdade, construção gráfica, significado dos coeficientes, ideia de custo, lucro e receita além de conversões entre o registro escrito, algébrico e gráfico.

- ***A terceira situação*** *– Gabriel comprou uma casa no ano de 2012 por $R\$\ 280.000{,}00$*

e revendeu-a, no ano de 2017*, por* $R\$\,156.000{,}00$*, pois houve uma depreciação linear em virtude da construção de um viaduto em frente ao imóvel.*

Observação: *suponha o ano de 2012 como o ano zero da compra.*

a) descubra a expressão Matemática que representa, essa situação e esboce seu gráfico;

b) o que os coeficientes angular e linear representam nessa situação?

A terceira situação tencionava dar sentido ao conceito de equação em articulação com o seu registro gráfico e carecia de subsunçores de pares ordenados, equação da reta, significado dos coeficientes, esboço do gráfico, operações algébricas, operações aritméticas e resolução de um sistema de equações. Além disso, um de seus itens necessitava da interpretação do significado dos coeficientes no contexto administrativo, ou seja, os estudantes precisariam realizar conversões entre o registro escrito, gráfico e algébrico.

As mesmas videoaulas do encontro anterior, foram sugeridas para serem relembradas antes do próximo encontro, além de tarefas extraclasse, com gabarito e semelhantes às feitas em aula, terem sido disponibilizadas no ambiente virtual, para que os estudantes se deparassem com mais tarefas a respeito do ponto de nivelamento e do ponto de equilíbrio.

- **O sexto encontro:** neste dia, proporcionou-se três situações que contemplaram os mesmos conceitos que os envolvidos no quinto encontro. Elas foram trabalhadas em duplas e entregues, juntamente com as gravações dos registros verbais dos estudantes. Esta atividade teve um caráter avaliativo e totalizou 2,0 pontos do total do somatório do módulo (10,0 pontos).

- ***A primeira situação*** *– Em certa localidade, a função de oferta anual de um determinado produto agrícola é representada por* $p = 0{,}01x – 3$*, na qual "*p*" é o preço por quilograma e "*x*" a quantidade ofertada, em toneladas.*

a) que preço induz a uma produção de 650 *toneladas?*

b) se o preço, por quilograma, for $R\$7{,}5$*, qual será a produção anual?*

c) qual o ponto de equilíbrio de mercado se a função de demanda anual for $p = 10 - 0{,}01x$*?*

d) apresente o gráfico contendo o ponto de equilíbrio e o que cada eixo representa. Escreva sua interpretação econômica.

Esta tarefa, tinha a intenção de dar sentido ao conceito de equação oferta e equação demanda para que, conjuntamente, elas pudessem dar sentido ao conceito de ponto de equilíbrio. Neste contexto, a situação exigia subsunçores de operações aritméticas e algébricas, reconhecimento de letras como incógnitas, da lei da equação da reta, construção gráfica, significado dos coeficientes, do símbolo de igualdade como ideia de equivalência, além do entendimento do conceito de demanda e oferta.

- ***A segunda situação*** – *Em uma sorveteria, sabe-se que, quando o preço do sorvete é* $R\$\,7{,}15$*, a quantidade ofertada será* 350 *por semana e, se o preço for* $R\$\,9{,}7$*, a quantidade semanal ofertada será* 1.200*. Nessa sorveteria, sabe-se que a função de demanda por sorvetes é* $p = 10 - 0{,}02x$*. Considerando um modelo linear, qual é a função de oferta?*

a) expresse as duas funções no mesmo gráfico;

b) o que os coeficientes angular e linear significam em cada uma das funções?

c) escreva a interpretação econômica dessa situação.

Ela propunha dar sentido ao conceito de equação oferta e equação demanda para que, conjuntamente, elas pudessem dar sentido ao conceito de ponto de equilíbrio. Como pode-se verificar, o objetivo das duas primeiras situações desse encontro era o mesmo, contudo, elas foram apresentadas em uma linguagem distinta e, dessa forma, diferiam quanto aos subsunçores que demandavam, além de sugerirem caminhos distintos para elaboração dos esquemas de resolução, pois, assim, provavelmente, não poderiam ser resolvidas de uma maneira, sequencialmente, memorística.

Nesta tarefa, os subsunçores necessários compreendiam o reconhecimento de pares ordenados, da lei da equação da reta, resolução de um sistema de equações, operações aritméticas e algébricas, reconhecimento de letras como incógnitas, construção gráfica, significado dos coeficientes, do símbolo de igualdade como ideia de equivalência. Todos estes conhecimentos envolvidos, para dar sentido ao conceito de demanda e oferta. Além, é claro, de conversões entre o registro escrito, algébrico, gráfico e escrito.

- ***A terceira situação*** – O enunciado, que foi escrito na lousa, continha a seguinte proposta: *Elabore uma situação que envolva alguns dos conceitos abordados, contendo interpretação econômica e construção gráfica.*

a) Situação;

b) Gráfico;

c) Interpretação econômica/gráfica.

Esta atividade propôs liberdade de escolha aos discentes, de modo que eles precisaram de criatividade. Para isso, eles tiveram de seguir, apenas, três regras: 1 – criar uma situação problema, 2 – realizar a interpretação econômica, 3 – apresentar a construção gráfica da situação criada, que deveria, obviamente, utilizar algum(uns) conceito(s) abordado(s) nas aulas anteriores.

Na finalização deste encontro, informou-se que uma lista de tarefas seria disponibilizada no *Moodle*, com o intuito de que os estudantes entrassem em contato com outras situações em turno extraclasse. Como de costume, todas elas estariam acompanhadas dos respectivos gabaritos e abarcariam aspectos semelhantes aos discutidos em aula. Ademais, caso eles enfrentassem dúvidas, estavam cientes que, por meio do ambiente virtual de aprendizagem, poderiam mandar mensagem para a professora, que poderia auxiliá-los ao longo da semana.

5.1.5 Avaliação somativa individual: esta etapa foi distribuída em um encontro – total de 4 horas/aula

- **O sétimo encontro:** neste dia, fez-se a aplicação do teste individual, que teve um caráter avaliativo e totalizou 6,0 pontos do total do somatório do módulo (10,0 pontos). Ele foi composto de cinco questões, que apresentavam os mesmos elementos que foram abordados ao longo da UEPS, porém de maneira mais aprofundada, com o intuito de verificar o desenvolvimento conceitual obtido pelos estudantes ao longo do período de aplicação dos oito encontros, ou seja, sua captação de significados. Nesta etapa, os estudantes trabalharam individualmente.

- ***A primeira situação*** *– Considere que as equações de demanda e oferta de determinado produto são representadas, respectivamente, por* $1{,}1x + 2y - 74 = 0$ *e* $x - 4y + 84 = 0$, *na qual* y *representa o preço e* x *representa a quantidade.*

a) determine o ponto de equilíbrio e trace o gráfico das equações num mesmo sistema de coordenadas;

b) escreva a interpretação econômica dessa situação.

Para desvendá-la, os estudantes precisaram resolver equações, utilizar letras como incógnitas, reconhecer a equação da reta, conceber o símbolo de igualdade como ideia de equivalência, entender o significado dos coeficientes angular e linear, compreender a ideia de par ordenado, construir o gráfico, transitar do registro algébrico para o registro gráfico, transitar do registro gráfico para o registro escrito, incorporar o significado de demanda e oferta e interpretar o significado do ponto de equilíbrio.

- ***A segunda situação*** *– Um fabricante de certo modelo de cadeiras tem uma despesa fixa mensal de* $R\$\ 9.576{,}00$, *além de um custo de produção de* $R\$\ 13{,}00$ *por unidade. Ele estipulou que o preço de venda desse modelo é* $R\$\ 85{,}00$ *por unidade.*

a) represente graficamente a função lucro e faça uma análise, por escrito, do gráfico;

b) represente as funções custo e receita em um mesmo gráfico, explicitando o ponto de *nivelamento;*

c) escreva a interpretação econômica do gráfico do item b), mencionando o que significa o ponto de nivelamento.

Esta questão abarcava as capacidades de transitar do registro escrito para o registro algébrico, resolver equações, utilizar letras como incógnitas, reconhecer a equação da reta, conceber o símbolo de igualdade como ideia de equivalência, entender o significado dos coeficientes angular e linear, compreender a ideia de par ordenado, construir gráficos no plano cartesiano, transitar do registro algébrico para o registro gráfico, transitar do registro gráfico para o registro escrito, incorporar o significado de custo, receita e lucro e interpretar o significado do ponto de nivelamento.

- **A terceira situação** – *Suponha que o custo total de uma academia em relação à quantidade de frequentadores seja dado por custos fixos, que totalizam* $R\$\ 5.022{,}8$*, além de um custo de* $R\$\ 12{,}40$ *por frequentador. Os pacotes de funcional e musculação são oferecidos, individualmente, ao preço unitário de* $R\$\ 99{,}00$ *mensais. Quantos frequentadores a academia precisa fidelizar para que seu lucro seja o dobro do custo?*

Para ser minuciada, a tarefa carecia do trânsito do registro escrito para o registro algébrico, da resolução de equações, utilização de letras como incógnitas, concepção do símbolo de igualdade como ideia de equivalência, utilização da propriedade distributiva da multiplicação, incorporação o significado de custo, receita e lucro e interpretação da situação no contexto administrativo, para realizar arredondamentos na resposta final.

- **A quarta situação** – *Em uma loja de roupas, quando o preço de certo item é* $R\$160{,}00$*,* 20 *itens são vendidos. No entanto, se o preço é* $R\$150{,}00$*,* 25 *itens são vendidos.*

a) encontre a equação de demanda para esse item;

b) considere que a equação de oferta desse item seja representada por $y = 2x + 160$*. Determine o ponto de equilíbrio de mercado e escreva a sua interpretação sobre o que essa situação representa;*

c) faça os respectivos gráficos no mesmo sistema de coordenadas, assinalando o ponto de equilíbrio e o que cada eixo representa;

d) Qual é o preço máximo que o mercado suporta para a venda desse item? E qual o preço mínimo? Assinale esses valores no gráfico feito no item c).

No seu desenvolvimento, os discentes necessitaram transitar do registro escrito para o registro algébrico, utilizar letras como incógnitas, reconhecer a equação da reta, compreender a ideia de par ordenado, resolver equações e um sistema de equações, entender o significado dos coeficientes angular e linear, construir gráficos no plano cartesiano, transitar do registro algébrico para o registro gráfico, transitar do registro gráfico para o registro escrito, incorporar o significado de demanda e oferta e interpretar o significado do ponto de equilíbrio.

- ***A quinta situação*** **–** *Uma empresa fabrica um produto a um custo fixo de* $R\$\ 1.200,00$ *por mês e um custo variável, por unidade produzida, igual a* $R\$\ 2,00$*. O preço unitário de venda do produto dessa empresa é* $R\$\ 5,00$*. Atualmente, o nível de venda é de mil unidades por mês.*

A empresa pretende reduzir em 20% *o preço de venda, esperando que, com isso, as vendas aumentem. Qual deverá ser o aumento na quantidade vendida mensalmente, para manter o lucro que a empresa já tem?*

Diante desta situação, os estudantes precisaram dispor de subsunçores para transitar do registro escrito para o registro algébrico, utilizar letras como incógnitas, resolver equações, calcular porcentagens, incorporar o significado de custo, receita e lucro e interpretar a resposta no contexto administrativo.

5.1.6 Encontro final integrador: esta etapa foi distribuída em um encontro – total de 4 horas/aula

- **O oitavo encontro:** Nesta aula, que foi demarcada pelo encontro final integrador, entregou-se as avaliações e permitiu-se que os discentes as refizessem, por meio do debate, em duplas. Após todos entregarem a atividade, juntamente com a gravação dos registros verbais, fez-se as correções e comentou-se as cinco situações, de maneira expositivo-dialogada, na lousa. Retomou-se os conceitos abordados, sob a forma de revisão, para discutir o papel da Matemática na área administrativa e a importância da compreensão de cada um dos aspectos trabalhados para a formação científico-cultural dos estudantes.

- ***A avaliação da aprendizagem dos estudantes*** **–** Ressalta-se que a avaliação da aprendizagem dos estudantes não foi feita, somente, no teste individual, ela ocorreu ao longo da implementação da UEPS, na qual registrou-se tudo que pudesse ser considerado evidência de aprendizagem significativa dos conteúdos trabalhados e indícios de esquemas de resolução por parte dos estudantes.
- ***A avaliação da UEPS*** **–** Para que fosse possível revelar a UEPS construída como exitosa, foi preciso analisar se houve um progressivo domínio do campo conceitual

das equações de primeiro grau de maneira articulada com sua representação gráfica. Ressalta-se que esta foi uma etapa importante, contudo, de difícil diagnóstico, pois permeou a aquisição de diferentes níveis representacionais, devidamente articulados, que gerassem significados para a Matemática na área administrativa. Dessa forma, assim como a avaliação da aprendizagem dos estudantes, a avaliação da UEPS, também ocorreu no decorrer do processo e as anotações de evidências estão descritas ao longo do Capítulo 7, que apresenta as análises dos dados obtidos nos oito encontros da implementação didática, ou seja, do estudo 2.

Não obstante, para evidenciar se houve indícios de aprendizagem significativa neste processo, assim como se ocorreu à evolução do domínio do campo conceitual das equações de primeiro grau e de sua representação gráfica, por parte dos estudantes, a TAS e a TCC, juntamente com a UEPS, forneceram enriquecedores subsídios, ou uma espécie de ancoragem, para a elaboração e análise das situações, que possibilitaram a atribuição de sentido aos conceitos de equações e gráficos na área administrativa, bem como a investigação dos invariantes operatórios dos sujeitos envolvidos.

Dessa forma, diagnosticou-se a consonância entre as teorias de Ausubel (1963) e Vergnaud (1990), sob amparo metodológico da UEPS, como aporte teórico nesta investigação.

No próximo capítulo é apresentada a discussão dos resultados do primeiro estudo.

CAPÍTULO 6
DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DO ESTUDO 1

No capítulo anterior, explanou-se o delineamento das atividades que foram propostas a fim de alcançar os objetivos desta investigação. Neste capítulo, verifica-se, primeiramente, no item 6.1, o relato dos aspectos evidenciados no estudo 1, chamado de estudo piloto, que contou com a participação de 14 estudantes. Este passo mostrou-se primordial para ajustar-se aos objetivos da pesquisa, pois o estudo piloto serviu como um ensaio, revelando possibilidades, equívocos, acertos e aprimorou o entendimento da autora acerca da própria pesquisa.

Neste estudo inicial, aplicou-se o questionário socioeconômico, o termo de consentimento, o teste diagnóstico e as 44 situações que compunham a UEPS. Os dois primeiros documentos (questionário e termo de consentimento) mostraram-se satisfatórios para a coleta de dados desde o estudo 1 e não são minuciados neste capítulo, para não sobrecarregar as discussões, de tal forma que são detalhados, somente, na segunda fase de coleta de dados, no Capítulo 7.

Relata-se, nesta seção, os aspectos evidenciados no teste diagnóstico e nas demais situações que compunham a UEPS. Na sequência deste capítulo, no item 6.2, apresenta-se um panorama com as conclusões e evidências obtidas por meio deste primeiro estudo.

6.1 Primeira aplicação: o estudo 1

Conforme relatado, neste tópico, confere-se as impressões diagnosticadas no estudo 1, que ocorreu ao longo de oito encontros, com quatro períodos de uma hora/aula (de 50 minutos cada), nas sextas-feiras à noite, com início às 18h25min e término às 22h. O período compreendido foi de agosto a outubro de 2017 e, conforme exposto, contou com a participação de 14 estudantes, matriculados na disciplina Matemática I, do primeiro semestre noturno do curso de Administração da Universidade Franciscana.

Os 14 sujeitos participantes deste estudo, serão mencionados, nesta seção, como aprendiz 1[31], aprendiz 2, aprendiz 3 e assim sucessivamente. De maneira mais específica, para fins de abreviação, eles serão denotados como A1, A2, A3, ..., A14, conforme sua ordem

[31] Ao longo do texto, utiliza-se, ora a palavra aprendiz(es), ora estudante(s), ora discente(s) para reportar-se aos sujeitos que participaram da pesquisa. Optou-se por variados sinônimos, para evitar repetições. Pelo mesmo motivo, utiliza-se as palavras docente, autora, professora e professora pesquisadora, para referir-se à autora da pesquisa.

alfabética na lista de presença da turma.

Conforme mencionado, no primeiro encontro, aplicou-se o termo de consentimento, o questionário socioeconômico e o teste diagnóstico (Apêndice C), com sete situações. Ao longo dos próximos cinco encontros, ocorreu a aplicação das 44 situações (Apêndice D) em nível crescente de complexidade, levando-se em conta a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. Estas 44 situações, foram distribuídas no formato de listas de exercícios.

No sétimo encontro, houve a aplicação das quatro situações do teste individual (Apêndice E) e, no oitavo e último dia de aplicação, houve o encontro final integrador. Todos os materiais elaborados e disponibilizados ao longo dos encontros, integraram a UEPS, em sua primeira versão. A seguir, apresenta-se, na Figura 15, um resumo para ilustrar como ocorreu a execução das atividades do estudo piloto.

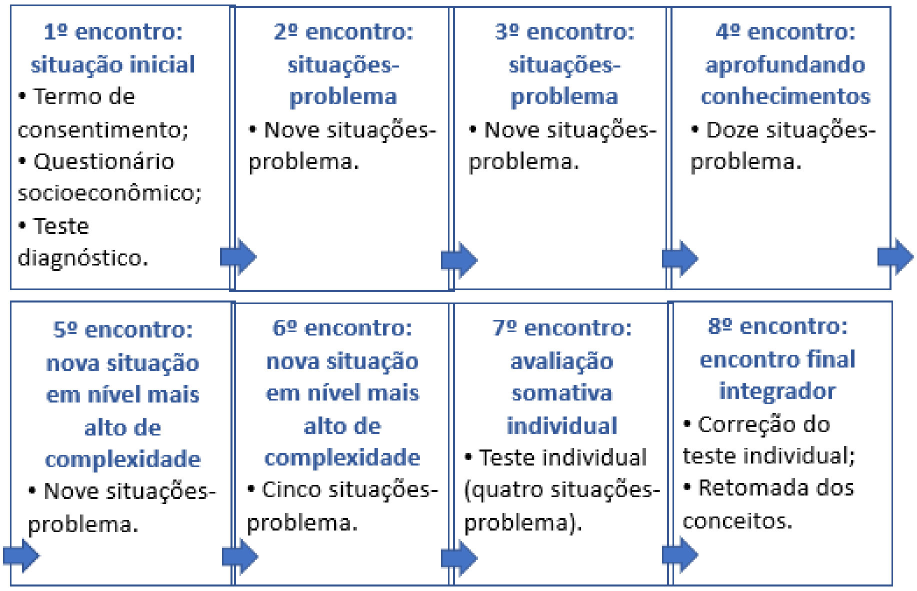


Figura 15: organização sequencial detalhada das atividades do estudo 1.

Fonte: a autora.

Destaca-se que as atividades da disciplina continuaram, pois o segundo semestre letivo de 2017, teve duração de 17 semanas, mas relata-se, nesta seção, somente o período da aplicação das atividades (compreendido nas oito primeiras semanas).

6.1.1 O teste diagnóstico do estudo 1

No primeiro encontro, estavam presentes 12 estudantes, com idade mínima de 18 e máxima de 42 anos (estas informações foram verificadas por meio do questionário, que foi utilizado nas duas aplicações, mas o restante das evidências obtidas no questionário não serão detalhadas aqui, isto será feito, somente, no Capítulo 7, tencionando não extrapolar as análises dos dados nesta seção).

Nesta data, foi aplicado o teste diagnóstico, documento composto de sete questões, que abordavam situações do campo conceitual das equações e sua representação gráfica e que tinha como intuito, aprimorar a investigação concernente aos subsunçores e invariantes operatórios dos estudantes.

Na primeira questão, solicitou-se que descobrissem quais as dimensões de uma figura retangular, conhecendo a medida de seu perímetro e de sua área. Para resolvê-la, eles necessitariam dispor de conceitos subsunçores de geometria (cálculo de perímetro e de área) e de álgebra (resolução de sistema de equações e de equação do segundo grau).

Nos resultados, verificou-se que dois estudantes não esboçaram nenhuma tentativa de resolução da atividade, pois deixaram-na em branco e os outros 10, reproduziram uma figura retangular, repetiram os dados fornecidos no enunciado como se fossem as medidas de seus lados, ou realizaram cálculos de soma, subtração e multiplicação aleatoriamente com os dados fornecidos. Como representante dessa situação, elegeu-se o registro do A3, explicitado por meio da Figura 16.

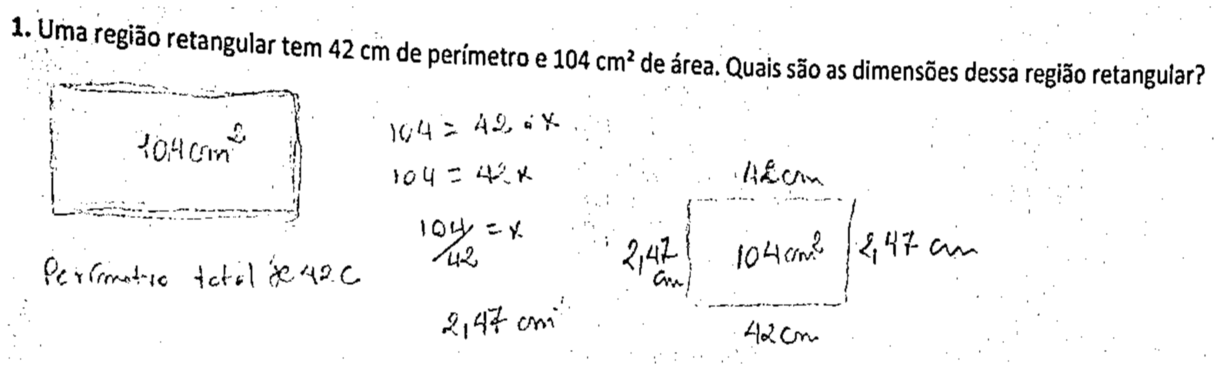


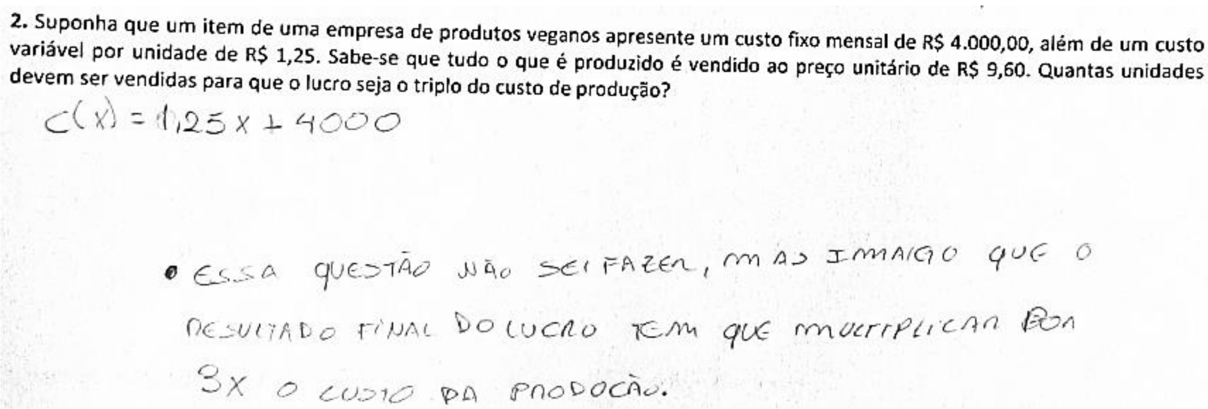
Figura 16: primeira questão do teste diagnóstico do estudo 1, por A3.
Fonte: dados da pesquisa.

Todos os 10 estudantes que apresentaram este procedimento de resolução, demonstram indícios de incerteza diante dos conceitos de área e perímetro. Verificou-se que alguns integrantes deste grupo, ao expressar a figura da região retangular, esboçaram a medida do perímetro na base da figura e a medida da área na altura da figura. Ao final, multiplicaram as duas medidas. Além disso, um destes estudantes, além de realizar tal procedimento, multiplicou, também, as grandezas cm e cm^2, encontrando uma resposta em cm^3, ou seja, nenhum estudante conseguiu resolver a primeira situação.

Desse modo, após tais constatações e de acordo com as orientações obtidas pela análise de três professores especialistas, julgou-se pertinente retirar esta situação do teste diagnóstico, pois ela necessitaria de conhecimentos no campo das equações de segundo grau e o conteúdo abordado, inicialmente, na disciplina, referia-se às equações de primeiro grau, portanto, averiguou-se que esta situação estava em nível avançado para realizar a busca por subsunçores e invariantes operatórios.

Pelo mesmo motivo, a segunda questão do teste diagnóstico precisou ser substituída no estudo 2, a implementação didática, pois, inicialmente, ela demandou, dos estudantes, o reconhecimento das funções lucro, custo e receita. Além disso, que transitassem do registro escrito para o registro algébrico e apresentassem esquemas de resolução de equação, pois teriam que escrever uma equação para o lucro ser igual ao triplo do custo e resolvê-la. Somente um estudante conseguiu realizar tal situação, os demais deixaram-na em branco ou apresentaram tentativas equivocadas de resolução.

Como representante deste grupo, escolheu-se o registro de A12, que explicitou corretamente a função custo e escreveu sua suposição para resolver a situação. Aparentemente, ele estava no caminho certo, porém não conseguiu prosseguir na sua resolução. Pode-se supor que o aprendiz tenha enfrentado dificuldades para representar as funções receita e lucro, então preferiu desistir de desvendá-la, conforme a Figura 17.



2. Suponha que um item de uma empresa de produtos veganos apresente um custo fixo mensal de R$ 4.000,00, além de um custo variável por unidade de R$ 1,25. Sabe-se que tudo o que é produzido é vendido ao preço unitário de R$ 9,60. Quantas unidades devem ser vendidas para que o lucro seja o triplo do custo de produção?

$c(x) = 1{,}25x + 4000$

• ESSA QUESTÃO NÃO SEI FAZER, MAS IMAGINO QUE O RESULTADO FINAL DO LUCRO TEM QUE MULTIPLICAR POR 3X O CUSTO DA PRODUÇÃO.

Figura 17: segunda questão do teste diagnóstico do estudo 1, por A12.

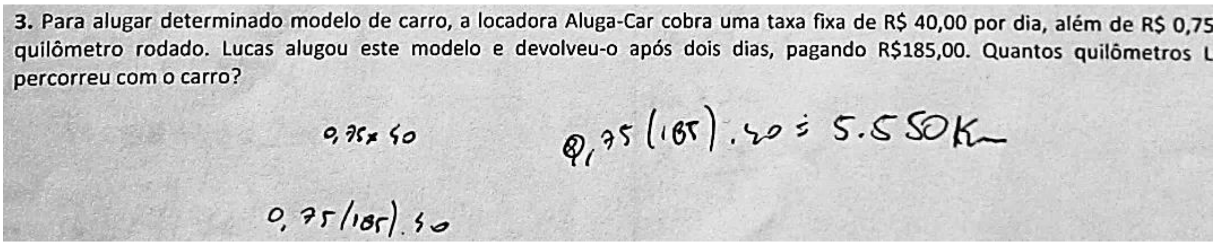
Fonte: dados da pesquisa.

De acordo com os dados analisados na segunda questão, constatou-se que poucos subsunçores adequados referentes aos conceitos de lucro, custo e receita faziam parte dos esquemas dos estudantes, na etapa inicial do semestre. Ademais, esta questão parecia estar em um nível alto de dificuldade, pois estes conceitos ainda deveriam ser discutidos em aula para que, então, situações deste tipo fossem ofertadas. Decidiu-se, portanto, em consonância com as opiniões dos professores especialistas, retirar esta questão e oportunizá-la mais tarde, após situações mais basilares serem ofertadas.

Na terceira questão do teste diagnóstico, abordou-se a ideia de um carro que, para ser alugado, deveria ser paga uma taxa fixa de $R\$40{,}00$, mais uma taxa variável, de $R\$0{,}75$ por quilômetro percorrido pelo condutor. Ela exigia que os estudantes traduzissem a situação do registro escrito para o registro algébrico e, então descobrissem quantos quilômetros a pessoa que pagasse $R\$185{,}00$ teria percorrido. Para isso, também seria necessário que eles identificassem o que cada uma das incógnitas representava, justamente para substituir o valor 185 na incógnita correta e descobrir a quilometragem correspondente à esta quantia.

Ao analisar os resultados, verificou-se que quatro estudantes conseguiram resolvê-la corretamente, porém, dois deles apresentaram duas maneiras de resolução, ou seja, ficaram em dúvida a respeito de onde deveriam substituir o valor 185, então apresentaram duas resoluções: uma equação com o valor 185 no lugar da quilometragem e outra com o número no lugar do valor pago, sendo, esta última, a resolução correta.

Os outros 10 estudantes, demonstraram desconhecer a ideia de custo fixo e custo variável, pois sequer apresentaram a equação do valor pago em função do número de quilômetros rodados, apenas operaram com os valores do enunciado, como se estivessem tentando encontrar uma resposta para seguir em frente. A seguir, apresenta-se a Figura 18, com a resolução de A6, que multiplicou todos os valores apresentados no enunciado da questão.



3. Para alugar determinado modelo de carro, a locadora Aluga-Car cobra uma taxa fixa de R$ 40,00 por dia, além de R$ 0,75 quilômetro rodado. Lucas alugou este modelo e devolveu-o após dois dias, pagando R$185,00. Quantos quilômetros L percorreu com o carro?

0,75x50

0,75(185).50 = 5.550Km

0,75(185).50

Figura 18: terceira questão do teste diagnóstico do estudo 1, por A6.

Fonte: dados da pesquisa.

Em conformidade com estes dados e, após orientações dos professores especialistas, acreditou-se pertinente que a terceira situação, tal como a segunda, fosse oportunizada mais tarde, após discussões em aula e confrontamento com situações em nível mais fácil ou após o confrontamento com material do tipo organizador prévio (caso fosse necessário).

A quarta situação, demandava o trânsito da linguagem natural para o registro algébrico, ou seja, exigia conhecimentos prévios sobre representação de letras como incógnitas. Também, sobre porcentagens e compreensão da ideia de equivalência. Ao desvendá-la, nove estudantes dividiram a quantia 3.762 por dois e obtiveram 1.881. Após, calcularam 20% de 3.762 e somaram este valor obtido ao 1.881, obtendo $R\$2.633{,}4$ como o salário da mulher e $R\$1.128{,}6$, como o salário do homem.

Outros dois discentes, apresentaram o esboço de uma regra de três, operando de maneira, aparentemente, aleatória, com os números explicitados no enunciado, porém sem finalizar o seu raciocínio, e um estudante desprezou a notação de porcentagem, como se 20% fosse igual a 20, conforme explicita-se na Figura 19.

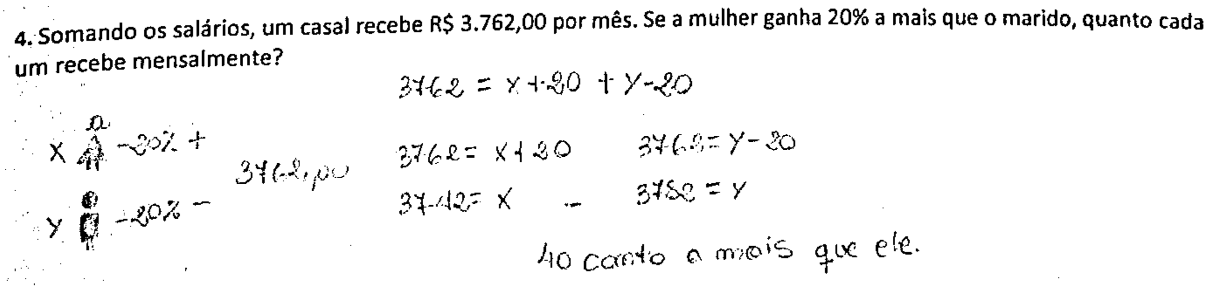


Figura 19: quarta questão do teste diagnóstico do estudo 1, por A3.

Fonte: dados da pesquisa.

Dessa forma, verificou-se que a quarta questão do teste diagnóstico possivelmente teria provável potencial para averiguar os invariantes operatórios e/ou subsunçores dos estudantes, pois todos explicitaram alguma forma de registro e verificou-se um possível esquema comum de resolução em grande parte do grupo. Assim, optou-se por mantê-la no teste diagnóstico para realizar a implementação didática das atividades.

A quinta questão, por sua vez, focava o entendimento da ideia de par ordenado e da equação na forma reduzida da reta. Para concluí-la, os estudantes teriam de transitar da linguagem natural para o registro algébrico, depois, do registro algébrico para o registro gráfico e possuir capacidades de resolução de equações e de construção de gráficos no plano cartesiano. Nela, somente um estudante (A12) procedeu corretamente e apresentou o esboço do gráfico, após encontrar a equação da reta. Os demais estudantes apresentaram tentativas de resolução.

Alguns, somente escreveram a equação da reta na forma reduzida e abandonaram a resolução, outros realizaram tentativas, mas se equivocaram em algum momento. Escolheu-se o registro do A7, que encontrou a equação correta, porém se enganou no momento que multiplicou toda a primeira equação pelo valor “um negativo”, para fazer o cancelamento do termo “b”. Mesmo assim, ele encontrou a equação correta, mas não apresentou o registro gráfico, como pode-se verificar em seu esquema de resolução, reproduzido na Figura 20.

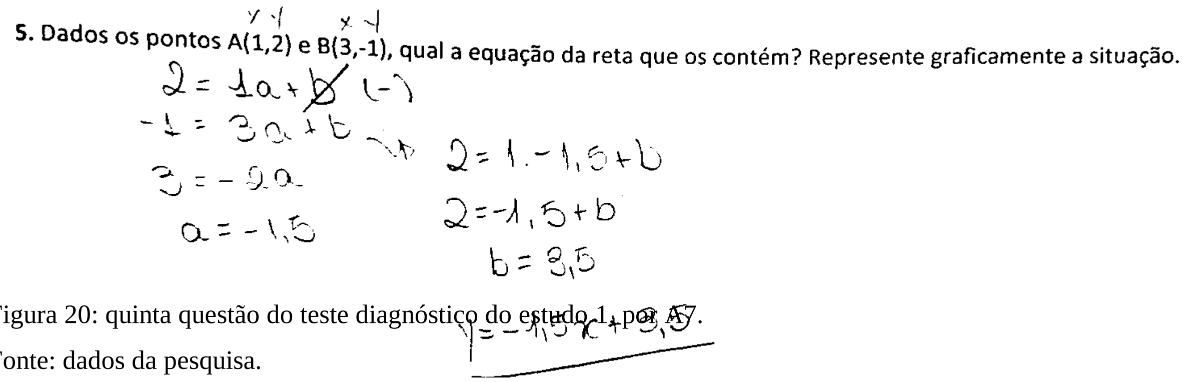


Figura 20: quinta questão do teste diagnóstico do estudo 1, por A7.

Fonte: dados da pesquisa.

Supõe-se que ele apresentava subsunçores para resolver um sistema de equações e reconhecia a ideia de par ordenado, entretanto, apresentou equívocos de resolução da equação e não transitou do registro algébrico para o gráfico. Assim como A7, outros integrantes do grupo também apresentaram indícios de subsunçores no confrontamento com esta situação. Dessa forma, evidenciou-se a pertinência da permanência da questão 5 no teste diagnóstico.

A sexta questão, apresentava o registro gráfico de uma reta passando por dois pontos de coordenadas conhecidas e, em seu enunciado, era solicitado que o estudante descobrisse qual era a equação da reta que passava por tais pontos, ou seja, o objetivo da questão foi descobrir se, verificando o registro gráfico de uma reta, os estudantes conseguiam descobrir o seu registro algébrico. Para isso, seria necessário que dispusessem de subsunçores referentes aos conceitos de par ordenado, de equação de primeiro grau e noções da relação entre o lugar geométrico dos pontos no gráfico e sua respectiva posição na equação.

Nesta situação, quatro estudantes deixaram o espaço completamente em branco sem, ao menos, rabiscá-lo e sete estudantes fizeram algum tipo de anotação, entretanto não conseguiram descobrir a equação da reta. Destaca-se que apenas um estudante obteve sucesso na resolução da questão e utilizou a notação de um sistema de equações. Os sete estudantes que realizaram tentativas de resolução, utilizaram os valores dos pares ordenados em algum trecho de sua tentativa e, um deles, escreveu que se tratava de uma equação de segundo grau.

Como representante de um dos sete estudantes que esboçaram tentativas de resolução, apresenta-se na Figura 21, o registro do A12, que demonstrou apresentar subsunçores referentes à equação da reta, apesar de seu registro equivocado. Ele não utilizou as informações dos pares ordenados e, aparentemente, relacionou os dois pontos indicados no gráfico para substituir nos coeficientes angular e linear. Provavelmente, ele também dispunha de subsunçores para verificar uma reta decrescente, pois denotou um coeficiente angular negativo.

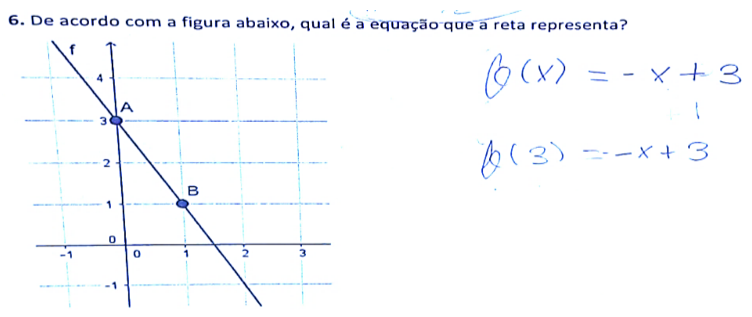


Figura 21: sexta questão do teste diagnóstico do estudo 1, por A12.
Fonte: dados da pesquisa.

A maneira como o estudante denotou a equação, pode ser um indício de que ele tenha relacionado o fato de a reta ser decrescente indicar um coeficiente angular negativo. Além disso, ele representou de maneira correta o termo “b” e isso pode indicar conhecimentos referentes ao registro do coeficiente linear. Aparentemente o estudante apresenta, ainda que escassos, alguns conhecimentos subsunçores referentes aos registros gráfico e algébrico, entretanto sua equação não foi explicitada corretamente.

Apesar de somente um estudante ter obtido sucesso nessa situação, supôs-se que ela estava adequada para a investigação por subsunçores e invariantes operatórios, pois vários integrantes apresentaram tentativas de resolução, além disso, considera-se primordial descobrir se, antes de iniciar a abordagem de conceitos referentes às equações algébricas de primeiro grau, os estudantes possuem conhecimentos sobre pares ordenados, equação da reta e lugar geométrico dos pontos no gráfico e sua respectiva posição na equação.

A última questão do teste diagnóstico, do estudo 1, era composta de quatro itens: dois que exigiam a resolução algorítmica de equações (itens b e c) e dois que, antes de qualquer coisa, precisavam ser traduzidos da linguagem escrita para a linguagem algébrica, ou seja, seria necessária, sobretudo, a compreensão do uso de letras como incógnitas (itens a e d).

Em sua análise, observou-se que a turma apresentava mais subsunçores e esquemas de resolução diante das situações que exigiam, somente, o tratamento algorítmico de equações, do que diante das que demandavam a percepção do uso de letras como incógnitas, pois obteve-se o panorama explicitado no Quadro 8 a seguir.

Quadro 8: número de acertos dos estudantes na sétima questão do teste diagnóstico do estudo 1.

ITEM DA QUESTÃO – CAPACIDADE(S) NECESSÁRIA(S)	NÚMERO DE ACERTOS
a – transitar do registro em linguagem escrita para o registro algébrico + resolução algorítmica	4 (um deles, por tentativa e erro)
b – resolução algorítmica	5
c – resolução algorítmica	7
d – transitar do registro em linguagem escrita para o registro algébrico + resolução algorítmica	2 (ambos por tentativa e erro)

Fonte: dados da pesquisa.

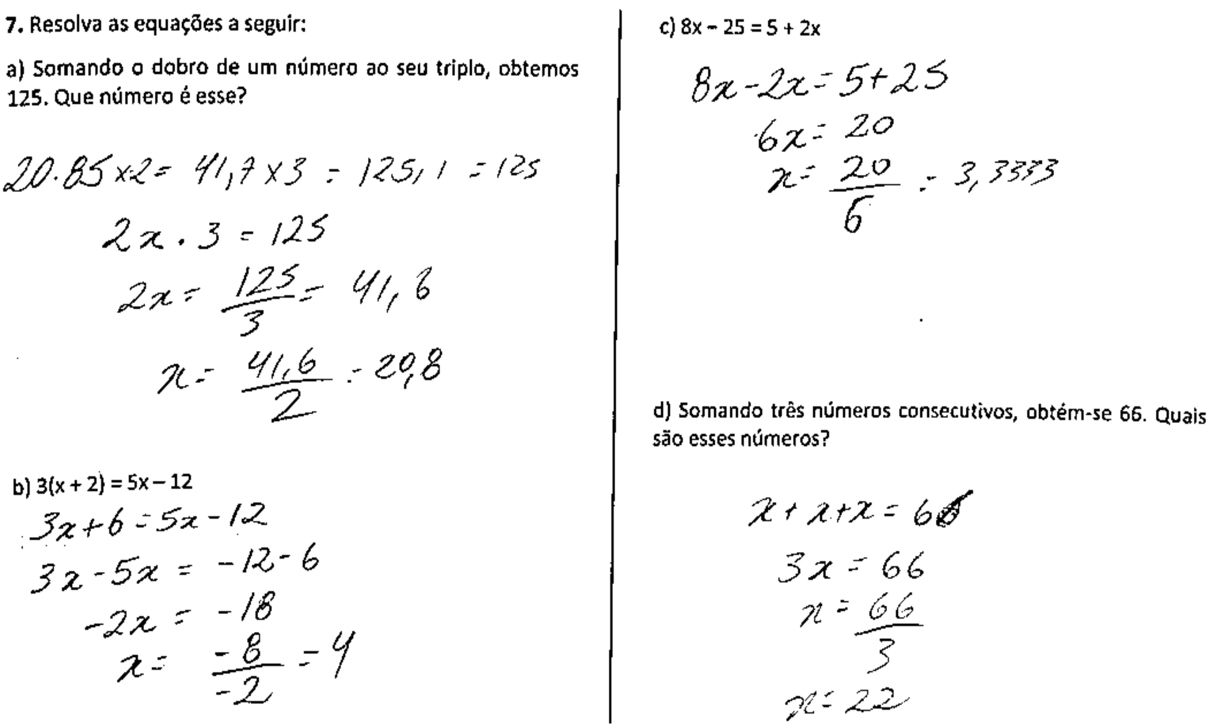
Detalhando-se este panorama, verificou-se que, no primeiro item, três estudantes procederam corretamente e um estudante, (A12), apenas escreveu o valor numérico 25 e realizou operações de multiplicação e adição. Ele escreveu ao final: *“fiz por lógica”*.

Além disso, no último item, somente um estudante, (A3), conseguiu explicitar, corretamente, uma expressão que satisfizesse o enunciado, pois apresentou o registro: $(x+1)+(x+2)+(x+3)=66$. Entretanto, ao resolvê-la, multiplicou os termos entre parênteses em vez de adicioná-los e obteve uma equação cúbica. Logo abaixo da expressão que encontrou, A3 escreveu: *"me perdi nas contas"* e, por esse motivo, foi contabilizado como um erro. Ademais, outros dois estudantes conseguiram resolvê-la, mas sem apresentar a equação correspondente, ou seja, fizeram estimativas de cálculos.

Contudo, 11 estudantes apresentaram um esboço de resolução, mesmo que errôneo, para os itens b e c, nos quais foi possível discernir que, grande parte de seus erros, situava-se nos procedimentos algorítmicos.

Como representante desta categoria, elegeu-se o registro do A5, que no primeiro e último itens, demonstrou reconhecer a utilização de letras como incógnitas, entretanto, supõe-se que ele não dispunha de subsunçores adequados para transitar do registro escrito para o registro algébrico, pois apresentou um registro equivocado, quando multiplicou o dobro de um número por 3 ou, ainda, sextuplicou uma quantidade para obter 125. Além disso, demonstrou incerteza sobre o que são números naturais consecutivos, pois somou uma mesma quantidade três vezes.

Mesmo diante destes possíveis obstáculos, em todos os itens, verificou-se que A5, apesar de seus equívocos frente aos procedimentos algorítmicos ou, ainda, em detrimento de falta de atenção, apresentava subsunçores e indícios de invariantes operatórios para a resolução de equações, conforme expõe-se, na Figura 22.


7. Resolva as equações a seguir:

a) Somando o dobro de um número ao seu triplo, obtemos 125. Que número é esse?

$20{,}85 \times 2 = 41{,}7 \times 3 = 125{,}1 = 125$

$2x \cdot 3 = 125$

$2x = \frac{125}{3} = 41{,}6$

$x = \frac{41{,}6}{2} = 20{,}8$

b) $3(x + 2) = 5x - 12$

$3x + 6 = 5x - 12$

$3x - 5x = -12 - 6$

$-2x = -18$

$x = \frac{-8}{-2} = 4$

c) $8x - 25 = 5 + 2x$

$8x - 2x = 5 + 25$

$6x = 20$

$x = \frac{20}{6} = 3{,}3333$

d) Somando três números consecutivos, obtém-se 66. Quais são esses números?

$x + x + x = 66$

$3x = 66$

$x = \frac{66}{3}$

$x = 22$

Figura 22: sétima questão do teste diagnóstico do estudo 1, por A5.

Fonte: dados da pesquisa.

Ao longo das análises das resoluções, esta foi uma característica predominante do grupo. Em virtude disso, ponderou-se que este tipo de situação estava adequado ao nível de conhecimentos prévios dos discentes ingressantes no curso de Administração. Por este motivo, aliado à validação posterior do grupo de professores especialistas, concluiu-se que esta situação deveria permanecer no quadro de questões do teste diagnóstico na implementação didática.

Portanto, os resultados obtidos no teste diagnóstico do estudo 1, explicitaram que, apesar de o corpo discente ser composto, em sua maioria, por um público jovem, oriundo do ensino médio, havia muitas lacunas de aprendizagem, o que corrobora os resultados e/ou percepções evidenciados em todas as investigações discutidas na revisão de literatura, no Capítulo 2. Isto reforçou a necessidade de investigar os conhecimentos prévios dos estudantes antes de se iniciar o trabalho em sala de aula.

Contudo, mais do que evidenciar dificuldades de aprendizagem, nesta investigação, verificou-se que o grupo apresentava alguns subsunçores, aparentemente, inadequados para verificar o uso de letras como incógnitas e para transitar entre os diferentes tipos de registro (gráfico, algébrico e linguagem natural). Além disso, apresentaram esquemas errôneos na representação de pares ordenados no sistema cartesiano, para resolver sistemas de equações, para denotar a equação da reta, além de defasagens nos conteúdos de Matemática básica, como, por exemplo, porcentagens e operações aritméticas.

Convenientemente, julgou-se que ainda era prematuro afirmar se estas estratégias de resolução apresentadas eram teoremas-em-ação, pois eles poderiam emergir diante do confrontamento com diferentes classes de situações e de discussões, mas isso poderia levar algum tempo e seria preciso valorizar o caminho percorrido pelos estudantes nesse processo. Isso permitiu concluir que seria imprescindível abordar, primeiramente, situações iniciais em nível básico para, gradativamente, aumentar o grau de dificuldade.

Desse modo, discerniu-se que, iniciar um trabalho, tomando como pressuposto que os estudantes já estudaram determinado conteúdo no ensino médio e, portanto, já têm conhecimentos específicos ao iniciar a graduação, pode comprometer todo o trabalho e dificultar o seu processo de aprendizagem. Na verdade, entrelaçando-se esta afirmação às ideias defendidas por Ausubel (2003) e Vergnaud (1990), pontua-se que investigar os conhecimentos anteriores dos estudantes, torna-se imprescindível para que, então, seja iniciado um trabalho de maneira que todos consigam avançar, progressivamente, dentro de suas próprias limitações, o domínio de um campo conceitual.

De antemão, enuncia-se que, algumas questões do teste diagnóstico do estudo 1 foram retiradas, outras reformuladas, para a implementação didática, visando aprimorar a investigação concernente aos subsunçores e invariantes operatórios dos estudantes. No item 6.2, essa discussão é pormenorizada.

6.1.2 As situações que compunham a UEPS do estudo 1

Conforme revelou-se no item anterior, no primeiro encontro, houve a aplicação do questionário, do termo de consentimento e do teste diagnóstico. Na sequência, nos próximos cinco encontros, aplicou-se as 44 situações da UEPS do primeiro estudo (Apêndice D). No sétimo encontro, ocorreu a aplicação de um teste individual, com quatro situações e no oitavo, e último encontro, houve a retomada de todos os conceitos estudados por meio de um encontro final integrador.

Do segundo ao sexto encontros, todas as situações foram propostas sob o formato de listas de exercícios, disponibilizadas no ambiente virtual de aprendizagem da disciplina (AVA – *Moodle*), pouco antes de cada encontro ser iniciado, ficando sob responsabilidade de cada estudante, imprimir sua folha. Contudo, caso preferissem, eles poderiam utilizar seus celulares (com acesso à internet), para visualizar a lista de exercícios *online* no ambiente, sem a necessidade de impressão.

Tais situações foram elaboradas pela autora, fundamentando-se nas obras de Morettin, Hazzan & Bussab (2003), Paulette (2003), Tan (2003), Leite & Fuita (2008) e Silva & Machado (2010), contudo, nenhuma delas foi utilizada na íntegra, pois elaborou-se as situações com um contexto diferente do original, apenas utilizando uma ideia semelhante de abordagem, além de realizar uma espécie de combinação entre as abordagens dos diferentes autores.

A seguir, relata-se como ocorreram as atividades em cada encontro, mas adianta-se as 44 situações do estudo 1 não serão pormenorizadas, pois acredita-se que seria, demasiadamente, repetitivo detalhá-las, seguidas de fotos dos registros dos estudantes e tecer comentários individuais. Mas pondera-se que é possível visualizá-las, na íntegra, nos apêndices desta tese. Além do mais, muitas destas situações foram retiradas do corpo da UEPS, outras remodeladas, em virtude de sua extensa quantidade. Dessa forma, propõe-se um resumo das principais evidências observadas em cada um dos encontros.

6.1.2.1 O segundo encontro do estudo 1

Neste dia, nove situações foram disponibilizadas aos nove estudantes que estavam presentes desde o início da aula. Eles foram convidados a trabalhar em duplas e um trio e assim permaneceram nos primeiros minutos de aula, contudo, por tratar-se de um curso noturno, alguns estudantes trabalhavam e chegavam após parte da aula já ter transcorrido, de tal modo que, à medida que isso acontecia, orientava-se que as duplas já estabelecidas acolhessem o colega que acabara de chegar. Dessa forma, três estudantes chegaram atrasados e outras duplas se transformaram em trios.

Verificou-se que muitos ainda não portavam calculadoras. Algumas duplas tiveram que pedir o objeto emprestado, outras insistiram em utilizar a calculadora do celular. Retomou-se sobre a importância de cada um deles possuir o seu objeto nas aulas, para aprenderem, seus comandos e suas funções.

Todas as tarefas trabalhadas neste dia, continham um nível inicial de complexidade, (julgamento este, feito na época da aplicação). Elas foram organizadas em quatro grupos:

- a situação 1 exigia a compreensão e a execução de procedimentos algorítmicos e de construção gráfica, partindo do registro algébrico;
- as situações 2 e 9 necessitavam do trânsito do registro escrito para o registro algébrico, o esboço do gráfico, a análise comparativa de duas retas e de seu ponto de intersecção e a interpretação econômica;
- as situações 3, 5, 6, 7 e 8 apresentavam o registro algébrico e requeriam a diferenciação de incógnitas para substituição de um valor dado em alguma delas, o esboço do gráfico e a interpretação econômica;
- a situação 4 demandava o trânsito do registro escrito para o registro algébrico e o esboço do gráfico.

Os diferentes grupos realizaram as tarefas, cada um em seu ritmo. Enquanto eles discutiam, caminhava-se pela sala de aula, auxiliando-os sempre que solicitavam. Em virtude dos diferentes ritmos dos grupos, quatro estudantes terminaram as tarefas, rapidamente. Os outros oito estudantes, no entanto, não conseguiram finalizá-las em aula e isto causou certa angústia em alguns deles, que exprimiram preocupação por não ter conseguido realizar todas as atividades e alegaram sentir muitas dificuldades perante à Matemática.

Constatado este diferente ritmo e maneira de enfrentamento das situações pelos grupos, solicitou-se que os quatro estudantes com, aparentemente, mais facilidade de entendimento das tarefas, auxiliassem os demais colegas que, a princípio, demonstraram maiores dificuldades. Entretanto, nem todos aderiram à ideia proposta. Somente um deles se prontificou a auxiliar os colegas, os outros três, preferiram não fazê-lo, pois um deles afirmou que não sabia explicar para outra pessoa e os outros dois, defenderam que tinham que sair mais cedo, pois tinham compromisso.

Devido ao tempo e a este diferente ritmo relatado, as atividades 5, 6, 7, 8 e 9, não foram discutidas em aula. Porém, acordou-se, com a turma, que elas seriam consideradas atividades para casa. Utilizou-se o ambiente virtual da disciplina (*Moodle*), para disponibilizar seus gabaritos, a pedido dos estudantes.

As percepções deste encontro, permitiram evidenciar algumas ações norteadoras, que poderiam aprimorar a investigação que seria feita no estudo 2, o de implementação didática das atividades da investigação:

- a primeira questão poderia ter sido mais bem explorada, caso contasse com o auxílio do *software Geogebra*, pois a visualização seria facilitada mediante a manipulação dos coeficientes. Além disso, poderia ser dedicado mais tempo para analisar situações deste tipo. Apesar de serem tarefas que exigiam a aplicação de algoritmos, os estudantes demonstraram carências na manipulação algébrica, o que os impediu, por um grande tempo da aula, de transitar do registro algébrico para o registro gráfico. Não recordavam dos nomes dos coeficientes e demonstraram dificuldades de compreensão das operações básicas;
- descentralizar da docência, a responsabilidade de verificação da resposta correta. Em um primeiro momento, conjecturou-se que, talvez, isso pudesse ser amenizado, por meio do compartilhamento das respostas (numéricas) das questões que não exigiam interpretações ou traçado de gráficos, pois verificou-se bastante insegurança na turma, no sentido de que, ao finalizar cada item, necessitavam que o aval da professora fosse dado, por mais que os colegas tivessem encontrado o mesmo resultado;
- a turma expressou grandes dificuldades diante da segunda questão. Ela mostrou-se como empecilho para a maioria deles, como se estivesse em um nível de dificuldade muito além do esperado. Na tentativa de explicitar a equação, alguns somaram todos os valores em uma única expressão, outros perceberam que eram duas equações diferentes, contudo acreditaram que elas eram retas paralelas. Também exprimiram não compreender o crescimento das duas retas e como descobrir onde elas se interceptavam. De maneira geral, houve grande resistência em construir seu gráfico, dois estudantes, inclusive, se negaram a fazê-lo e abandonaram a questão;
- o nível de dificuldade da situação 3 mostrou-se mais oportuno para o nível de conceitualização da turma como um todo, pois verificou-se que eles sentiram-se mais confortáveis durante a resolução dos itens a) e b), inclusive fizeram questionamentos e auxiliaram os colegas. Sentiu-se que eles ficaram motivados a resolvê-la e felizes por conseguirem compreendê-la. Novamente, o problema foi a representação gráfica,

pois também houve grande resistência na sua construção. Os erros consistiram, basicamente, em não compreender a relação entre os coeficientes e a reta, não conseguir encontrar a raiz e a não compreensão da ideia de par ordenado;

- na situação 4 a dificuldade inicial consistiu na passagem do registro escrito para o registro algébrico. O fato de haver uma porcentagem, também ocasionou erros na sua execução, pois verificou-se que alguns estudantes não representaram o número, em porcentagem, na equação. Inclusive, dois estudantes denotaram 60% como 60 (retiraram o símbolo da porcentagem). Um deles foi o A3, que já havia representado dessa maneira no teste diagnóstico. Isto sugeriu que, provavelmente, este era um invariante operatório, que mostrava-se como um possível obstáculo para o aluno avançar na compreensão deste tipo de situação e, portanto, outras com este enfoque, precisariam ser ofertadas;
- os quatro grupos de situações que foram eleitos para categorizar as tarefas propostas neste dia, poderiam ter sido mais bem explorados, se o número de situações disponibilizadas fosse menor, em cada um deles. Houve tempo para discutir, somente, as quatro primeiras situações em aula;
- mais do que isso, dos quatro grupos, verificou-se que ainda era cedo para oportunizar situações do segundo grupo (das situações 2 e 9), pois elas exigiam um nível maior de compreensão e ainda era cedo para este confronto. Situações mais básicas em um nível menor de complexidade deveriam ser enfrentadas antes disso.

Um importante aspecto a ser ressaltado é que tais conclusões não ocorreram de maneira concomitante, tampouco imediata à aplicação do primeiro estudo. Estas ideias maturaram enquanto a aplicação ocorria e, principalmente, após a submissão à análise dos três professores especialistas. Por meio da interlocução e do compartilhamento de ideias com estes profissionais experientes, obteve-se benefícios, tanto no que se refere à prática profissional, quanto ao lapidamento da pesquisa.

Dadas estas constatações, acrescenta-se que as atividades desenvolvidas na sequência dos demais encontros, em sua maioria, já estavam previstas para a execução do estudo 1, no início do segundo semestre de 2017 e transcorreram, sem grandes modificações, até o final daquele semestre.

6.1.2.2 O terceiro encontro do estudo 1

No terceiro encontro, 11 estudantes estavam presentes. Iniciou-se retomando os aspectos abordados na aula passada. Discutiu-se acerca da representação gráfica, de sua relação com os coeficientes, de porcentagens e operações básicas. Fez-se questionamentos a respeito das atividades 5, 6, 7, 8 e 9, se persistia alguma dúvida, pois elas haviam ficado para serem realizadas em casa. Somente o estudante A12 mencionou que havia feito, mas que não tinha nenhuma dúvida a respeito.

Os dois primeiros períodos ocorreram na sala de aula e os dois últimos no laboratório de informática, onde utilizou-se o *software Geogebra*. Para este dia, outras nove situações foram disponibilizadas e classificadas em cinco grupos:

- a situação 1 demandava o trânsito do registro escrito para o registro algébrico, o esboço do gráfico, a análise comparativa de duas retas e de seu ponto de intersecção, além da interpretação econômica;
- as situações 2, 3, 4 e 7 requeriam o trânsito do registro escrito para o registro algébrico, a substituição de um valor dado em uma das incógnitas e o esboço do gráfico;
- a situação 5 requisitava a substituição de um valor em alguma das incógnitas;
- a situação 6 exigia o trânsito do registro escrito para o registro em linguagem algébrica e a interpretação econômica;
- as situações 8 e 9 necessitavam a compreensão, a execução de procedimentos algorítmicos e a construção gráfica, partindo do registro algébrico.

Neste dia, os estudantes continuaram trabalhando em duplas e/ou trios, conforme sua preferência. Este encontro foi permeado pelas suas inquietações ao se depararem com as situações. As dificuldades predominantes foram evidenciadas por esquemas errôneos de identificação de valores fixos e valores variáveis, pois os estudantes consideraram a soma dos custos como um valor único para cada empresa de garçom na primeira situação. Além disso, a representação gráfica, novamente, foi motivo de reclamações em todas as tarefas.

Mesmo os estudantes que conseguiram denotar, algebricamente, as duas equações da situação 1, ao se depararem com sua representação gráfica, indicaram retas decrescentes. Perguntou-se o porquê dessa conclusão, então A7 mencionou: *"eu vi que tem esse número negativo aqui no x, então a reta tem que começar daqui*". Por meio da fala do estudante, verificou-se que este era um possível teorema-em-ação que o permitia inferir que, se a raiz da equação fosse negativa, então a reta seria decrescente e iniciaria seu traçado por este valor.

Desse modo, já nesta primeira situação, houve a necessidade de realizar uma discussão no quadro de giz, pois eles não conseguiram avançar sem auxílio. Na verdade, as discussões referentes à primeira questão, ocuparam boa parte da aula, de modo que, nos dois primeiros períodos, grande parte do grupo realizou as três primeiras atividades, sendo que, alguns estudantes, não conseguiram desvendá-las na íntegra.

Depois do intervalo, no laboratório de informática, optou-se por abordar as situações 8 e 9, para que os estudantes compreendessem a ideia de par ordenado, além de manipular os coeficientes para verificação de como eles interferem na representação gráfica. Dessa forma, as situações 4, 5, 6 e 7, foram sugeridas para serem realizadas em casa, e seu gabarito foi disponibilizado para conferência dos estudantes.

As percepções deste encontro, fundamentaram-se nas seguintes ideias:

- a primeira situação despendeu de intensa resistência por parte dos estudantes, que alegaram dificuldades no seu entendimento. Desse modo, conjecturou-se que eles careciam ainda do entendimento das atividades em níveis mais básicos, antes de serem confrontados com situações com este nível de dificuldade. Diante disso, idealizou-se que, para a implementação didática, seria melhor abordar situações deste tipo no quarto encontro;
- o nível de dificuldade da situação 2 pareceu estar adequado aos subsunçores dos estudantes, exceto a solicitação do traçado do seu gráfico, que foi motivo de reclamações e dúvidas, pois demonstraram preocupação com o fato de encontrarem uma raiz negativa. A este respeito, A7 indagou: *“professora, como é que vai dar um número negativo aqui? Deve tá errado!”*. Esta fala do estudante, corroborou a ideia mencionada anteriormente, sobre este ser um possível teorema-em-ação que o fazia pensar que a raiz ser negativa, indicava que a reta era decrescente e ele deveria iniciar o traçado da reta, pelo valor dessa raiz. Além disso, os discentes traçaram uma reta contínua, ou seja, não verificaram que seu esboço era discreto, pois era cobrada uma taxa em função do número de dias que o paciente ficaria internado no hospital;
- novamente, o número de situações propostas, mostrou-se elevado para o tempo disponível. Evidenciou-se certa ansiedade, por parte dos estudantes, como se estivessem preocupados em responder, rapidamente, às questões, para dar segmento às resoluções e finalizar a lista de tarefas;
- as situações 8 e 9 foram discutidas pelo grande grupo com o auxílio do *software Geogebra*. Eles alegaram desconhecê-lo, entretanto não demonstraram dificuldades na manipulação de suas ferramentas. Estas atividades, embora não contassem com um contexto de aplicação na área administrativa, mostraram-se prazerosas, pois os estudantes verbalizaram que, por meio do *software*, a visualização dos gráficos era mais dinâmica e, portanto, ganhavam tempo para fazer os exercícios, pois não precisavam esboçar os gráficos.

Desse modo, verificou-se que seria mais conveniente dispor de um encontro inteiro, composto de quatro períodos, para utilizar o *Geogebra* no laboratório de informática, assim haveria tempo para que os estudantes pudessem se apropriar de suas ferramentas, pudessem ser confrontados com outras situações e fazer suas conjecturas, por meio da manipulação algébrica e gráfica que o *software* dispõe.

Além disso, conjecturou-se que seria apropriado que isto ocorresse no terceiro encontro, pois o primeiro seria destinado à investigação dos subsunçores, por meio do teste diagnóstico. O segundo, poderia ser mais bem aproveitado, caso fosse destinado à abordagem de conceitos básicos, que pudessem fornecer uma espécie de ancoragem e de entrelaçamento dos subsunçores dos estudantes, com os novos conceitos que seriam trabalhados na sequência.

Então, no terceiro encontro, parecia ser apropriado que fosse oportunizada a utilização de um *software*, dada a evidente dificuldade dos discentes ao serem confrontados com situações de elaboração de gráficos. Ademais, depois que eles fossem ao laboratório, e já estivessem familiarizados com as ferramentas do *software*, poderiam utilizá-lo *online*, em seus celulares, em sala de aula e isto poderia ser um recurso facilitador.

6.1.2.3 O quarto encontro do estudo 1

Se nos dois encontros anteriores, o tempo já não havia sido suficiente, obviamente, no quarto encontro, no qual 12 situações foram propostas para abordagem de conceitos de equações e gráficos, a situação foi agravada.

Mas acreditou-se que, apesar da quantidade de questões, o maior problema evidenciado neste dia, foi a estruturação da UEPS, aliás sua desestruturação. Pareceu que, neste momento, houve uma culminância de todas as escolhas feitas nos encontros anteriores, pois o nível de dificuldade de praticamente todas as situações mostrou-se inadequado, ou desordenado, para que os estudantes conseguissem avançar, sequencialmente, o entendimento dos conceitos na relação de equações e gráficos.

Recorda-se do sentimento que teve-se ao final deste encontro... de preocupação em relação ao andamento das atividades, pois acreditava-se que toda a investigação do primeiro estudo poderia estar comprometida. Isso tudo, acompanhado do sentimento de culpa, por imaginar que o fato do nível das atividades estar se mostrando inadequado, poderia prejudicar a aprendizagem dos estudantes que compunham a turma do segundo semestre de 2017.

Porém, conforme explicitado, na época da aplicação do estudo 1, as atividades já estavam programadas previamente e não discerniu-se de modificar este cenário, até por acreditar que seria pior fazê-lo. Desse modo, compartilhou-se 12 situações, as quais foram divididas em cinco grupos:

- a situação 1 necessitava da comparação de duas equações, do esboço dos respectivos gráficos e da interpretação econômica do ponto de nivelamento;
- a situação 2 exigia o trânsito da linguagem escrita para a linguagem algébrica e construção gráfica;
- as situações 3, 4, 6, 9, 11 e 12 demandavam a interpretação do enunciado, em linguagem escrita, para explicitar a equação, o esboço do gráfico e a interpretação econômica do ponto de nivelamento;
- as situações 5, 8 e 10 requeriam a capacidade de traduzir da linguagem escrita para a linguagem algébrica, substituir alguma quantidade em uma das incógnitas e realizar o esboço do gráfico;
- a situação 7 reivindicava a manipulação algébrica e a substituição de determinado valor em uma das incógnitas.

Neste dia, como pode-se imaginar, os discentes demonstraram descontentamento no que se refere à quantidade de tarefas propostas, alegando que não seria possível fazê-las na íntegra. A título de exemplo, A5 mencionou: “*professora, não vai ter como a gente fazer tudo isso em aula, é muita coisa”.*

Argumentou-se que não havia problema nenhum caso isso ocorresse, pois eles poderiam trabalhar, cada um, em seu ritmo. A ideia de que os exercícios deveriam ser feitos e entregues à professora no final da aula, mostrava-se constante, eles acreditavam que, por não conseguirem fazê-las, poderiam perder nota, mesmo após receberem instruções de que isto não ocorreria.

Pelo fato de explicitar uma equação do segundo grau, a situação 7, não foi bem recebida pelo grupo, que mostrou insegurança por imaginar que o “*cálculo da bhaskara*” (assim mencionado por eles), deveria ser feito, referindo-se ao cálculo das raízes da equação, e por ela conter números decimais. Não houve tempo para discutir a situação em aula, contudo eles perceberam que ela apresentava o número dois no expoente e, a respeito disso, uma das falas foi: *“professora, eu acho que nem dá pra fazer bhaskara em número com vírgula”* (A2).

Ao contrário do que eles imaginaram, para desvendar tal situação, não seria necessário encontrar suas raízes, contudo, a fala do estudante pode fornecer indícios de que, para ele, a Matemática ainda estava fortemente atrelada à aplicação de fórmulas, o que reforçou os resultados da investigação de Roncaglio & Nehring (2013), que afirmaram que a disciplina de Matemática vem sendo encarada como um emaranhado de fórmulas por muitos estudantes do curso de Administração.

Para além destes acontecimentos, as principais percepções deste encontro, fundamentaram-se nas seguintes ideias

- foram eleitas muitas tarefas, pois o tempo foi suficiente para discutir, somente, as quatro primeiras situações;
- a sétima situação deveria ser retirada. Ela poderia ser reservada para ser disponibilizada mais adiante, na sequência das atividades do semestre, mas fora do período de aplicação das atividades da investigação;
- as situações 1, 3, 4, 6, 9, 11 e 12, que abordavam a interpretação econômica do ponto de nivelamento, foram oportunizadas muito cedo. Os estudantes demonstraram ainda não ter maturidade para relacioná-las às situações de comparação de duas retas e análise de seu ponto de intersecção. Quando foram confrontados com algumas delas, pareceram desestabilizados e desanimados, pois não conseguiram desvendá-las nem interpretá-las por meio de nenhum tipo de registro;
- o grupo não aderiu à utilização do *software Geogebra* em seus celulares, pois durante o encontro, somente dois discentes (A2 e A9), contaram com seu auxílio para representar as situações graficamente. Eles tiveram problemas para ajustar os dados em uma escala adequada e solicitaram orientação para fazê-lo;
- seria conveniente, se os estudantes tivessem a oportunidade de desvendar mais situações de comparação de duas retas e do significado do ponto de intersecção entre elas, no quarto encontro para que, mais tarde, no quinto encontro, fossem oportunizadas as situações de ponto de equilíbrio e de ponto de nivelamento.

Estas conclusões derivaram das análises das atividades deste dia, pois os registros verbais, gráficos e algébricos explicitados, ainda mostravam-se carentes e desconexos entre si. Conjecturou-se que, na implementação didática, seria necessário dispor de situações em nível mais básico no quarto encontro, para que os estudantes fossem conduzidos a diferenciar progressivamente os conceitos e realizar conexões da Matemática com a área administrativa.

Infelizmente, na aplicação do estudo 1, não detectou-se que a lista de tarefas estava muito extensa. Talvez seja necessário admitir que este tipo de atitude revelou que, justamente, a postura que criticou-se na introdução desta investigação, de um professor tradicional, que aposta na quantidade de tarefas para ocupar seus alunos, ainda se mostrava intrínseca à prática profissional da autora.

6.1.2.4 O quinto encontro do estudo 1

Na quinta semana, nove situações foram oportunizadas aos oito estudantes presentes desde o início da aula e aos três que chegaram após o primeiro período. Estabeleceu-se cinco grupos para organizar as tarefas propostas:

- as situações 1, 2, 3, 5 e 7 requeriam a interpretação do registro escrito para explicitar as funções econômicas em registro algébrico, a compreensão do significado das incógnitas para realizar substituições e o esboço do gráfico;
- a situação 4 exigia a substituição de determinado valor em uma equação dada;
- a situação 6 demandava a resolução de equações, o esboço do gráfico e a interpretação econômica do ponto de equilíbrio;
- a situação 8 necessitava da elaboração da equação a partir de informações como dois pontos e coeficientes;
- a situação 9 solicitava a resolução de equações, a substituição de determinado valor em uma das incógnitas e a interpretação econômica do ponto de equilíbrio.

A turma conseguiu realizar, ao menos, tentativas de resolução, nas cinco primeiras atividades, contudo apresentou dificuldades em operações básicas, porcentagens, na interpretação do significado das incógnitas e na utilização da calculadora.

Sugere-se que esse cenário possa ter sido decorrente da oferta prematura de situações em um nível que não permitiu o entrelaçamento das novas ideias com os subsunçores disponíveis na estrutura cognitiva dos estudantes, o que pode ter ocasionado uma desestruturação hierárquica de conhecimentos na relação de equações e gráficos.

Além disso, detectou-se que, alguns deles, tentaram desvendar as situações 2, 3 e 5, utilizando uma regra de três. Esta é uma atitude, em geral, bastante evidenciada, nas aulas de Matemática. Questionou-os a respeito do que os levou a tomar esta decisão e as respostas tencionaram uma concepção de que a estratégia parece com um artifício coringa, que se adequa a todo e qualquer tipo de situação, pois A2 afirmou: *“ah... eu percebi que sempre dá certo por regra de três”* e A8 confessou: *“eu sempre faço por regra de três quando não sei o que fazer, professora”*.

Estes dois estudantes, foram os mesmos que realizaram a situação 4 do teste diagnóstico, também, por regra de três o que, aliado aos seus depoimentos, fornece indícios de que este é um invariante operatório, frequentemente, utilizado por eles, de maneira indiscriminada.

As percepções deste encontro, fundamentaram-se nas seguintes ideias:

- as situações 6, 7, 8 e 9 não foram discutidas pelo grupo em virtude do tempo.

Novamente, foi disponibilizado o gabarito das tarefas para que os estudantes pudessem conferir ao tentar resolvê-las após o encontro;

- os discentes já haviam percebido que, caso não realizassem as tarefas que ficavam para casa e não fizessem questionamentos na aula seguinte, elas não seriam feitas na lousa pela professora. Desse modo, muitas situações foram deixadas de lado, pois não havia tempo para serem discutidas em aula e poucas vezes eles questionaram sobre as situações que tentavam realizar sozinhos em casa;
- por mais que, desde o primeiro encontro, fosse orientado que eles levassem uma calculadora científica para as aulas, na quinta semana sua utilização ainda não era um consenso, pois alguns persistiam em manusear a calculadora do celular. Os que aderiram à utilização da calculadora científica demandavam de auxílio para utilizá-la, por exemplo, por confundir o ponto com a vírgula, por não saber como representar uma fração, por não saber como representar uma porcentagem ou por desconhecer as funções ou configurações da própria calculadora.

De acordo com as dificuldades apresentadas pelos discentes no andamento das atividades, acreditou-se que elas tenham sido acentuadas pela forma como as situações foram sequencialmente oportunizadas. Dessa forma, projetou-se que, na implementação didática (estudo 2), seria coerente enfatizar os conceitos específicos de ponto de equilíbrio e ponto de nivelamento, pela primeira vez, no quinto encontro.

Acreditou-se que seria adequado que os estudantes tivessem o tempo de uma aula inteira para estabelecer relações entre os conceitos estudados nos quatro primeiros encontros com estes, que são tão importantes na área administrativa, por meio de uma quantidade menor de situações, mas que pudessem ser bem exploradas e discutidas entre os participantes.

6.1.2.5 O sexto encontro do estudo 1

Na sexta semana, ocorreu o último encontro antes do teste individual. A pedido deles, previamente havia sido acordado que, neste dia, seria reservado um momento para que eles revisitassem alguma dúvida referente aos exercícios dos encontros anteriores, ou poderia ser feita uma espécie de revisão dos conteúdos estudados. Além disso, preparou-se uma nova lista contendo cinco situações, que foram separadas em quatro grupos:

- as situações 1 e 4 necessitavam do trânsito do registro escrito para o registro algébrico, o esboço do gráfico, a análise comparativa de duas retas e de seu ponto de intersecção, a diferenciação de incógnitas para substituição de um valor dado em alguma delas e a interpretação econômica;

- a situação 2 apresentava o registro algébrico e requeria a diferenciação de incógnitas para substituição de um valor dado em alguma delas e a interpretação econômica;
- a situação 3 solicitava a transição do registro escrito para o registro algébrico, a substituição de um valor dado em uma das incógnitas e a resolução de equações;
- a situação 5 explicitava o registro algébrico e demandava a diferenciação de incógnitas para substituição de um valor dado em alguma delas e o esboço do gráfico.

Mas, surpreendentemente, os estudantes não chegaram a realizar tentativas de resolução destas cinco situações. Neste dia, verificou-se como interpretações divergentes podem ocasionar cenários imprevisíveis, pois, quando os estudantes sugeriram que alguns instantes da aula fossem destinados às dúvidas passadas ou para uma revisão, imaginou-se que seriam dúvidas pontuais, afinal, em todos os encontros eles tinham a possibilidade de expor seus questionamentos. Na concepção da autora, nada de diferente ocorreria neste dia.

Contudo, no encontro que precedeu a prova, foi diferente, pois, dúvidas que nunca haviam sido expostas e questões que nunca haviam sido debatidas, emergiram no pequeno grupo presente, mais especificamente, sete estudantes. Destes, cinco confessaram que, naquele mesmo dia, na parte da tarde, haviam se reunido para estudar e tentar realizar, conjuntamente, as listas de exercícios anteriores.

Um fator perceptível, em todos os discentes que ali estavam, era indícios de ansiedade e preocupação. Falavam concomitantemente, por vezes, faziam as mesmas perguntas que o colega tinha acabado de fazer. E não era para menos... todas as listas de exercícios, que haviam sido abordadas ao longo dos encontros, estavam em cima de suas classes, um amontoado de folhas, farelos de borracha para todo o lado, pois faziam tentativas de resolução e apagavam com pressa.

A sensação que teve-se foi que eles queriam fazer, naquele dia, todas as perguntas que não haviam feito nas semanas anteriores, pois alguns queriam aprender funções básicas da calculadora, sendo que, até o encontro anterior, ainda insistiam em utilizar a calculadora do celular ou faziam os cálculos sem o instrumento. Um deles questionou qual era o comando para desligar o aparelho.

Ademais, apresentavam dúvidas de resolução de equações, no cálculo do mínimo múltiplo comum, ao operar com frações e, principalmente, na passagem do registro algébrico para o registro gráfico, porém, não utilizavam o *Geogebra* em seus celulares. Aliás, parecia que essa ideia nunca havia sido discutida em aula, pois eles confessaram que não utilizavam o *software* em seus celulares para verificar se os gráficos que elaboravam estavam corretos.

No que se refere à baixa assiduidade nesta aula, acredita-se que ela possa ter ocorrido em virtude de alguns integrantes interpretarem que não haveria aula, ou que este tipo de atividade não se caracterizava como uma aula, pois, ao indagar o grupo a respeito dos colegas que não estavam presentes, se eles sabiam o porquê, A1 explicou: *"ah professora [...] eu acho que quando o pessoal sabe que não vai ter conteúdo novo na última aula antes da prova, prefere ficar em casa estudando sozinho pra não se confundir"*.

Perguntou-se ao estudante se ele acreditava que alguém poderia se confundir vindo na aula antes da prova e ele complementou: *"é que tem gente que tem facilidade e prefere estudar sozinho, porque a gente fica perguntando. Eles sabem que a gente vai estar cheio de dúvidas na última aula antes da prova. E tem gente que só não quer vir na aula mesmo".* Diante da resposta explicitada pelo estudante, percebeu-se que, na sua ideia, e provavelmente de alguns outros, a última aula antes da prova, era a aula de fazer perguntas, como se as anteriores não fossem.

A avaliação, que estava marcada para a semana seguinte, seria a primeira do semestre e eles confessaram que, costumeiramente, deixam para estudar na véspera ou no dia da avaliação. Conforme A4: *"se a gente estuda muito tempo antes da prova, acaba esquecendo a matéria, estudar na véspera é bom porque que o conteúdo fica fresquinho na cabeça[32]"*.

Esta afirmação do estudante corroborou o cenário de nossa educação superior, que Moreira (2011) descreve. Contudo, a ideia não é buscar culpados, mas apontar caminhos para modificar este contexto. A inércia não pode ser a saída para modificar este processo, que depende de pequenas atitudes e não aponta resultados imediatos, pois ocorre ao longo dos anos.

Dadas as constatações, foi possível estabelecer algumas conclusões:

- neste dia, os estudantes demonstraram um engajamento diferente dos outros encontros, pois tinham estudado antes da aula e trouxeram suas dúvidas anotadas no caderno. Eles haviam tentado, inclusive, escrever a interpretação do ponto de equilíbrio e o ponto de nivelamento, atitude esta que eles foram resistentes em fazer no encontro anterior, alegando que depois fariam em casa;
- infelizmente, conforme evidenciado, poucos estudantes compareceram neste dia. Contudo, os que estavam presentes, demonstraram interesse e envolvimento, fizeram questionamentos, mostraram suas tentativas de realização e como haviam elaborado algumas de suas estratégias de resolução de modo que, este, foi um dos aspectos

[32] A fala do estudante referia-se ao fato de estudar faltando pouco tempo para a avaliação, pois isso poderia ajudá-lo a não esquecer dos conteúdos.

positivos do encontro, apesar de ele ter sido demarcado pela ausência de grande parte do grupo.

Estes fatos, tencionaram a ideia de que, na implementação didática, o entusiasmo que eles demostraram no encontro anterior à avaliação, poderia ser mais bem aproveitado, caso outras avaliações acontecessem antes do sétimo encontro.

Ou seja, uma vez que eles demonstraram um aumento de interesse e de participação em virtude da avaliação estar se aproximando, conjecturou-se que, se outras avaliações fossem diluídas ao longo das aulas, isso poderia ser um fator de motivação que, possivelmente, os engajaria em seu próprio processo de aprendizagem.

Além disso, projetou-se que na implementação didática, talvez não ocorresse o mesmo cenário de exaltação, caso eles percebessem que estariam sendo avaliados continuamente e não, somente, na prova. Apesar dos estudos de Yenilmez, Girginer & Uzun (2007), Peñaloza Fuentes, Lima & Guerra (2009), Roncaglio & Nehring (2013), Laging & Voßkamp (2017) e Cumhur & Tezer (2019), evidenciarem que há outros fatores que influenciam na ansiedade dos estudantes nas aulas de Matemática, além das avaliações, como as suas experiências anteriores frente à disciplina, por exemplo.

Assim, no sexto encontro, da mesma forma como no quinto, julgou-se que, para a implementação didática, seria pertinente, enfatizar os conceitos específicos de ponto de equilíbrio e ponto de nivelamento, sob a abordagem de equações e gráficos, por meio de diferentes situações e não limitar este dia como a última aula antes da prova.

6.1.2.6 O teste individual do estudo 1

No sétimo encontro, houve a aplicação do teste individual, que foi nomeado de prova pelos estudantes e está disponível nos apêndices desta tese (Apêndice E).

Neste dia, quando adentrou-se na sala de aula, os discentes estavam bastante inquietos e, aparentemente, nervosos. Dois deles, disseram que tinham esquecido de levar a calculadora e perguntaram se alguém tinha para emprestar. Como, ali, ninguém possuía mais de um objeto, eles foram em busca de algum colega de curso que tivesse, em outra sala de aula.

Desse modo, aliado ao habitual esquecimento nos encontros anteriores, verificou-se que a utilização da calculadora foi motivo de resistência, desde o início do semestre até a sétima semana de aula, por parte de alguns discentes.

Curiosamente, a postura destes estudantes contrapôs o desejo predominante dos estudantes que participaram da investigação de Cumhur & Tezer (2019), pois, nela, os discentes mencionaram que a aprovação da utilização da calculadora seria uma das ações que o professor poderia adotar nas aulas de Matemática, para minimizar sua ansiedade frente às tarefas propostas.

Antes do início da avaliação, A6, que não estava presente no encontro anterior, pediu para fazer questionamentos. Atendeu-se à sua solicitação e verificou-se que suas dúvidas referiam-se a capacidades no campo das operações algébricas, pois ele perguntou a respeito da resolução da equação da primeira situação do quinto encontro.

Ele escreveu a equação $8x = 15.000$, e encontrou 14.992 como resposta. Sua dúvida era o que ele teria errado, já que a resposta não conferia com o gabarito. Questionou-se como ele havia pensado na resolução, pois só apresentou a resposta da situação. Então ele afirmou: *"eu passei esse oito pro outro lado negativo, não é isso?"*. Desse modo, verificou-se que, embora tenha explicitado, somente, a primeira e a terceira linha de resolução em seu caderno, implicitamente, ele realizou o passo exposto na segunda linha:

$$8x = 15000$$

$$x = 15000 - 8$$

$$x = 14992$$

Este foi um teorema-em-ação que se revelou persistente ao longo dos encontros por parte de A6, pois averiguou-se que ele utilizou este mesmo artifício desde o teste diagnóstico até o sétimo encontro. Logo, este esquema ainda não havia sido abandonado ou adaptado. Isto permitiu algumas especulações: provavelmente, não houve o entrelaçamento de novos conceitos com os subsunçores do estudante, no que se refere à resolução de equações; possivelmente, as situações enfrentadas por ele não permitiram a diferenciação progressiva de conhecimentos e não estavam em nível crescente de complexidade.

Faz-se estas considerações pois, apesar de saber que as situações precisariam ser adaptadas para o estudo 2 (implementação didática), A6 mostrou-se pouco assíduo nas aulas, faltou ao segundo e ao sexto encontro e saiu mais cedo da aula todas as semanas, não participou de algumas discussões em sala de aula e, provavelmente, por isso, ainda não tinha maturidade, suficiente, para desvendar situações desse tipo.

Enquanto orientava-se A6 a respeito de seu questionamento, os estudantes que tinham saído para pedir calculadoras emprestadas voltaram, portando os objetos e deu-se início a avaliação, que continha quatro situações, cada uma estabelecida em um grupo e intentou contemplar as diferentes capacidades exploradas nos encontros anteriores:

- a situação 1 solicitava a passagem do registro escrito para o registro algébrico e do registro algébrico para o registro gráfico. Além disso, a resolução de equações, substituição de determinados valores em incógnitas e a interpretação econômica do ponto de nivelamento;

- a situação 2 requeria o trânsito do registro escrito para o registro algébrico e a resolução de equações para calcular a quantidade de equilíbrio;
- a situação 3 explorava o registro algébrico e demandava a substituição de determinados valores em incógnitas, além da conversão do registro algébrico para o registro gráfico;
- a situação 4 necessitava da utilização de dois pontos conhecidos para a elaboração da respectiva equação, da resolução de equações, da elaboração do gráfico e da interpretação econômica do ponto de equilíbrio.

Durante a realização da avaliação, que era individual, os 13 estudantes presentes permaneceram em silêncio. Após pouco mais de uma hora desde seu início, os dois primeiros discentes entregaram-na, uma delas completamente em branco, e deixaram a sala, mas antes disso, todos foram informados que, na próxima semana, as avaliações seriam entregues e corrigidas no grande grupo.

Na correção do teste individual, verificou-se os seguintes dados, apresentados no Quadro 9:

Quadro 9: desempenho dos estudantes no teste individual do estudo 1.

	TOTALMENTE CORRETA	**PARCIALMENTE CORRETA**	**INCORRETA**
1ª situação	2	8	3
2ª situação	9	2	2
3ª situação	9	2	2
4ª situação	4	5	4

Fonte: dados da pesquisa.

Detalhando-se o Quadro 9 de maneira mais aprofundada, para explorar os equívocos de resolução dos estudantes, foi possível concluir que:

- na primeira situação, dos oito discentes que acertaram parcialmente, quatro deles não escreveram a interpretação do ponto de nivelamento, três não apresentaram o registro gráfico, nem a interpretação e um apresentou o registro gráfico com equívocos no cálculo do ponto de nivelamento, mas apresentou a interpretação, só que incorreta. Dos três estudantes que erraram o problema, dois deixaram-na por fazer e um apenas somou custo fixo e variável como se ambos fossem um só custo e os igualou a 24;
- na segunda situação, as dificuldades apresentadas consistiram em somar custo fixo e custo variável e erros por esquecer do sinal negativo na função custo ou no manuseio

da calculadora (um estudante deu o comando $1,500000$ na calculadora em vez de 1500000). Também explicitaram equívocos na resolução da equação (do mesmo tipo que o exposto por A6 antes da avaliação) e um não apresentou tentativas de resolução;

- na terceira situação, enfrentaram problemas na elaboração do registro gráfico e na substituição de valores nas incógnitas. Um estudante apresentou duas retas se interceptando, como se fossem custo e receita, no entanto era preciso representar somente a reta do lucro e outro discente substituiu os valores sugeridos no enunciado de maneira equivocada. Provavelmente, ele não identificou o que cada incógnita significava no contexto do problema. Além disso, seu gráfico foi representado por uma reta decrescente, interceptando o eixo y no valor 2.432. Um estudante deixou a questão em branco;
- a quarta situação abarcou indícios de não compreensão da ideia de par ordenado, de sistema de equações e de resolução de equações. Os estudantes que demonstraram equívocos, enfrentaram as primeiras dificuldades já no início, pois apresentaram tentativas de resolução por regra de três e erros de operações aritméticas. Um estudante encontrou a equação de demanda, mas esqueceu de trocar o sinal da equação de oferta para encontrar o ponto de equilíbrio.

A partir dos erros cometidos pelos estudantes, foi possível identificar que alguns ainda não dispunham de subsunçores necessários que favorecessem a aprendizagem significativa dos conceitos estudados, pois evidenciou-se possíveis indicadores de invariantes operatórios que ainda necessitavam ser explorados e negociados, como, por exemplo, a tentativa de resolver situações indiscriminadamente por regra de três, ou a concepção de que o lugar geométrico onde a reta corta o eixo x é dada pelo coeficiente angular da equação $y = ax + b$.

Ademais, a conceitualização Matemática dos estudantes fornecia indícios de que ainda não se mostrava em sintonia com os conceitos da área administrativa. Por vezes, eles encontraram números negativos como resposta e, aparentemente, não se deram conta de que, no contexto da tarefa, este valor representava uma quantidade, logo, não fazia sentido. Isso evidenciou que a Matemática ainda se mostrava desconexa à área administrativa. Em alguns casos, explicitaram uma repetição dos dados fornecidos no enunciado em meio a um amontoado de contas para, supostamente, encontrarem uma resposta final e seguirem para o próximo problema. Esta atitude foi bastante comum durante os demais encontros, não somente no teste individual.

De posse de todas estas evidências, acreditou-se ser conveniente ouvir o que os estudantes tinham a dizer a respeito de suas percepções frente ao andamento das atividades.

6.1.2.7 O encontro final integrador do estudo 1

Antes de iniciar o detalhamento deste dia, cabe frisar que, este foi o encontro final que compreendeu as atividades do primeiro estudo, pois a disciplina teve continuidade até o mês de dezembro.

Nesta ocasião, devolveu-se o teste individual aos 11 discentes presentes, mas, antes disso, fez-se questionamentos a respeito de como se sentiram em relação à avaliação, quais as impressões que tiveram do teste individual e obteve-se comentários heterogêneos, por exemplo, A2 mencionou: *"bah*[33]*, tava difícil prof"* e A7 contrapôs ao afirmar: *"eu achei acessível, tava bem como estudamos em aula"*.

Primeiramente, os estudantes analisaram os seus registros e, então iniciou-se as discussões. Todas as situações foram expostas e detalhadas na lousa, mas isso foi feito com o auxílio do grupo, ou seja, perguntava-se como eles haviam feito, ou o que teriam errado, chegava-se a um consenso e escrevia-se as conclusões na lousa.

Enquanto questionava-os a respeito das situações, alguns explicavam parte de seus esquemas de resolução, como haviam elaborado estratégias para resolvê-las, faziam questão de explicitar os erros e as dificuldades que enfrentaram. Contudo, nada disso estava presente em suas provas (ou testes finais) e, caso essa discussão não tivesse ocorrido, provavelmente estas informações nunca teriam sido expostas para a professora. Neste momento, evidenciou-se o cenário discutido por Cury (2013, p. 80), pois ela denota que

> Com base nas sugestões para o uso dos erros, destaco a ideia de que o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas.

Evidentemente, a proposta metodológica deste estudo não está amparada na análise de erros, contudo a ideia da autora converge com a de Vergnaud (2017), que denota a desestabilização dos esquemas e com Moreira (2017), que enfatizada o *iceberg da conceitualização*, pois todos sugerem que os erros precisam ser explorados e negociados, mas para isso, precisam ser explicitados.

E, de fato, foi muito interessante vivenciar os estudantes explicando para o grupo o que

[33] Expressão muito utilizada por gaúchos, que tem vários significados, nesse caso específico, para dar ênfase à reclamação proferida.

erraram e como pensaram. Muitas vezes, durante as aulas e, inclusive no teste individual, eles esboçaram tentativas, mas apagaram, talvez por medo de errar ou por vergonha e apresentaram a situação em branco, no entanto, supõe-se que, implicitamente, elaboraram diversas estratégias de resolução que ficaram guardadas em sua estrutura cognitiva.

Dentre as discussões que emergiram, os discentes que não escreveram a interpretação econômica nas situações, justificaram que não a fizeram, pois imaginaram que só seriam avaliados *"na parte da Matemática"*, assim denotado por A2. Explorando-se esta e as demais falas identificadas, verificou-se a ideia intrínseca de que a Matemática estava presente, somente, nos cálculos feitos, não na escrita da interpretação econômica e, por este motivo, seus registros escritos não seriam avaliados pela professora.

Contudo, apesar de muitos não terem explicitado a interpretação econômica do ponto de nivelamento e do ponto de equilíbrio, o registro gráfico foi, de certa forma, elegido como o grande vilão pelo grupo, pois alguns demonstraram descontentamento, por exemplo, A1 destacou: *"a parte dos gráficos eu sempre achei difícil de entender, agora eu tenho que explicar, meu Deus!"*.

Após toda a correção do teste individual, outros comentários foram feitos, alguns discentes, inclusive, mudaram de ideia a respeito da avaliação, pois A2 justificou que *"realmente não tava difícil, se eu tivesse estudado mais, teria ido bem"*. Outro estudante demonstrou indícios de arrependimento, pois confessou: *"eu só achei difícil a parte dos gráficos e a interpretação, deveria ter focado mais nisso, porque eu não estudei essa parte"* (A5).

Esta última fala, conforme exposto, foi protagonizada por A5, um discente que, ao longo dos encontros, não utilizou o *Geogebra* no celular, não pediu auxílio na elaboração dos gráficos e preferiu se abster da escrita da interpretação econômica. Além disso, quando solicitado, geralmente protelava e informava que faria tais atividades depois, mesmo após insistentes tentativas da professora. Isso pode ter ocasionado um obstáculo epistemológico, que o impediu de avançar neste tipo de situação, afinal o enfrentamento das dificuldades diante das situações não estava ocorrendo. Logo, provavelmente, elaborar gráficos e realizar a interpretação, pode ter se tornado uma atividade intransponível diante de um emaranhado de situações e conceitos desconexos para ele.

Na finalização das discussões, alguns estudantes reivindicaram que, para a sequência das atividades do semestre, gostariam de ter menos tarefas em cada encontro e mais tempo para discutir os exercícios em aula, pois não tinham tempo para estudar em casa e enfrentavam grandes dificuldades para fazer os exercícios sozinhos. Além disso, argumentaram que gostariam de corrigi-los, pois isso os tranquilizava.

Estes pedidos, provenientes de estudantes, se pareceu muito com a necessidade evidenciada nos estudos de Yenilmez, Girginer & Uzun (2007) e de Cumhur & Tezer (2019), apesar de uma divergência ter sido manifestada: nas obras destacadas, os estudantes clamavam pela utilização de calculadoras e *softwares*, no entanto, na investigação do estudo 1, grande parte do grupo, se mostrou resistente quanto ao seu manuseio. Isso pode ter sido decorrente de diversos fatores, dentre eles, um processo de anos de escolarização que, comumente, não preconiza sua utilização, então, supõe-se que por uma questão de não desacomodação, estes estudantes podem ter preferido continuar sem utilizá-la.

6.2 Conclusões e evidências obtidas por meio do estudo 1

Quando ocorreu a aplicação do estudo 1, que serviu como estudo piloto, ainda não haviam sido definidas as categorias de análise de subsunçores e de invariantes operatórios (detalhadas no Quadro 6, do Capítulo 4, item 4.4.2). Também ainda não desfrutava-se de compreensão sobre como seriam analisados os esquemas explicitados pelos estudantes, diante do seu enfrentamento com as diferentes situações. Outro aspecto verificado por meio desta etapa, foi o delineamento da UEPS, que ainda não se fazia completamente estabelecido e, portanto, as situações não estavam fielmente estruturadas, segundo as oito etapas sequenciais sugeridas por Moreira (2012b).

Neste ponto, a construção do Quadro 5, exposto no Capítulo 4, item 4.4.2, revelou-se uma ação crucial para remodelar as situações e adaptá-las ao objetivo proposto nesta investigação, pois permitiu um direcionamento e reconciliação integradora do trabalho docente. Nesta investigação, mais do que verificar que a TAS e a TCC são compatíveis, evidenciou-se que a elaboração da UEPS manifestou-se como um caminho metodológico fundamental para delinear e nortear a pesquisa, sobretudo a compreensão da investigadora acerca do seu ofício.

Entretanto, como nem tudo são flores, na época de aplicação do estudo 1, julga-se que faltou, por parte da autora, a apropriação dos conceitos de maneira não imposta e não literal, acerca da TAS e a TCC. Sim, acredita-se que as próprias teorias abordadas neste estudo, se aplicaram para explicar o cenário experienciado no estudo 1, pois, fazendo-se um retrospecto, considerou-se que ainda não havia subsunçores e esquemas bem elaborados, disponíveis na estrutura cognitiva da pesquisadora para ancorar novas ideias e conduzir o processo como mediadora.

Ou seja, ainda não se dispunha de experiências anteriores como autora de atividades sob a égide dessas teorias, tampouco usufruía-se de conhecimentos a respeito de seus aspectos relevantes. Dessa forma, interpretou-se que o estudo 1 serviu como uma espécie de organizador prévio ou um material instrucional e todo este ensaio investigativo, permitiu a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora acerca da própria investigação para, então, colocar em prática a implementação didática, no estudo 2.

Ao analisar as situações propostas no teste diagnóstico e sob o respaldo dos três professores especialistas, evidenciou-se que três, das sete tarefas, precisariam ser remodeladas, removidas e/ou substituídas por outras mais adequadas na busca por subsunçores e invariantes operatórios no campo conceitual das equações de primeiro grau, com ênfase na representação gráfica. Diante dessas constatações, obteve-se o seguinte panorama de verificação na primeira aplicação do teste diagnóstico, detalhado no Quadro 10.

Quadro 10: conclusão após a aplicação do teste diagnóstico do estudo piloto.

SITUAÇÃO	**CONCLUSÃO**
1	Retirada, em virtude do nível de dificuldade
2	Retirada, em virtude do nível de dificuldade
3	Retirada, em virtude do nível de dificuldade
4	Mantida
5	Mantida
6	Mantida
7 (a, b, c, d)	Mantida, mas reformulada[34]

Fonte: dados da pesquisa.

Os três professores (dois da área da Matemática e um da Administração), sugeriram que as três primeiras situações, deveriam ser substituídas por outras em nível mais básico de complexidade. De maneira específica:

- um dos dois professores de Matemática, orientou que a primeira situação, que exigia conhecimentos básicos de geometria plana, poderia ser substituída por uma que também abordasse conceitos geométricos, mas de tal forma que, apenas, conhecimentos de equações de primeiro grau fossem exigidos para que ela fosse desvendada, pois da maneira como estava, ela necessitava de conceitos de equações do segundo grau;
- o professor da área administrativa, afirmou que a segunda situação era pertinente para ser trabalhada com os estudantes, mas defendeu que acreditava ser muito cedo para ela ser oportunizada. Ele defendeu que esse tipo de situação poderia explorar inúmeras discussões e, para ser mais bem aproveitada, ela poderia ser priorizada no andamento

[34] Optou-se por reordenar os itens dessa situação no teste diagnóstico do estudo 2 (implementação didática).

da disciplina, não no teste diagnóstico, que era feito de maneira individual pelos estudantes;

- por motivo análogo, os dois professores de Matemática sugeriram que a terceira situação, deveria ser trabalhada em aula, após o teste diagnóstico. Além disso, afirmaram que ela exigia possíveis conhecimentos anteriores e continha um nível de dificuldade, provavelmente, alto para o teste diagnóstico.

Além do teste diagnóstico, concluiu-se que a UEPS também deveria ser remodelada para contemplar todas as etapas sugeridas por Moreira (2012b), pois verificou-se que sua estrutura estava exacerbada, confusa e as situações foram propostas, em muitos casos, fora de seu tempo.

De maneira equivocada, iniciou-se o primeiro estudo, guarnecida das situações que seriam disponibilizadas aos estudantes, antes mesmo de coletar seus dados no teste diagnóstico. Isso, possivelmente, foi fruto da inexperiência e do medo de que algo fugisse do controle. Julgou-se que essa atitude foi errônea e, na implementação didática, planejou-se não repetir o mesmo cenário. Devido ao número de tarefas disponibilizadas em cada aula, verificou-se que seria, eventualmente, prejudicial abordar mais do que quatro ou cinco em cada encontro. Isto porque as abordagens tornaram-se, demasiadamente, superficiais no estudo 1. Muitas situações selecionadas, deixaram de ser discutidas. Acreditava-se que situações que não tinham sido enfrentadas em aula, e ficaram como tarefas para casa, seriam revistas e comentadas na aula seguinte, o que raramente ocorreu.

No contexto de um curso noturno, no qual muitos estudantes trabalham durante o dia, isso precisa ser levado em consideração. Desse modo, muitas tarefas, provavelmente, nunca foram desvendadas pelos estudantes. Por este motivo, projetou-se uma reformulação na UEPS do estudo 2, com um número viável de situações, contudo elas poderiam ser, em dados momentos, as mesmas do estudo 1, ou novas situações poderiam ser elaboradas. Isso dependeria do nível de conceitualização dos estudantes participantes do estudo 2.

O fato de a TCC enfatizar que a formação de um conceito, na estrutura cognitiva do estudante, depende de seu confronto com uma grande variedade de situações, a fim de que ele perceba regularidades em termos dos atributos criteriais deste conceito, promoveu a concepção equivocada, por parte da autora, de que uma imensidão de situações deveria ser oportunizada.

Por conta desse cenário, verificou-se o descumprimento da consolidação, uma das etapas sugeridas por Ausubel, Novak & Hanesian (1980), pois novos tópicos foram introduzidos antes que anteriores estivessem estáveis e organizados na estrutura cognitiva dos estudantes e isso acarretou possíveis desestruturações hierárquicas de conceitos. Alguns esquemas de resolução que foram apresentados no teste diagnóstico permaneceram ao longo do confrontamento com as diferentes situações e, visivelmente, não foram abandonados nem sofisticados.

Durante algum tempo, isto foi motivo de angústia, pois tinha-se a preocupação em abordar muitas situações e o tradicional hábito docente de "vencer o conteúdo programático", no entanto, para a implementação didática, optou-se por reduzir a quantidade das situações e apostar na qualidade de aprofundamentos e questionamentos que poderiam emergir diante delas. Notavelmente, esta foi uma das percepções mais relevantes evidenciadas no estudo inicial e foi incentivada pelos três professores especialistas.

Isto evidenciou a necessidade de, na implementação didática (estudo 2), preconizar a participação dos discentes, para que fosse possível realizar um mapeamento cognitivo mais profundo a respeito de seus esquemas diante das situações abordadas. Além disso, escancarou a necessidade de, em certos momentos, utilizar materiais instrucionais ou organizadores prévios.

Sob esta perspectiva, apresenta-se, a seguir, o Quadro 11 comparativo das duas UEPS: do lado esquerdo, a do estudo 1 e do lado direito, a do estudo 2. Nele, pode-se visualizar que as etapas sequenciais sugeridas por Moreira (2012b), só estão denotadas na implementação didática e a diminuição do número de situações de cada encontro.

Quadro 11: quadro comparativo das situações da UEPS do estudo 1 e da UEPS do estudo 2.

ESTUDO 1 (ESTUDO PILOTO)	ESTUDO 2 (IMPLEMENTAÇÃO DIDÁTICA)
1º Encontro Termo de consentimento Questionário socioeconômico Teste diagnóstico com sete situações	**1º Encontro – situação inicial** Termo de consentimento (mantido) Questionário socioeconômico (mantido) Teste diagnóstico com sete situações (três delas substituídas e uma reformulada)
2º Encontro Nove situações	**2º Encontro – situações-problema iniciais** Quatro situações
3º Encontro Nove situações	**3º Encontro – novas situações-problema** Três situações
4º Encontro Doze situações	**4º Encontro – aprofundando conhecimentos** Quatro situações
5º Encontro Nove situações	**5º Encontro – novas situações em nível mais alto de complexidade** Três situações
6º Encontro Cinco situações	**6º Encontro – novas situações em nível mais alto de complexidade** Três situações
7º Encontro Teste individual com quatro situações	**7º Encontro – avaliação somativa individual** Teste individual com cinco situações
8º Encontro Encontro final integrador	**8º Encontro – diferenciando progressivamente: encontro final integrador** Encontro final integrador

Fonte: dados da pesquisa.

Mas, na implementação didática, elas precisariam, sobretudo, estar entrelaçadas aos seus subsunçores para permitir a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora dos conceitos, pois da maneira como foram trabalhadas no estudo 1, interpretou-se que, por vezes, mostraram-se inadequadas para ancorar novas aprendizagens.

Talvez, este tenha sido um dos maiores problemas estruturais evidenciados no estudo 1: a ênfase na quantidade de tarefas, por vezes, se sobrepôs a importância de dar tempo aos estudantes para conjecturarem e isto pode ter ocasionado um salto cognitivo, uma desestruturação hierárquica dos conceitos abordados na estrutura cognitiva deles.

Também detectou-se que suas discussões eram muito ricas, no entanto, tudo aconteceu muito rápido, pela pressa que eles tinham em terminar as listas de exercícios (e não era para menos, pois foram sobrecarregados de atividades). Obviamente, não foi possível presenciar as falas de todos os grupos, pois elas aconteciam simultaneamente, então, para a implementação didática, teve-se a ideia de solicitar que eles gravassem suas discussões enquanto realizavam as tarefas (é claro, se essa ação fosse de sua livre e espontânea vontade).

Além disso, evidenciou-se a necessidade de incluir mais momentos de avaliação antes da avaliação somativa individual, pois eles tenderiam ao tradicional hábito discente de "deixar para estudar na véspera da prova". Desse modo, planejou-se que na implementação didática, seria pertinente que outras avaliações ocorressem antes da prova somativa individual, marcada para o oitavo encontro.

A entrevista com a coordenação do curso, permitiu evidenciar quais eram os principais conceitos da disciplina que precisariam ser mobilizados pelos estudantes, e isto foi crucial, pois o fator tempo mostrou-se, de certa forma, uma preocupação, afinal, "vencer o conteúdo programático" é uma das responsabilidades do docente. Desse modo, foi possível estabelecer um panorama dos conceitos que são fundamentais para serem abordados na disciplina de Matemática I, de tal forma que eles foram priorizados na implementação didática.

Apesar de ter evidenciado que o estudo 1 foi permeado por alguns fracassos/equívocos, em virtude das escolhas feitas na época, depreende-se que ele foi necessário para que ocorresse o amadurecimento de ideias e o desprendimento de outras, por exemplo a concepção de que quantidade de exercícios e conteúdos disponibilizados em aula, influenciava na aprendizagem dos estudantes. Na sua análise, a preocupação foi verificar se a estruturação da UEPS, poderia favorecer a aquisição de conceitos no campo conceitual das equações, com ênfase no registro gráfico e/ou indícios de aprendizagem significativa.

Conforme detalhado anteriormente, o estudo 1 ocorreu no segundo semestre de 2017 e, no semestre seguinte, os professores especialistas analisaram as situações, de tal modo que não houve tempo hábil para a realização da implementação didática no primeiro semestre de 2018, pois não pretendia-se fazer isso às pressas, nem pressioná-los para retornarem com suas impressões. A ideia inicial, era realizar o estudo 2 no segundo semestre de 2018, contudo, inesperadamente e pela primeira vez na instituição, não houve estudantes matriculados, consequentemente, a disciplina Matemática I não foi ofertada, nessa época, conforme exposto no Quadro 4, item 4.2.

Sem escolha, teve-se pouco mais de um ano de intervalo entre o desenvolvimento do estudo 1 e o estudo 2, que ocorreu no primeiro semestre de 2019, então, durante todo o ano seguinte após a aplicação do primeiro estudo, dispôs-se de tempo para repensar a respeito do número de atividades, quais eram relevantes e poderiam contribuir para o objetivo da pesquisa. Nesse intervalo entre os dois estudos, os resultados evidenciados no estudo 1, foram publicados por Fogaça, L. S., Moreira, M. A. & Caballero, M. C. (2018).

Dessa forma, a elaboração e aplicação do estudo 1, a submissão das situações à análise dos três professores especialistas, a entrevista com a coordenação, a elaboração da UEPS e do artigo, mostraram-se primordiais, pois favoreceram o aprimoramento e, mais do que isto, o entendimento desta pesquisa, por parte da própria autora.

Estas conclusões localizaram o estudo 1 como um ponto crucial e necessário para o aperfeiçoamento da investigação, pois, por meio dele, foi possível verificar aspectos positivos, negativos, fragilidades e tendências. Além disso, permitiu que a professora pesquisadora se tornasse mais experiente frente às teorias adotadas, amadurecesse profissional e pessoalmente e tivesse escolhas metodológicas mais bem definidas frente à implementação didática.

Em continuidade, no próximo capítulo aborda-se a implementação didática, definida como estudo 2.

CAPÍTULO 7
REPERCUSSÕES DO ESTUDO 2

Neste capítulo, revela-se, inicialmente, no item 7.1, o cronograma das atividades do estudo 2, nomeado de implementação didática, que contou, inicialmente, com a participação de 21 estudantes e, no item 7.2, confere-se a análise qualitativa de todas as ações desenvolvidas ao longo dos oito encontros que contemplaram a intervenção.

7.1 Estudo 2: a implementação didática

As ações junto à turma de Matemática I, do primeiro semestre noturno, do curso de Administração, tiveram início em fevereiro e término em julho de 2019, mas, pontua-se que a época na qual configurou-se o período da implementação didática das atividades desta pesquisa, e é detalhado neste capítulo, está compreendido entre 22 de fevereiro e 12 de abril de 2019, conforme a ilustração, pois, tal como no primeiro estudo, o semestre letivo, como consta na Figura 23, teve sua continuidade após a investigação.

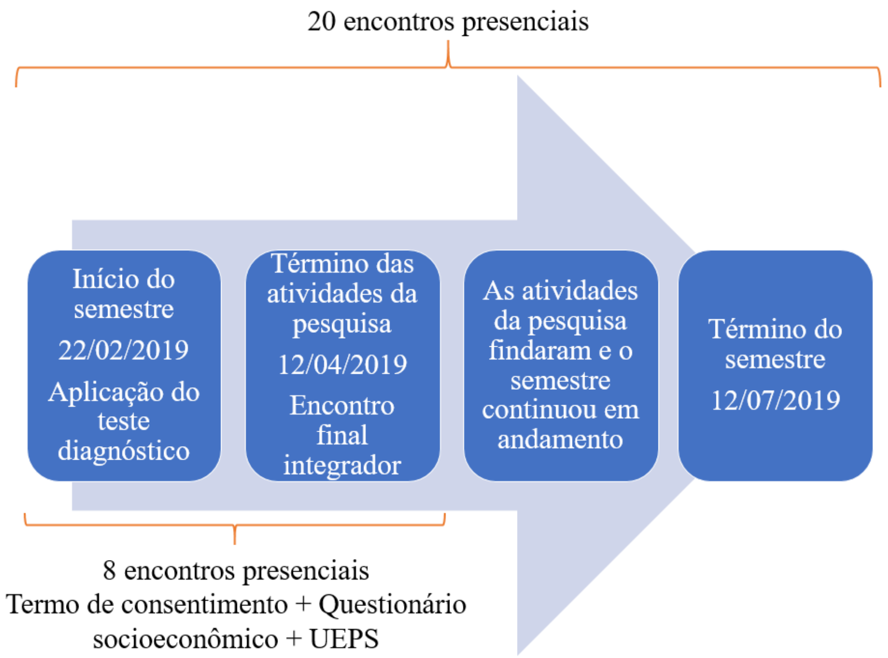


Figura 23: ordem cronológica das atividades do estudo 2.
Fonte: a autora.

Outra similaridade com o estudo 1 foi o período, pois, as ações aqui analisadas, englobaram oito encontros, sendo que, cada um deles era composto de quatro aulas que, por sua vez, tinham duração de 50 minutos cada uma. Estes oito encontros, ocorreram nas sextas-feiras à noite, das 18h25min às 22h00min e tiveram 15 minutos de intervalo (das 20h05min às 20h20min).

Por meio desta descrição, pode-se discernir que o cenário das duas aplicações foi semelhante, pois, ambas, aconteceram no mesmo curso noturno, nas sextas-feiras, no mesmo horário e com o mesmo número de encontros. Todavia, um aspecto que diferenciou o estudo 1 da implementação didática foi referente aos sujeitos, pois diferentes estudantes participaram das duas investigações. Eventualmente, poderia ter acontecido de algum estudante que reprovou, cancelou ou desistiu da disciplina em 2018, ter se matriculado, novamente, nela em 2019, contudo, casualmente, isto não ocorreu.

7.2 Análises dos dados coletados no estudo 2

Na sequência, são analisados os dados coletados na implementação didática, que estão pautados sob a égide da TAS e da TCC. Salienta-se que, para preservar a identidade dos 21 estudantes que, inicialmente[35], participaram da investigação, eles serão mencionados, no decorrer do texto, como E1, E2, E3, ..., E21[36], conforme sua ordem alfabética na lista de presença.

Optou-se por utilizar a letra E, seguida do número identificador, conforme a ordem alfabética, para diferenciá-los dos discentes que participaram do estudo anterior, que foram mencionados pela letra A, seguida dos respectivos números. Isto porque, como dito, os dois grupos foram formados por diferentes participantes.

No decorrer do texto, sempre que houver algum excerto de fala da professora pesquisadora, este será denotado por “P”. Os resultados estão organizados conforme a ordem dos oito encontros, sendo que o primeiro encontro é descrito e analisado no item 5.3.1, o segundo encontro no item 5.3.2 e assim sucessivamente, até o oitavo encontro, no item 5.3.8.

7.2.1 O primeiro encontro – 22/02/2019

Neste dia, inicialmente, 11 estudantes estavam presentes, seis chegaram, em algum momento, antes do intervalo, totalizando 17 estudantes, que permaneceram até os dois últimos

[35] Um estudante cancelou a disciplina após o início do semestre, sem justificar o motivo do seu cancelamento.
[36] “E” é usado para referir-se a estudante, sem alusão a gênero. Da mesma forma, o uso do “ele” não se refere somente a “E” masculino.

períodos, e quatro não compareceram (E13, E16, E18 e E20)[37]. O andamento dos dois primeiros períodos ocorreu de maneira expositiva, sob a forma de um monólogo descontraído, no qual fez-se a apresentação inicial, desejou-se boas-vindas a todos e discorreu-se sobre os aspectos gerais da disciplina, apesar do silêncio inicial por parte do grupo de discentes, o que julga-se comum, pois, na primeira semana de aula, é normal que eles se mostrem introvertidos por ainda não conhecerem os colegas, os professores, tampouco a instituição. Por conta disso, o ambiente da sala de aula pode, inclusive, tornar-se, inóspito.

E, justamente, na tentativa de minimizar esse cenário, explicitou-se a trajetória acadêmica e, de certa forma, pessoal, pois, conjecturou-se que, pelo fato de ter feito a graduação e o mestrado na mesma instituição que eles estavam iniciando sua trajetória acadêmica, isso poderia incentivá-los a iniciar um bate-papo.

Felizmente, essa atitude contribuiu para que a turma participasse, pois, alguns discentes ficaram curiosos em saber um pouco mais e, em momentos distintos, fizeram perguntas e comentários do tipo: *"então agora tu*[38] *é colega dos teus antigos professores?" (E12)*, *"nossa, que legal ter uma professora que faz doutorado, parabéns!" (E14)*, *"tu trabalha em algum outro lugar ou só aqui?" (E4)*, *"como é fazer um doutorado?" (E19)*, *"eu quero fazer mestrado depois que me formar, porque também quero dar aula na universidade" (E3)*. Isso contribuiu para que o grupo se conhecesse melhor e permitiu momentos muito agradáveis de descontração.

Como, até este momento, a turma ainda estava se ambientando e recebendo informações iniciais, todos os dados obtidos do primeiro encontro, foram anotados no diário de classe da pesquisadora. Somente no segundo encontro, após a aprovação de todos os estudantes, deu-se início às gravações de áudio.

Uma atitude, da experiência empírica em turmas do turno noturno deste curso, nesta instituição e, inclusive, corroborada no primeiro estudo, é a de chegar atrasado e/ou sair mais cedo. E, no primeiro encontro, assim como nos demais, isto também ocorreu, pois, conforme mencionado, seis estudantes chegaram atrasados, perdendo, infelizmente, um dos momentos mais importantes do primeiro dia de aula, que foi quando instituiu-se o contrato didático.

Esta ação foi permeada pela organização, conjunta, entre professora e estudantes, dos direitos e deveres de todos os integrantes do ambiente educativo, das datas de avaliações, foi feita a combinação de como as notas seriam constituídas/calculadas e sobre como proceder em

[37] Coletou-se os dados destes estudantes na sequência das aulas, conforme faziam-se presentes nos encontros.
[38] Eles se referiam à professora pesquisadora, de formas variadas: prof, professora, sora, Letícia, senhora, tu. Reitera-se que todos os excertos são apresentados, exatamente, como os estudantes pronunciaram, em linguagem coloquial.

determinadas situações, como por exemplo, caso um estudante precisasse faltar em dias de prova, entre outros aspectos relevantes no cotidiano da sala de aula.

Estas palavras a respeito do contrato didático, estão calcadas nas ideias de Pinto (2003), o qual discorre que o contrato didático é o fator determinante no processo de negociação entre professores e alunos e não, apenas, um recurso para resolver problemas pontuais que se apresentam no ambiente acadêmico.

Diante disso, também debateu-se com o grupo a respeito da atitude de chegar atrasado e/ou a de sair mais cedo. Destacou-se a importância de todos estarem presentes desde o início da aula e de sua assiduidade, mas que, é claro, respeitar-se-ia o fato de alguns estudantes trabalharem e necessitarem chegar atrasados, desde que fosse, realmente, uma necessidade. Isto porque, infelizmente, uma das atitudes evidenciadas, corriqueiramente na instituição, era que alguns estudantes chegavam no horário certo ao campus, mas permaneciam no pátio da universidade, conversando com outros colegas e direcionavam-se para a sala de aula mais tarde, ausentando-se de parte do primeiro período de aula.

Em seguida, explicou-se sobre as atividades da pesquisa, solicitou-se que assinassem o termo de consentimento e que completassem o questionário socioeconômico. Estas atividades ocorreram antes do intervalo e, no retorno, requisitou-se que preenchessem, com o máximo possível de informações, o teste diagnóstico. Devido ao fato de que quatro estudantes estavam ausentes neste dia, à medida que, nos próximos encontros eles se fizessem presentes pela primeira vez, solicitava-se, individualmente, que preenchessem os três documentos, fazia-se nova explicação das atividades e argumentava-se que sua participação seria espontânea.

Este processo se repetiu até a terceira semana de aula, pois, somente neste dia, todos os estudantes já haviam comparecido a, pelo menos, um dos encontros e, felizmente, todos concordaram em participar da pesquisa.

Poucos minutos antes do término deste encontro, questionou-os sobre a viabilidade de assistirem a pequenas videoaulas toda a semana, antes das aulas. Estes materiais, seriam postados no ambiente *Moodle* para que eles assistissem antes das aulas presenciais. Aparentemente, detectou-se que eles gostaram desta proposta, pois destacaram afirmações do tipo: *“esta ideia pra mim é nova e achei muito interessante, acho que será ótimo.” (E9)* e *“acho que esta ferramenta será útil pra sabermos o que esperar da próxima aula” (E11)*.

Esta ideia, teve como intuito que as videoaulas funcionassem como organizadores prévios, destacados por Ausubel (1963), como materiais que fazem um elo entre o que o estudante já sabe e o que precisa saber, além de preencher (possíveis) lacunas de aprendizagem. A pedido dos estudantes, o arquivo do teste diagnóstico também foi postado no ambiente

Moodle, eles demonstraram vontade de refazê-lo em casa, com mais tempo disponível e com materiais de apoio. Um deles, inclusive, solicitou o gabarito das questões.

7.2.1.1 Aspectos identificados no questionário socioeconômico

Inicialmente, expõe-se a análise dos itens que se considerou de maior relevância para o início do processo investigativo e, ao término deste tópico, apresenta-se um resumo que abrange os aspectos predominantes que foram observados no questionário, composto de 24 perguntas. No quesito idade, tal como no estudo 1, contemplou-se que a turma era composta, em sua maioria, por estudantes jovens, com menos de 30 anos, pois 15 deles se ajustavam a esta categoria. Explicita-se, este cenário, na Tabela 1 de frequências.

Tabela 1: idades dos estudantes.

IDADE	FREQUÊNCIA
18 ↦ 23	7
23 ↦ 28	8
28 ↦ 33	2
33 ↦ 38	1
38 ↦ 43	0
43 ↦ 48	2
48 ↦ 53	1
TOTAL	**21**

Fonte: dados da pesquisa.

Tratando-se de rede de ensino na qual finalizaram o ensino médio, um estudante concluiu seus estudos em escola privada, um por meio da educação de jovens e adultos (EJA ou supletivo[39]), dois realizaram a prova do ENEM e 17 finalizaram em escola pública. Ainda focalizando-se o término do ensino médio, detectou-se que 14 estudantes haviam concluído esta etapa há menos de 10 anos, pois o estudante que havia concluído o ensino médio há menos tempo, o fez em 2018. Ademais, sete estavam longe da sala de aula há 10 anos ou mais, pois, nenhum deles concluiu a etapa em 2009 ou em 2010, somente em 2008 ou antes. Os dados são apresentados na Tabela 2 de frequências, agrupados em classes.

Tabela 2: época na qual finalizaram o ensino médio.

[39] EJA (ou supletivo) é uma modalidade de ensino criada pelo Governo Federal que perpassa todos os níveis da educação básica do país, destinada aos jovens, adultos e idosos que não tiveram acesso à educação na escola convencional na idade apropriada. Permite que o aluno retome os estudos e os conclua em menos tempo (o ensino fundamental tem, em média, duração de dois anos e ensino médio tem, em média, duração de 18 meses).

ANO	FREQUÊNCIA
1985 ↦ 1990	1
1990 ↦ 1995	1
1995 ↦ 2000	1
2000 ↦ 2005	0
2005 ↦ 2010	4
2010 ↦ 2015	7
2015 ↦ 2020	7
TOTAL	**21**

Fonte: dados da pesquisa.

Conforme revelado, três estudantes (E6, E10 e E21) possuíam mais de 40 anos. Ao final da aula, um deles (E10), pediu para conversar em particular. Ele informou que havia finalizado o ensino médio há 30 anos, mas que em 2017, havia iniciado um curso técnico em contabilidade e que isso havia lhe despertado a vontade de retomar os estudos. Entretanto, desabafou que sentia muita dificuldade em Matemática, logo precisaria estudar muito, pois não lembrava dos conteúdos.

Em sua fala, ele pareceu resignado, como se estivesse admitindo que "não sabia Matemática". Imediatamente, sinalizou-se para ele que, todos que ali estavam, careciam aprender e que isso seria um processo lento, mas que ele poderia contar com o auxílio do grupo, pois as aulas seriam momentos para tirar as dúvidas, para errar e para aprender. Que o erro faria parte do processo, não significaria algo ruim. O estudante sorriu, agradeceu e se despediu.

Referindo-se ao gênero, a turma continha 13 mulheres e oito homens, ou seja, as mulheres compunham o maior grupo, conforme evidencia-se no gráfico da Figura 24, a seguir.

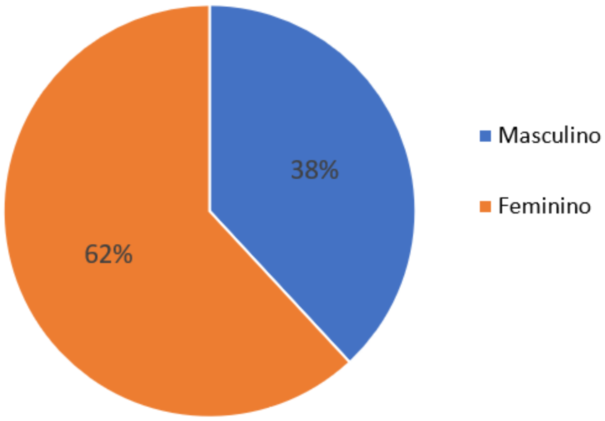


Figura 24: gênero dos estudantes.

Fonte: dados da pesquisa.

Complementa-se que, das 13 mulheres, nove apresentavam menos de 30 anos e quatro, mais de 30 anos. Além disso, dos oito homens, todos eram mais jovens, com menos de 30 anos.

Após verificar, no questionário, que dois estudantes da turma eram residentes em cidades vizinhas (E4 e E19), indagou-os sobre como eram realizados seus deslocamentos: um deles afirmou que utilizava transporte rodoviário intermunicipal para ir e voltar, diariamente, e o outro deslocava-se dirigindo ou de carona com amigos.

Somente seis estudantes não trabalhavam (E4, E5, E6, E8, E15 e E20), os outros 15 possuíam vínculo empregatício, 13 deles em turno integral, sendo que três trabalhavam em duas empresas diferentes (E9, E19 e E21). Isto ratificou o cenário no qual, em geral, configura-se nos cursos noturnos na instituição, pois é comum os estudantes trabalharem durante o dia para custearem seus estudos no terceiro turno.

Desse modo, evidenciou um aspecto muito importante, que precisou ser levado em consideração na implementação didática para não cometer os mesmos erros, pois detectou-se que o fator tempo de estudo era pequeno devido à carga horária de trabalho da maioria dos estudantes que integravam a turma alvo da aplicação no estudo 1.

Quando questionados sobre qual foi sua primeira opção de curso, somente dois afirmaram que detinham ampla certeza de que queriam cursar Administração (E5 e E21), os demais, ponderaram que consideraram outras profissões, mas que, em determinado momento de sua trajetória, escolheram o curso. A seguir, apresenta-se, na Figura 25, um diagrama com os motivos que os estudantes justificaram para a escolha do curso de Administração.

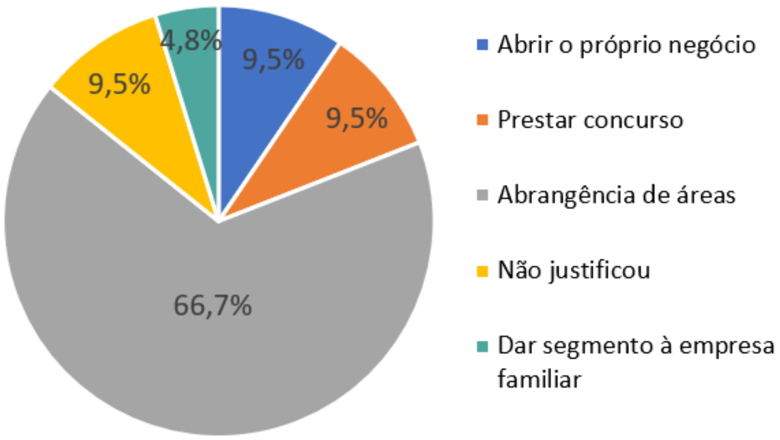


Figura 25: o motivo da escolha pelo curso de Administração, segundo os estudantes participantes.
Fonte: dados da pesquisa.

Seja em primeira ou em segunda opção, quatro motivos foram citados para justificar a escolha, pois, dois estudantes, denotaram que decidiram ser administradores para abrir o próprio negócio, um disse que sua família já possuía uma empresa e ele queria estar preparado para assumi-la, dois demonstraram o desejo de prestar concurso público, 15 afirmaram que acreditavam estar em uma graduação que contemplava diversas áreas de atuação e dois não justificaram o motivo da escolha.

Analisando-se o semestre no qual estavam cursando, seis afirmaram que aquele era, de fato, o seu primeiro semestre no curso de Administração (E2, E4, E5, E8, E9 e E11) e 15 apontaram que já haviam iniciado o curso anteriormente, porém adiaram a matrícula em Matemática I (E1, E3, E10, E16, E18 e E19) ou já haviam cursado a disciplina, reprovado e estavam cursando-a novamente (E6, E7, E12, E13, E14, E15, E17, E20 e E21). A Figura 26 expõe a distribuição dos estudantes conforme o número do semestre que estavam cursando.

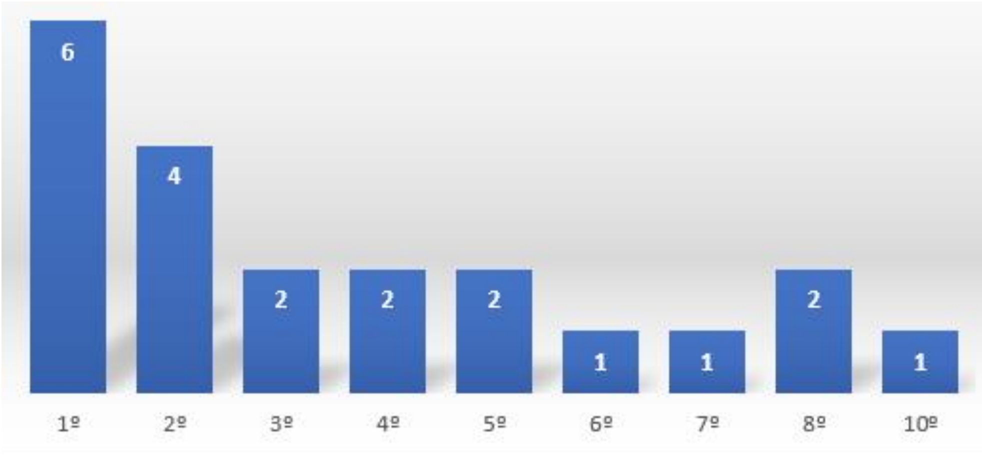


Figura 26: panorama do número do semestre que os estudantes estavam cursando.
Fonte: dados da pesquisa.

Pontua-se que a figura acima expõe, estritamente, o número do semestre no qual estavam cursando em fevereiro de 2019. Por exemplo, E13 é o estudante que está representado na última coluna e não haveria a possibilidade de ele estar matriculado no décimo semestre, pois, conforme exposto no item 4.2, o curso tem duração de oito semestres. Logo, significa que ele estava cursando o seu décimo semestre[40]. Verificou-se que, neste grupo, os estudantes ingressantes no 1º semestre não compunham a maior parte do todo.

Outra pergunta, direcionava-se à predisposição dos estudantes para cursar a disciplina de Matemática I, caso ela não fosse obrigatória no currículo. As respostas obtidas foram positivas para 13 estudantes e negativas para oito (E4, E6, E7, E8, E12, E16, E18 e E21).

Na continuação das análises, denotou-se que oito discentes afirmaram possuir facilidade frente aos conteúdos de Matemática e 13 afirmaram que sentiam dificuldades ou muita dificuldade. Destes, três apresentaram depoimentos em seus questionários, justificando o motivo de suas dificuldades: *"Tenho muito trauma por causa de professores que tive no*

[40] Por tratar-se de uma instituição privada, é comum que os estudantes demorem um tempo maior do que o estipulado para se formar, devido ao fato de não cursarem todas as disciplinas ofertadas no semestre ou, ainda, por reprovarem em alguma disciplina. Tudo isto, obviamente, atrasa o andamento do curso.

colégio" (E7), *"Tenho dificuldades porquê a professora que tive na 2ª série* do ensino *fundamental era muito severa, uma vez ela me fez ficar de castigo, sem recreio"* (E6) e *"minhas notas em Matemática na escola não eram boas, o que me levou a detestar a matéria por muito tempo"* (E8).

Um fato que se interpretou como pertinente para ser ressaltado é que, destes oito estudantes que mostraram predisposição negativa para cursar a disciplina (com exceção do E4 e do E8, que eram ingressantes no curso), os demais, já haviam cursado e reprovado ou estavam adiando a matrícula em Matemática I. Uniu-se estas informações aos registros escritos por E6, E7 e E8, e fez-se conjecturas a respeito da atitude destes estudantes em relação à Matemática.

Isto evidenciou que, provavelmente, todos estes estudantes carregavam sentimentos negativos oriundos de experiências anteriores malsucedidas diante da disciplina e estes dados corroboraram os resultados coletados nas investigações de Yenilmez, Girginer & Uzun (2007), Peñaloza Fuentes, Lima & Guerra (2009), Roncaglio & Nehring (2013), Laging & Voßkamp (2017) e Cumhur & Tezer (2019), logo isso era um aspecto delicado, que precisaria ser considerado.

Além disso, fez-se perguntas sobre a percepção dos estudantes quanto à importância da disciplina Matemática I no contexto do curso de Administração e no exercício de sua profissão. A maioria, 20 estudantes, destacou acreditar que ela seria (muito) importante, somente o E18 demonstrou acreditar que os conceitos trabalhados na disciplina raramente seriam utilizados ao exercer a profissão de administrador. Verificou-se que este estudante também foi um dos que responderam que não cursariam a disciplina Matemática I, caso ela não fosse obrigatória.

Os estudantes também foram questionados sobre quais as características que eles acreditavam que um bom professor deveria ter. Algumas das palavras descritas eram sinônimos e foram unificadas, por exemplo, a palavra "eloquente" foi mencionada quatro vezes e a expressão "ser um bom comunicador", três vezes, então optou-se por criar a categoria "comunicador" e explicitar a frequência sete. Os dados organizados, conforme sua frequência, estão no gráfico apresentado na Figura 27, a seguir.

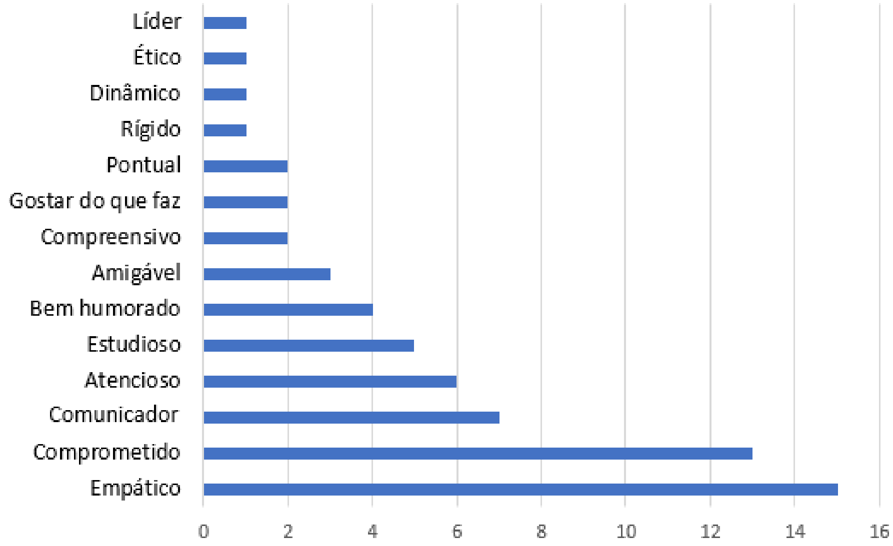


Figura 27: características que um bom professor precisa ter, conforme o grupo de estudantes.
Fonte: dados da pesquisa.

Os anseios dos estudantes a respeito das características que eles esperavam de um bom professor, se mostraram, em linhas gerais, semelhantes aos evidenciados em Roncaglio & Nehring (2013) e Cumhur & Tezer (2019).

Da mesma maneira, perguntou-se quais as características que eles consideravam que um bom estudante precisaria ter. Algumas palavras, também tinham seus sinônimos e foram unificadas, por exemplo, “disciplinado”, contabilizada três vezes e “organizado”, uma vez, então optou-se por manter a categoria “organizado” e explicitar a frequência quatro. Os dados obtidos, conforme sua frequência, estão apresentados na Figura 28.

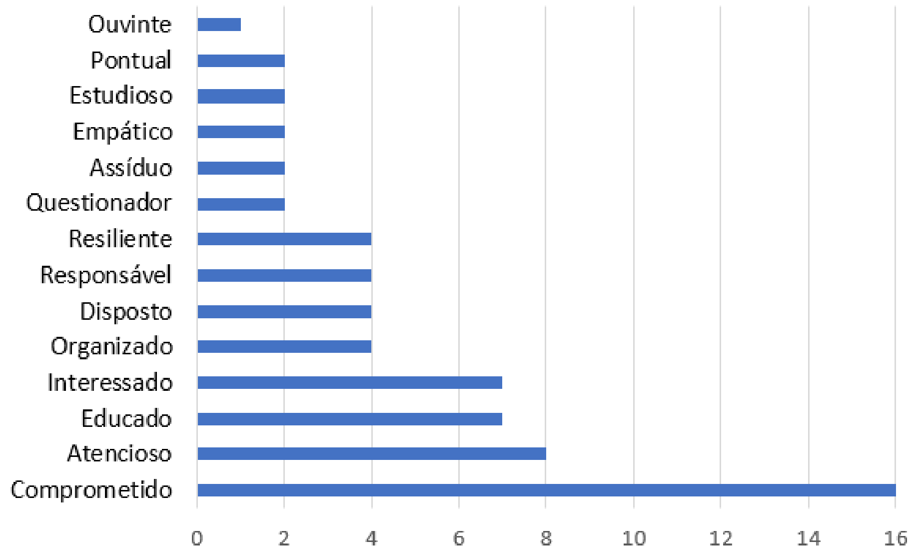


Figura 28: características que um bom estudante precisa ter, conforme o grupo de estudantes.
Fonte: dados da pesquisa.

A última pergunta, questionava como eles gostariam que ocorressem as aulas, quais eram suas expectativas e sugestões. Os dados são expostos na Figura 29, em formato de nuvem de palavras

Figura 29: como os estudantes gostariam que fossem as aulas de Matemática I.
Fonte: dados da pesquisa.

Na verdade, os estudantes construíram frases para responder a esta pergunta, entretanto, visando a despoluição da nuvem de palavras, considerou-se, apenas aquelas que indicavam o seu sentido, pois, caso contrário, preposições como "de" e palavras como "aulas", seriam contabilizadas, mas não agregariam na nuvem para expressar a vontade do grupo.

Desse modo, justifica-se a opção de expor suas ideias nesse formato, pois algumas das frases apresentadas eram muito parecidas como, por exemplo, *"com bastante explicação, porém gostaria de realizar vários exercícios"* (E20) e *"exercícios em aula, após a explicação"* (E14). Ao todo, 15 estudantes revelaram frases parecidas com estas. Disto, concluiu-se que gostariam de aulas expositivas, com bastante explicação do professor, seguidas de resolução de exercícios, então elencou-se as palavras: expositivas, explicação, professor, resolução e exercícios.

Além disso, quatro destacaram que esperavam, aulas com exercícios aplicados ao cotidiano de um administrador, como evidenciou-se neste trecho: *"aulas práticas, com exercícios relacionando a utilização da Matemática ao cotidiano das futuras profissões dos alunos"* (E11). Das quatro frases, elegeu-se as palavras: praticar, exercícios, cotidiano.

Prosseguiu-se de maneira análoga com as demais frases, no intuito de formar a nuvem de palavras e averiguou-se que a turma ambicionava por aulas centradas na explicação do professor, seguidas de resolução de listas de exercícios, voltados ao cotidiano da futura profissão, sempre contando com o apoio do professor para que pudessem sanar suas dúvidas. Além disso, ressaltaram que esperavam aulas leves, dinâmicas e descontraídas para amenizar o peso da matéria e não ficarem sobrecarregados por terem uma disciplina composta de quatro períodos nas sextas-feiras à noite.

De posse de todas essas informações e de outras que não foram expostas com o intuito de não tornar as análises do questionário socioeconômico, demasiadamente, exaustivas, pois o documento continha 24 questões, foi possível discernir que a turma de Matemática I, do primeiro semestre de 2019, do curso de Administração noturno da Universidade Franciscana, apresentava as seguintes características predominantes:

- mulheres, com menos de 30 anos de idade, solteiras, sem filhos;
- residiam em Santa Maria;
- concluíram o ensino médio na rede pública de ensino há menos de 10 anos;
- trabalhavam em turno integral;
- gostavam de assistir filmes e séries, sair para dançar e frequentar academias;
- não escolheram Administração como primeira opção de curso;
- acreditavam estar em um curso que abrangia diversas áreas de atuação;
- não estavam cursando o seu primeiro semestre;
- estavam cursando a primeira graduação;
- utilizavam recursos financeiros próprios e auxílio da família para pagar a mensalidade da faculdade;
- gostavam de Matemática por sua aplicabilidade no cotidiano;
- cursariam a disciplina mesmo que ela não fosse obrigatória no curso;
- consideravam que tinham dificuldades para aprender Matemática;
- confiavam que os conceitos trabalhados na disciplina seriam utilizados ao longo do curso e no exercício de sua profissão;
- admitiam que estudavam somente aos finais de semana e nas vésperas das provas;
- preferiam estudar Matemática com a ajuda dos colegas e do professor do que sozinhos;
- gostariam de ter um professor atencioso, empático e comprometido;
- concebiam que um bom estudante deveria ser interessado, atencioso e comprometido;
- esperavam que as aulas de Matemática fossem centradas em explicações claras e expositivas do professor. Além disso, que o docente realizasse explicações de exercícios aplicados à sua área e os ajudasse nas tarefas.

Conforme enunciado, estas foram as características proeminentes do grupo de 21 estudantes que iniciaram o primeiro semestre letivo de 2019 e participaram da implementação didática das atividades da referida pesquisa. Entretanto, acredita-se ser de primordial importância levantar os dados que caracterizam o grupo, como um todo, a fim de traçar o perfil geral da turma, mas, ao longo das aulas, trabalhar com as individualidades de cada discente, levando em conta, as minúcias que o complexo processo de aprendizagem que o ser humano exige, principalmente, no contexto de um trabalho de natureza qualitativa.

Defende-se esta postura, pois, em consonância com os aspectos evidenciados, o grupo era composto, de certa forma, por características heterogêneas, ou seja, continha estudantes com menos de 20 anos, recém-formados no ensino médio, que não tinham filhos, não trabalhavam, dispunham de tempo para estudar, afirmavam ter gosto pelos números e facilidade diante da disciplina de Matemática.

Contudo, também abarcava estudantes com mais de 40 anos, que haviam finalizado o ensino médio há mais de 10, 20 ou 30 anos, tinham filhos, trabalhavam (consequentemente, tinham pouco tempo para dispor aos estudos) e ratificavam ter medo, insegurança e dificuldades diante da disciplina.

Apropriadamente, esta riqueza de características, permitiu que este grupo, aparentemente, heterogêneo, pudesse construir sua caminhada ajudando-se mutuamente, conforme as especificidades e facilidades de cada indivíduo nas diversas atividades colaborativas. Atreveu-se a supor que, talvez, justamente em detrimento desta divergência de experiências, tenha sido possível que o processo de aprendizagem possa ter se tornado mais rico e fértil, por meio da interação social e com auxílio da mediação docente.

7.2.1.2 Aspectos evidenciados no teste diagnóstico do estudo 2

Momentos antes de aplicar o teste diagnóstico, quando explicava-se o seu objetivo, percebeu-se certa hesitação no grupo, pois alguns demonstraram-se descontentes. Inclusive, um deles indagou: *“mas professora, já tem prova no primeiro dia de aula? A gente não tá preparado pra isso!” (E3)*. E outro complementou: *“vale nota professora?” (E17)*.

Diante disso, detalhou-se a importância de verificar qual o nível de conhecimentos anteriores que a turma possuía, justamente, para direcionar o trabalho voltado às necessidades específicas do grupo, pois, provavelmente, todos que ali estavam, desejavam aprender e, para isto, seria necessário verificar os conhecimentos que eles já possuíam e, principalmente, quais deveriam ser retomados.

Além disso, a atividade seria anônima, não precisariam se identificar, caso assim preferissem e não valeria nota, apenas serviria para conhecê-los melhor. De fato, a maioria dos estudantes optou por não se identificar, o que ocasionou um contratempo e só foi possível por meio da comparação de sua caligrafia ao longo do semestre.

Dessa forma, deu-se início a aplicação do teste diagnóstico, que foi a última atividade do primeiro encontro e objetivou investigar quais os conhecimentos prévios ou possíveis indícios de invariantes operatórios relevantes que os estudantes tinham em sua estrutura cognitiva, referentes aos conceitos de equações e gráficos.

O documento continha sete questões, que foram organizadas conforme as categorias nas quais se enquadravam. Tais categorias já foram apresentadas no Quadro 6 do Capítulo 4, item 4.4.2 e, no Quadro 12, são explicitadas as capacidades (conhecimentos procedimentais) que cada questão exigia, juntamente com o desempenho do grupo em cada uma destas questões.

Quadro 12: resultados obtidos na análise das produções dos estudantes no teste diagnóstico do estudo 2.

QUESTÃO	**CAPACIDADES NECESSÁRIAS**	**RESULTADO**	
1	Utilizar letras como incógnitas Resolver equações Calcular porcentagens	2 conseguiram (10%)	19 não conseguiram (90%)
2	Resolver equações Reconhecer números naturais consecutivos	11 conseguiram (52%)	10 não conseguiram (48%)
3 – a	Resolver equações Utilizar a propriedade distributiva da multiplicação	11 conseguiram (52%)	10 não conseguiram (48%)
3 – b	Resolver equações Realizar operações aritméticas com frações (calcular o mínimo múltiplo comum – m.m.c.) Transformar frações em números decimais	4 conseguiram (19%)	17 não conseguiram (81%)
4	Resolver equações Calcular perímetro de figuras	5 conseguiram (24%)	16 não conseguiram (76%)
5	Resolver equações Resolver um sistema de equações Reconhecer a equação da reta	1 conseguiu (5%)	20 não conseguiram (95%)
6	Resolver equações Resolver um sistema de equações Reconhecer a equação da reta Entender o significado dos coeficientes angular e linear Construir gráficos no plano cartesiano	1 conseguiu (5%)	20 não conseguiram (95%)
7 – a	Utilizar letras como incógnitas	5 conseguiram (24%)	16 não conseguiram (76%)
7 – b	Realizar operações aritméticas com números naturais	2 conseguiram (10%)	19 não conseguiram (90%)
7 – c	Reconhecer a equação da reta Entender o significado dos coeficientes angular e linear Construir gráficos no plano cartesiano	2 conseguiram (10%)	19 não conseguiram (90%)

Fonte: dados da pesquisa.

Da mesma forma como ocorreu no primeiro estudo, estas sete questões não estavam direcionadas, exclusivamente, à área administrativa, ou seja, não requisitavam que o estudante apresentasse conhecimentos anteriores referentes ao cálculo do lucro, custo ou receita, apesar de estes serem conceitos possivelmente discutidos no ensino médio, Na primeira aula, julgou-se interessante abordar situações variadas, sem dar ênfase a nomenclaturas específicas, pois isso seria priorizado ao longo das atividades, não era um pré-requisito para o estudo das equações.

De antemão, expõe-se, no Quadro 13, o desempenho individual dos estudantes em cada uma das sete questões propostas no teste diagnóstico. Propõe-se esta visão geral, porque seria exaustivo analisar todas elas nesta discussão, pois isso totalizaria 147 análises (sete questões de 21 estudantes).

Quadro 13: desempenho individual dos estudantes nas sete questões do teste diagnóstico do estudo 2.

	1	2	3		4	5	6	7		
			a	b				a	b	c
E1		X						X		
E2		X								
E3		X	X							
E4		X								
E5		X		X				X	X	X
E6		X								
E7			X							
E8	X	X	X							
E9		X	X		X				X	X
E10			X	X						
E11		X	X		X	X	X			
E12	X		X							
E13										
E14								X		
E15										
E16		X	X					X		
E17			X	X						
E18			X		X			X		
E19			X		X					
E20		X		X	X					
E21										

Fonte: dados da pesquisa.

Neste quadro, as células que estão assinaladas com um “X”, indicam que o estudante acertou o respectivo item/questão. Admite-se que, para fins de correção, contabilizou-se como acertos, itens que foram desenvolvidos e concluídos com êxito, entretanto, havia questões que estavam corretas, até certo ponto, mas que não foram finalizadas ou ocorreram erros em meio ao seu desenvolvimento, estas foram consideradas incorretas no quadro recém exposto.

Contudo, para que a investigação dos conhecimentos prévios dos participantes não ficasse comprometida, pois defende-se que, existem acertos parciais e raciocínios corretos, mesmo em meio a resoluções incorretas ou inacabadas, analisou-se as questões, de maneira qualitativa, ou seja, considerou-se os possíveis indícios de invariantes operatórios que foram explicitados, mesmo que a questão não estivesse inteiramente correta, de tal forma que, ao final deste tópico, apresenta-se um panorama da turma referente ao nível no qual os estudantes se encontravam, diante das sete categorias elencadas para análise dos subsunçores.

Acredita-se que isso pode minimizar o cenário de uma análise baseada, apenas, em resultados, pois é comum que os estudantes apresentem equívocos de resolução e de pensamento no desenvolvimento das atividades e isso não pode anular toda a parte correta do seu raciocínio, diante do enfrentamento de uma determinada situação.

A seguir apresenta-se a análise da primeira questão do teste diagnóstico.

- ***Questão 1** – O somatório dos salários de um casal totaliza R$ 3762,00 por mês. Se a mulher ganha 20% a mais que o marido, qual é o salário de cada um?*

Para obter êxito nesta questão, seria necessário disporem de subsunçores nas categorias 1, 2 e 6. De antemão, ela exigia que o problema explicitado em linguagem natural fosse escrito em linguagem algébrica, contudo, conforme Vergnaud (2016), não há algoritmo para transformar, em equação, problemas formulados em linguagem natural e, para isso, os alunos precisam recorrer aos seus esquemas pessoais.

Verificou-se que 19 estudantes não concluíram a atividade e, somente, dois resolveram-na, corretamente. Oito estudantes procederam de maneira muito parecida. Eles dividiram a quantia de 3.762 por dois, obtendo 1.881. Em seguida, calcularam 20% de 1.881, o que resultou em 376,20. Logo, acrescentaram este valor ao 1.881 e obtiveram 2.257,20. A este valor, chamaram de salário da mulher. Então, diminuíram esta quantia do valor total, obtendo 1.504,80, quantia esta que chamaram de salário do homem. Escolheu-se o registro do E18 como representante do grupo que resolveu o problema dessa forma (Figura 30).

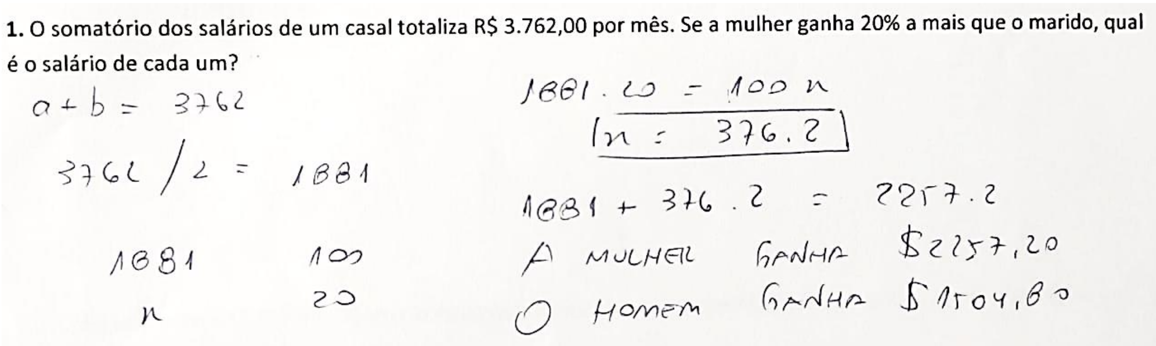
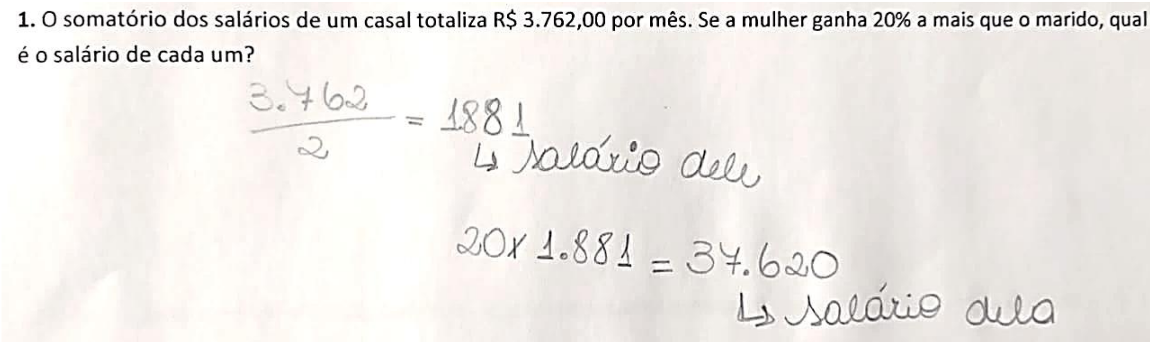


Figura 30: atividade 1 do teste diagnóstico do estudo 2, por E18.

Fonte: dados da pesquisa.

Ou seja, este grupo apresentou alguns subsunçores referentes ao cálculo de porcentagens e de resolução de equações, inclusive utilizaram letras como incógnitas, pois, no exemplo, observa-se a expressão $a + b = 3762$, mas não conseguiram escrever uma equação obedecendo ao enunciado. Provavelmente, tenha ocorrido algum erro de interpretação e essa possível incompreensão os limitou. Isto denotou que, para este grupo, poderia haver carências na categoria 6 (passagem da linguagem natural para a representação algébrica).

Outros nove estudantes, dividiram a quantia 3.762 por dois e obtiveram o resultado correto, porém, na sequência, realizaram operações aparentemente, aleatórias, apenas utilizando os números do enunciado ou não souberam como calcular a porcentagem, que é o caso do E15, que multiplicou 20 por 1.881 e obteve 37.620, que é uma quantia maior do que o valor inicial e, portanto, não faria sentido como resposta, contudo ele não demonstrou essa percepção, conforme verifica-se na Figura 31.



1. O somatório dos salários de um casal totaliza R$ 3.762,00 por mês. Se a mulher ganha 20% a mais que o marido, qual é o salário de cada um?

$\frac{3.762}{2} = 1881$
↳ salário dele

$20 \times 1.881 = 37.620$
↳ salário dela

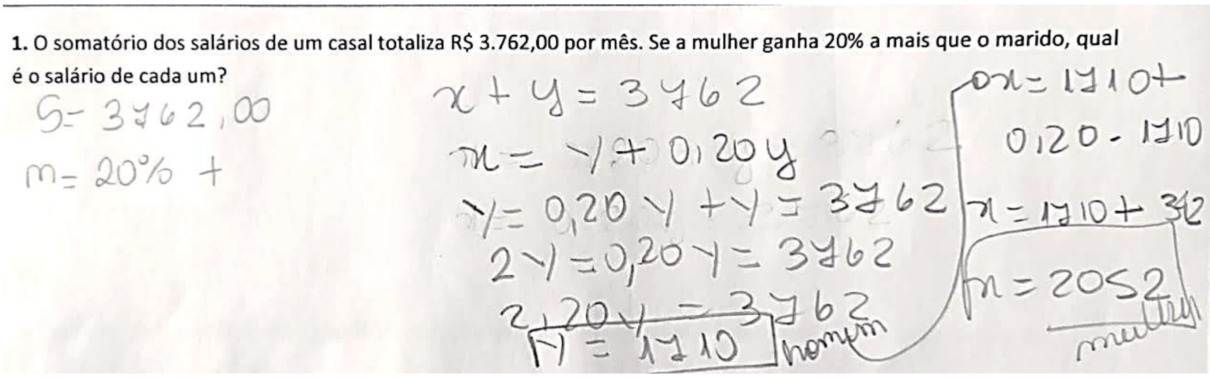
Figura 31: atividade 1 do teste diagnóstico do estudo 2, por E15.
Fonte: dados da pesquisa.

Supostamente, E15 não dispôs de subsunçores em nenhuma das três categorias. Além disso, aparentemente, não optou por artifícios do cálculo de uma regra de três.

De qualquer forma, seu raciocínio foi semelhante ao primeiro grupo analisado (de oito estudantes), entretanto optou-se por expor seu registro para comentar sobre a importância de iniciar um trabalho por meio da verificação dos conhecimentos prévios dos discentes, pois, caso este estudante fosse julgado pelo seu perfil, (tinha 20 anos e havia terminado o ensino médio em 2015), poder-se-ia dizer que ele estava há pouco tempo longe da sala de aula e que, provavelmente, não teria dificuldades para calcular uma porcentagem.

No entanto, verificou-se que o fato de o estudante ter finalizado o ensino médio há pouco tempo, não garantiu a eficácia de que ele tenha aprendido significativamente tal conceito. Dessa forma, encontra-se amparo nas palavras de Ausubel, Novak & Hanesian (1978), os quais sustentam que é imprescindível verificar quais conceitos que os estudantes trazem em sua bagagem para, então, ensiná-los de acordo. Afinal, de que adianta apresentar conteúdos avançados, do ensino superior, se conceitos básicos, do ensino fundamental, ainda não foram compreendidos? Compara-se esta atitude à de iniciar a construção de um imóvel pelo telhado, sem ter uma boa fundação no solo. Se assim for, toda a construção do imóvel poderá ser comprometida e, inclusive, ruir.

Ainda referindo-se à resolução da primeira questão, também houve quem a deixasse em branco, isto ocorreu em dois casos (E3 e E5), que não apresentaram nenhum esboço de tentativa de resolução. Contudo, dois estudantes (E8 e E12), conseguiram expressar letras como incógnitas, resolveram a equação produzida e descobriram os salários do casal, apenas com uma ressalva: o E8, demonstrou indícios de não compreensão do símbolo da igualdade na equação, pois seu registro foi permeado por equívocos, conforme exposto na Figura 32.


1. O somatório dos salários de um casal totaliza R$ 3.762,00 por mês. Se a mulher ganha 20% a mais que o marido, qual é o salário de cada um?

S= 3762,00
m= 20% +

$x + y = 3762$
$x = y + 0{,}20y$
$y = 0{,}20y + y = 3762$
$2y = 0{,}20y = 3762$
$2{,}20y = 3762$
$\boxed{y = 1710}$ homem

$x = 1710 +$
$0{,}20 \cdot 1710$
$x = 1710 + 342$
$\boxed{x = 2052}$ mulher

Figura 32: atividade 1 do teste diagnóstico do estudo 2, por E8.

Fonte: dados da pesquisa.

Ele apresentou indícios de dificuldades na compreensão do significado do símbolo de igualdade na equação e isto remete à categoria 2 investigada (verificar se a ideia de equivalência era um conceito subsunçor).

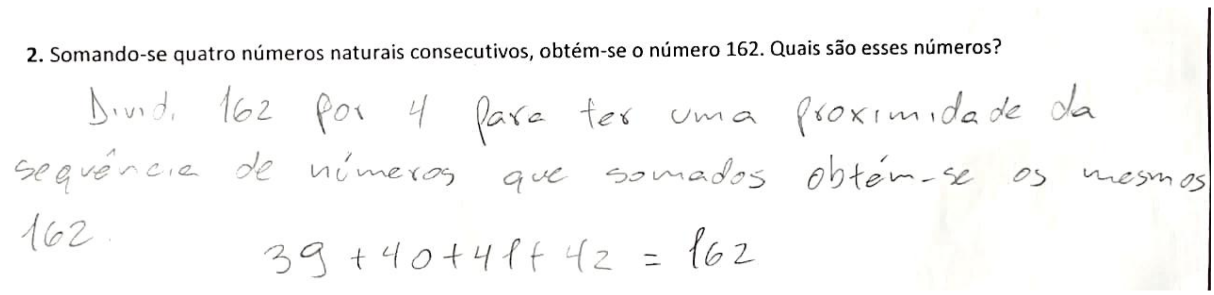
De acordo com os dados analisados, pode-se concluir que, na primeira questão, 19 estudantes apresentaram deficiências nas categorias 1, 2 e 6. Além disso, somente dois estudantes obtiveram êxito na resolução, com o adendo de que o E8 foi contabilizado neste grupo, entretanto também apresentou sinais de lacunas na categoria 2.

A verificação da segunda questão do teste diagnóstico:

- ***Questão 2** – Somando-se quatro números naturais consecutivos, obtém-se o número 162. Quais são estes números?*

Esta questão, juntamente com a próxima, apresentou o número máximo de acertos (11), mas isto não quer dizer que todos estes 11 estudantes tenham utilizado as três categorias que foram elencadas para análise (1, 2 e 6).

Isto porque a segunda questão, poderia ser resolvida tranquilamente por tentativa e erro, sem, necessariamente, estar atrelada a conceitos do campo algébrico. De fato, foi o que ocorreu, pois oito estudantes apresentaram a resolução por raciocínio lógico e utilizaram conceitos do campo aritmético, conforme evidencia-se na Figura 33, o registro do E5.


2. Somando-se quatro números naturais consecutivos, obtém-se o número 162. Quais são esses números?

Dividi 162 por 4 para ter uma proximidade da sequência de números que somados obtém-se os mesmos 162.

$39 + 40 + 41 + 42 = 162$

Figura 33: atividade 2 do teste diagnóstico do estudo 2, por do E5.
Fonte: dados da pesquisa.

Conforme sua explicação, pode-se verificar que ele não transitou do registro escrito para o registro algébrico e, portanto, não utilizou letras como incógnitas. Contudo, assim como outros sete colegas, conseguiu elaborar uma estratégia de resolução e, por este motivo, contabilizou-se este tipo de resolução como um acerto.

Na verdade, somente três estudantes conseguiram apresentar a resolução da segunda questão, fazendo uso das três categorias de análise (1, 2 e 6), são eles E8, E9 e E20. Eles transitaram do registro escrito para o algébrico (6), utilizaram letras como incógnitas (1) e resolveram, corretamente, a equação, demonstrando entender o significado de equivalência (2). Elegeu-se o registro do E20, mostrado na Figura 34, para representar este grupo.

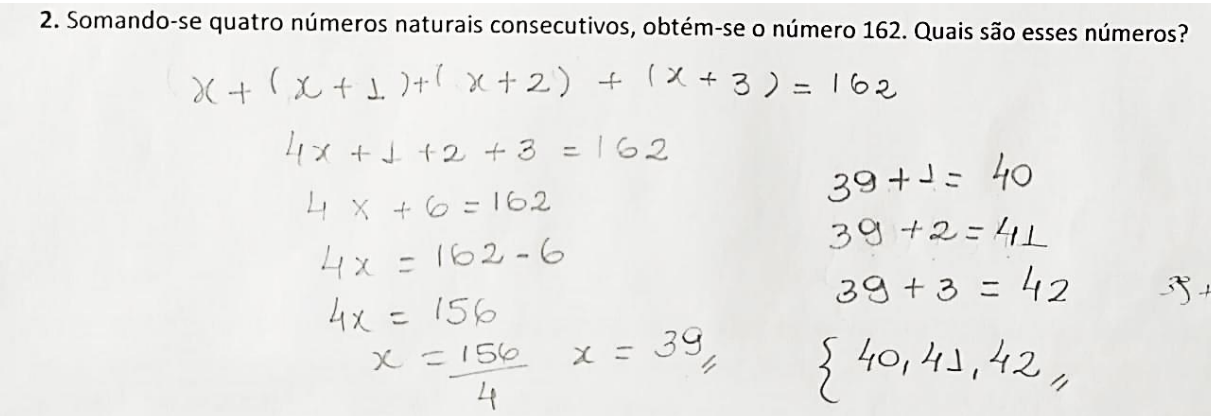


Figura 34: atividade 2 do teste diagnóstico do estudo 2, por E20.
Fonte: dados da pesquisa.

Curiosamente, cada um deles apresentou equações diferentes e isto evidencia o quão particular é o processo de aprendizagem. O E8, por exemplo, explicitou $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 162$ e encontrou o resultado $x = 38$, mas percebeu que deveria somar uma unidade para obter o primeiro número da sequência.

O discente E9, por sua vez, optou por denotar a equação $162 = a + b + c + d$, mas, na sequência, substituiu a expressão por $162 = a + a + 1 + a + 2 + a + 3$ e, como resposta, obteve 39, que é o primeiro número da sequência.

Além disso, sete estudantes deixaram a questão, totalmente, em branco e três somaram quantidades aleatórias, que resultavam em 162, por exemplo, o E14 apresentou a expressão numérica $100 + 50 + 10 + 2 = 162$, o que denota que, a princípio, ele, juntamente com o restante do grupo, desconhecia ou não interpretou o significado de números naturais consecutivos.

Desse modo, considera-se que, na segunda questão, 10 estudantes apresentaram deficiências nas categorias 1, 2 e 6. Além disso, dos 11 que descobriram a resposta da questão, oito, supostamente, não dispunham de subsunçores suficientes para utilizar o registro algébrico ou não interpretaram, corretamente, o problema. Somente três contemplaram as três categorias em suas resoluções.

A análise da terceira questão do teste diagnóstico:

- ***Questão 3** – Resolva as equações a seguir:*

a) $3(x+2) = 5x - 12$ ***b)*** $\frac{2x}{4} + 9 = \frac{4x}{4} - 18$

Como pode-se verificar, a terceira questão continha dois itens, que exigiam, apenas, procedimentos algorítmicos em sua resolução, sem necessidade de interpretações na resposta, contrastando com as duas primeiras questões do teste diagnóstico. Gérard Vergnaud, defendeu sua tese de doutoramento no ano de 1968 e, em sua pesquisa, pontuou, justamente, o cenário "automatizado" dos algoritmos, que permite certa economia cognitiva diante de sua resolução e, concomitantemente, exige o domínio de seus conceitos, dentro de uma gama de casos.

Além disso, Vergnaud (2017), pontua que os algoritmos de resolução de uma equação, contém várias operações elementares da aritmética. Reitera-se, portanto, o intuito de contemplar diferentes esquemas de resolução e descobrir se havia subsunçores disponíveis, diante do confrontamento com diferentes classes de situações.

No primeiro item, obteve-se 11 acertos e 10 erros. Analisando-os, denotou-se que um estudante deixou a resolução em branco (E2) e nove apresentaram o desenvolvimento de seu raciocínio. Basicamente, dois tipos de erros foram cometidos. Um deles foi explicitado em três casos (E4, E13 e E15). Todos eles apresentaram equívocos para agrupar os termos semelhantes, e dois deles (E4 e E13), não conseguiram realizar a operação distributiva da multiplicação. Na Figura 35 elencou-se o registro do E13 para representar este grupo.

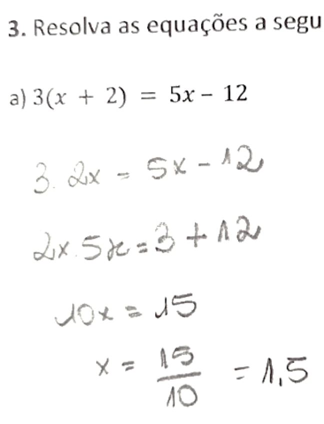


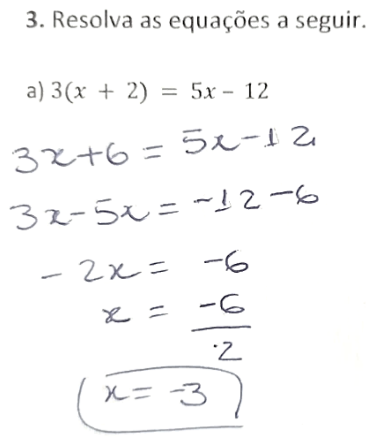
Figura 35: atividade 3 – a do teste diagnóstico do estudo 2, por E13.

Fonte: dados da pesquisa.

Aparentemente, ele desprezou a operação de soma dentro dos parênteses, de tal forma que, $(x + 2)$ resultou em $2x$. Além disso, apresentou equívocos na resolução da equação, pois a operação de multiplicação entre o 3 e o $2x$, foi ignorada da primeira para a segunda linha de resolução. Também não houve indícios de entendimento no cálculo da multiplicação de potências de mesma base, pois denotou $2x.5x = 10x$.

Aproveita-se para dissertar que este tipo de equívoco cometido por E13, é frequente nas aulas de Matemática. Evidentemente, que se faz esta afirmação empiricamente, das experiências anteriores, pois esta turma estava recém iniciando, seus esquemas de resolução e suas dificuldades ainda não eram conhecidos, contudo já obtinha-se pistas de que, novamente, este seria um dos prováveis invariantes operatórios, que precisariam ser investigados e, possivelmente, externalizados, enfrentados e remodelados.

Os outros seis estudantes apresentaram deslizes nas operações com números inteiros. Acredita-se que, possivelmente, confundiram as regras de sinais da multiplicação e da divisão, com a operação entre números inteiros, conforme pode-se constatar no registro do E21, na Figura 36.


3. Resolva as equações a seguir.

a) $3(x + 2) = 5x - 12$

$3x + 6 = 5x - 12$

$3x - 5x = -12 - 6$

$-2x = -6$

$x = \frac{-6}{\cdot 2}$

$x = -3$

Figura 36: atividade 3 – a do teste diagnóstico do estudo 2, por E21.
Fonte: dados da pesquisa.

No item b), evidenciaram-se quatro acertos e 17 erros. Esta expressão apresentava duas frações e, verificou-se que, provavelmente, este não é um conceito que os estudantes dominavam, pois dois deixaram a resolução em branco (E2 e E8) e 15 apresentaram erros no cálculo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e na passagem da representação fracionária para a representação decimal, conforme detecta-se no registro do E1, na Figura 37.

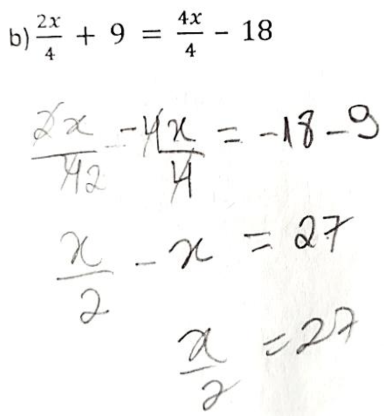


Figura 37: atividade 3 – b do teste diagnóstico do estudo 2, por E1.
Fonte: dados da pesquisa.

Elucidou-se que, a princípio, E1, apresentou dificuldades no entendimento de frações. Ele realizou as simplificações corretamente, entretanto, não as transformou em números decimais, nem realizou o cálculo do m.m.c., apenas resolveu de maneira errônea. Além disso, desprezou o sinal negativo das operações.

Desse modo, após a análise dos dois itens da terceira questão, descobriu-se que, no primeiro item, 10 estudantes apresentaram equívocos na resolução e, no segundo, a quantidade subiu para 17. Como os dois itens cercavam as categorias 1 e 2, optou-se por apresentar os dados, conjuntamente, por meio de um diagrama (Figura 38), que contempla os acertos da turma conforme os dois itens.

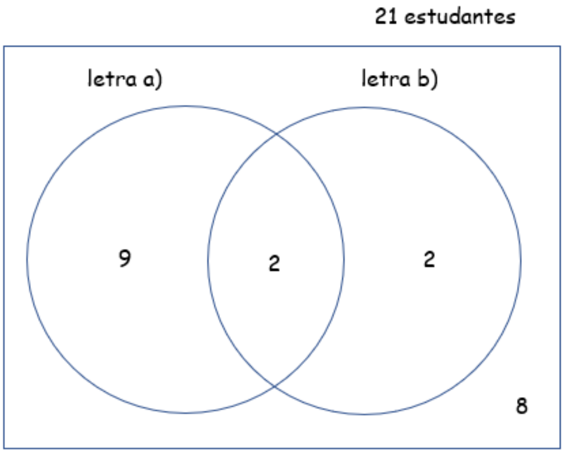
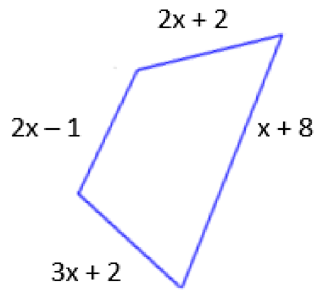


Figura 38: número de acertos da turma nos dois itens da terceira questão do teste diagnóstico do estudo 2.
Fonte: dados da pesquisa.

Conforme detalha-se no diagrama, nove estudantes acertaram, somente, o primeiro item, dois acertaram, somente, o segundo item, dois acertaram os dois e oito não acertaram nenhum deles. Ademais, 19 estudantes erraram, pelo menos um dos dois itens e isto mostra que eles possuíam lacunas na percepção de letras como incógnitas (categoria 1) e na compreensão da ideia de equivalência (categoria 2), além das demais capacidades exigidas nas resoluções, como realizar a operação distributiva, operar com frações e agrupar termos semelhantes.

A análise da quarta questão do teste diagnóstico:

- ***Questão 4*** *– Sabendo que o perímetro do quadrilátero abaixo é 27 cm, determine a medida dos lados desse quadrilátero.*



Nesta questão, cinco estudantes obtiveram êxito. Eles encontraram o resultado e verificaram se ele satisfazia a condição inicial, substituindo-o em cada uma das expressões dos lados do quadrilátero. Outros 16, não conseguiram resolvê-la e foram separados em dois grupos: um com nove, que, sequer, tentaram resolver a questão, pois deixaram-na em branco, e outro contendo sete integrantes, que tentaram, mas não conseguiram desvendar a situação.

Um, dos sete integrantes, que se empenhou nesta resolução foi o E4, que apresentou pistas de resolução em cada uma das expressões que denotavam os lados da figura. Aparentemente, ele somou os coeficientes dos binômios e, copiou a parte literal que, apenas, um dos termos continha. Neste caso, supõe-se que o estudante, possivelmente, dispunha de um conceito-em-ação para resolver equações de tal maneira que adicionava os coeficientes, não importando que suas partes literais fossem diferentes. Além disso, neste caso, desprezou a informação referente ao perímetro ser 27 centímetros, conforme evidencia-se em seu registro na Figura 39.

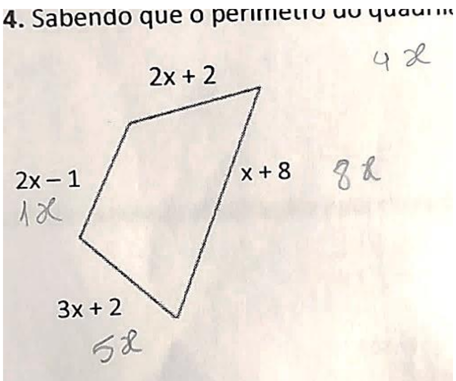


Figura 39: atividade 4 do teste diagnóstico do estudo 2, por E4.

Fonte: dados da pesquisa.

Ainda neste grupo, um integrante (E16), igualou cada um dos binômios ao resultado do perímetro e outro estudante, (E8), substituiu por 27 todas as vezes que aparecia a incógnita “x”. Estas atitudes reforçam uma constatação, comumente, verificada na prática da sala de aula. Alguns estudantes, agrupam os coeficientes e copiam sua parte literal ou realizam operações aleatórias com os números fornecidos no enunciado, sem considerar o contexto do problema.

Também houve quem demonstrasse entender o conceito de perímetro, mas não conseguisse resolver a equação com êxito. Foi o caso do E14, que transitou do registro escrito para o registro algébrico, mas demonstrou dificuldades diante de alguns passos na resolução e isso comprometeu o seu sucesso para desvendar a situação.

Verificou-se, em seus escritos, que os números apresentados na segunda linha, do lado direito da igualdade, parecem ter sido gerados por meio da operação inversa aos apresentados do lado esquerdo da igualdade. Ele demonstrava indícios de que estava procedendo corretamente até então, aparentemente tudo ia bem, no entanto ele parece ter esquecido de escrever o valor do perímetro na segunda linha de resolução. Apresenta-se na Figura 40, o seu registro para verificação.

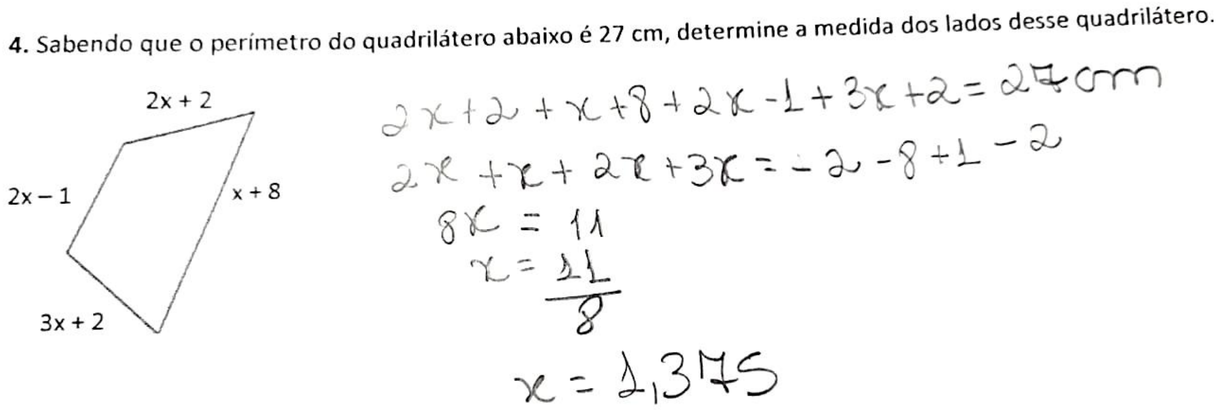


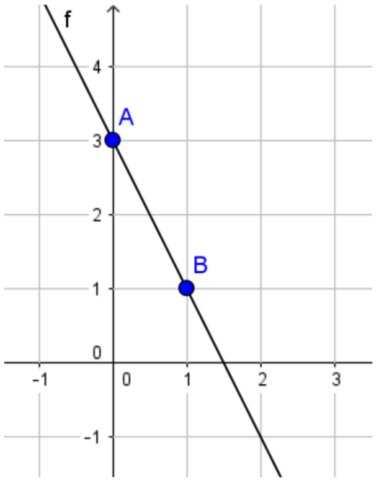
Figura 40: atividade 4 do teste diagnóstico do estudo 2, por E14.
Fonte: dados da pesquisa.

Além disso, se considerarmos a sequência de resolução, na terceira linha, ele apresentou o valor 11, do lado direito da igualdade, ou seja, cometeu um erro de sinal, supostamente, ocasionado pela ausência de subsunçores estabilizados diante das operações aritméticas.

Após analisar todas as informações explicitadas pelo grupo na quarta questão, inferiu-se que cinco estudantes revelaram indicadores de subsunçores disponíveis nas três categorias analisadas, pois transitaram do texto escrito para a representação algébrica (6), demonstraram entender a ideia de equivalência (2) e utilizaram, corretamente, letras como incógnitas (1). Complementando-se, 16 exprimiram carências nestas categorias.

A análise da quinta questão do teste diagnóstico:

- ***Questão 5*** *– De acordo com o gráfico abaixo, qual é a equação que a reta representa?*



Nesta questão, que incluía as categorias 3, 5 e 7, somente, um estudante demonstrou apoderar-se de todos os conhecimentos necessários para desvendá-la (E11). Do grupo de 20 estudantes que não conseguiu resolvê-la, visualizou-se que sete deixaram-na sem rabisco algum e 13 fizeram algum tipo de tentativa.

Neste grupo de 13 integrantes que denotaram algum escrito, cinco explicitaram a equação da reta, mas não conseguiram proceder com a resolução. Detalha-se na Figura 41 a tentativa do E6 para representar este grupo.

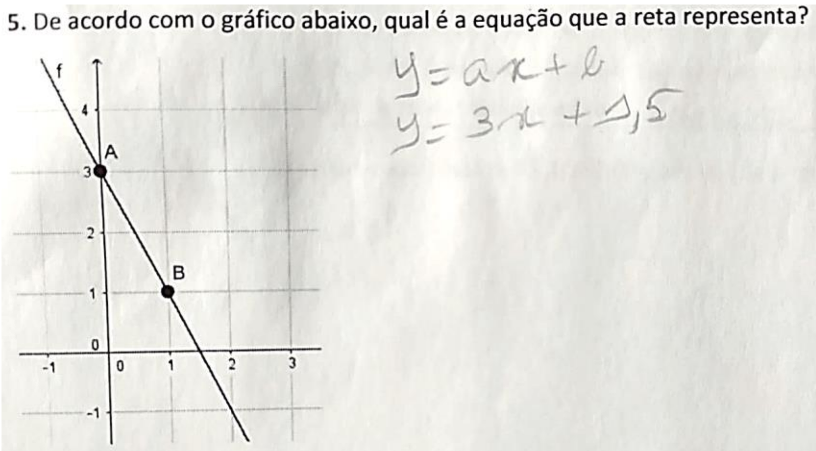


Figura 41: atividade 5 do teste diagnóstico do estudo 2, por E6.

Fonte: dados da pesquisa.

Supõe-se que ele tenha relacionado os dois coeficientes da equação da reta, com os dois pontos de intersecção com os eixos, pois denotou o coeficiente "a" como 3 (ponto de intersecção com o eixo y) e o coeficiente "b" como 1,5 (ponto de intersecção com o eixo x).

Os outros oito estudantes, demonstraram indícios de subsunçores, como o de par ordenado, por exemplo, mas de maneira incompleta. Escolheu-se o raciocínio do E16, ilustrado na Figura 42, para retratar esta classe.

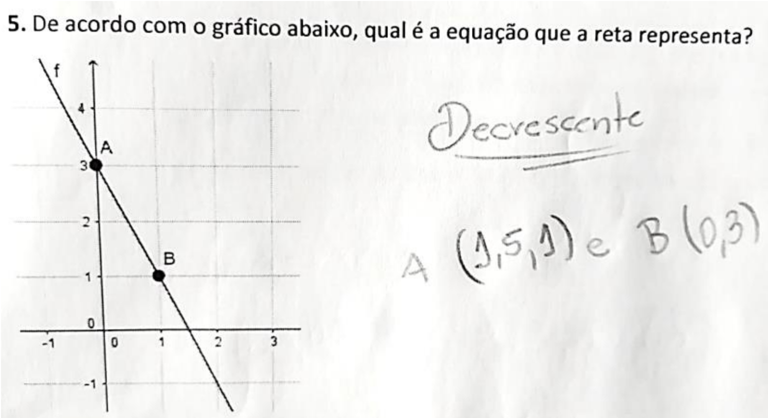


Figura 42: atividade 5 do teste diagnóstico do estudo 2, por E16.

Fonte: dados da pesquisa.

Este estudante reconheceu que a inclinação da reta era decrescente e destacou sua percepção, entretanto, as informações dos pares ordenados, ora explicitados por ele, estavam incorretas. Pressupõe-se que, além disso, E16 tenha se equivocado na ordem dos pontos A e B, pois, conforme a ideia que ele manifestou e, de acordo com o gráfico, seria mais adequado denotar $B(1{,}5\ {,}1)$ e $A(0{,}3)$, mesmo assim, continuaria incorreta a informação do ponto B.

Em conformidade com as informações obtidas na quinta questão, salienta-se que, 20 estudantes apresentaram carência de subsunçores diante da verificação de pares ordenados (categoria 3), de transitar da representação gráfica para a representação algébrica (categoria 5) e de reconhecimento da equação da reta (categoria 7). Somente um estudante (E11), demonstrou mobilizar as três categorias.

A análise da sexta questão do teste diagnóstico:

- **Questão 6 –** *Dados os pontos $A(2{,}5)$ e $B(0{,}3)$, qual a equação da reta que os contém? Represente graficamente a situação.*

Esta situação foi resolvida, corretamente, por um estudante (E11), o mesmo que conseguiu resolver a questão anterior. Quatro estudantes não esboçaram nenhum ensaio de resolução e 16 apresentaram, ao menos, a tentativa de desenhar o gráfico. Além disso, neste último grupo mencionado, três explicitaram investidas de resolução de um sistema de equações, como pode-se diagnosticar na Figura 43, o registro feito por E6.

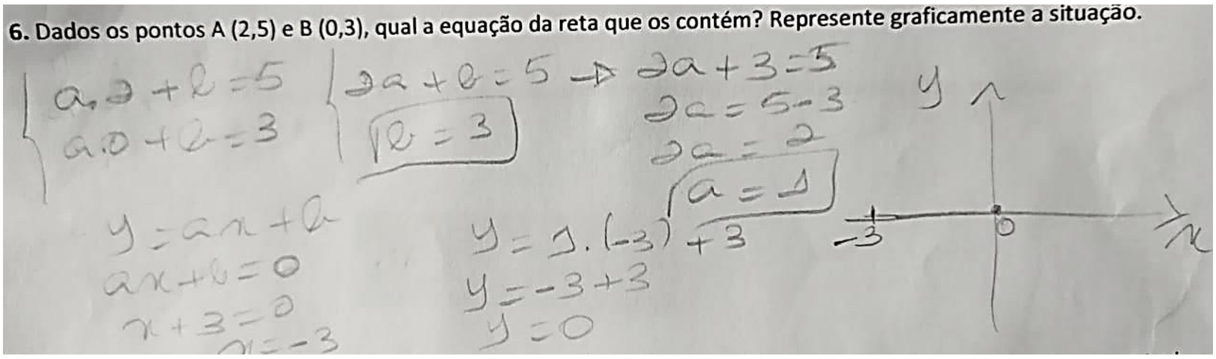


Figura 43: atividade 6 do teste diagnóstico do estudo 2, por E6.

Fonte: dados da pesquisa.

Na questão anterior, ele também explicitou a equação da reta (conforme a Figura 41), mas não conseguiu prosseguir com sucesso, porém, nesta, reforçou possuir alguns subsunçores referentes à equação da reta, pois esboçou-a, substituiu os valores correspondentes aos pares ordenados, fornecidos no enunciado, realizou todo o procedimento de resolução de um sistema de equações e encontrou os valores dos coeficientes da equação da reta.

Diante destas considerações, inferiu-se que E6 não tenha dado continuidade ao seu rascunho por não ter subsunçores estabilizados nas categorias 3, 4, 6 e 7, pois, além de não ter concluído a escrita da equação da reta, com os devidos valores encontrados, não desenhou a reta, nem localizou os pontos no sistema de eixos.

Ainda referindo-se ao grupo de 16 estudantes que realizaram tentativas de resolução, 13 ensaiaram o esboço do gráfico, sendo que cinco deles o fizeram corretamente e oito de maneira errônea. Para ilustrar o ocorrido neste grupo, retrata-se na Figura 44, o esboço do E10.

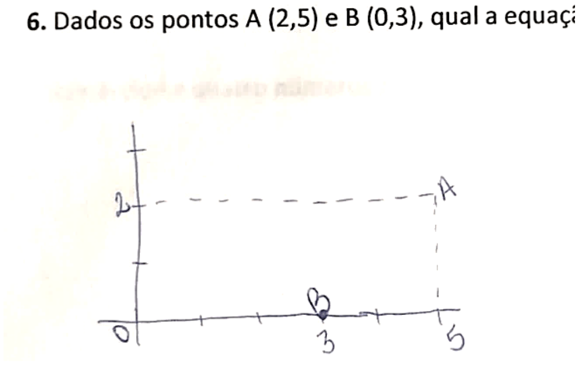


Figura 44: atividade 6 do teste diagnóstico do estudo 2, por E10.

Fonte: dados da pesquisa.

Nele, ratifica-se que o estudante permutou as coordenadas x e y nos dois pares ordenados e optou por não desenhar a reta, supostamente, por incerteza na execução da tarefa.

Em consonância com as evidências obtidas na sexta questão, revelou-se que 16 estudantes apresentaram indícios de subsunçores em algumas das quatro categorias analisadas, pois apresentaram pequenos trechos com resolução correta, embora não tenham concluído seu raciocínio. Como discutido, alguns esboçaram o gráfico e não descobriram a equação da reta, outros, substituíram as coordenadas x e y na equação da reta, mas não expressaram o gráfico e isto sugeriu que, mesmo que estivessem carentes de subsunçores estabilizados, possuíam alguns conhecimentos prévios.

A análise da sexta questão do teste diagnóstico:

- ***Questão 7** – Com o início das aulas, Fernanda precisa ir à livraria para comprar cadernos de 200 folhas, cujo preço unitário é R$ 12,00, e canetas, cujo valor unitário é R$ 6,00. Para isso, Fernanda dispõe de R$ 120,00. Suponha que ela queira utilizar todo o dinheiro na compra de cadernos e canetas. Pede-se:*

***a)** Descreva uma expressão Matemática que represente essa situação.*

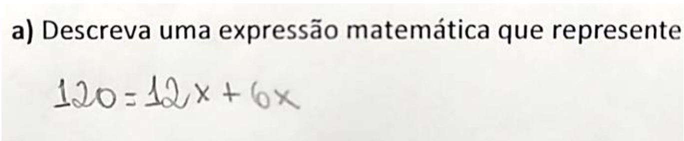
***b)** Quais são as quantidades possíveis para se comprar os dois itens?*

***c)** Represente graficamente essa situação.*

A última tarefa, englobava, de um modo geral, as categorias 1, 2, 3, 4, 6 e 7, pois era composta de três itens, sendo que, o primeiro deles, dizia respeito às categorias 1 e 2 e 6, o segundo, estava atrelado às categorias 2 e 3 e o terceiro, às categorias 3, 4 e 7.

No primeiro item, cinco estudantes explicitaram uma equação Matemática que satisfazia a situação do enunciado, ou seja, utilizaram letras como incógnitas, a ideia de equivalência e conseguiram elaborar a expressão algébrica que representava, adequadamente, o texto escrito.

Consequentemente, 16 estudantes não o fizeram. Deste grupo, cinco deixaram o arquivo em branco e 11 explicitaram alguma tentativa equivocada, como foi o caso do E9. A seguir, confere-se na Figura 45, o registro produzido pelo estudante.


a) Descreva uma expressão matemática que represente

$120 = 12x + 6x$

Figura 45: atividade 7 – a do teste diagnóstico do estudo 2, por E9.
Fonte: dados da pesquisa.

Cogitou-se a hipótese de que ele tenha desprezado a informação de que cadernos e canetas tinham preços diferentes e considerou os dois objetos com a mesma incógnita. Outra possibilidade que sugeriu-se foi a utilização indiscriminada da variável x, ou seja, o estudante pode acreditar que, toda vez que uma grandeza desconhecida for denotada, ele deve recorrer a letra x para representá-la.

No item b), dois estudantes (E5 e E9), estabeleceram duas colunas, uma para cada objeto e encontraram todas as possibilidades nas quais a compra dos dois objetos resultava em $R\$\ 120{,}00$, seis deixaram a questão desprovida de informações e 13 demonstraram tentativas de resolução. Tais tentativas foram análogas e elencou-se, na Figura 46, o registro do E1 para explicitação.

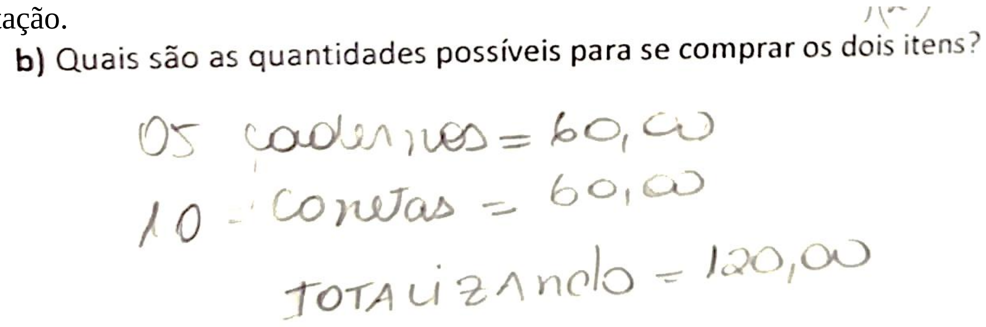


Figura 46: atividade 7 – b do teste diagnóstico do estudo 2, por E1.

Fonte: dados da pesquisa.

Assim como o E1, outros cinco colegas explicitaram este raciocínio, que está correto, porém incompleto, pois deixaram de verificar que outras possibilidades também satisfaziam à igualdade. Isso pode ter ocorrido por eles, supostamente, terem conjecturado que uma quantidade para cadernos e outra para canetas, configurava dois cenários e, portanto, estas eram todas as quantidades possíveis.

O último item, contou com duas resoluções corretas (E5 e E9), os mesmos estudantes que obtiveram êxito no item anterior. Além disso, 12 optaram por deixar a questão em branco e sete se atreveram a construir o gráfico (todos eles faziam parte do grupo que também havia rascunhado tentativas nos dois primeiros itens). Optou-se por discutir a resolução do E16, apresentada na Figura 47.

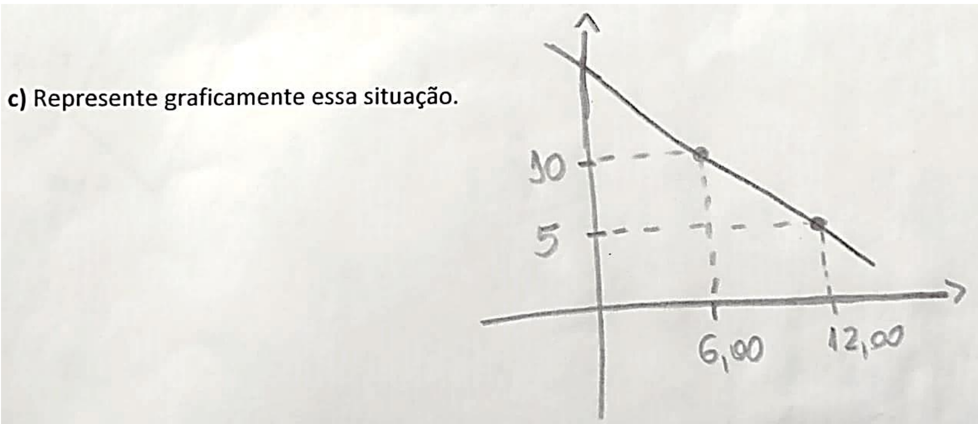


Figura 47: atividade 7 – c do teste diagnóstico do estudo 2, por E16.

Fonte: dados da pesquisa.

Em seu gráfico, ele relacionou as quantidades que havia encontrado no item anterior, ou seja, na letra b) ele dividiu 120 por 2 e obteve 60. Acreditou-se que ele tencionou dividir, igualmente, a quantia de $R\$\ 120{,}00$ para comprar cadernos e canetas. Após, dividiu 60 por 12, obtendo 5 unidades e dividiu 60 por 6, obtendo 10 unidades. Atreveu-se a fazer esta explicação, para justificar a construção de seu gráfico, pois ele apresentou no eixo horizontal, os valores em reais e, no eixo vertical, as quantidades possíveis de compra que encontrou no item b).

Na sétima questão do teste diagnóstico, averiguou-se que o item a) teve maior índice de acertos e isto denota que o grupo apresentava maiores dificuldades nas categorias 2, 3 (item b), 4 e 7 (item c). A Figura 48, a seguir, apresenta o desempenho dos estudantes nesta questão.

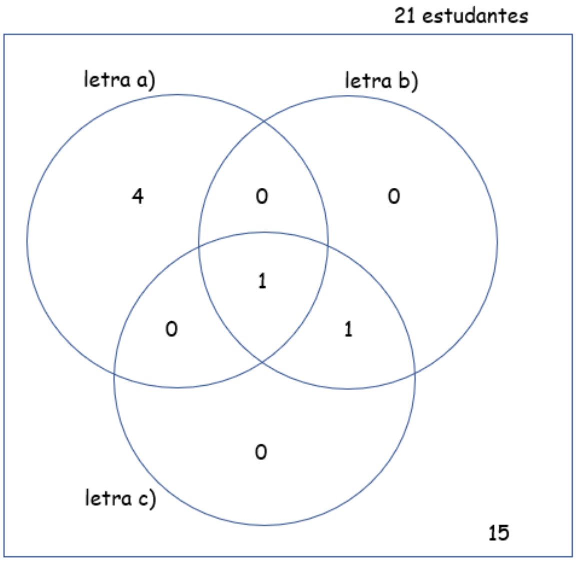


Figura 48: número de acertos da turma nos três itens da sétima questão do teste diagnóstico do estudo 2.
Fonte: dados da pesquisa.

Conforme detalha-se neste diagrama, quatro estudantes acertaram, somente, o primeiro item, um acertou, somente, os dois últimos, um estudante acertou os três e 15 não acertaram nenhum deles. Ademais, 20 estudantes erraram, pelo menos um dos três itens e isto mostra que eles possuem lacunas nas categorias 1, 2, 3, 4, 6 e 7.

Diante destas, e das demais constatações feitas ao longo das análises do teste diagnóstico da, sugeriu-se que a turma, como um todo, apresentava poucos subsunçores estabilizados em todas as categorias elencadas, além de lacunas nos conteúdos de Matemática básica, como, por exemplo, porcentagens, operações aritméticas com números naturais, com frações, bem como reconhecer que uma fração pode ser representada como um número decimal.

Fez-se esta conjectura, pois analisando-se o desempenho do grupo, no contexto das sete categorias elegidas, obteve-se o seguinte panorama exposto no Quadro 14.

Quadro 14: análise dos subsunçores dos estudantes, referente ao nível em que se encontravam, em cada categoria estabelecida no teste diagnóstico do estudo 2.

	1	2	3	4	5	6	7
E1	X	X				X	
E2							
E3	X	X					
E4							
E5	X	X	X			X	
E6	X	X	X			X	
E7	X	X	X				
E8	X	X				X	X
E9	X	X	X	X		X	X
E10	X	X					
E11	X	X	X	X	X	X	X
E12	X	X				X	
E13							
E14	X	X				X	
E15							
E16	X	X	X			X	
E17	X	X					
E18	X	X	X			X	
E19	X	X	X			X	X
E20	X	X				X	
E21							

Fonte: dados da pesquisa.

Este quadro denota com um "X" as categorias que foram evidenciadas nas análises dos 21 estudantes, nas questões do teste diagnóstico, ou seja, quando a categoria indicada aparece em branco, significa que o estudante não demonstrou indícios de que conseguiu mobilizar a respectiva categoria em nenhuma das situações.

Por meio desta análise, discerniu-se que, as categorias 1, 2 e 6 tiveram maior incidência de acertos, pois:

- 16 estudantes (76,2%) esboçaram a utilização letras como incógnitas (categoria 1);
- os mesmos 16 (76,2%), demonstraram conceber o símbolo de igualdade como ideia de equivalência (categoria 2);
- 12 (57,14%), transitaram da linguagem natural (texto escrito) para a representação algébrica (categoria 6).

Em contrapartida, verificou-se que as categorias 3, 4, 5 e 7 tiveram menor predominância, porque:

- oito estudantes (38,09%), explicitaram reconhecer a ideia de par ordenado (categoria 3);
- dois (9,52%), conseguiram representar, graficamente, uma situação apresentada em linguagem algébrica (categoria 4);

- um (4,76%), representou, algebricamente, uma situação apresentada em registro gráfico (categoria 5);
- quatro (19,05%), manifestaram reconhecer a equação reduzida da reta (categoria 7).

Desta forma, o grupo apresentava, em sua maioria, subsunçores disponíveis nas categorias 1, 2 e 6, o que não garantia que todos estes subsunçores destas categorias estavam estabilizados. De maneira complementar, não significava que o grupo não possuía conhecimentos prévios nas demais categorias. Nesse cenário, buscou-se fugir de julgamentos extremos.

Além disso, atribuiu-se três níveis de bagagem de subsunçores: baixo, médio e alto. No nível baixo, alocou-se os estudantes que contemplaram até duas categorias elegidas, no nível médio, os que mobilizaram de três a cinco categorias e, no nível alto, os que alcançaram seis ou sete (todas) categorias. Verifica-se na Figura 49, a seguir, a distribuição dos estudantes conforme esta perspectiva.

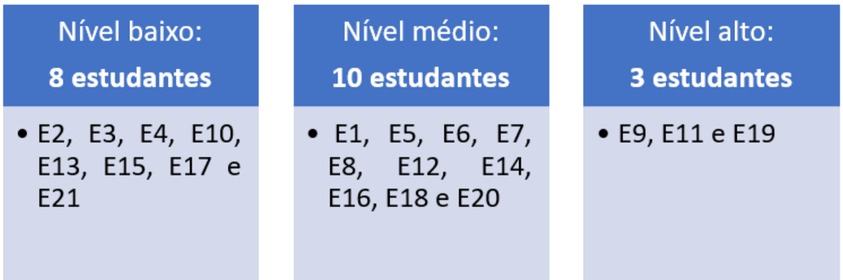


Figura 49: nível de bagagem de subsunçores que os estudantes carregavam em sua estrutura cognitiva.
Fonte: dados da pesquisa.

Pontua-se que, de forma alguma, teve-se o objetivo de desqualificar ou julgar qualquer dos estudantes por meio deste agrupamento, que somente a professora teve acesso, pois ele serviu para perceber que, mesmo aqueles que estavam no nível alto e dispunham de subsunçores específicos para a aprendizagem de equações de primeiro grau e para sua representação gráfica, esquematizaram estes conceitos, por vezes, de forma compartimentada, no teste diagnóstico, sem transitar livremente nestes dois registros (ou, ainda, conforme Duval (2003), não realizaram conversões).

Um exemplo que pode ser minuciado para justificar tal concepção é o de E19, que foi categorizado no nível alto, pois mobilizou as categorias 1, 2, 3, 6 e 7. A análise de seu teste diagnóstico, revelou que ele demonstrou tentativas de resolução em todas as questões e, com exceção da segunda, todas elas foram iniciadas de maneira correta. Contudo, apresentou diferentes erros e só conseguiu desvendar, na íntegra, as questões 3–a e 4.

Supõe-se que isto possa ter sido reflexo de uma aprendizagem mecânica ou fruto de confrontações com explicações e/ou situações sem ênfase na articulação destes dois tipos de representação. Além disso, ele poderia apresentar todos estes subsunçores em sua estrutura cognitiva, porém, supostamente, eles ainda não estariam estabilizados.

A investigação em busca dos subsunçores e invariantes operatórios iniciou por meio da aplicação e análise do teste diagnóstico, mas não finalizou nesta etapa, ao contrário disso, esta foi, apenas, a etapa inicial, que precisou ser contínua, ao longo de todos os encontros, pois muitos invariantes operatórios, provavelmente, não foram externalizados no teste diagnóstico e careciam do confrontamento com diversas situações, da interação social, da negociação de significados e da mediação docente para, talvez, emergirem.

Interpretou-se, portanto, que o nível da turma era carente de subsunçores adequados, basicamente, em todas as categorias, o que configurou a necessidade de iniciar um trabalho pautado em atividades básicas, em nível introdutório de conhecimentos para, aos poucos, introduzir conceitos mais elaborados, realizando a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora, proporcionando situações que favorecessem o entendimento de equações e gráficos de forma articulada entre si e com o contexto da área administrativa.

Diante dos resultados averiguados no teste diagnóstico, evidenciou-se possibilidade (diante da necessidade dos estudantes) de disponibilizar materiais no ambiente virtual da disciplina para serem visitados antes da próxima aula. A intenção contida nesta concepção, foi de que eles funcionassem como organizadores prévios, pois seriam introduzidos em nível mais alto de generalidade, antes do material a ser aprendido. Pautou-se esta ação, sob guarida da definição de Ausubel (2003, p. 10), o qual evidencia que

> Se a estrutura cognitiva for clara, estável e bem organizada, surgem significados precisos e inequívocos e estes têm tendência a reter a força de dissociabilidade ou disponibilidade. Se, por outro lado, a estrutura cognitiva for instável, ambígua, desorganizada ou organizada de modo caótico, tem tendência a inibir a aprendizagem significativa e a retenção. Assim, é através do fortalecimento de aspectos relevantes da estrutura cognitiva que se pode facilitar a nova aprendizagem e retenção.

Ou seja, em consonância com as ideias do autor, disponibilizou-se materiais que teriam a função de fortalecer ou organizar os conhecimentos prévios que poderiam ainda não ser relevantes na estrutura cognitiva dos estudantes, além de funcionarem como pontes cognitivas, pois poderiam estabelecer um elo entre o que eles já conheciam e o que seria preciso conhecer. De maneira menos literal, poderiam ancorar o novo conhecimento em sua estrutura cognitiva, para avançarem em seu processo de aprendizagem.

Tal como exposto no início deste capítulo, esta foi a segunda aplicação do teste diagnóstico e, os resultados obtidos nas duas aplicações foram muito semelhantes, pois revelaram que, apesar de o corpo discente ser composto, em sua maioria, por um público *jovem, oriundo do ensino médio, haviam muitas lacunas de aprendizagem e os estudantes apresentavam subsunçores escassos e pouco estabilizados referentes aos conceitos de equações e gráficos, o que tornou imprescindível abordar, primeiramente, situações iniciais e, gradativamente, aumentar o grau de dificuldade das situações propostas.*

Além disso, ressalta-se a importância do estabelecimento de uma relação de confiança entre docente e discentes, pois, foi possível observar que, em diversas situações, os alunos nem chegaram a explicitar um esquema para resolvê-las. Isto pode ter ocorrido por fatores como dificuldade, mas, também, por medo do erro e pode ser decorrente de uma aprendizagem baseada na utilização dos erros para reprimir, na qual o erro representa um fracasso e não um caminho natural da aprendizagem.

Evidentemente que, no primeiro encontro, ainda não seria possível estabelecer uma relação de confiança e afeto entre professora e estudantes, mas buscar conhecê-los antes de tudo, foi uma maneira importante de iniciar o semestre. Sobretudo, projetava-se o favorecimento de um ambiente que preconizasse a troca de ideias e de uma postura docente que permitisse e os instigasse a se sentirem confortáveis o suficiente para que externalizassem suas dúvidas.

Apesar dessa investigação não ter sido pautada sob o enfoque da metodologia de resolução de problemas, comunga-se com as ideias de Onuchic (1999, p. 216), a respeito do papel do professor na sala de aula, pois ela defende que

> Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimentos para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

Mesmo que a metodologia escolhida não tenha sido esta citada, foi dessa maneira que se tencionou o trabalho docente nesta investigação. Afinal, se os estudantes verificarem que não há espaço para questionamentos e que já precisam dominar determinados conceitos para participarem das aulas, qual é o sentido de estarem na sala de aula?

Desse modo, teve-se a intenção de estimular o debate, investigar as dúvidas e os erros dos estudantes ao longo do processo e eles não foram avaliados somente nas provas, isso aconteceu todos os dias. Aliás, todos estavam sendo avaliados durante todo o tempo: os estudantes, a professora, a UEPS, as situações, as aulas e o contexto. Discutiu-se a respeito disso com os discentes na tentativa de convidá-los a participarem das aulas, a virem para os encontros sem pré-julgamentos, sem medo de exporem suas dúvidas.

Antes de iniciar a descrição e análise das atividades da implementação didática, cabe destacar que, diferentemente da postura adotada no estudo 1, nesta segunda aplicação, as situações não estavam programadas previamente, ou seja, após averiguar os resultados obtidos no teste diagnóstico, delineou-se situações adequadas para o próximo encontro e isto foi ocorrendo semanalmente.

Obviamente, algumas situações foram reformuladas desse estudo inicial, contudo, deu-se prioridade a cada nova evidência obtida toda semana. Conforme explicitou-se, as ideias para elaborar as situações, foram subsidiadas por Morettin, Hazzan & Bussab (2003), Paulette (2003), Tan (2003), Leite & Fuita (2008) e Silva & Machado (2010).

Estes autores foram importantes propulsores de ideias para elaboração das tarefas, mas nenhuma delas foi utilizada na íntegra, pois elaborou-se as situações com um contexto diferente do original, apenas utilizando uma ideia semelhante de abordagem, além de realizar uma espécie de combinação entre as diferentes abordagens, de acordo com o contexto dessa investigação.

Os diálogos e orientações dos três professores especialistas também auxiliaram bastante nesse processo. O da área administrativa, inclusive, se interessou muito pela proposta dessa pesquisa e sempre compartilhava materiais que descobria ou perguntava a respeito do andamento das atividades. Sem dúvidas, foi muito bom poder contar com a sua parceria e a de todos os outros colegas também.

A decisão de adaptar as situações a cada novo encontro, tornou o processo mais trabalhoso do que no primeiro estudo, aquele que serviu como estudo piloto, pois demandou que as análises do questionário socioeconômico e do teste diagnóstico, fossem realizadas de uma semana para a outra, contudo, possibilitou uma oferta de situações mais adequadas ao nível de conceitualização dos estudantes participantes.

O fato de ter evidenciado que, de maneira geral, os estudantes apresentavam subsunçores, aparentemente escassos e/ou desestabilizados, nas sete categorias estabelecidas, causou certa preocupação e, por este motivo, optou-se por compartilhar, antes de cada encontro, materiais instrucionais, que pudessem auxiliá-los a entrelaçar os conceitos que seriam abordados em aula com os seus conhecimentos prévios.

7.2.2 O segundo encontro – 1º/03/2019

Desse modo, no segundo encontro, que ocorreu após a análise dos dados coletados no teste diagnóstico, inicialmente, questionou-se os estudantes se eles haviam assistido às duas videoaulas e/ou se apresentavam alguma dúvida referente aos materiais postados no ambiente virtual na semana anterior (as duas videoaulas e o arquivo do teste diagnóstico).

A primeira videoaula, abordava a forma geral da equação reduzida da reta, relacionando-a à função do primeiro grau (função afim), nomeava os coeficientes angular e linear, além de ressaltar que este tipo de equação descreve uma reta, que pode ser crescente ou decrescente. Página disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=8WGJSZ1eBgE>, (4 minutos e 52 segundos).

O segundo vídeo, foi gravado pela autora e ressaltava, basicamente, os mesmos conceitos da primeira, além de evidenciar que, dada uma equação, é possível construir o seu gráfico e que o caminho inverso também é válido, ou seja, conhecendo-se, pelo menos, dois pontos de uma reta, é possível encontrar sua equação reduzida e representá-la no plano cartesiano. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=mZxc_1vhgls&t=14s>, (4 minutos e 59 segundos).

Optou-se por estes materiais, por eles apresentarem uma visão geral, uma espécie de ideias-âncora do que seria discutido no segundo dia de aula, ou seja, as informações contidas nestes dois vídeos, poderiam fornecer uma espécie de resumo dos principais aspectos que seriam progressivamente diferenciados, além disso, poderiam funcionar como pontes cognitivas, que é o objetivo dos organizadores prévios, ressaltados por Ausubel (1963), ao interligarem-se com os conhecimentos prévios dos estudantes.

Dois estudantes (E1 e E10), demonstraram interesse em verificar se as respostas dos exercícios refeitos estavam corretas. Em ambos os casos, tratava-se de dúvidas referentes ao algoritmo de adição e subtração de frações, verificado na letra b) da terceira questão do teste diagnóstico, pois mencionaram não lembrar de como realizar o cálculo para encontrar o m.m.c.

– E1: *"professora, se eu tivesse escrito em número com vírgula, em vez de fração, a senhora consideraria o meu cálculo certo?"*

– P: *"tu acha que* $\frac{1}{2}$ *e* 0,5*, por exemplo, são equivalentes?"*

– E1: *"acho que sim, mas já tive professores que se irritavam se a gente respondesse diferente do jeito que eles faziam no quadro, então fiquei sem saber se a senhora aceitaria ou não, aí deixei em fração, mas me perdi no meio das contas"*.

Desse modo, tranquilizando-o: *"tu pode transitar, livremente, entre estes diferentes registros, usa o que tu preferir, o que for mais conveniente pra ti"* (P).

Além disso, E10 mencionou: *"prof, eu tentei refazer em casa, mas tive muita dificuldade, principalmente na segunda página porque eu não entendo e odeio fazer gráficos"*. Na tentativa de amenizar a situação, foi informado que sua dúvida poderia ser discutida individualmente ou no grande grupo, como ele preferisse. Além disso, as construções gráficas seriam discutidas em aula ele teria total liberdade para expor as suas dúvidas.

Estes aspectos denotaram a importância do diálogo e da interação entre todos os sujeitos envolvidos no contexto da sala de aula, pois acredita-se que o contrato didático é estabelecido conforme os encontros ocorrem e não, somente, no primeiro dia de aula. E, para isso, tempo e atenção são essenciais até que estabeleça uma relação de confiança entre docentes e discentes.

Esta ideia também é defendida por Roncaglio & Nehring (2013). Elas acrescentam que intimidar os estudantes a resolverem questões exatamente como são apresentadas na lousa pelo professor, poderá gerar meros repetidores de fórmulas e expressões isentas de significado para eles e isto vai de encontro à ideia de promover a aprendizagem significativa de conceitos e, tampouco, evidencia condições para o domínio sucessivo de um campo conceitual.

Como nenhum outro estudante fez qualquer questionamento, retomou-se o assunto das videoaulas. Dos 13 que estavam presentes, oito haviam assistido, então resgatou-se a importância de todos assistirem aos vídeos, realizarem as atividades propostas para casa e trazerem as dúvidas para serem discutidas em aula. Sugeriu-se que, caso eles saíssem da aula e só entrassem em contato, formalmente, com a disciplina, uma semana depois, provavelmente, sentiriam dificuldades, que poderiam acumular-se ao longo dos encontros.

A intenção, ao disponibilizar estes vídeos no ambiente virtual, foi de que eles pudessem funcionar como organizadores prévios e, para isso, os estudantes precisariam entrar em contato com o material antes da aula. Então argumentou-se que estes materiais forneceriam pistas do que seria discutido na próxima aula, na tentativa que isso lhes despertasse curiosidade.

Ademais ressaltou-se que as atividades aconteceriam em sala de aula, mas se estenderiam para fora dela como atividades extraclasse e, neste ponto, o ambiente *Moodle* seria uma espécie de "rede social da sala de aula", na qual professora e estudantes poderiam interagir entre si, sem a dependência do encontro presencial, somente na próxima semana de aula. Neste ambiente, a ferramenta "fórum de dúvidas" sempre estaria à disposição para ser utilizada por todos, qualquer estudante poderia postar suas dúvidas e comentar/auxiliar o colega ou, ainda, poderia encaminhar mensagens individuais para os colegas e professora.

7.2.2.1 A primeira situação do segundo encontro

Após este momento, iniciou-se as atividades da segunda etapa da UEPS (situações-problema). A primeira situação, teve como intuito, evidenciar como a Matemática pode estar presente no cotidiano e ser necessária na tomada de decisões e para investir e empreender, características essenciais no exercício da profissão de um administrador. Ela foi planejada para que os estudantes pudessem dar sentido ao conceito de equação (nesse caso, equação do lucro, do custo e da receita), mas, para isso, alguns conhecimentos deveriam ser subsunçores como os de porcentagem, operações aritméticas, operações algébricas, acréscimos e descontos.

Utilizou-se um *notebook* e um projetor[41] para disponibilizar o vídeo "Minuto do Empreendedorismo[42]", disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=5ikZc5fhHkg>. Neste vídeo, Rick Chester, um vendedor ambulante do Rio de Janeiro, conta lições sobre empreender vendendo água mineral na praia e apresenta uma fala de, exatamente, um minuto.

Além disso, aborda conceitos matemáticos que são muito importantes na área administrativa, pois menciona, por exemplo, porcentagens, frações, acréscimos, lucro, custo e arrecadação. Por este motivo, o vídeo precisou ser assistido inúmeras vezes e pausado outras tantas, pois foi difícil para os estudantes assimilarem todas as informações de uma só vez, além disso, Rick Chester falava bastante rápido.

Todos foram convidados a fazer, em seus cadernos, uma espécie de organização dos dados obtidos na fala de Rick Chester. A todo momento, pausava-se o vídeo, para que eles escrevessem e questionava-os sobre suas anotações, com a intenção de organizar, na lousa, os dados ressaltados por eles. Este momento foi bastante interativo, porém entre professora e estudantes, pois eles, inicialmente, eles não conversaram entre si, somente respondiam aos questionamentos. Contando com o auxílio do grupo, escreveu-se, na lousa, as seguintes informações:

- pediu $R\$ \ 10{,}00$ – comprou um fardo com 12 garrafas de água e meio saco de gelo;
- bebeu duas e vendeu 10 garrafas por $R\$ \ 4{,}00$ cada – arrecadou $R\$ \ 40{,}00$;
- no 1º dia, obteve lucro de 300% em relação aos $R\$ \ 10{,}00$ que investiu;
- no dia seguinte: comprou um isopor, dois fardos de água e meio saco de gelo. Sobrou $R\$ \ 7{,}00$ de troco;
- vendeu 22 garrafas, cada uma por $R\$ \ 4{,}00$ – arrecadou $R\$ \ 88{,}00$;

[41] A instituição oportunizava o empréstimo dos *notebooks* no setor de audiovisual e a sala de aula na qual ocorreram as atividades, dispunha do projetor (*data show*) fixado no teto. Não eram todas as salas de aula que possuíam o objeto fixado, nesse caso, o professor também pode retirá-lo para empréstimo no setor de audiovisual, desde que efetuasse a reserva, previamente.

[42] Por conta desse vídeo, que viralizou na internet em março de 2018, Rick Chester, ganhou fama e notoriedade mundial, inclusive, foi convidado para palestrar em Harvard. E foi além, pois palestrou em quatro continentes. Participou de inúmeros programas de televisão, hoje tem mais de 1,5 milhões de seguidores nas redes sociais, possui livros publicados e mudou sua vida: de vendedor ambulante a palestrante, que ajuda pessoas a transformarem sonhos em realidade, contando a sua história e colocando em prática tudo o que aprendeu. Muitos empreendedores apostaram nele e investiram em sua carreira, pois perceberam o seu grande potencial empreendedor.

- somando os $R\$ 88{,}00$ com o troco de $R\$ 7{,}00$, obteve $R\$ 95{,}00$;
- no 2º dia, totalizou um lucro de 850% em relação aos $R\$ 10{,}00$ que investiu;
- devolveu os $R\$ 10{,}00$ que pediu emprestado e sobrou $R\$ 85{,}00$;
- obteve lucro final de 750% em relação aos $R\$ 10{,}00$ que investiu.

Estas informações foram obtidas sob a forma de plenária, conforme os estudantes as anunciavam verbalmente. Com isso, diversos aspectos foram discutidos, como, por exemplo, o lucro de 300% obtido no primeiro dia. Indagou-se a turma sobre como Rick Chester havia feito esta constatação. Nenhum estudante respondeu. Insistiu-se na questão, reformulando a pergunta: *"qual foi o valor inicial que Rick investiu?* (P). A turma mencionou a quantia de $R\$ 10{,}00$, mas ninguém explicou como calcular o lucro. Então investiu-se em nova pergunta: *"com um investimento de* $R\$ 10{,}00$, *ao final do primeiro dia, quanto Rick arrecadou?"* (P). Vários estudantes responderam que os $R\$ 10{,}00$ se transformaram em $R\$ 40{,}00$, além disso, E9 acrescentou: *"eu faria uma regra de três pra calcular professora"*.

Desse modo, instigou-se o estudante a enunciar seu provável conceito-em-ação. Enquanto ele explicava verbalmente, registrava-se, por escrito, na lousa (Figura 50).

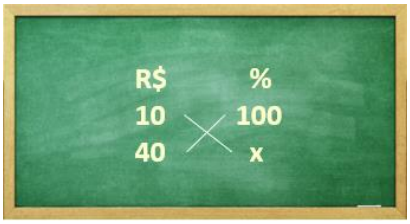


Figura 50: exemplificação de como a regra de três foi mencionada por E9 e explicitada na lousa para discussão. Fonte: elaborado pela autora, com base em dados da pesquisa.

Ao explicar seu raciocínio, E9 afirmou: *"sempre faço os cálculos por regra de três, é muito prático. Se tá demorando muito pra resolver, já meto uma regra de três que é tiro e queda*[43]*"*. Supôs-se que, mais do que um conceito-em-ação, possivelmente este era um teorema-em-ação presente em sua estrutura cognitiva. Ele era um estudante com personalidade expansiva, cativante.

Seus colegas riram de sua fala. Ressaltou-se que realmente era um recurso muito bom, mas que nem todos os problemas poderiam ser resolvidos por meio deste artifício, somente os que envolvessem grandezas proporcionais.

O estudante continuou sua explicação: *"mas olha só, se no começo, ele tinha* 10 *reais, era* 100% *do valor, então* 40 *reais vai ser o* x. *Depois é só multiplicar cruzado e vou ter a resposta"* (E9). Por meio de seu raciocínio, ele averiguou que a expressão resultaria em 400%.

[43] O estudante quis dizer que, na sua percepção, a regra de três pode resolver qualquer problema.

Questionou-os quanto à afirmação de Rick Chester, de que o lucro era de 300%. Houve um momento de silêncio até que um discente sinalizou: *"deve ser pra diminuir dos* 100% *inicial prof"* (E12). Como o grupo não esboçou reação à afirmação de E12, construiu-se um raciocínio utilizando situações de compra com acréscimos, para que verificassem a existência de um fator de multiplicação, por exemplo quando há um acréscimo de 100%, multiplica-se o valor inicial por dois, pois um acréscimo de 100%, dobra o valor inicial, de maneira análoga, quando há um acréscimo de 200%, triplica o valor, pois multiplica por três e assim sucessivamente.

Também argumentou-se a respeito de valores que sofrem descontos. Eles concluíram que um desconto de 25% implicaria na sobra de 75% do valor da mercadoria e que este valor poderia ser obtido por meio da multiplicação por 0,75 (um fator de multiplicação), mas, instantaneamente, E9 complementou: *"mas se eu fizer por regra de três tá certo né prof?"*. Todos riram novamente. O estudante reafirmou seu desejo por esta estratégia de resolução e forneceu pistas de que este poderia ser um invariante operatório que regia sua conduta para uma classe de situações.

Após, E9 enfatizou: *"então se ele tivesse dito que teve um aumento de* 500% *no primeiro dia, seria só multiplicar os* 10 *reais por seis, que daria 60 reais?"*. Questionou-se o restante do grupo sobre esta afirmação e eles responderam positivamente.

E7 questionou a respeito de como calcular a porcentagem utilizando a calculadora, então explicou-se sobre como proceder neste caso. A seguir, perguntou-se: *"como poderíamos conceituar lucro, custo e receita, alguém pode me ajudar?"* (P). Na sequência, alguns estudantes iniciaram uma discussão a respeito dos conceitos de lucro, custo e receita.

– E7: *"o lucro é o que sobra depois de descontar a receita"*

– E5: *"eu acho que arrecadação é o mesmo que receita e não é o mesmo que lucro"*.

– E19: *"receita é arrecadação e lucro é o que sobra"*

– E15: *"isso aí, lucro é ganho e receita é arrecadação"*.

– E2: *"o custo fixo, no exemplo do cara era o valor de cada garrafa de água que ele tinha que comprar"*.

Foi então que, através da janela, visualizou-se a barraca do churrasquinho. Naquele instante, teve-se a ideia de indagá-los a respeito de alguns exemplos hipotéticos para o caso do "senhor do churrasquinho".

Imediatamente, eles informaram que o valor cobrado por cada unidade de churrasquinho era $R\$$ 5,00 (o valor eles sabiam, pois já haviam experimentado o produto e disseram que era muito bom, por sinal). Disso, sugeriu-se que imaginassem um suposto valor que o dono pagaria para comprar a carne, os palitos, os guardanapos e a farofa.

Também os interpelou sobre qual seria o valor que ele obteria ao final de um dia de vendas, como este valor poderia ser calculado e qual seria a diferença entre o que ele arrecadaria com as vendas diárias e o que, de fato, seria o dinheiro que “sobraria em seu bolso”.

Evidentemente, foi uma situação em nível inicial, mas eles se aproximaram muito da expressão $L(x) = R(x) - C(x)$. Mencionaram ela de maneira não literal, mas por meio da mediação docente, aparentemente, compreenderam a expressão, pois, sob amparo de suas falas, escreveu-se ela na lousa.

Contudo ela emergiu de suas conclusões. Tudo isso gerou discussões muito ricas e derivou de uma situação real, que estava ali, literalmente, na frente deles. É muito diferente, por exemplo, de uma situação na qual o professor escreve a expressão que rege o lucro na lousa, sem suscitar discussões e solicita que os estudantes façam exercícios na sequência.

Nessa segunda situação, parece que a expressão $L(x) = R(x) - C(x)$ é uma fórmula Matemática alheia ao contexto administrativo, que deve ser assimilada como pronta e acabada, talvez até criado um macete para sua utilização e precisa de muitos exercícios para ser decorada. Isso pode configurar uma aprendizagem mecânica ou permear uma zona cinza intermediária.

A ideia do parágrafo anterior não foi a de afirmar que apresentar fórmulas e fazer muitos cálculos configura uma aprendizagem apenas mecânica e que isso é, necessariamente, ruim, mas que não promover discussões e não dar tempo para que os estudantes se apropriem dos significados para que estes passem a fazer parte de sua estrutura cognitiva, não caracteriza a facilitação de uma aprendizagem significativa.

Na sequência, retomou-se o vídeo, a respeito do que Rick arrecadou, o que investiu e o que sobrou após pagar sua dívida, na tentativa de que os estudantes atribuíssem novos significados a cada um destes conceitos. Contudo, retoma-se a concepção defendida por Vergnaud (1996), de que um conceito não se forma com um só tipo de situação e, dessa forma, novas situações deveriam ser oportunizadas na sequência deste e dos próximos encontros, para que os estudantes pudessem construir modelos, realizar comparações e interpretá-los.

Atreveu-se a resumir, em uma única palavra, a percepção que teve-se desta tarefa: dinâmica. Ao que tudo indica, ela despertou o interesse de grande parte da turma.

É claro que, também foram evidenciados problemas em seu percurso, pois teve estudante que chegou atrasado, que saiu no meio da atividade, que passou na frente do vídeo, que bateu a porta da sala, que saiu para atender o celular e que ficou debruçado sobre a classe, com seu caderno fechado, aparentemente dormindo, demonstrando-se indiferente à tarefa.

Infelizmente, alguns apresentaram esta postura e, por mais que, neste e em outros semestres, tentativas fossem feitas, por meio de conversas, pedidos, orientações, alguns insistiam em assim fazê-lo. Eram turmas formadas por adultos, ninguém precisava pedir autorização para entrar ou sair, mas, alguns (poucos), pareciam extrapolar essa liberdade e atrapalhavam em determinados momentos.

Contudo, julga-se que a tarefa possibilitou a abordagem de conteúdos matemáticos necessários para a tomada de decisões e permitiu a externalização de alguns esquemas de pensamento, e dúvidas/dificuldades de compreensão. Ela teve duração de pouco mais de uma hora, um tempo considerado grande dedicado à uma única tarefa, se comparado com as atividades realizadas no estudo 1.

A situação do senhor do churrasquinho, emergiu de uma necessidade evidenciada naquele instante, não estava prevista e isso revelou a importância de selecionar poucas situações para serem enfrentadas, calmamente, pelos discentes e com uma margem de tempo para incluir outros exemplos, como foi o caso.

7.2.2.2 A segunda situação do segundo encontro

Para realizar esta tarefa, convidou-se a turma para comporem trios. Três estudantes haviam chegado, totalizando 16 presentes, neste momento. Eles formaram cinco grupos (G1, G2, G3, G4 e G5). Solicitou-se que um componente de cada grupo utilizasse um celular para gravar os áudios com as discussões e enviasse por e-mail para a professora ao final da aula.

A situação disponibilizada foi a seguinte:

- ***Questão 2 –*** *Uma balança de dois pratos está em equilíbrio. Em um prato há três pesos iguais de valor desconhecido (medido em gramas) e um terceiro peso de 13g. No outro prato da balança, há um outro exemplar igual aos anteriores de peso desconhecido e um peso de 45g. Qual é o valor do peso desconhecido?*

Esta tarefa exigia capacidades no campo algébrico para resolver equações e realizar operações aritméticas. Ela foi planejada para que os estudantes pudessem dar sentido ao conceito de equivalência em uma equação. Nesse caso, o uso de letras como incógnitas e a passagem da linguagem natural (texto escrito) para a representação algébrica, deveriam ser conceitos subsunçores. Dependendo das capacidades que dispunham, eles também poderiam partir do registro escrito para o registro gráfico, ou seja, elaborar um desenho da situação, caso apresentassem uma melhor compreensão visual para, então, desvendá-la algebricamente.

Os integrantes de G2, no início da atividade, explicitaram: "*é ruim de resolver assim*

Letícia" (E12) e "*é, também acho difícil de resolver assim, a gente não consegue ter certeza se o nosso pensamento tá certo"* (E15). Perguntou-se a eles, mais especificamente, no que eles estavam encontrando dificuldades e E12 respondeu: *"é que a gente tem um monte de texto aqui, cadê a Matemática, tem só um* 13 *e um* 45*?"*. Verificou-se a concepção de que, para eles, a Matemática era abordada por meio de números, assim, uma situação estruturada em formato textual, poderia se mostrar como um empecilho.

Disse-lhes que era preciso ler o enunciado com calma, pois, nele, estavam todas as informações necessárias para desvendar a situação e que eles precisariam interpretá-la, para discutir e compartilhar suas ideias entre eles.

Amparando-se nas ideias de Ausubel, Novak & Hanesian (1978), supõe-se que estes dois estudantes, estavam enfrentando obstáculos devido a uma possível aprendizagem representacional, que envolvia a atribuição de significados a determinados símbolos, por exemplo, eles poderiam ter associado que os símbolos "13" e "45", representavam quantidades, mas os símbolos contidos na frase "três pesos iguais de valor desconhecido" não representavam, por necessitarem de uma transformação para serem representados.

Em seus áudios, verificou-se suas constatações, juntamente com E10, seu colega de grupo.

– E10: "*"tá, eu acho que estes três pesos iguais desconhecidos aqui são todos* x*, porque na Matemática, quando a gente não sabe o valor de alguma coisa, é sempre* x*!"*.

Houve risos.

– E12: *"hum, pode ser mesmo"*.

– E10: "*então esse aqui que tem no outro prato, é* x *também?"*.

– E10: *"acho que é isso, tem* $3x$ *num prato, junto com 13 e no outro prato tem* x *e 45"*.

– E12: *"acho que não é x, acho que é* $3x$*, porque diz que é igual aos outros"*.

– E10: *"tá, vamos ver então"*.

Eles tentaram resolver a expressão $3x + 13 = 3x + 45$, da forma como E12 acreditava, mas perceberam que não daria certo, então E12 abandonou sua forma de raciocínio e adotou a de seu colega E10.

– E12: *"vai zerar tudo aqui ó, não tem como, tem que ser do teu jeito"*.

Então explicitaram a expressão elaborada por E10 e requisitaram a professora: *"é assim prof?"* (E10).

Enquanto isso, G1, G3, G4 e G5 já finalizavam a atividade. Deu-se ênfase à G2, pois foi o que apresentou mais dificuldades diante da situação. Na tentativa de não pronunciar aos integrantes de G2 que havia um equívoco em suas percepções, sugeriu-se que eles discutissem com qualquer outro grupo, pois todos haviam encontrado uma expressão correta. Aparentemente, eles concordaram, mas, após afastar-se do grupo, em seus áudios, verificou-se que eles mencionaram que aguardariam pela correção da professora na lousa.

Algumas percepções evidenciadas pelos outros grupos: E9, integrante do G1, afirmou que *"essa questão foi bem tranquila prof, conseguimos resolver bem rápido"*.

Em G3, E8 mencionou: *"tivemos um pouquinho de dificuldade no começo prof, até pegar o jeito de fazer, mas acho que conseguimos"*. Questionou-o a respeito de quais dificuldades encontraram e ele explicou que *"ah, ficamos em dúvida se era* $3x$ *ou* $x + 3$, *depois se era* $3x$ *em cada prato ou se era* $3x$ *em um e* x *no outro, mas acho que chegamos num consenso"*. No canto superior direito de seu registro escrito, exposto na Figura 51, verificou-se que eles grifaram o trecho "um outro" para referir-se ao valor x.

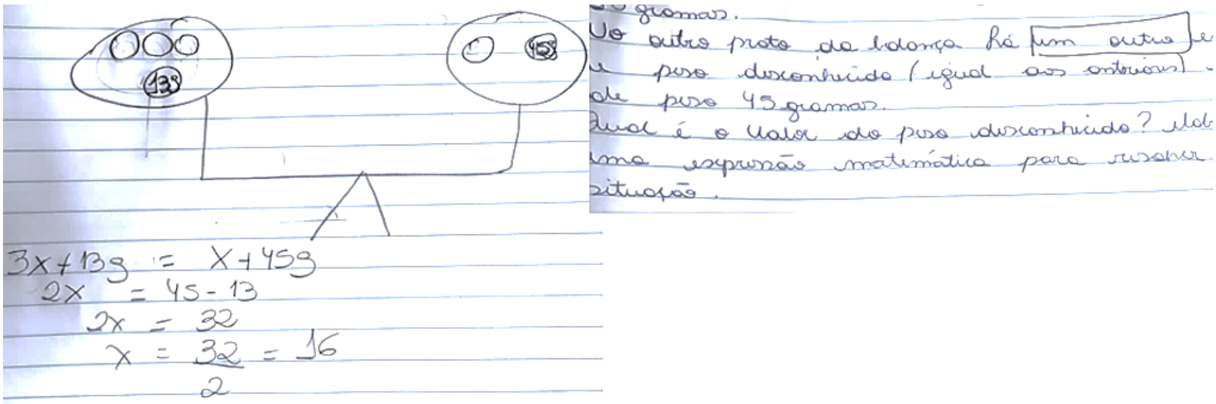


Figura 51: segunda situação do segundo encontro, elaborada por G3.

Fonte: dados da pesquisa.

Em G4, seus integrantes afirmaram que realizaram, tranquilamente, a situação e E6 brincou que *"a senhora sempre pode dar esse tipo de questão pra gente fazer prof"*. Isso permitiu conjecturar que a situação foi relativamente fácil para eles e, provavelmente, novos conceitos, obedecendo a um nível crescente de complexidade, poderiam ser incorporados à sua estrutura cognitiva.

De maneira semelhante, os participantes de G5 sinalizaram que a situação não havia provocado maiores dificuldades, no entanto, em seus áudios, verificou-se uma discussão muito interessante protagonizada por E17 e por E19. Nela, E17 apresentava dificuldades e foi auxiliado por E19, conforme pode-se verificar no trecho de suas verbalizações.

– E19: *"tu tem aqui ó* $3x + 13 = x + 45$, *então tem que trocar o* 13 *e o* x *de lugar pra poder resolver"*.

– E17: *"o problema é* 45 *dividido por* 13*"*.

– E19: *"mas não é dividido, é menos, só depois que tu divide. É* 45 *menos* 13, *que dá*

32 *e depois tu divide* 32 *por* 2*, que dá* 16*”*.

– E17: *“bah, é verdade, valeu, a gente esquece esses detalhes, é isso que a gente erra, umas besteiras”*.

Na análise do teste diagnóstico, E17 e E19, foram localizados em um nível baixo e alto, respectivamente, de bagagem de subsunçores em sua estrutura cognitiva (Figura 49). Desse modo, essa negociação de significados e explicitação de pensamentos que eles protagonizaram, possivelmente, foi benéfica para ambos.

Quando a situação foi discutida no grande grupo, E17 não mencionou suas dificuldades, na verdade, o único comentário que emergiu foi de E8, que ressaltou a respeito da dúvida de seu grupo. Os integrantes de G2, que haviam representado de maneira incorreta a expressão permaneceram calados, então aproveitou-se a manifestação de E8 e solicitou-se que ele falasse mais a respeito de como haviam elaborado sua estratégia de resolução.

No entanto, G2 foi o grupo que, aparentemente, enfrentou mais dificuldades (pois não conseguiu desvendar completamente a situação), mas, visivelmente, menos mostrou-se interessado na sua discussão. Fez-se esta constatação porque E10 deixou a sala e E12 e E15, ficaram mexendo em seus celulares enquanto E8 detalhava para todos como seu grupo havia resolvido a tarefa.

Na sequência, houve o intervalo entre períodos, mas, ainda na sala de aula, E15 se aproximou para dialogar com a professora.

– E15: *"professora, vai ter mais alguma coisa na aula hoje?"*

– P: *“sim, teremos aula até próximo das 22h, por quê?”*

– E15: *"mas o que vai ter depois do intervalo, a senhora vai dar aula, conteúdo novo?"*

– P: *“vocês vão continuar trabalhando dessa maneira e, à medida que os conteúdos ou as dificuldades forem surgindo, a gente vai comentando"*

– E15: *"é que eu tenho compromisso e vou ter que sair no intervalo, mas depois eu pego os exercícios com os colegas então"*.

Este diálogo vivenciado com E15, relembrou cenas parecidas com outras já ocorridas anteriormente, tanto no primeiro estudo, quanto diante de outras turmas, na própria experiência empírica de sala de aula. Diante do exposto, interpretou-se que o estudante sugeriu qual era a sua concepção de uma aula de Matemática, na qual o professor apresentava e/ou explicava o conteúdo aos estudantes. E, neste caso, como não haveria esta configuração, provavelmente ele não se sentiria prejudicado caso saísse mais cedo, pois seriam feitos exercícios em aula e ele poderia conferir no caderno de um colega, posteriormente.

Supôs-se que, ao ir embora, possivelmente, ele deixaria de vivenciar um dos momentos mais importantes na construção de uma aprendizagem significativa, pois copiar um exercício pronto de outro colega, provavelmente não o faria negociar, discutir e interagir conhecimentos novos com seus conhecimentos prévios. Não que tudo isso fosse ocorrer neste dia, mas, tal contexto, faria parte de uma caminhada.

Ademais, para além da mencionada experiência empírica, defende-se que a presença do professor em sala de aula justifica-se muito mais em função da sua atuação como mediador do conhecimento, de forma que os estudantes negociem os saberes escolares em interação uns com os outros, e não apenas recebam-no passivamente, reforçando a metáfora de ensino bancário pontuada por Freire (2011).

7.2.2.3 A terceira situação do segundo encontro

Após o intervalo, enquanto aguardava-se que os estudantes retornassem para a sala, aproximou-se dos que já estavam ali presentes. Neste momento, E14 discorreu: *"que legal professora, eu gostei tanto que a senhora explica o porquê das coisas pra gente, a sua aula é acessível e descontraída. A senhora permite que a gente participe, eu to me sentindo bem, apesar de ter muita dificuldade em Matemática. Sabe... quando a senhora entrou sorrindo na sala e eu lhe vi, pela primeira vez, eu senti uma coisa boa, senti que dessa vez ia ser diferente. A senhora me passou um sentimento bom".*

Disse-lhe que sua fala era muito gentil e que suas dúvidas sempre poderiam ser expostas, pois era justamente esse o motivo do nosso encontro todas as sextas-feiras. Que as aulas eram para eles, que deveriam, mesmo, ficar à vontade para perguntar. Cabe retomar que E14 era um estudante repetente, ele nunca havia sido discente da professora pesquisadora antes, mas já havia cursado a disciplina de Matemática I em semestre anterior.

Ademais, constatou-se que três estudantes não voltaram do intervalo, ou seja, o grupo passou a contar com 13 discentes. Na sequência, propôs-se, a seguinte situação na lousa:

- ***Questão 3** – Vocês irão em uma festa, mas o valor da entrada só será pago ao final dela, no caixa, junto com o valor de cada unidade de bebida[44] consumida. Como seria a expressão Matemática que representaria o custo dessa festa?*

Essa tarefa foi planejada para que eles pudessem dar alguns passos para significar o conceito de equação (nesse caso, equação custo, como a soma do custo fixo e do custo variável),

[44] Não foi feita nenhuma menção que seria uma bebida alcoólica, mas o grupo mencionou cervejas. Contudo, para descontrair, supôs-se que poderia ser leite com achocolatado, daqueles comprados em caixinhas, prontos para consumo. Todos riram. Ademais, relembra-se que todos os discentes eram maiores de idade.

mas necessitava de subsunçores em quase todas as categorias abordadas na situação seis do teste diagnóstico, uma das que apresentou maior índice de erros. Tais subsunçores consistiam no tratamento e resolução de equações, reconhecimento da equação da reta, entendimento do significado dos coeficientes angular e linear e construção de gráficos no plano cartesiano.

Teve-se a ideia de propô-la, a partir dos dados obtidos no questionário socioeconômico, pois vários afirmaram que gostavam de ir a festas nas horas de lazer, então supôs-se que esta seria uma situação atrelada ao seu contexto e poderia despertar seu interesse para dar sentido ao conceito de custo por meio dos diversos conhecimentos matemáticos que demandaria.

Ressalta-se que ela não foi exposta na íntegra, sob formato de um exercício na lousa para os estudantes, pois a ideia era justamente que os conceitos fossem surgindo naturalmente, conforme os diálogos aconteciam. Dessa forma, ela foi sendo construída e discutida, conjuntamente. Fazia-se perguntas ao grupo, dava-se tempo para elaborarem estratégias, eles respondiam, anotava-se no quadro de giz suas diferentes respostas e novas perguntas eram acrescidas.

Inicialmente, questionou-os: *“então, me digam... vocês que são assíduos frequentadores de festas, devem saber o valor que é cobrado na entrada de uma”* (P). O valor estipulado pelo grupo foi R$ 20,00, então anotou-se na lousa. Depois a pergunta foi a seguinte: *“e qual é o valor de cada bebida nessa festa?”* (P). E9 sugeriu R$ 7,00 e todos concordaram. Tudo isso gerou uma conversa descontraída entre todos, houve brincadeiras, risos e suposições, até que os indagou a respeito de como ficaria a expressão que geraria o custo total da festa.

– E17: *“não pode ser só* 20 *pila prof?”*

– P: *“pode ser sim! E nesse caso que tu acabou de falar, quantas bebidas seriam consumidas?”*

– E17: *“daí eu teria que ficar de bico seco*[45] *a noite inteira”.*

Aproveitando-se da afirmação de E17, questionou-se *“qual o valor mínimo que vocês gastariam nessa festa?”* (P). E7 complementou que *“não é esse valor que o colega disse professora? Se não beber nada, 20 pila, é daí pra mais”*. Questionou-se o grupo a respeito da afirmação dos colegas e, aparentemente, todos concordaram. Então lançou-se outro questionamento.

– P: *“muito bem, vocês disseram que poderiam ir na festa e não beber nada, ok! mas vocês também teriam uma outra possibilidade. Qual seria?”*

– E14: *“beber uma unidade prof”*.

[45] Expressão utilizada para referir-se a ficar sem beber nada.

– P: *“perfeito! Mas... e teria a possibilidade de vocês comprarem meia unidade? Dizer para o garçom, por gentileza, eu gostaria de comprar meia latinha?”*

– E14: *“até daria pra tentar, mas eu acho que ele não ia deixar prof”.*

– P: *“isso acontece. Tem coisas que só podem ser compradas, vendidas ou consideradas inteiras. Na Matemática, chamamos estas coisas, como as bebidas dessa situação, de quantidades discretas. Já outras, podem ser fracionadas e estas coisas que podem ser repartidas, chamamos de quantidades contínuas. Mas agora que vocês já sabem que as bebidas da festa só podem ser compradas em quantidades inteiras, elaborem uma expressão Matemática que represente essa situação”.*

Em seguida, três diferentes expressões foram elaboradas pelos estudantes e explicitadas, pela professora na lousa, como ilustrado na Figura 52.

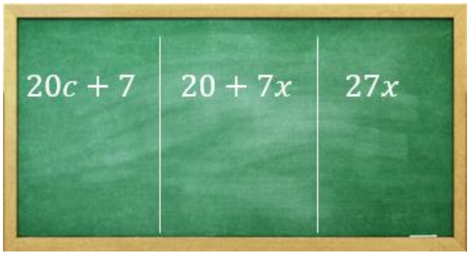


Figura 52: exemplificação de como as expressões mencionadas pelos estudantes foram expostas na lousa para discussão.

Fonte: elaborado pela autora, com base em dados da pesquisa.

Todas elas foram comparadas e discutidas, em nenhum momento foi dito que uma ou outra estava correta ou incorreta, até que a expressão $20 + 7x$ foi escolhida pelo grupo como a representante da situação. Três falas evidenciaram aparentes invariantes operatórios que foram utilizados para resolver esse tipo de situação.

– E19: *“na primeira eu posso usar C de cerveja se eu quiser né sora?”*

Este estudante, apesar de ter apresentado um nível alto de subsunçores no teste diagnóstico, havia utilizado, somente, a letra x para representar incógnitas em todas as questões, ou seja, naquele momento, ele fornecia pistas de uma possível diferenciação progressiva deste subsunçor: talvez ele estivesse diante da constatação de que letras diferentes deveriam ser utilizadas para representar grandezas diferentes, não somente o x.

– E9: *“prof, só uma pergunta: no primeiro caso, estaria ao contrário, cada bebida custaria* 20 *reais e a entrada* 7 *né?”*

Neste caso, o estudante demonstrou que já era capaz de discernir a diferença entre custo fixo (entrada na festa) e custo variável (quantidade de bebida consumida).

– E21: *“Letícia, poderíamos considerar a expressão* $27x$*, somente no caso de tomar* *uma cerveja né, daí seria* $27.1.x$*?"*

Este último estudante, demonstrou indícios de reconhecimento da letra x como um ente matemático que precisa ser explicitado na equação, independentemente, de seu valor designado. Esta fala alimenta a concepção de Usiskin (1995), o qual defende que os estudantes tendem a conceber a utilização das variáveis como símbolos ou sinais sem referência numérica.

Na sequência, solicitou-se que eles construíssem uma tabela com as quantidades de bebida consumida e o custo total da festa, levando em consideração a expressão Matemática elaborada. Essa atividade foi, relativamente, tranquila para o grupo. Cada nova constatação era anotada na lousa, inclusive a conclusão da tabela. O passo seguinte, foi a elaboração de um gráfico para representar a situação.

Essa foi a tarefa que causou mais controvérsia, pois desacomodou e gerou reclamações. A contragosto, alguns seguiram. Disse-lhes *"vamos desenhar os eixos primeiro: qual é o termo dependente e qual é o termo independente?"*. Ninguém respondeu. Fez-se nova investida: *"o dinheiro que eu vou pagar, depende da quantidade que eu vou consumir ou a quantidade que eu vou consumir depende do dinheiro que eu vou pagar?"*. Somente E9 respondeu.

Então iniciou-se o esboço do plano cartesiano na lousa e explanou-se acerca da localização dos termos, o que cada eixo representava. Deu-se um tempo para eles seguirem com suas elaborações. Nisso, questionamentos surgiram.

– E1: *"eu posso começar o gráfico a partir do lugar que eu quiser professora?"*

Solicitou-se que ele detalhasse um pouco mais a respeito de sua dúvida.

– P: *"acho que eu não entendi a tua pergunta, tu pode me explicar um pouco mais?"*

– E1: *"é que na parte negativa como que eu faço com a reta?"*

– P: *"Ah! muito interessante a tua pergunta, (nome do estudante). Vocês ouviram pessoal? Alguém sabe explicar como vai ficar o gráfico na parte negativa?"*

– E7: *"na real eu acho que tanto faz, tu pode desenhar ou não que não vai mudar nada"*

– E1: *"mas como que vai ter cerveja negativa?"*

Todos riram, inclusive E7, que completou:

- E7: *"claro, na real eu acho que, tipo... tu pode desenhar mesmo que não tenha na parte negativa, não fica errado. A professora vai considerar. Né, professora?"*.

Complementou-se que, ambos, tinham suas razões, pois, se considerássemos a equação sob o olhar, puramente matemático, estaria correto representar a reta desde o lado esquerdo do zero (chamado de parte negativa pelo grupo), mas, analisando o contexto da festa, não faria sentido considerarmos bebidas negativas, então a parte à esquerda do zero, poderia ser ocultada.

Além disso, discutiu-se a respeito do significado dos coeficientes, a relação (discreta) demarcada por uma linha de pontos e a relação crescente (quanto mais unidades de bebidas fossem consumidas, maior seria o gasto na festa), caracterizada por grandezas diretamente proporcionais.

Todas as falas protagonizadas pelos estudantes, foram muito valiosas. É preciso confessar que, por vezes, foi preciso, conter-se para não dar a resposta de imediato e instigá-los a responderem as dúvidas uns dos outros. Em conformidade com Vergnaud (1993, p. 19), a situação que promove uma discussão oral, favorece a explicitação de ideias, pois

> A atividade da linguagem favorece evidentemente o cumprimento da tarefa e a resolução do problema enfrentado. Sem isto ela não interviria. Tudo se passa como se a atividade da linguagem favorecesse a descoberta das relações pertinentes, a organização temporal da ação e o seu controle.

Contudo, visivelmente, muitos integrantes não se envolveram nessa etapa, pois ficaram de braços cruzados, conversando, ao celular ou saíram da sala, enquanto, poucos, tentavam construir o gráfico e realizavam pequenas discussões. Isso pode ter ocorrido por diversos motivos, dentre eles, porque, talvez, alguns necessitassem de subsunçores que ainda não existiam em sua estrutura cognitiva.

Ademais, o fato de vários não terem entrado em contato com o material instrucional antes do encontro, pode ter ocasionado um salto cognitivo. Nesse caso, a tarefa, não despertou sua predisposição para a aprendizagem, por não estar entrelaçada com subsunçores suficientemente estabilizados e, consequentemente não fazia sentido para eles.

Por este motivo, retomou-se a negociação a respeito de assistirem às mesmas videoaulas que já estavam no ambiente virtual antes da próxima aula e elaborou-se que seria muito conveniente levá-los ao laboratório de informática no próximo encontro para que as representações gráficas pudessem ser priorizadas e, por meio delas, novos subsunçores e/ou subsunçores já existentes, pudessem ser estabilizados.

7.2.2.4 A quarta situação do segundo encontro

Elaborou-se a seguinte situação para finalizar este encontro:

- ***Questão 4*** *– Uma pessoa vai ao supermercado e gasta R$ 80,00 em dois produtos, cujos preços são, respectivamente, R$ 12,00 e R$ 8,00.*

a) descreva uma expressão Matemática que relacione a quantidade destes dois produtos;

b) quais são as possibilidades de compra dos produtos para esta pessoa?

c) esboce esta situação graficamente;

d) o que ocorre se os produtos entrarem em promoção com 20% de desconto?

Essa tarefa foi planejada para que eles pudessem dar sentido ao conceito de equação e se assemelhava muito à sétima questão do teste diagnóstico, pois abordava as mesmas categorias de subsunçores, que consistiam na utilização de letras como incógnitas, reconhecimento da equação da reta, entendimento do significado dos coeficientes angular e linear, da ideia de equivalência, de par ordenado, além de conversões entre os registros escrito, algébrico e gráfico.

No momento da resolução, verificou-se que E14 e E2 expressaram $80 = 12x + 8y$, porém encontraram somente uma possibilidade de compra dos dois produtos, pois apresentaram o par ordenado $(4,4)$ no plano cartesiano. Indagou-os se esta seria a única possibilidade de compra, ao que E14 sinalizou: *"achamos que sim, a gente testou e deu certo essas quantias"*.

Então foram orientados a elaborar uma tabela com os valores para que se certificassem de todas as possibilidades. Além disso, que expressassem, graficamente, a situação, pois haviam denotado somente um ponto no plano, mas tal esquema se mostrou persistente e os impediu, por algum tempo, de avançar na situação

– E14: *"mas tem como elaborar um gráfico com uma equação assim prof?"*.

– P: *"porque você acha que não daria pra elaborar?"*

– E14: *"mas como que fica daí? É uma reta também?"*

Nesse caso, presumiu-se que E14 elaborou um provável conceito-em-ação que atrelava a representação gráfica da reta estritamente à equação na forma reduzida da reta e, como, no enunciado, foram influenciados a escrever a equação de outra forma, não perceberam que poderiam manipular algebricamente tal equação para verificá-la graficamente.

Nisso, E9 se prontificou a auxiliar E2 e E14. Ele havia verificado quatro diferentes possibilidades, que explicou para seus colegas. Além disso, E9 demonstrou utilizar invariantes operatórios mais sofisticados, pois apresentou uma expressão com duas incógnitas, diferentemente de como havia feito no teste diagnóstico (no qual utilizou a mesma letra x para representar cadernos e canetas em uma mesma equação), isso mostrou indícios da elaboração de um esquema mais avançado.

Para além destas constatações, explicita-se, na Figura 53, o registro de E20. Escolheu-se este em detrimento dos demais, em virtude de suas elaborações, pois, aparentemente, ele relacionou esta situação com outra em um nível maior de complexidade. Provavelmente, ele apresentava subsunçores a respeito de equações do segundo grau e isto gerou um possível conceito-em-ação incorreto para o registro gráfico.

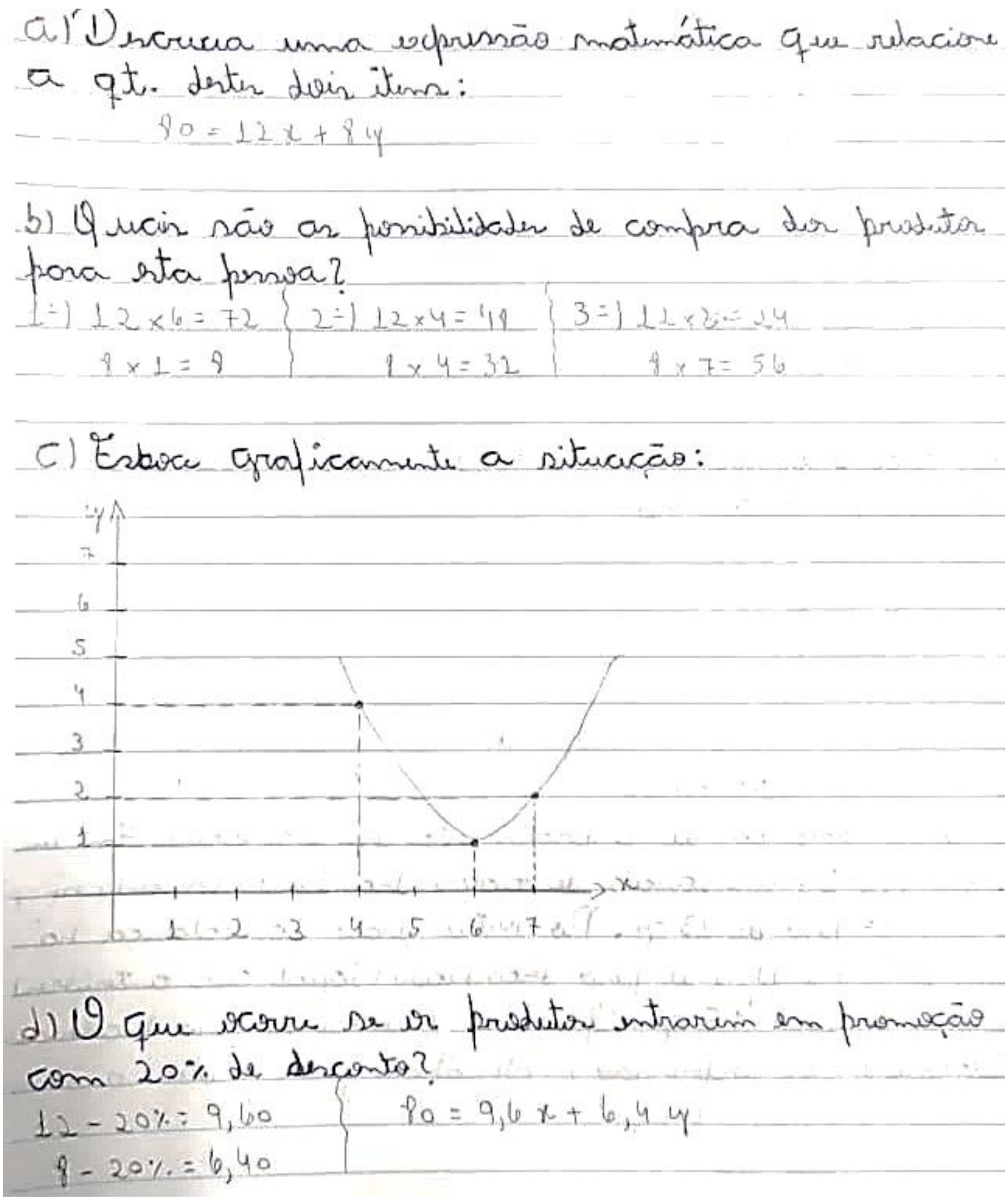


Figura 53: quarta situação do segundo encontro, por E20.

Fonte: dados da pesquisa.

Ele explicou a equação encontrada no item a) e justificou que só expôs três pares ordenados, pois considerava incorreto contabilizar a quantidade zero para um dos dois itens: *“pra mim isso não é uma possibilidade válida porquê se eu não vou comprar nenhum item de um deles não é uma possibilidade”*. Ele direcionou sua fala ao seu colega E9, que havia mencionado o par (0,10).

Contudo, conforme seu registro gráfico, E20 explicitou uma parábola. Mas, este, era o segundo encontro e ainda não haviam sido feitas discussões a respeito das equações do segundo grau, ou seja, aparentemente, ele apresentava subsunçores nesse campo de conhecimentos.

Além disso, o estudante elaborou um possível conceito em ação, pois afirmou: *“eu uni* *os três pontos que eu achei substituindo e achei uma parábola, o vértice tá aqui"*, apontando para o ponto $(6,1)$. Contudo, este provável conceito-em-ação, estava incorreto, pois os três pontos, nesse caso, eram colineares. Ademais, a respeito do cálculo de porcentagens, ele afirmou para a professora: *"adorei a explicação que tu fez aquela hora sobre aumento e desconto, fica bem mais fácil de fazer na calculadora, eu coloquei direto, não precisa ficar fazendo por regra de três"* (E20).

Houve um esquema de resolução, à primeira vista, comum, que foi apresentado por cinco estudantes: E1, E8, E10, E13 e E16. Eles reproduziram a expressão sob a forma da equação reduzida da reta: $y = ax + b$, tal como a situação anterior. O problema é que eles escreveram expressões do tipo $80 = 12x + 8$ (E1 e E13) e $80y = 12x + 8$ (E8, E10 e E16).

Acreditou-se que eles tenham escrito a equação desse modo, porque na terceira situação (da festa), a equação da reta foi amplamente discutida e apresentada na sua forma reduzida. Isto evidenciou um possível esquema de resolução por condutas automatizadas, na qual o professor faz um exemplo na lousa e, em seguida, apresenta uma lista com exercícios análogos, que só diferem nos algarismos, mas são resolvidos todos da mesma maneira.

Inclusive, E10, demonstrou-se incômodo com este fator, pois argumentou: *"ai prof, uma questão é de um jeito, uma é de outro, eu nunca vou saber como fazer então. A senhora poderia dar uma lista com vários exercícios parecidos pra gente fazer, até entender o processo de resolução. O problema é que a gente entende um, aí vem outro exercício que é de outro jeito diferente e a gente se perde"*.

Neste caso, provavelmente, o estudante estava diante de classes de situações na qual não dispunha de todas as capacidades necessárias para enfrentar. Vergnaud (1993), ratifica que os esquemas que regem este tipo de conduta, obrigam o sujeito a tentativas frustradas, que podem levá-lo ao êxito ou ao fracasso, isso gera desacomodações e hesitações. Logo, presumivelmente, isto explicaria a insatisfação de E10.

Desse modo, na tentativa de tranquilizá-lo, a professora explicou-lhe que seria disponibilizada uma lista de tarefas no *Moodle* e que, estas, seriam semelhantes às discutidas em aula, mas que, durante os encontros presenciais, eles precisariam ser confrontados com diversos tipos de situações pois, assim, teriam a oportunidade de verificar como a Matemática pode ser importante para a tomada de decisões, por meio de inúmeros caminhos.

E, para que isso fosse possível, diferentes situações precisariam ser discutidas nos encontros, pois seria dificultador trabalhar com um mesmo tipo de situação em aula e disponibilizar situações diferentes para eles realizarem em casa. Ademais, argumentou-se que, se estavam enfrentando dificuldades, discutindo e negociando ideias, isso era um indicador de que estavam avançando, pois os erros e as dúvidas faziam parte do processo de aprendizagem.

Mas que, em casa, sozinhos, provavelmente, não ocorreria uma troca tão rica quanto em sala de aula, além de não ser possível estar junto para auxiliá-los, quando necessário. Alegou-se que as listas extras e videoaulas disponibilizadas como material de apoio no *Moodle* não estavam sendo aproveitadas por todos os estudantes, dessa forma, seria um erro transferir para o virtual as situações que eles tinham mais dificuldades no presencial.

Após esta explicação, E10 afirmou: *"eu entendo prof, sei que é pra ajudar a gente, é que eu tenho dificuldades mesmo e to me sentindo meio perdida, mas eu vou estudar mais e refazer os exercícios em casa. Não dá bola pras minhas reclamações, eu sou assim mesmo"*.

Após algum tempo, comentou-se a tarefa na lousa, então, E9 e E10, trocaram ideias, pois estavam em lugares distantes um do outro na sala e não haviam discutido a situação antes.

– E10: *"eu ainda não entendi como que eu escrevo isso, não decifrei"*

– E9: *"tu tem que usar uma letra pra cada produto, são dois diferentes e tu tem 80 pila pra gastar com eles"*.

– E10: *"sim, eu usei, mas não dá certo"*

– E9: *"mas tu tem* 80 *pra distribuir igualmente entre dois produtos diferentes, aí é que tá, o* x *é a quantidade do* 12 *e o* y *a do* 8*"*.

– E10: *"tá, mas e como é que vai ficar a equação daí?"*

– E9: *"*$80 = 12x + 8y$*"*

– E10: *"meu Deus, por que que eu não pensei nisso? Eu atentei que tinha que colocar o* y *junto com o 80!"*

Por meio de sua fala, verificou-se que E9 aprimorou seu artifício, inicialmente equivocado, de resolução tanto na forma predicativa, quanto na forma operatória, pois conseguiu aprimorar seu esquema de pensamento a ponto de enunciá-lo para a turma.

Essa etapa findou o segundo encontro e, aos poucos, os estudantes foram se despedindo e deixando a sala de aula. Nestes minutos finais, aproximou-se de E9, pois constatou-se que ele era um estudante com grande potencial, além disso, se diferenciava dos seus colegas no quesito desenvoltura, demonstrava uma personalidade desinibida e altruísta.

Muitos eram tímidos e E9, além de dispor de certa facilidade diante das situações, gostava de auxiliar os colegas. Dessa forma, foi convidado para ser o tutor da disciplina, uma espécie de ajudante, que ficaria atento aos colegas que precisassem de auxílio e o faria sempre que pudesse. Além disso, teria que assistir aos materiais instrucionais disponíveis no *Moodle* e realizar as atividades extras. Isso não lhe renderia remuneração financeira, mas um certificado, além, é claro, da experiência acadêmica e pessoal. Ele demonstrou-se contente e aceitou o convite. De qualquer forma, disse-lhe para pensar a respeito, pois não era uma convocação.

Após este momento, um único estudante permaneceu na sala, E7, que proferiu a seguinte pergunta: *"professora, quais as fórmulas que eu tenho que saber e como que eu vou saber quando que eu tenho que usar elas?"*. Foi explicado que as fórmulas não seriam as protagonistas das aulas e que elas sempre estariam à disposição deles, na lousa ou nas folhas, que não precisariam ser decoradas. Além disso, que a interpretação seria o aspecto mais importante naquela disciplina.

Então ele ressaltou: *"as aulas vão ser sempre assim, como foi hoje?"*. Respondeu-se que elas seriam diferentes umas das outras, mas teriam enfoque na discussão de situações variadas, tarefas ora individuais, ora em grupos com alguns momentos de explicação, ao que ele respondeu: *"então eu to lascado!"*. O estudante se despediu com uma aparente expressão de lamentação/preocupação.

Admite-se que, em um primeiro momento, a fala de E7 foi impactante, contudo, acreditou-se que, provavelmente, ele teria vivenciado aulas de Matemática que lhe requeriam mera aplicação de fórmulas e resolução algorítmica de exercícios, o que, em linhas gerais, configura o cenário de uma aprendizagem mecânica. Talvez naquele momento, diante de uma situação na qual o professor tentava deixar de ser o protagonista e estivesse permitindo que ele falasse ou questionasse, ele possa ter se sentido confuso, desconfortável e até com medo de expor suas dificuldades.

Ou ele também pode, simplesmente, não ter gostado da configuração do encontro, afinal isso poderia acontecer. Não seria possível afetar todos, positivamente, da mesma maneira, por mais que se dispusesse das melhores intenções. Seres humanos têm variações de humor, problemas, gostos pessoais, aptidões, logo conjecturou-se que isso foi/continuaria sendo normal, contudo, não custaria dedicar atenção ao estudante nos próximos encontros.

7.2.3 O terceiro encontro – 08/03/2019

Ainda nos corredores, antes de iniciar a aula, E12, que era um estudante repetente na disciplina, aproximou-se e afirmou: *"prof, na semana anterior eu fui embora no intervalo, mas não vou mais fazer isso, eu quero aprovar na disciplina dessa vez e sei que, pra isso, eu tenho que mudar minha postura, eu vou me esforçar mais!"*. Disse-lhe que este era um passo muito importante, diagnosticar coisas que não estavam dando certo e se esforçar para melhorá-las.

A turma havia sido informada com antecedência que, neste dia, iriam ao laboratório de informática, onde utilizariam o *Geogebra*. Contudo, antes de dar início às tarefas no *software*, retomou-se os assuntos discutidos na semana anterior, questionou-os se havia alguma dúvida referente aos exercícios da lista de tarefas que havia sido proposta para ser feita após o encontro e se haviam assistido aos vídeos disponibilizados no *Moodle*.

Isto porque, além dos dois vídeos que já estavam no ambiente virtual desde antes do segundo encontro, disponibilizou-se um novo vídeo, que apresentava um exercício aplicado com explicação detalhada a partir da informação de dois pontos da reta. Página disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=6Vnf-u3rSSI>, (6 minutos e 34 segundos).

Oito, dos nove estudantes presentes no início da aula, afirmaram ter assistido aos vídeos. Eles complementaram que os materiais tinham os auxiliado a relembrar conceitos, uma das falas foi de E9, que ressaltou: *"bah, aquelas resoluções de sistemas eu nem me lembrava mais, ainda bem que eu olhei. Mas dá pra fazer por matrizes também né sora? eu lembro que no cursinho o professor explicava assim"*. Disse-lhe que sim, pois, provavelmente este procedimento era comum para ele e, caso preferisse, poderia proceder dessa forma.

Além dos nove estudantes presentes desde o início, outros seis chegaram em algum momento após o início da aula. No terceiro encontro, todos já haviam comparecido a, pelo menos, um deles, o problema era que muitos chegavam atrasados, outros saíam mais cedo, alguns participavam pela primeira vez da aula. Dessa forma, a continuidade do trabalho parecia, constantemente, prejudicada, o grupo nunca estava completo e andava, aparentemente, descompassado, mas seguia...

Deu-se início às atividades no *Geogebra*, página disponível em: <https://www.geogebra.org/graphing>, por meio da retomada da situação do encontro anterior (situação da festa). Os estudantes relembraram qual era sua equação correspondente e foram orientados a escrevê-la na janela de entrada do *software*. Isso permitiu que se familiarizassem com suas ferramentas.

Com um clique, apareceu a reta que eles haviam desenhado no seu caderno, alguns sob protesto[46] e com auxílio de réguas e outros objetos com linhas retas (alguns usaram cartões de crédito e a embalagem dos grafites).

Retomou-se aspectos como o valor do custo fixo, que era o valor da entrada na festa, demarcado no eixo y e o custo variável. Solicitou-se que fizessem modificações na equação (imaginassem outros valores para a entrada e para a bebida), a fim de que verificassem as modificações que elas ocasionariam no traçado da reta.

[46] Recorda-se que, no segundo encontro, alguns estudantes reclamaram por ter que representar a situação graficamente, outros, inclusive, não o fizeram.

Isso permitiu a diferenciação progressiva dos conceitos, pois ainda no início do encontro, os assuntos foram apresentados/retomados de maneira global e, ao longo dele, suas minúcias foram diferenciadas e desdobramentos específicos foram abordados.

Na sequência, realizou-se três atividades, com a intenção de oportunizar a compreensão do conceito de equação. As situações deste dia, não possuíam relação com o contexto administrativo, entretanto, possibilitaram a visualização e a vivência diante de algoritmos necessários para o avanço do domínio do campo conceitual das equações de primeiro grau, de maneira articulada com sua representação gráfica, que aparentemente, mostraram-se, obliterados nas verificações iniciais.

Elas demandavam subsunçores referentes à verificação da ideia de equivalência, reconhecimento de letras como incógnitas, da equação da reta, entendimento da ideia de par ordenado, do significado dos coeficientes angular e linear, capacidade de resolução de um sistema de equações, além de conversões entre os registros escrito, algébrico e gráfico.

7.2.3.1 A primeira situação do terceiro encontro

Propôs-se a seguinte tarefa ao grupo:

- ***Questão 1** – Resolva as expressões abaixo e esboce os seus gráficos (indique os coeficientes e os pontos de intersecção com os eixos):*

a) $y - 9 = -3x + 13$ *c)* $-34 + 8x = 2y$

b) $22 = 10x - f(x)$ *d)* $-1{,}5 - 5x = y$

Ela exigia a resolução de equações e o esboço do gráfico, mas as equações não foram apresentadas já na forma da equação reduzida da reta e, por isso, os estudantes teriam de realizar operações para que elas ficassem sob esse formato. Eles poderiam utilizar o *software* para plotar os gráficos, contudo, a orientação foi que, primeiramente, eles encontrassem as equações correspondentes em seus cadernos e, somente depois disso, utilizassem o *Geogebra*, pois averiguou-se que o grupo, de maneira geral, apresentou carência de subsunçores estabilizados nas categorias de operações algébricas e operações aritméticas. Ao longo das situações, presenciou-se algumas explicitações de pensamento.

– E1: *“professora, como eu faço com esse $f(x)$, tem que substituir?”*

– P: *“tu diz substituir por algum valor?”*

– E1: *“é, como que resolve com $f(x)$, eu não to lembrando?”*

Ele estava se referindo ao item b) da primeira situação. Neste caso, eventualmente, o estudante apresentava rupturas no conjunto de significantes, para representar os procedimentos de resolução. Além disso, supôs-se a ausência do conceito-em-ação "$f(x)$ é equivalente a y" para operar em situação. Então, auxiliou-o para proceder.

Enquanto isso, E3 demonstrou instabilidade diante do reconhecimento da noção de equivalência. Essa não era a primeira vez, pois, desde o primeiro encontro, esquemas com essa roupagem já vinham sendo explicitados pelo estudante.

– E3: *"professora, como faz, passa tudo pro lado direito, não tem problema se o y ficar negativo?"*

Ele estava referindo-se à equação $-1{,}5 - 5x = y$. Solicitou-se que ele explicasse um pouco mais a respeito de sua dúvida.

– E3: *"eu vou ter que trazer o y pra cá e levar o* $1{,}5$ *e o* $5x$ *pra lá, daí não tem problema desse* y *ser negativo?"*

Tudo isso acompanhado de gestos explicativos.

– P: *"e se tu fizer isso, como vai ficar a equação?"*

– E3: *"*$-y = 1{,}5 + 5x$*".*

Enquanto isso, o colega que estava do seu lado, interveio.

– E11: *"essa equação já tá pronta, porque se tu trocar tudo de lado da igualdade fica tudo igual".*

– E3: *"é sério? Nunca tinha me dado por conta que se eu trocasse todos os números de lado, ficaria tudo igual".*

Este indício, reforçou que ele ainda possuía subsunçores desestabilizados para o significado de igualdade, no entanto, demonstrou pequenos indícios de que ele acabava de conceitualizar a respeito desse conhecimento e, supostamente, ele era incorporado em sua estrutura cognitiva, ou seja, ele estava no processo.

Ao concluir a primeira tarefa, foram incentivados a elaborar, modificar e comparar equações, com a finalidade de que eles visualizassem e diferenciassem quando duas retas eram paralelas e/ou concorrentes, pois este seria um assunto aprofundado no próximo encontro.

Apresenta-se, na Figura 54, o registro do G3, formado por E4, E10 e E18. Ressalta-se que todos os estudantes tinham computadores à sua disposição, de tal modo que, todos eles manusearam as ferramentas do *software*, fizeram suas considerações em seus cadernos e, ao final, elaboraram uma única atividade para entregar à professora.

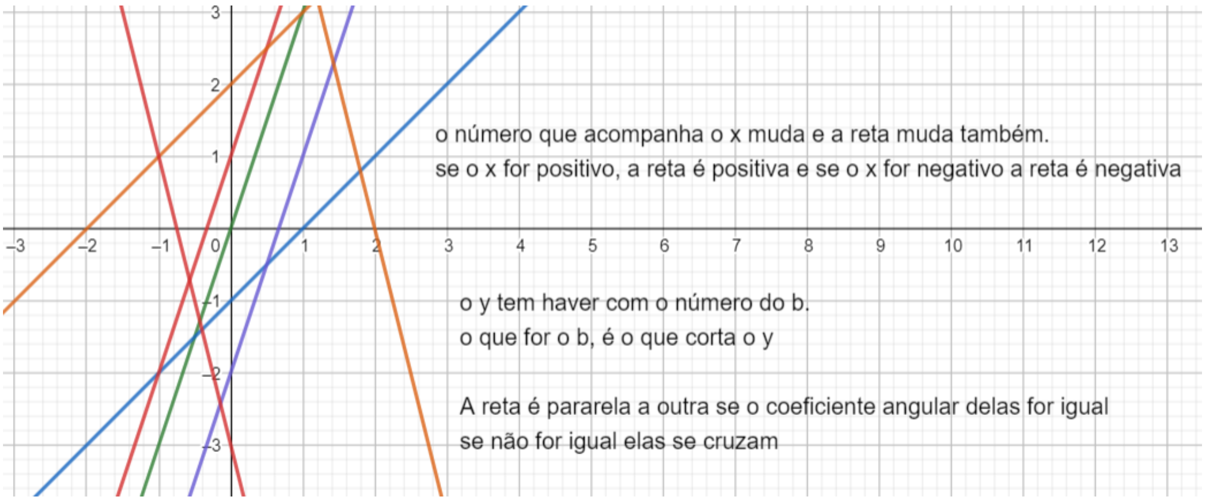


Figura 54: conclusão do G3, a respeito dos coeficientes angular e linear da equação da reta.
Fonte: dados da pesquisa.

Um aspecto curioso foi que, enquanto realizavam a atividade, por escrito, demonstraram invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação), predominantemente, corretos para denotar a relação entre o coeficiente angular e a inclinação da reta e a relação entre o coeficiente linear e a intersecção com o eixo y, todavia, supostamente, eles ainda não dispunham de elementos suficientes no conjunto dos significantes para expressar nomenclaturas específicas (nomes dos coeficientes, retas concorrentes). Cabe ressaltar que a ideia “a reta ser um ente positivo ou negativo”, foi um conceito-em-ação evidenciado neste e em outros grupos. Apesar disso, externalizaram significados e deram conta da tarefa.

7.2.3.2 A segunda situação do terceiro encontro

Esta situação, apresentava a seguinte solicitação:

- ***Questão 2*** *– Os pontos a seguir indicam as retas que passam pelos pontos A e B. Em cada um dos casos, elabore o gráfico e apresente a equação da reta corresponde para responder às seguintes questões:*

a) $A(0,0)$ *e* $B(2,3)$ *c)* $A(0,4)$ *e* $B(1,2)$

b) $A(-4,1)$ *e* $B(1,3)$ *d)* $A(0,3)$ *e* $B(5,1)$.

Questionamentos:

– Qual é o coeficiente angular? E o linear?

– Esta reta é crescente ou decrescente?

Conforme exposto, a tarefa demandava que, a partir de dois pontos conhecidos, eles verificassem qual era a equação da reta correspondente e elaborassem o gráfico. Além disso, que analisassem os seus coeficientes e como eles influenciavam o traçado da reta no sistema cartesiano. Evidentemente, poderiam contar com o auxílio do *software* para isso. No item b), houve bastante negociação, pois o lado esquerdo do sistema cartesiano (3º e 4º quadrantes), foi denotado como uma espécie de “lugar problemático” para alguns, que demonstraram dificuldades no seu enfrentamento.

– E12: *“quando a reta corta o eixo x na parte negativa, é uma reta decrescente”*.

– P: *“o que tu quer dizer com parte negativa?”*

– E12: *“que esse lado esquerdo é todo negativo”.*

– P: *“o x é negativo, mas o y também é?”*

– E12: *“mas sora, como que eu achei um x negativo e a reta é positiva? Tem alguma coisa errada!”*

– E9: *“ué, também buguei sora, pode tá negativo aqui e a reta ir pro outro lado?”*

– E20: *“prof, se o x é negativo, a reta não tem que descer?”*

Retomou-se os exemplos anteriores que já haviam sido construídos por eles e dialogou-se a respeito de suas indagações. Conjecturou-se que o grupo de estudantes estava diante de um possível teorema-em-ação que os permitia inferir que, “se a raiz da equação fosse negativa, então a reta seria decrescente e eles iniciariam seu traçado por este valor”. Isto já havia ocorrido com um estudante participante do grupo do estudo 1.

Juntamente com E14, E9, E12 e E20, compunham o G2 e realizaram as atividades conjuntamente. Aparentemente, estavam desestabilizados, mas seguiram suas elaborações, no entanto, fizeram questão de evidenciar suas constatações em seu registro na Figura 55. Eles finalizaram: *“bom, se o desenho mostra que é assim a gente aceita”* (E12). Pareciam acreditar que o *software* poderia estar os induzindo ao erro, pois a reta era crescente e a raiz, negativa o que ia de encontro ao que acreditavam e já haviam verbalizado: *“se a raiz é negativa, a reta é decrescente”* (E20).

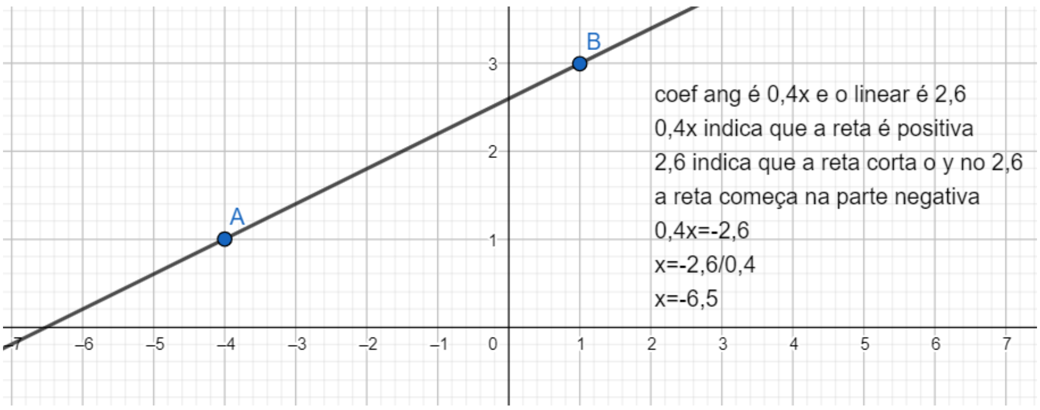


Figura 55: conclusão do G2, a respeito dos coeficientes angular e linear da equação da reta.

Fonte: dados da pesquisa.

Após o término desta atividade, na tentativa de minimizar esta dificuldade, fez-se uma pequena brincadeira, na qual sugeria-se determinadas características e eles explicitavam equações que atendessem aos requisitos. Por exemplo, solicitava-se uma reta decrescente, que interceptasse o eixo y em um valor negativo e uma possível resposta dada seria $y = -x - 1$.

7.2.3.3 A terceira situação do terceiro encontro

Esta atividade, ocorreu após o intervalo e contou com a participação de 14 discentes e continha o seguinte enunciado:

- ***Questão 3** – Em cada um dos itens, descubra qual é a equação da reta representada no sistema cartesiano.* (A situação continha quatro gráficos, que não são expostos aqui, mas podem ser verificados no Apêndice G).

Dessa forma, ela requeria o caminho inverso das duas primeiras, ou seja, que eles transitassem do registro gráfico para o algébrico.

Ao longo desta tarefa, houve a predominância de uma fala nos diferentes grupos, pois, por meio de suas verbalizações, verificou-se um curioso e provável teorema-em ação:

– E12: *“Letícia, se o coeficiente [...] linear, o "b", é onde a reta corta o eixo y, então o "a" é onde corta o eixo x, né?”*

– E3: *“prof, esse aqui é onde corta o eixo x né?* (Apontando para o coeficiente angular da equação, em seu caderno).

– E10: *“prof, o "a" é onde corta o x né?*

Este pensamento, aparentemente, os acompanhou ao longo da tarefa e, em alguns casos, mesmo sob a constatação do registro gráfico por meio do *software*, permaneceram explicitando dessa forma. Esse cenário corroborou as asserções de Vergnaud (1993) e Moreira (2004), quando salientam que as concepções prévias dos alunos contêm teoremas e conceitos-em-ação, muitas vezes, determinantes no progressivo domínio de um campo conceitual, podendo auxiliar ou prejudicar a aprendizagem, e cabe ao professor, por meio de um mapeamento, realizar esse diagnóstico e orientar as situações de aprendizagem.

Expõe-se, a seguir, na Figura 56, o registro de G1, formado por E1, E3 e E19, que explicitaram indícios da compreensão do conceito de equação e explicitaram alguns indícios de como procederam por meio de sua forma operatória e predicativa. Eles apresentaram um sistema de equações e resolveram-no para, depois, confrontar suas respostas com o que o *software* indicava.

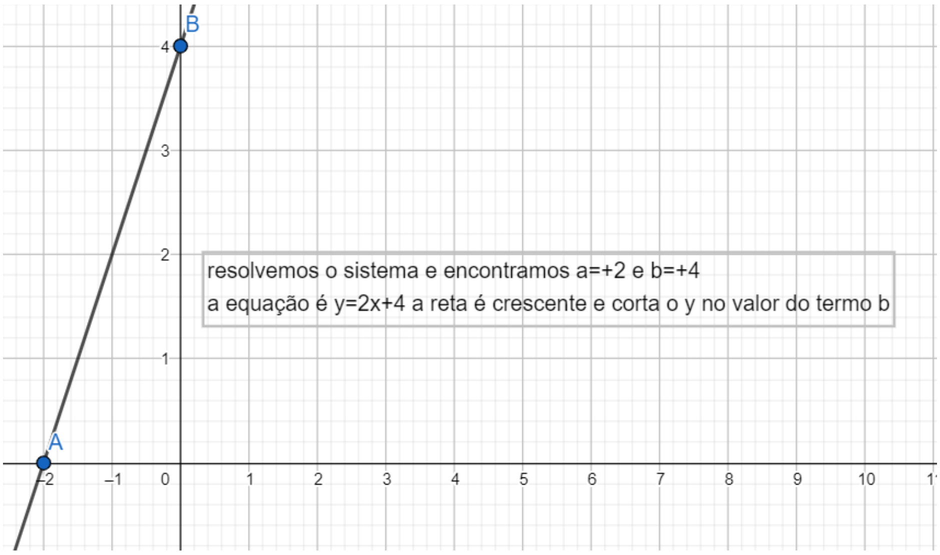


Figura 56: conclusão do G1, a respeito dos coeficientes angular e linear da equação da reta.
Fonte: dados da pesquisa.

Eles demonstraram capacidades na conversão entre os registros gráfico e algébrico. Segundo Duval (2003, p. 14), “a originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de, ao menos, dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar, a todo momento de registro de representação”. Além disso, também mobilizaram o registro escrito, pois elaboraram um texto com um resumo de suas constatações, como segue na Figura 57.

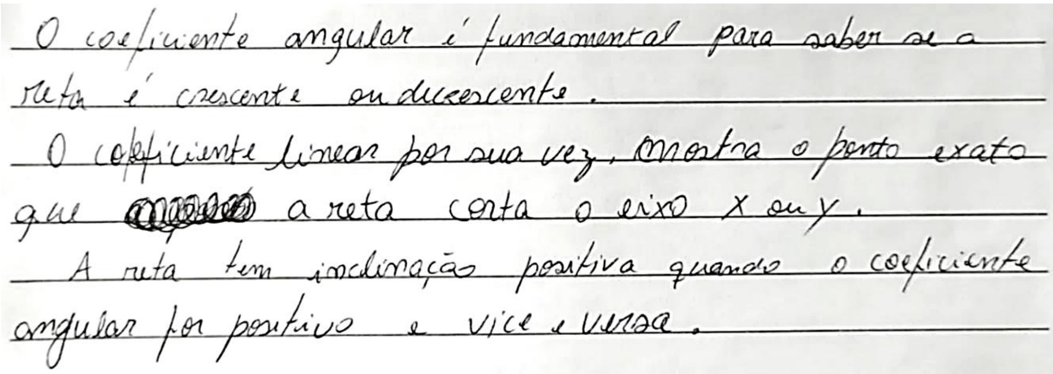

O coeficiente angular é fundamental para saber se a reta é crescente ou decrescente.
O coeficiente linear por sua vez, mostra o ponto exato que a reta corta o eixo x ou y.
A reta tem inclinação positiva quando o coeficiente angular for positivo e vice e versa.

Figura 57: resumo elaborado por G1, a respeito dos elementos da equação da reta.
Fonte: dados da pesquisa.

Como este trecho foi elaborado conjuntamente, supõe-se que todos os integrantes apresentavam este suposto conceito-em-ação com um pequeno equívoco, pois mencionaram que o coeficiente linear mostra o ponto exato onde a reta corta o eixo “x ou y”.

Além disso, outras evidências poderiam ser obtidas de seus escritos, por exemplo, o conceito-em-ação *“o coeficiente angular é fundamental para saber se a reta é crescente ou decrescente”* e o provável conceito-em-ação implícito de que a inclinação da reta pode ser verificada, somente, por meio do coeficiente angular. Nesse caso, eles teriam desprezado a verificação da inclinação da reta pela visualização de dois pontos no gráfico.

Contudo, alguns estudantes não demonstraram predisposição semelhante, pois negaram-se a concluir a tarefa, por exemplo, *"essa já tá pronta, já tem o gráfico, pra que que eu vou fazer se eu coloco aqui e ele já me dá a resposta?"* (E17) e seguiu de braços cruzados.

Desse modo, verificou-se que, para alguns integrantes a tarefa os desacomodou, os fez modificar estratégias, buscar auxílio da professora e dos colegas. Para outros, no entanto, sequer foi desencadeadora da explicitação de um esquema. Isso pode ter ocorrido em virtude do seu nível de conceitualização ou, ainda, por medo do fracasso e permitiu conjecturar que muitas novas investidas ainda precisariam ser feitas para convencê-los e auxiliá-los a explicitar seu pensamento. Além do mais, os estudantes poderiam apresentar subsunçores que estariam os impedindo de avançar no campo conceitual das equações.

A respeito dessa ideia, Moreira (2004, p. 21), salienta que

> A construção do conhecimento pelo aprendiz não é um processo linear, facilmente identificável, ao contrário, é complexo, tortuoso, demorado, com avanços e retrocessos, continuidades e rupturas. O conhecimento prévio é determinante no progressivo domínio de um campo conceitual, mas pode também, em alguns casos, ser impeditivo.

O discente E10, por exemplo, que havia revelado seu incômodo ao ser confrontado com situações muito distintas no encontro anterior, neste, demonstrou dificuldades, é claro, mas empenho e interesse e isso reforçou que este tipo de atividade, fazia parte das classes de situações de que ele dispunha no seu repertório de capacidades. Supõe-se que isso ocorreu por elas caracterizarem situações num campo mais algoritmizado, ou seja, não exigiam interpretações do real e conversões entre os registros escrito e algébrico, que foi, justamente, o motivo de sua reivindicação na aula anterior.

Finalizou-se o encontro retomando as situações já abordadas no início deste e nos encontros anteriores (situação da festa, da balança em equilíbrio e da compra de dois produtos). Os estudantes foram convidados a utilizarem o *software* para verificarem todas elas. Contudo, não havia mais tempo suficiente para isso nesse dia, dessa forma, foi uma tarefa para fazerem ao longo da semana. Também foram informados que, a partir daquele dia, poderiam utilizar o *Geogebra* em seus celulares, e que a calculadora científica seria um objeto muito demandado durante as aulas.

Ao final do encontro, E9 afirmou que havia sentido diversas dúvidas durante a aula e estava inseguro a respeito de sua capacidade para ser o tutor da disciplina. Disse-lhe que não se preocupasse, pois, para ser tutor, ele não precisaria saber todas as respostas. Além disso, sua personalidade, naturalmente, espontânea, o fazia se aproximar dos colegas para auxiliá-los, pois ele compartilhava suas ideias e isso era ótimo, que continuasse do jeito como estava.

Neste dia, finalizou-se a segunda etapa da UEPS (situações-problema), na qual propôs-se sete situações (quatro no segundo e três no terceiro encontro), em nível introdutório, levando em conta o conhecimento prévio dos estudantes, com o intuito de que elas fornecessem uma espécie de ancoragem para a abordagem dos conceitos que seriam enfatizados na próxima etapa, o que, aparentemente, ocorreu.

Resgata-se a palavra “aparentemente”, pois, eventualmente, muitas coisas não foram diagnosticadas, evidenciadas, seja porque os estudantes não as explicitaram de nenhuma forma (predicativa e operatória) ou porque alguns não estavam presentes em diversos momentos da(s) aula(s). Conforme mencionado, alguns estudantes chegaram atrasados, saíram no intervalo, alguns, frequentemente, se ausentavam durante parte de um período e um estudante, inclusive, iniciou o semestre neste terceiro encontro.

7.2.4 O quarto encontro – 15/03/2019

Neste dia, iniciou-se a terceira etapa da UEPS (aprofundando conhecimentos), por meio da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora dos conceitos. Optou-se por não disponibilizar, previamente, nenhum vídeo no *Moodle*, em virtude das tarefas extraclasse no *Geogebra*.

Além disso, a revisão prevista para o início deste dia e as próprias situações trabalhadas ao longo dele, poderiam servir como organizadores prévios para evidenciar a relacionabilidade entre os conhecimentos prévios e os novos conhecimentos que seriam estudados no quinto e no sexto encontros (quarta etapa). Convidou-se os 16 estudantes, inicialmente, presentes a questionarem e conversarem entre si e com a professora.

Para diferenciar progressivamente, explorou-se os conceitos de custo, lucro, receita, demanda e oferta. Estabeleceu-se suposições a respeito da procura por sorvetes no verão e por pantufas no inverno, (lei da demanda e oferta). Além disso, E14, produzia doces para vender na universidade e custear sua festa de formatura, então utilizou-se o seu exemplo para diferenciar gastos fixos, gastos variáveis, arrecadação e lucro. Isso rendeu uma conversa com participação de parte[47] do grupo e, aparente, interesse de parte dos discentes.

A reconciliação integradora, foi caracterizada pela verificação de que todas estas diferentes equações, obedeciam a determinada lei Matemática (desde que linear), ou seja, possuíam coeficientes, inclinação, seriam paralelas ou concorrentes entre si. Ademais que,

[47] Sinaliza-se parte do grupo, pois alguns permaneceram em seus celulares, mesmo após solicitação de que guardassem o objeto e um permaneceu de braços cruzados, com a cabeça escondida entre eles, na classe.

conhecendo dois pontos de uma reta (ou duas informações a respeito de uma quantidade e um valor, que poderiam ser retirados de um contexto real), poder-se-ia estabelecer a sua equação, por meio da resolução de um sistema de equações.

Na intenção de obter um cenário diferente do ocorrido no estudo 1, no qual evidenciou-se que muitos discentes protelaram a externalização de suas dúvidas até o encontro que antecedeu à prova[48], propôs-se incluir outros momentos avaliativos[49] antes do teste individual e este dia foi um destes. Evidentemente, isto foi acordado na primeira semana de aula. Mas, na prática, este foi um dia igual aos outros, com atividades em grupo.

A diferença, foi que as atividades valiam 2,0 pontos no total de 10,0 do somatório do módulo, no entanto ressalta-se que houve a predominância de uma avaliação qualitativa em detrimento de uma avaliação quantitativa, pois a preocupação com a externalização de significados se sobrepôs à atribuição de uma nota aos erros ou acertos dos estudantes.

Contudo, adianta-se que o problema de assiduidade e de permanência em sala de aula persistiu. Além disso, alguns que se faziam presentes, não externalizavam suas dúvidas, mesmo trabalhando em grupos. Presenciou-se que uns observavam seus colegas realizando as tarefas, mas, aparentemente, não se envolviam nelas. Dessa forma, o trabalho ocorreu em diversos cenários: alguns demonstraram avanços notórios, outros não expuseram suas conjecturas para que fosse possível auxiliá-los, mas o trabalho em grupo foi uma característica facilitadora da troca de experiências que, sem dúvidas, deveria continuar sendo fomentado.

As tarefas discutidas no quarto dia, tencionavam dar sentido ao conceito de equação, com ênfase na representação gráfica. Para isso, requeriam a mobilização de capacidades e de subsunçores necessários desde o primeiro encontro. Nisso, verificou-se a ideia de progressividade e de organização hierárquica dos subsunçores a qual Ausubel (1963), se refere.

7.2.4.1 A primeira situação do quarto encontro

A primeira tarefa, continha a seguinte enunciação:

- ***Questão 1*** – *Uma empresa de garçons "A" cobra, por serviço feito em festas, um valor fixo de $R\$\ 500{,}00$ e $R\$\ 68{,}00$ por hora trabalhada. Outra empresa de garçons "B" cobra, pelo mesmo serviço, um valor fixo de $R\$\ 480{,}00$ e $R\$\ 73{,}00$ por hora trabalhada.*

---

[48] Conforme seus relatos, à época, isso ocorreu porque preferiam estudar às vésperas da prova.

[49] Tratava-se de momentos formais de avaliação, que foram inseridos antes da prova para incentivar os estudantes a participarem das aulas, pois, de maneira geral, eles se mostravam preocupados em tirar notas boas nas avaliações.

a) escreva duas equações Matemáticas: uma que expresse a situação da "empresa A" e outra que expresse a situação da "empresa B";

b) apresente as duas situações em um mesmo gráfico, especificando todos os valores e o que cada eixo representa;

c) qual o valor pago no momento em que a escolha entre as empresas é indiferente? d) após fazer a análise financeira, escreva um critério que você utilizaria para decidir qual empresa contratar.

Nela, de maneira geral, foi possível identificar que três categorias de invariantes operatórios os conduziram em situação, as quais serão mencionadas como categoria 1, 2 e 3, a seguir. Na categoria 1, os estudantes operaram algebricamente com êxito, também explicitaram o gráfico corretamente e elaboraram um texto para explicar o motivo de sua escolha pela respectiva empresa. Esta categoria, abarcou os estudantes E2, E5 e E18.

Na categoria 2, traçaram as duas retas corretamente, porém, somente até o ponto de intersecção, como se elas findassem naquele ponto, mas obtiveram sucesso nas operações algébricas e elaboraram um texto com o seu critério de escolha entre as empresas. Nesta categoria, estavam, E3, E9, E11, E12, E14 e E16. Na categoria 3, os registros gráficos sugeriram a ideia de duas retas paralelas. Estavam nesta categoria, E1, E6, E7, E10, E17, E19 e E20, que também elaboraram um texto e operaram algebricamente.

Durante todo o encontro, houve predominância do trabalho em grupos e observou-se que a maioria dos discentes optou por não recorrer ao auxílio do *software Geogebra* em seus celulares. Somente quatro adotaram sua utilização (E5, E9, E11 e E19), porém E9 e E19, confessaram que enfrentavam dificuldades ao manuseá-lo pela tela do celular. Prontamente, deste dia em diante, adotou-se a utilização de um *notebook* em sala de aula para os estudantes que necessitavam de auxílio ou que faziam questão de utilizar o *software* pelo computador.

Somente um estudante (E6), solicitou auxílio para manipular as ferramentas do *software* pelo *notebook*. No momento em que ocorria esta ação, detectou-se que ele enfrentava dificuldades, provavelmente, oriundas de um conceito-em-ação que já havia sido mencionado no terceiro encontro, referente à ideia de que o coeficiente angular indicava o lugar geométrico onde a reta interceptava o eixo x. Fez-se estas deduções, de acordo com o diálogo vivenciado.

– E6: *"eu acho que este número é onde corta o x professora".*

– P: *"é, por que tu acha isso?*

– E6: *"é que este aqui é onde corta o y né? Sei lá, acho que este é onde corta o x".*

Enquanto proferia esta pergunta, ele apontava para o número 500, que era o coeficiente "b" da equação $y = 68x + 500$, explicitada no seu caderno, mas ainda não havia iniciado a construção gráfica. Então assessorou sua tentativa de utilizar o *Geogebra*, para que ele verificasse como era o traçado da reta. Ao visualizar o gráfico, E6 mencionou: *"bah, não é né professora? Corta lá num x negativo"*. Disse-lhe: *"realmente, se a tua ideia estivesse certa, a reta teria que cortar o eixo x no* 68 *e não é isso que ocorre"* (P).

Detalha-se, a título de exemplo, na Figura 58, o registro de E1, E17 e E19, diante da primeira situação.

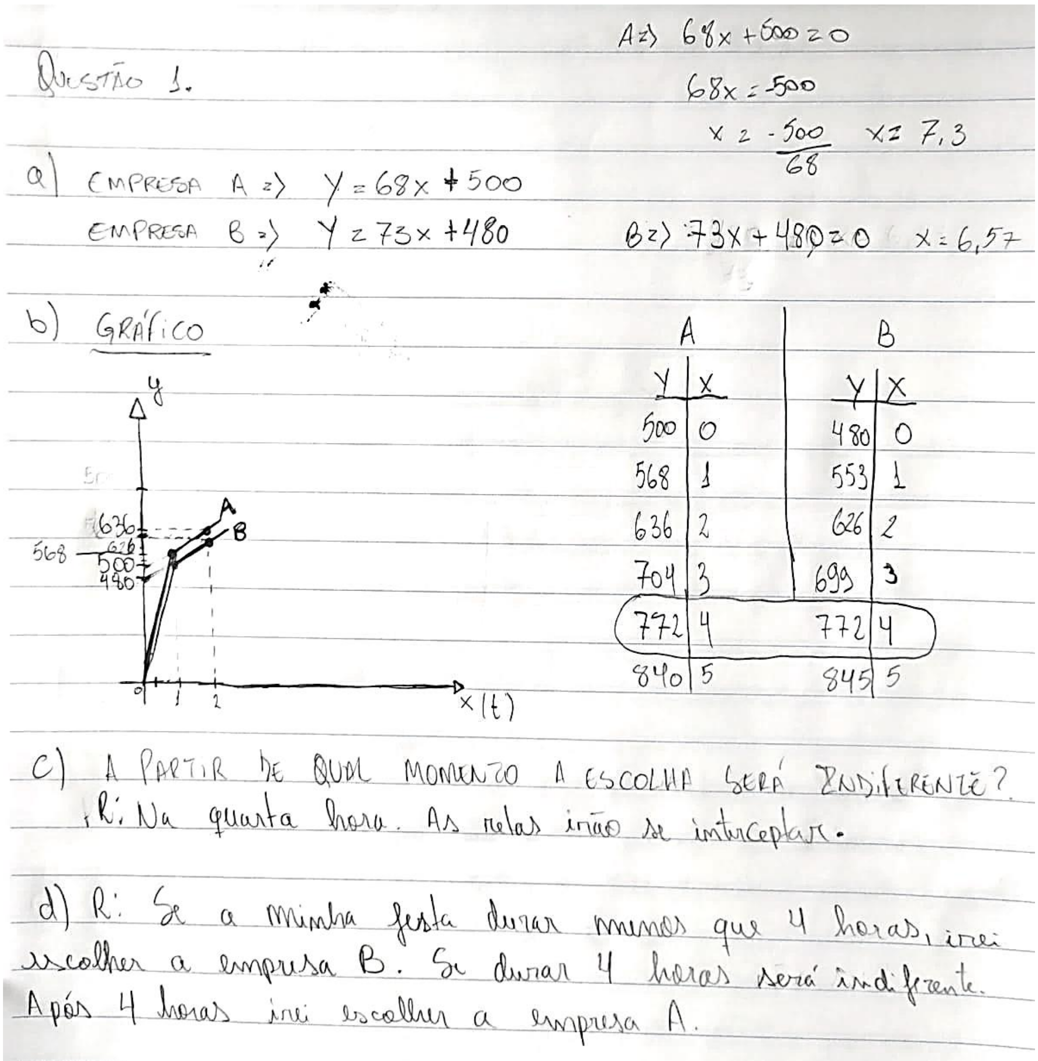


Figura 58: primeira situação do quarto encontro, elaborada por E1, E17 e E19.

Fonte: dados da pesquisa.

Foi possível notar, no canto superior direito do registro, que eles calcularam a raiz das funções referentes às duas empresas, no entanto, apresentaram um erro de sinal, pois os valores corretos deveriam ser, respectivamente, $x = -7{,}3$ e $y = -6{,}5$ (valores arredondados). No entanto, verificou-se neste procedimento, a presença, do provável teorema-em-ação "se a reta é crescente, então a raiz não pode ser negativa". Logo, os estudantes, aparentemente, se livraram do sinal negativo da raiz. Verificou-se que outros dois estudantes (E2 e E5), que trabalhavam em grupos diferentes, apresentaram a mesma estratégia.

Isto reforçou a importância de considerar e oportunizar aos estudantes a manifestação de seus conhecimentos implícitos. Já era o quarto encontro e os estudantes apresentavam pela primeira vez estes possíveis subsunçores e invariantes operatórios. A respeito dessa explicitação de significados, Moreira (2004, p. 17), reforça que

> Em geral, os alunos não são capazes de explicar ou mesmo expressar em linguagem natural seus teoremas e conceitos-em-ação. Na abordagem de uma situação, os dados a serem trabalhados e a sequência de cálculos a serem feitos dependem de teoremas-em-ação e da identificação de diferentes tipos de elementos pertinentes. A maioria desses conceitos e teoremas-em-ação permanecem totalmente implícitos, mas eles podem também ser explícitos ou tornarem-se explícitos e aí entra o ensino: ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito.

Desse modo, ressalta-se a riqueza do processo de aprendizagem, pois estes estudantes não haviam trabalhado nos mesmos grupos anteriormente e este possível teorema-em-ação ainda não havia sido expresso por eles (ou não tinha sido averiguado pela professora). Isso não quer dizer que ele não existia, mas que, talvez, as situações ainda não os tivessem desestabilizado a este ponto ou que a negociação de significados não os tivesse proporcionado trocas em nível tão alto de abstração. São suposições, o fato é que era a primeira vez que estes integrantes explicitavam estes indicadores de invariantes operatórios para a professora.

Além disso, seus registros verbais, permitiram inferir que, no momento de representar as retas graficamente, foi preciso muita negociação, eles não tinham certeza se as retas interceptavam a origem do sistema cartesiano, se eram paralelas, como eram suas inclinações e fizeram questão de não utilizar o *Geogebra*, pois queriam construí-las por conta própria.

7.2.4.2 A segunda situação do quarto encontro

Na segunda situação, disponibilizou-se o seguinte questionamento:

- ***Questão 2*** *– Uma loja de equipamentos para academias estima que um de seus produtos será comprado por* 1.850 *clientes, se vendido a* $R\$\,10.400{,}00$. *Mas, se vendido a* $R\$\,9.660{,}00$, *haverá um aumento de* 20% *nas vendas em relação ao previsto anteriormente.*

a) determine a equação de demanda para este produto represente-a graficamente;

b) o que o coeficiente linear significa nessa situação?

Nesta tarefa, se fôssemos levar em conta, o rigor matemático necessário para desvendá-la, poder-se-ia dizer que apenas um grupo de três estudantes obteve êxito (E2, E9 e E12), mas a preocupação com a forma de operarem em situação e o caminho percorrido por eles era tão importante (ou mais), do que sua resposta final estar, simplesmente, certa ou errada.

A turma apresentou algumas estratégias de resolução para esta tarefa, nomeou-se de categoria 1, a tentativa por meio da regra de três, que foi debatida já no início e explicitada por cinco estudantes (E2, E9, E10, E12 e E20). Apresenta-se, na Figura 59, o registro de E2, E9 e E12.

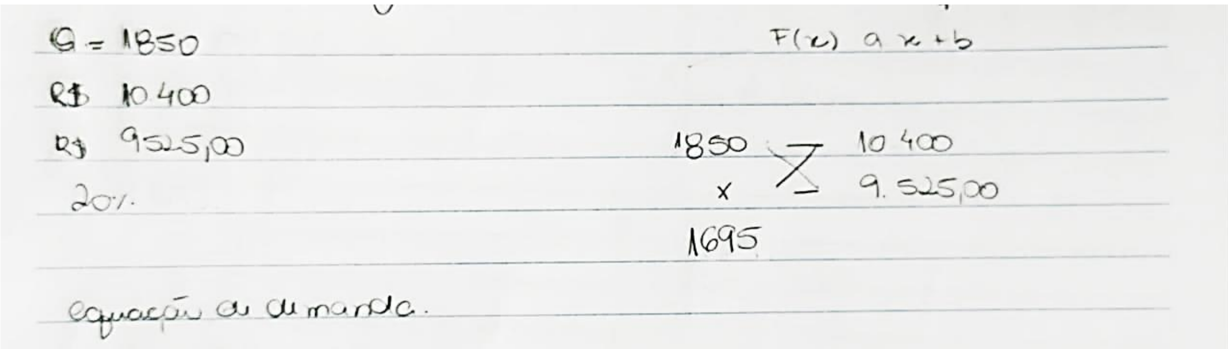


Figura 59: esquema inicial de E2, E9 e E12, para resolver a segunda situação do quarto encontro.
Fonte: dados da pesquisa.

Contudo, na sequência de seu raciocínio, eles abandonaram este artifício.

– E12: *“não pode ser isso, vai ter só número daí, se for* 10.400 *é* 1.850 *e se for* 9.525 *é* 1.695*. E os* 20% *de acréscimo, onde a gente usa isso? Cadê a equação?”*

– E9: *“mas vamos acrescentar* 20% *nesses* 1.695*, é só fazer outra regra de três”*.

– E12: *“Não é isso, eu vi o pessoal falando que dá* 2.220 *e assim dá* 2.034*. Não é assim, a gente fez errado”*.

Verificou-se que as investidas de resolução por meio da regra de três, persistiam. Este era um, suposto, invariante operatório que se mostrava assíduo nos encontros. Além disso, outras três categorias foram evidenciadas. Na segunda, os estudantes apresentaram problemas na identificação do significado das variáveis diante do problema e, por vezes, na resolução do sistema de equações. Eles permutaram x (a quantidade de pessoas) com o coeficiente “a” e y (preço do equipamento) com o coeficiente “b”. Nela, estavam E5, E6, E7, E14, E15, E16 e E18.

Na terceira categoria, demonstraram equívocos nas operações aritméticas. Eles se depararam com uma dízima periódica para representar o valor do coeficiente angular e, mesmo com o auxílio da calculadora, tiveram dificuldades para desvendar a equação de demanda. Além disso, o valor do coeficiente linear, no visor da calculadora, foi exibido como 14,775.00, pois sua linguagem padrão é americana.

Este foi (e continua sendo), um equívoco muito frequente evidenciado nas turmas do primeiro semestre do curso de Administração e isto reforçou a necessidade de oportunizar situações com a utilização da calculadora. Além dos outros motivos que já foram evidenciados na revisão de literatura, em Yenilmez, Girginer & Uzun (2007), Silva (2016), Zarpelon, Germano, Silva, Resende & Neves (2016) e Cumhur & Tezer (2019).

Explicou-se a respeito da linguagem da calculadora e os auxiliou a modificar este comando, mesmo assim, alguns denotaram o valor $14{,}77$ (neste caso, eles não perceberam que seu engano fez o valor do equipamento diminuir de $R\$\ 14.775{,}00$ para $R\$\ 14{,}77$). Esta categoria, abarcou os discentes E1, E3, E6, E11, E16 e E19.

E na quarta categoria, houve problemas na elaboração do registro gráfico. Em alguns casos, os estudantes transmitiram, aparente, indisposição diante da ação, pois seis deixaram um espaço em branco, somente demarcaram os eixos no sistema cartesiano, quatro apresentaram duas retas diferentes, uma crescente e outra decrescente e três apresentaram uma reta crescente, em detrimento de problemas na segunda categoria mencionada (permutação da incógnita x com o coeficiente "a").

Explicita-se, na Figura 60, o registro deste último grupo mencionado, na tentativa de dissertar a respeito de seus esquemas de resolução.

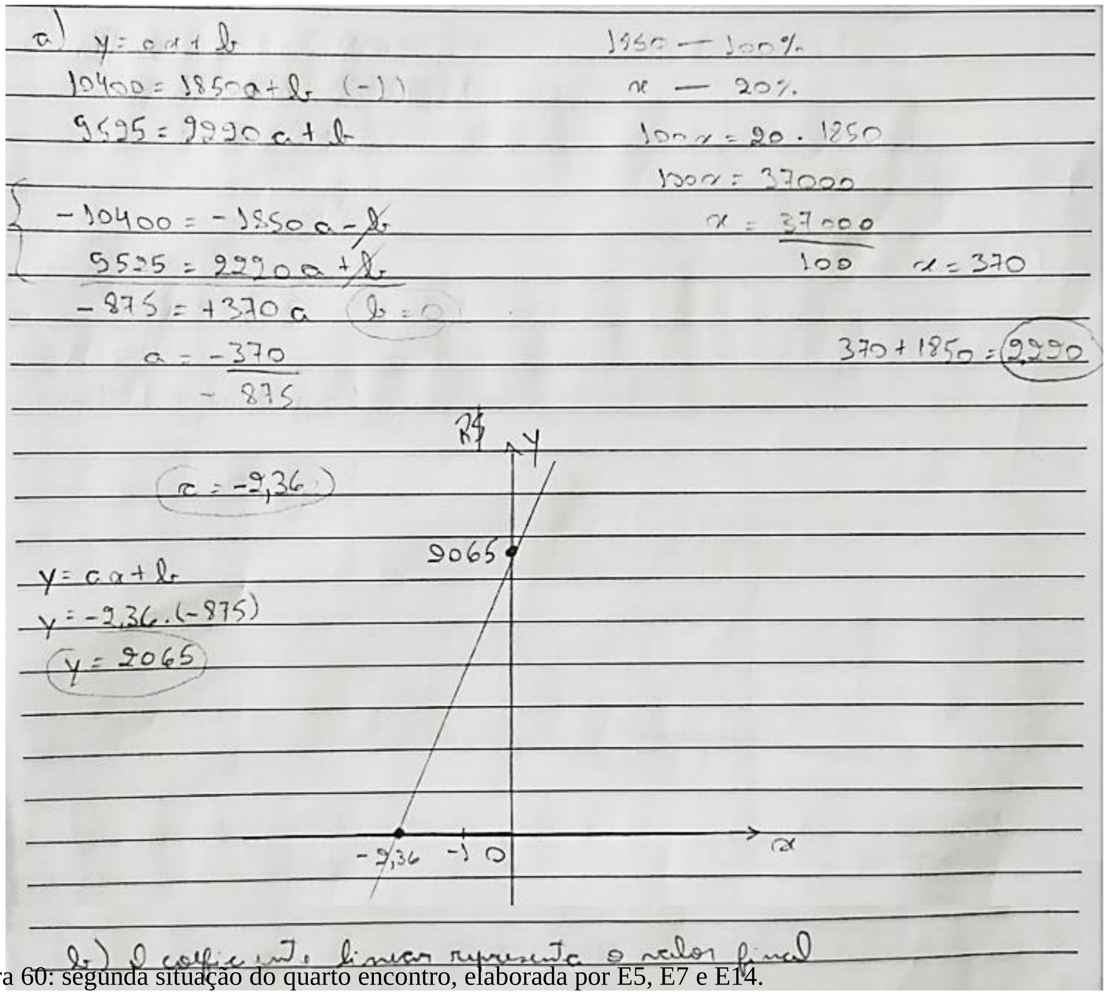


Figura 60: segunda situação do quarto encontro, elaborada por E5, E7 e E14.

Fonte: dados da pesquisa.

Provavelmente, eles se equivocaram diante da divisão final, fruto do sistema de equações, pois expressaram o valor correto $-2{,}36$, (fizeram o arredondamento), entretanto, escreveram a fração $a = \frac{-370}{-875}$ em vez de $a = \frac{-875}{-370}$.

Mas, ao verificarem o valor do coeficiente angular, explicitaram-no como a raiz da equação e multiplicam-no por -875. Foi possível detectar que o valor encontrado no resultado da multiplicação, foi denotado como o coeficiente linear, por sua vez, interpretado como o valor final. Neste registro, percebeu-se possíveis invariantes operatórios que estavam norteando-os já há algum tempo e, provavelmente, os impedindo de avançar na elaboração do registro gráfico. Contudo, foi notória sua evolução no registro algébrico. Nos encontros anteriores eles ainda não apresentavam estas capacidades. Isto também não quer dizer que já eram competentes no registro algébrico, mas que estavam progredindo em alguns aspectos e ainda estabilizados/retrocedendo em outros.

A interpretação que os estudantes fizeram do coeficiente linear, além de estar, numericamente, equivocada, mostrou-se ausente de significado no contexto administrativo. Fez-se esta conclusão sob a comparação do seu registro escrito com os seus registros verbais, pois E5 defendeu que era um valor final, E14, que era um valor para marcação no eixo y e E7 não se manifestou, verbalmente, a respeito.

7.2.4.3 A terceira situação do quarto encontro

A terceira situação, propunha o seguinte enunciado:

- ***Questão 3 –*** *Uma editora pretende lançar um livro e estima que a quantidade vendida seja* 40.000 *exemplares. Se o custo fixo de fabricação for* $R\$\ 250.000{,}00$ *e o custo variável, por unidade, for* $R\$\ 20{,}00$*, qual o preço mínimo que a editora deverá cobrar por livro?*

Para resolvê-la, os estudantes tiveram que realizar transformações com as informações do enunciado, pois, da maneira como foi exposta, além de exigir a conversão do registro escrito para o registro algébrico, demandava a interpretação econômica a respeito de custo fixo, custo variável, receita, lucro e substituição da quantidade fornecida na incógnita correspondente para que, então fosse desvendada. Foi possível verificar que ela demandava diversas capacidades durante o seu enfrentamento e, provavelmente, por este motivo, exigiu esforço, discussão e negociação para ser solucionada.

Esta atividade, ocorreu logo após o intervalo e 17 estudantes, trabalhando em cinco grupos, participaram da atividade. Foram observadas três categorias de resolução. Na primeira, os discentes, desvendaram a situação corretamente, encontraram o preço igual a $R\$\ 26{,}25$ e perceberam que, para este valor, o lucro correspondente seria zero, pois o custo e a receita seriam iguais. Então, conjecturaram que seria preciso acrescentar, ao menos, um centavo ao preço para que a editora obtivesse lucro nas vendas. Aparentemente, eles utilizaram o conceito-em-ação implícito “$p > 26{,}25$”, considerando o intervalo contínuo. Foi o caso de E1, E3, E5, E6, E7, E9, E11, E15, E19 e E20.

Na segunda categoria, as operações algébricas estavam corretas, contudo, demonstraram não entrelaçar os dados do contexto administrativo com os dados matemáticos que encontraram, pois explicitaram, apenas, o valor $p = 26{,}25$, ausente de interpretações. Eles poderiam ter substituído tal valor nas equações para se certificarem de que o lucro seria igual a zero neste caso, mas não o fizeram. Os estudantes que precederam dessa maneira foram E2, E10 e E12.

Na terceira categoria, não conseguiram operar e/ou interpretar as informações do enunciado, de tal modo que as equações explicitadas não permitiram obter êxito na situação. Faz-se estas suposições, pois os estudantes E14, E16, E17, E18, que integravam este grupo, externalizaram, verbalmente, que não conseguiam compreender como deveriam proceder diante da situação. Expõe-se, na Figura 61, a sua tentativa de resolução.

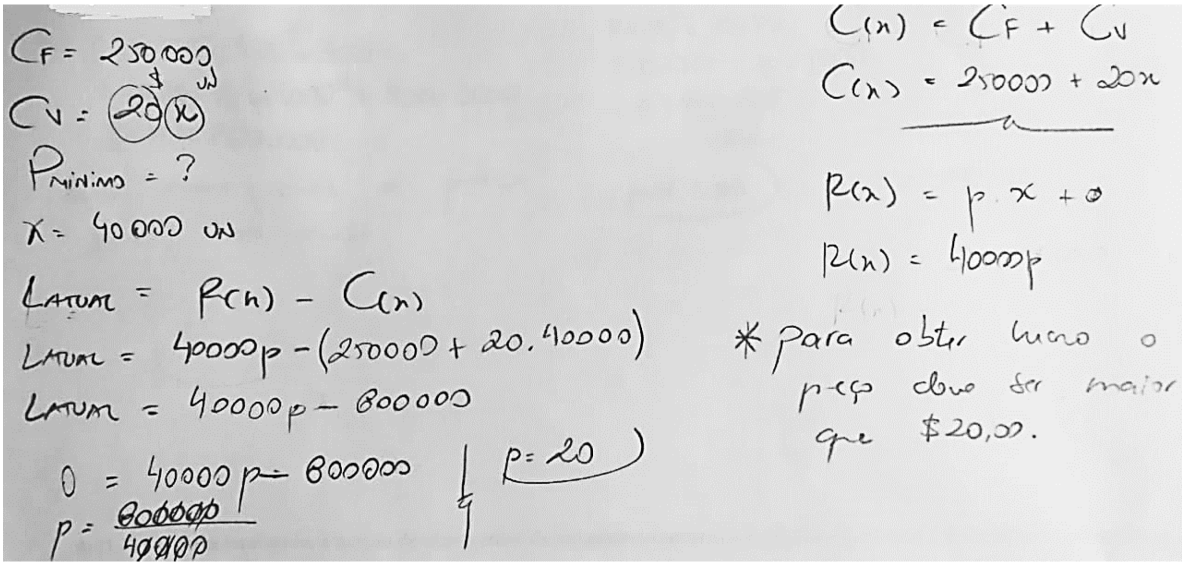


Figura 61: terceira situação do quarto encontro, elaborada por E14, E16, E17 e E18.

Fonte: dados da pesquisa.

Aparentemente, ocorreu um erro de operação aritmética, (não adicionaram o custo fixo e o custo variável dentro dos parênteses) o que, na terceira linha do cálculo do lucro, comprometeu o restante da resolução. No entanto, poderiam ter verificado qual o comportamento do lucro ao preço de $R\$\ 20{,}00$ e isso sugeriu que, tal como E2, E10 e E12, estes estudantes demonstraram certa desconexão entre os dados do contexto administrativo da situação com os dados matemáticos que descobriram.

7.2.4.4 A quarta situação do quarto encontro

A quarta situação, entrelaçava conceitos matemáticos com conceitos administrativos e tencionava auxiliá-los a dar sentido ao conceito de equação, bem como ao gráfico de uma. Ela se assemelhava à situação da festa (do segundo encontro), todavia, alguns estudantes seriam confrontados pela primeira vez com este tipo de situação (conforme mencionado, alguns enfrentavam problemas de baixa assiduidade/permanência na sala de aula).

Seu enunciado era da seguinte forma:

- ***Questão 4*** *– Qual o custo da disciplina de Matemática I? Elabore uma expressão Matemática que leve em consideração o seu custo fixo e os seus gastos variáveis para se deslocar até a UFN toda sexta-feira. Compare com a de seu colega e elaborem uma expressão que rege o custo médio mensal da disciplina de Matemática I.*

Diante da solicitação de elaboração de uma expressão Matemática que representasse o custo mensal da disciplina de Matemática I, eles deveriam incluir os seus custos fixos e variáveis, mas, para isso, teriam de chegar a um acordo a respeito de quais seriam estes custos.

Na página da instituição, eles teriam acesso às informações referentes ao valor do crédito da disciplina. Também deveriam concluir quais seriam seus gastos variáveis, como deslocamento e/ou alimentação. Após, deveriam encontrar uma expressão que caracterizasse o custo médio mensal do seu grupo, ou seja, deveriam encontrar uma expressão individual e outra para o grupo.

Após, os dados foram fornecidos para a professora, que escreveu todas as expressões na lousa e houve uma espécie de comparação para a elaboração de uma expressão que representasse o custo médio da disciplina para aquela turma, bem como a construção do respectivo gráfico.

Durante o enfrentamento da tarefa, detectou-se duas diferentes categorias de invariantes operatórios. A primeira, supõe-se que abarcou conceitos e teoremas-em-ação que permitiram aos estudantes diferenciar custos fixos de custos variáveis, pois conseguiram elaborar uma equação, com seus gastos individuais e calcularam a média dos custos variáveis para representar uma equação do custo médio mensal para o seu grupo. Além disso, organizaram os dados graficamente. Nela, estavam E1, E10, E12, E16 e E20.

Na segunda categoria, utilizaram conceitos e teoremas-em-ação, à primeira vista, implícitos, para adicionar custos fixos e variáveis, pois calcularam, separadamente, os valores, contudo, na sequência, unificaram os dois tipos de custo. Além disso, não apresentaram o registro gráfico, alegando dificuldades para compreender como poderiam representar um único valor. Alguns, inclusive, mencionaram que se tratava de um ponto no plano cartesiano. Esta categoria, contemplou 12 discentes (E2, E3, E5, E6, E7, E9, E11, E14, E15, E17, E18 e E19).

A título de exemplo, apresenta-se, na Figura 62, o registro de E2 e E7, que se deslocavam de carro e de táxi, respectivamente, para a universidade. Na figura, há um retângulo em branco, pois apagou-se os nomes dos discentes para preservar seu anonimato.

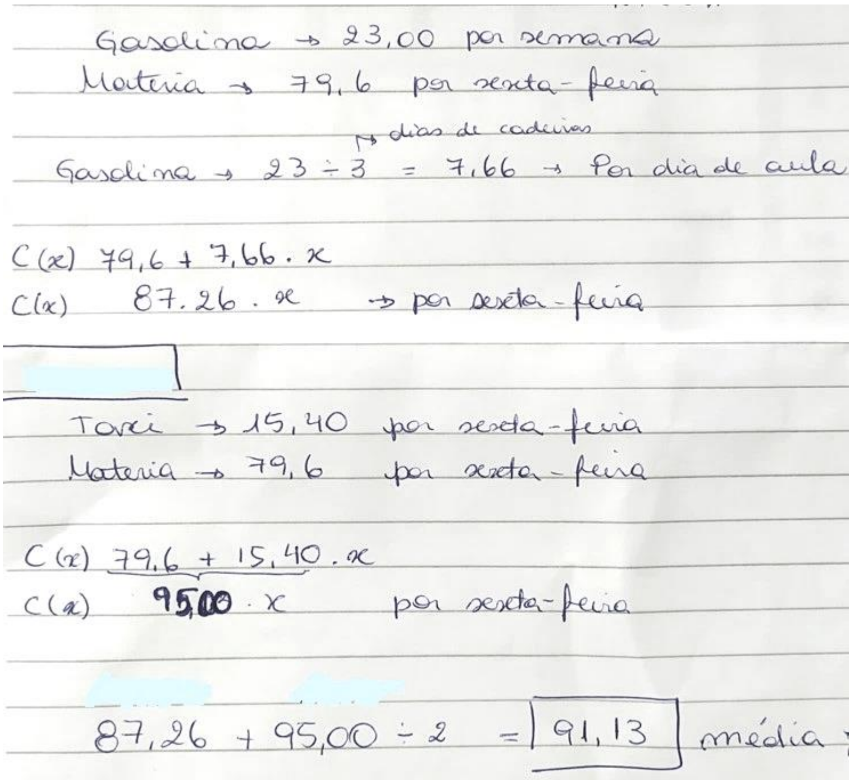


Figura 62: quarta situação do quarto encontro, elaborada por E2 e E7.
Fonte: dados da pesquisa.

Quando todos finalizaram a tarefa, fez-se discussões a respeito de quais foram suas dúvidas, como procederam e corrigiu-se a situação na lousa, ouvindo alguns raciocínios. Juntamente com o grupo, evidenciou-se uma equação que gerava o custo médio da turma para a disciplina, construiu-se o seu gráfico, discerniu-se a respeito do significado dos coeficientes e do tipo de crescimento.

Ao longo desta aula, a preocupação com o erro, por parte dos estudantes, foi evidente. Ele foi destacado como um defeito por eles, que ficavam chateados e, por vezes, externalizavam que eram burros por terem errado. Pareciam preferir se calar do que expor suas ideias ao grupo. Além disso, verificou-se que havia um provável distanciamento do contexto administrativo com a Matemática. Era como se, quando eles estivessem utilizando seus esquemas de resolução, parte do contexto das situações, fosse desconsiderada.

Por exemplo, alguns discentes mostravam-se tão preocupados ou dificultados diante da linguagem Matemática necessária para desvendar as situações, caracterizadas por Vergnaud (1990), como as representações simbólicas (significante – R), que esqueciam-se ou eram impedidos de verificar se os dados obtidos poderiam ser utilizados para indicar e representar os elementos do primeiro e do segundo conjuntos (referente – S e significado – I).

Neste encontro, E12 questionou: *"Letícia, de onde tu tirou essa ideia de usar as aulas pros alunos fazerem as listas de exercícios? Eu nunca tive uma aula de Matemática com tempo pra fazer os exercícios e conferir se estavam certos, era sempre explicação do professor em aula e a gente fazia os exercícios depois, em casa".*

Disse-lhe que acreditava-se que esta era uma prática necessária nas aulas de Matemática. Então, o estudante acrescentou: *"eu acho muito legal tu dar tempo pra gente fazer exercício em aula, porque to acostumada com aulas de Matemática que o professor passa a aula inteira escrevendo o conteúdo no quadro e a gente copiando, não tem tempo de fazer exercício. Na minha opinião é bem melhor assim como tu faz, a gente tem tempo pra tirar as dúvidas em aula. Se eu fosse pra casa, fazer sozinho estes exercícios que tu pede pra gente fazer aqui, eu não ia saber nem por onde começar".*

Outros colegas complementaram que fazer exercícios contextualizados em aula, os fazia perceber como a Matemática permeava a sua carreira profissional e agradeceram por isso, a exemplo de E10, que pontuou: *"prof, eu vejo que tu se preocupa em trabalhar a parte da Matemática que interessa pra gente, não em derramar fórmulas e mais fórmulas no quadro e fazer um monte de contas pra mostrar pra gente que tu sabe Matemática".*

A princípio, entendeu-se que os depoimentos destes estudantes, ratificavam o cenário ao qual Moreira (2012b, p. 45), confere para nossas salas de aula

> Os professores – na escola, seja ela fundamental, média ou superior – apresentam aos alunos conhecimentos que eles supostamente devem saber. Os alunos copiam tais conhecimentos como se fossem informações a serem memorizadas, reproduzidas nas avaliações e esquecidas logo após. Essa é a forma clássica de ensinar e aprender, baseada na narrativa do professor e na aprendizagem mecânica do aluno. [...] Na prática, uma grande perda de tempo.

Com a prudência necessária para não fazer julgamentos, como apontar culpados ou ter a pretensão de afirmar que esta investigação apresenta a solução para este cenário, atreveu-se a conferir que pequenos passos estavam sendo dados para modificar esta configuração. Fez-se estas constatações pois entendeu-se que alguns estudantes ofereciam pistas de que estavam se apropriando de novos conceitos, apesar de, muitas vezes, ser possível estabelecer uma comparação ao movimento de uma montanha-russa: com altos e baixos. Por vezes, demonstravam mais falhas do que avanços, em outras, mais avanços do que retrocessos. Em outras, tampouco demonstravam algo.

Não obstante, o fato de trabalharem em grupos e, algumas vezes, a configuração dos grupos se modificar antes e após o intervalo, foi benéfica, pois os integrantes possuíam diferentes níveis de maturidade diante das diferentes situações e dos diferentes conceitos e isso os permitia uma caminhada conjunta, mas diversificada. Nada era unanimidade, também não se lidava com extremos, mas com um grupo heterogêneo, que possuía suas falhas, suas dificuldades, suas facilidades e seus conhecimentos específicos.

Estudantes que, em um grupo, se destacavam e auxiliavam os colegas diante de uma situação, em outra, precisavam de amparo. Isso aconteceu com frequência, um exemplo foi o de E9, que havia sido convidado para ser o tutor da disciplina e, talvez, por isso, tenha se sentido tão inseguro e externalizado que queria desistir do cargo. Diante de determinadas tarefas, ele se mostrava competente e auxiliava seus colegas. Em outras situações, no entanto, precisava de explicações de colegas que ele acabara de auxiliar, pois não conseguia avançar sozinho.

Quando E9 fez menção à desistência da tutoria, disse-lhe que não se preocupasse, demasiadamente, com seus erros ou acertos, mas que continuasse agindo com a devida responsabilidade que apresentava, afinal ele havia assumido a postura de tutor da turma e estava se saindo muito bem. Notavelmente, ele sentiu-se contente e valorizado, pois externalizou seu agradecimento.

7.2.5 O quinto encontro – 22/03/2019

Nesta data, deu-se início às atividades da quarta etapa da UEPS (novas situações em nível mais alto de complexidade), retomando-se os conceitos estudados nas semanas anteriores de maneira expositivo-dialogada e questionou o grupo se haviam assistido aos dois vídeos, que foram produzidos pela autora e disponibilizados no ambiente virtual de aprendizagem. Dos 14 discentes que estavam presentes, inicialmente, 9 responderam positivamente.

Uma constatação foi evidente: a prática de assistir aos vídeos no *Moodle* antes dos encontros não havia sido, amplamente, aceita pelo grupo, mesmo que isso tenha feito parte de um acordo no primeiro dia de aula. Outrossim, quando listas de tarefas extraclasse eram disponibilizadas, poucos estudantes apresentavam dúvidas remanescentes. Isso não quer dizer que não o tinham feito, até porque o material possuía gabarito, mas levando-se em consideração o contexto da sala de aula, acreditava-se que, provavelmente, dúvidas surgiriam e deveriam ser expostas, caso os discentes entrassem em contato com o material.

Um dos vídeos disponibilizados, abordava o ponto de nivelamento de uma empresa, relacionando-o à interpretação gráfica do ponto de intersecção entre o custo e a receita, por meio de uma situação contextualizada. A página para acesso encontra-se disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=4V8vAHnnxUo&t=31s>, (15 minutos e 3 segundos).

O outro vídeo, ressaltava o ponto de equilíbrio, também relacionando-o à análise gráfica do ponto de intersecção entre a demanda e a oferta, também por meio de um exercício. Página disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=pnYEeb7-j_U&t=20s>, (14 minutos e 36 segundos). Ambos os vídeos, foram elaborados pela professora pesquisadora.

Conforme exposto, desde o primeiro encontro, já vinham sendo discutidos os conceitos de lucro, custo, receita, demanda e oferta. Além disso, no terceiro e no quarto encontros, os estudantes foram confrontados com situações nas quais deveriam averiguar retas paralelas e/ou concorrentes entre si, com ênfase no ponto de intersecção entre duas retas concorrentes. Isso para que pudessem entrelaçar seus subsunçores com os novos conhecimentos que seriam discutidos na quinta e na sexta semana de aula, pois, nestas, o ponto de equilíbrio e o ponto de nivelamento, ganhariam destaque.

Elaborou-se para esta data, três situações, todas elas em nível mais alto de complexidade, de acordo com o sugerido por Moreira (2012b). Elas foram entregues impressas, uma por vez, para que os estudantes as desenvolvessem em seus cadernos, mas poderiam discuti-las com os colegas, em duplas ou trios. Não seria necessário entregá-las, recolheu-se os registros por meio de fotografias.

7.2.5.1 A primeira situação do quinto encontro

Esta tarefa, teve como intuito, dar sentido aos conceitos de equação custo e receita para que, conjuntamente, elas dessem sentido ao conceito de ponto de nivelamento e exigia subsunçores de porcentagem, operações aritméticas e algébricas, reconhecimento de letras como incógnitas, do símbolo de igualdade como ideia de equivalência, da lei da equação da reta, construção gráfica, significado dos coeficientes, além do entendimento do conceito de custo, lucro e receita. Como é possível verificar, o nível de dificuldade das situações aumentava à medida que exigia cada vez mais subsunçores estabilizados na estrutura cognitiva dos discentes, para serem solucionadas.

A situação abarcava as seguintes informações e questionamentos:

- ***Questão 1*** *– Suponha que o custo fixo de produção de "x" bolsas universitárias seja $R\$\ 450{,}00$ e que o custo variável seja igual a 20% do preço de venda, que é de*

$R\$$ 125,00 por unidade.

a) expresse, algebricamente, as funções custo total e receita total;

b) qual será a quantidade mensal produzida quando o custo total mensal for $R\$1.200,00$?

c) quantas bolsas o dono precisa vender para obter lucro? Expresse a função lucro graficamente;

d) qual será o lucro mensal se 247 bolsas forem produzidas e vendidas?

e) expresse em um mesmo gráfico as funções custo e receita. Faça uma análise econômica da situação.

Nela, detectou-se três diferentes categorias: um grupo apresentou, somente, o registro algébrico, carente de interpretação gráfica e econômica. Eles foram orientados a utilizar o *Geogebra*, pois tal ferramenta poderia auxiliá-los, mas eles optaram por não fazê-lo. Eles não desvendaram, integralmente, a situação, mas encontraram as expressões do custo, da receita, do lucro e operaram algebricamente com elas. Este trio foi representado por E1, E6 e E15.

O segundo grupo, realizou tentativas de explicitação dos três tipos de registro. Aparentemente, eles demonstraram compreensão acerca do conceito de ponto de nivelamento e de todos os outros conhecimentos envolvidos, pois apresentaram, corretamente, todos os registros. Além disso, a quantidade encontrada nesta questão, era 4,5, contudo tratava-se de bolsas universitárias. Mas eles verificaram que a quantidade deveria ser ajustada para fazer sentido no contexto real e interpretaram que cinco deveria ser a quantidade que gerava lucro inicial. Diagnosticou-se esta característica na resolução de E5, E9, E10, E17 e E20.

O terceiro grupo, apresentou o registro algébrico e o gráfico, mas não interpretou economicamente. Enquanto realizavam a tarefa, estimulou-os a escrever suas conclusões e discutiu-se a respeito de suas respostas, que, em alguns casos estavam corretas, contudo, aparentemente, eles não se mostraram dispostos e/ou não conseguiram expressar, por escrito, suas constatações. Foi o caso de E2, E11, E12, E13, E14 e E16.

Explicita-se, na Figura 63, o registro de E12.

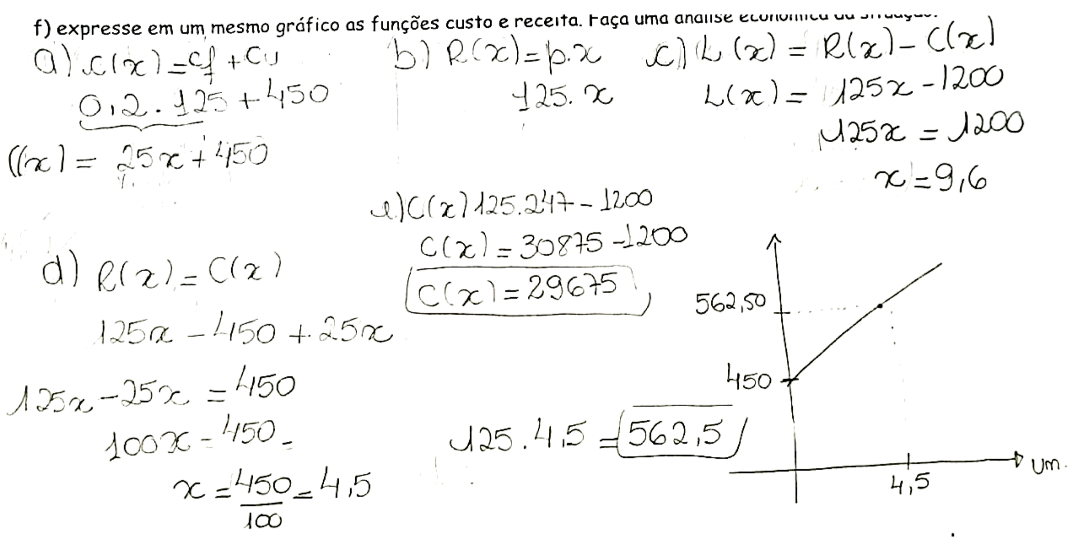


Figura 63: primeira situação do quinto encontro, por E12.

Fonte: dados da pesquisa.

Por meio de seu registro, foi possível conferir que E12 apresentou, ora subsunçores estabilizados, ora desestabilizados. Por exemplo, ele desvendou as equações do custo e da receita, representou graficamente a equação do custo e calculou a quantidade que deveria ser produzida para gerar lucro. Entretanto, aparentemente, isso não foi suficiente para ancorar seu entendimento e promover a explicitação gráfica da equação da receita, da interpretação econômica do ponto de nivelamento, da explicitação da equação do lucro e do cálculo das quantidades solicitadas.

No item c) dessa tarefa, a pergunta feita foi: *"qual será a quantidade mensal produzida quando o custo total mensal for* $R\$1.200,00$*?"*. Verificou-se no canto superior direito de seu registro, que, para responder esta pergunta, equivocadamente, E12 substituiu o valor 1.200, no lugar do custo, para descobrir o lucro. Além disso, seu registro verbal, juntamente com E14, explicitou possíveis conceitos-em-ação que nortearam sua conduta durante esta atividade.

– E12: *"olha só, eu acho que a gente tem que diminuir a receita do custo de* 1.200 *e calcular o valor da quantidade"*.

– E14: *"hã? Como assim?"*

– E12: *"aqui ó,* $125x - 1.200$*, aí é só isolar o* x*. Ela quer saber a quantidade"*.

– E12: *"Letícia, é assim que é pra fazer? Tu quer saber a quantidade, é o* x *né?"*

– P: *"ah! Então vocês acham que sempre que pedir a quantidade é pra calcular o x?"*

– E12: *"acho que sim. Tem que achar o x né?"*

– P: *"olha só, vamos ler de novo a pergunta: [...] tá falando de uma equação, qual é ela?*

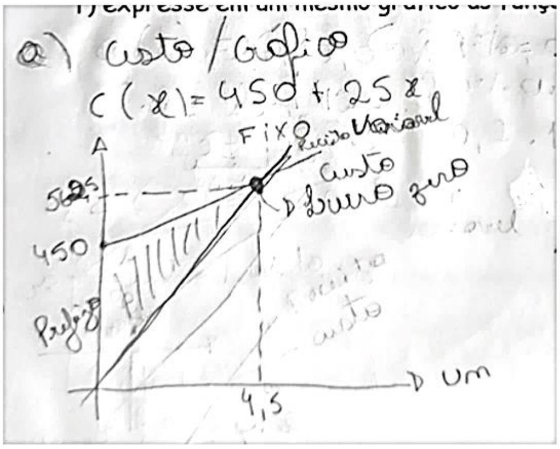
– E12: *"bah! É custo né?"*

– E14: *"eu acho que a gente tem que substituir isso no custo mesmo. Obrigada prof!"*.

Tal como E14, outros estudantes explicitaram o cálculo dessa maneira para explicitar o valor de "x" e, justamente, para explorar os conhecimentos que poderiam emergir neste tipo de tarefa, optou-se por oportunizar, somente, três situações neste encontro.

As discussões que elas suscitaram enquanto alguns tentavam se apropriar do conceito de ponto de nivelamento, também foram permeadas por percalços e evidenciaram algo que já era notório desde os encontros passados: os estudantes pareciam utilizar seus invariantes operatórios para operar matematicamente mas, quando tentavam interpretar a situação, no contexto administrativo, os possíveis invariantes operatórios que externalizavam, por vezes, aparentavam certo distanciamento da realidade.

Um exemplo disso, pode ser evidenciado no registro de E17, que representou, corretamente, o registro gráfico, contudo, ao interpretar a situação, não levou em conta o fato de o objeto em discussão ser uma bolsa e, portanto, não poder ser vendido de maneira fracionada. Além disso, seu registro escrito (Figura 64), acompanhado de seu registro verbal, forneceu indícios de uma compreensão frágil do ponto de nivelamento, pois mencionou: *"mas o lucro do cara não é 562,5?"*. Talvez, tenha sido essa indagação que o motivou a escrever que a arrecadação era igual a *R$ 562,5*, mas não expressou que o custo também seria este mesmo valor e que, por este motivo, o lucro seria zero.



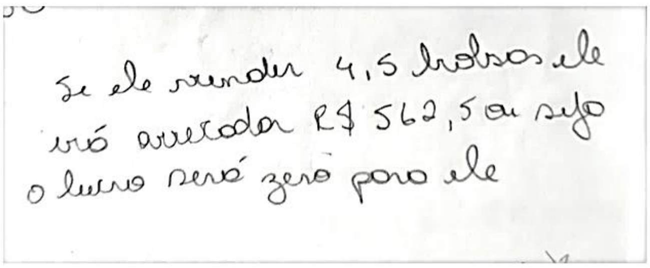


Figura 64: excerto do registro da primeira situação do quinto encontro, por E17.
Fonte: dados da pesquisa.

Porém, demonstrou evoluir na compreensão do registro gráfico, pois, na primeira situação do quarto encontro, havia riscado duas retas que findavam no ponto de intersecção e, diante desta tarefa, foi além deste ponto.

Este tipo de explicitação, ocorreu com outros estudantes, mas pontua-se que não foi uma unanimidade pois, muitos estudantes nem realizaram tentativas de interpretação, houve bastante resistência por parte de alguns, que permaneciam de braços cruzados, ou deixavam a sala de aula após a chamada ser feita e, muito comumente, ficavam em seus celulares, sem participar, alheios às atividades propostas.

Contudo, os que realizaram tentativas, ainda que equivocadas, estavam permitindo-se manifestar o seu pensamento e careciam da negociação de significados com os colegas e professora. Após finalizarem cada atividade, corrigia-se na lousa e conversava-se a respeito da respectiva situação. As perguntas que alguns estudantes faziam nestes momentos, evidenciava certo temor/insegurança em relação à Matemática.

No momento que fazia a atividade, E19 questionou: *"sora, 4,5 a gente* arredonda pra 5 *né, por causa da regra do arredondamento"*. Disse-lhe que, naquele tipo de tarefa, o que deveria se sobrepor, era o contexto real, ou seja, como ele agiria se fosse o dono da fábrica de bolsas. Por algum tempo, isso foi motivo de incerteza (arredondar para mais ou para menos). Ademais, conforme explicitado, alguns, preferiram não arredondar o valor, e neste ponto que argumenta-se a respeito da possível desconexão da Matemática com o contexto administrativo.

Por vezes, o rigor que a linguagem Matemática exigia, as regras de sinais, o cálculo da porcentagem, o erro de sinal, o esboço do gráfico, a fórmula do lucro, o desconhecimento e a dificuldade de operar com as funções da calculadora científica, a não explicitação das dúvidas... tudo isso parecia ser tão mais preocupante e impeditivo para alguns estudantes, que eles desistiam, esqueciam ou eram impossibilitados de interpretar suas respostas no contexto dos problemas. Em muitos casos, limitavam-se a encontrar o valor do "x", não buscando o significado para este "x". Em determinadas situações, como exposto, nem era esta a solicitação da tarefa, mas a preocupação em desvendar o valor do "x" parecia onipresente.

7.2.5.2 A segunda situação do quinto encontro

Esta atividade teve como intuito, dar sentido ao conceito de equação e exigia subsunçores de operações aritméticas, algébricas, reconhecimento de letras como incógnitas, significado do símbolo de igualdade, construção gráfica, significado dos coeficientes, ideia de custo, lucro e receita além de conversões entre o registro escrito, algébrico e gráfico.

Ela continha o seguinte enunciado:

- ***Questão 2*** *– Para produzir embalagens, uma pequena empresa tem um custo representado por $C(x) = 4500 + 0{,}2x$, na qual "x" representa o número de unidades produzidas.*
-

Se cada embalagem for vendida por $R\$ \ 15{,}5$, *qual é o número mínimo de unidades que devem ser vendidas para que o lucro da empresa seja o triplo do custo? Represente a função lucro graficamente.*

Para desvendá-la, os 19 discentes que estavam presentes, escolheram trabalhar em duplas, trios ou individualmente (E7). Verificou-se que três categorias de invariantes operatórios os nortearam em ação, mas, certamente, essas três grandes categorias, abarcavam subcategorias, pois eles apresentavam suas particularidades nos esquemas de resolução.

A primeira categoria, compreendeu a ideia de igualar o custo e a receita. Uma vez que, na situação anterior, o procedimento feito foi este, julgou-se que agiram por inércia, ou seja, seguiram as regras de resolução sugeridas no exercício anterior. Além disso, os registros verbais delataram sua intenção de seguir realizando as tarefas da mesma maneira como a que acabavam de finalizar. Neste caso, encontraram o valor $294{,}11$ e, a seguir, multiplicaram-no por três, finalizando em $882{,}33$. Alguns apresentaram o gráfico contendo a quantidade de nivelamento, outros não apresentaram o registro gráfico. Esta categoria abrangeu 11 estudantes (E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E10, E13, E16 e E20).

A segunda categoria que os norteou, foi a conversão do registro escrito para o registro algébrico. Ao todo, cinco estudantes, verificaram que o triplo do custo consistia na multiplicação da equação do custo por três. Eles realizaram tal multiplicação e igualaram a equação mencionada à do lucro, o que resultou em $1.224{,}48$. Também executaram a conversão para o registro gráfico. Neste grupo estavam E9, E11, E14, E17 e E18, com exceção de E9 e E17, que não elaboraram o gráfico.

A terceira categoria de resolução, compreendeu a substituição da incógnita x por 3 (E15) e o, provável, esquecimento de explicitação da incógnita x, que ocasionou em erros de operações algébricas/aritméticas (E12 e E19). Além disso, verificou-se que E12, encontrou um valor negativo como resposta e não o interpretou no contexto administrativo. Nenhum destes estudantes explicitou tentativas de esboço do registro gráfico.

Para explicitação, apresenta-se, na Figura 65, o registro de E5, que estava situado na primeira categoria mencionada, pois igualou o custo a receita e, após encontrar $294{,}11$, multiplicou-o por três.

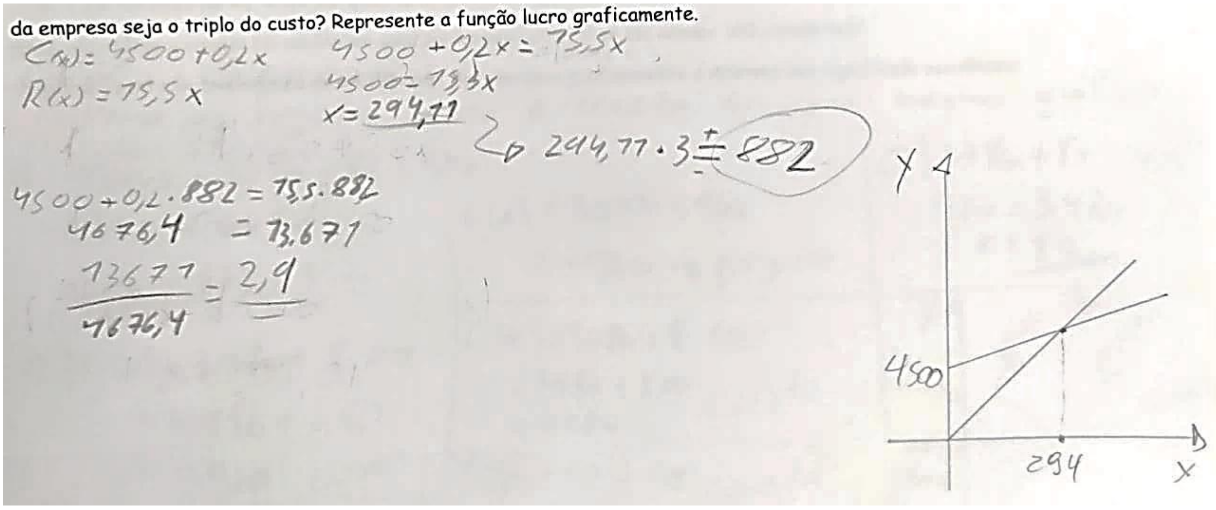


Figura 65: segunda situação do quinto encontro, por E5.
Fonte: dados da pesquisa.

Conforme descrito, da mesma forma como E5 procedeu, outros 10 estudantes também o fizeram e eles não estavam errados. Por isso defendeu-se, ao longo desta investigação, a avaliação qualitativa dos registros dos discentes, pois, caso a correção fosse feita de maneira literal, como certa ou errada, poder-se-ia considerar que a questão estava errada, por não terem respondido, exatamente, como solicitava o enunciado. Digamos que estes 11 estudantes, de certa forma, ficaram pelo caminho, mas chegaram muito perto de desvendar a situação.

Entretanto, foi possível supor alguns subsunçores tornando-se diferenciados e prováveis conceitos e teoremas-em-ação que nortearam seus esquemas de resolução para explicitar todos estes conhecimentos no papel, fora todos os que permaneceram implícitos na sua estrutura cognitiva, mas fizeram parte de sua conduta de resolução. Neste caso, E5 explicitou parte do ponto de nivelamento, faltou a coordenada y do ponto, mas a quantidade foi calculada.

O problema foi na expressão numérica, pois ele igualou o custo e a receita, mas substituiu a incógnita x por 882 e não se deu conta, ou suprimiu de sua expressão, o seguinte passo:

$$0 = \frac{13671}{4676,4}$$

Contudo, para além desse passo, a sua ideia estava correta, pois dialogando-se com o estudante, ele explicou que *“eu substituí por 3 no custo e na receita, daí deu 2,9. Isso é praticamente o triplo né?”*. Ele conseguiu enunciar seu pensamento, mas não conseguiu concluir seu raciocínio, algebricamente.

Era muito interessante ouvi-los explicando, verbalmente, os seus escritos ou o seu raciocínio. Em muitos casos, havia um hiato entre o que falavam e o que escreviam. Em outros, conseguiam falar, mas não escrever e vice-versa. Neste ponto, recorre-se à ideia de competência sugerida por Vergnaud (2017), pois ele ratifica que é de extrema importância considerar as diferentes maneiras de expressão do sujeito, ou seja, se nos apegássemos, apenas, no registro escrito de E5, poderíamos averiguar que ele estava equivocado, pois não respondeu à tarefa, entretanto, mostrou-se competente ao longo do caminho percorrido na situação.

Quando corrigiu-se a tarefa na lousa, com auxílio do grande grupo, os estudantes da primeira categoria exposta, mostraram-se insatisfeitos com o resultado encontrado. Isto porque eles arredondaram os valores ainda no início dos cálculos e encontraram como resposta 882. Quem havia trabalhado com todas as casas decimais da calculadora, havia encontrado 1224,48. Neste momento, E5 questionou: *"mas tá certo se arredondar e deixar 882 né prof?"*.

Diante do questionamento de E5, devolveu-se a pergunta a ele e ao restante do grupo: *"imaginem se vocês fossem os donos dessa empresa de embalagens e produzissem* 882 *unidades. Calculem e verifiquem se o lucro de vocês seria o triplo do custo"* (P). Por meio desta indagação, eles foram, de certa forma, convocados a deixar o lado puramente matemático da resposta e interpretá-la no contexto administrativo.

Diante desta indagação, dois estudantes um que, inicialmente, havia arredondado o valor e outro que não havia elaborado a equação corretamente, forneceram pistas de que fizeram relações entre a Matemática e a Administração, pois reformularam suas conjecturas, substituíram os valores e diagnosticaram: *"é, com esse* 882 *aí o cara ia ganhar um pouco menos né sora, não ia dar o triplo"* (E19) e *"na verdade, professora, nem pode ser* 1.224,48 *porque a questão fala de embalagem, então, no final a gente tem que arredondar pra* 1.225 *porque tem que ser quantidade inteira"* (E1).

Nos comentários referentes ao registro gráfico, E5 perguntou se estava correto desenhar a reta do custo e da receita em vez da reta do lucro, então confrontou-se os dois gráficos na lousa a fim de estabelecer comparações. Neste momento, alguns estudantes demonstraram indícios de desestabilização diante dos dois diferentes registros e E10 comentou: *"prof, eu tenho que fazer dois gráficos agora, já não bastava um!"*. Alguns riram, outros mostraram-se preocupados. Voltou-se à análise dos dois gráficos, pintando o ponto que demarcava o lucro zero em ambos (o valor $R\$1.224,48$), para que eles verificassem que, na verdade, os dois gráficos referiam-se à explicitação do ponto que demarcava o início do lucro da empresa.

Sob a ótica da professora pesquisadora, este tipo de situação configurava um dos fatores mais positivos dos encontros, pois não era sempre que os estudantes demonstravam desinibição para externalizar suas dúvidas ao grupo. Muitas vezes, chamavam a professora, reservadamente, e faziam perguntas.

Na sua totalidade, a minoria dos estudantes elaborava questionamentos e explicitações verbais ademais, no desenrolar dos encontros, já havia sido possível diagnosticar um provável perfil, ainda que superficial, dos integrantes, de tal maneira que E1, E3, E5, E9, E10, E12 e E19, tendiam a participar e questionar mais. Os demais discentes, demonstravam ser mais tímidos e/ou retraídos. Além disso, alguns eram pouco assíduos, outros interagiam pouco com a professora e com os colegas e/ou chegavam atrasado/saíam mais cedo das aulas.

Contudo, por meio desta constatação, não teve-se a intenção de julgá-los. Presumiu-se que se tratava, possivelmente, de uma questão de personalidade ou poderia depender, ainda, de outros motivos, pois, conforme descrito, alguns discentes explicitaram no questionário socioeconômico, que traziam consigo experiências negativas em relação à disciplina. A respeito disso, retoma-se os diversos fatores que poderiam influenciar nessa postura, como os mencionados nos estudos de Biaggi (2000), Yenilmez, Girginer & Uzun (2007), Peñaloza Fuentes, Lima & Guerra (2009), Roncaglio & Nehring (2013), Laging & Voßkamp (2017) e Cumhur & Tezer (2019).

7.2.5.3 A terceira situação do quinto encontro

Depois do intervalo, dois estudantes não voltaram para a aula e 17 permaneceram. Eles se organizaram em duplas e trios, mas E7 preferiu continuar trabalhando individualmente. Todos foram confrontados com a terceira situação, que tinha por objetivo, dar sentido ao conceito de equação em articulação com o seu registro gráfico. Ela abordava, especificamente, uma equação de depreciação linear e, para ser solucionada, carecia de subsunçores de pares ordenados, equação da reta, significado dos coeficientes, esboço do gráfico, operações algébricas, operações aritméticas e resolução de um sistema de equações. Além disso, um de seus itens, necessitava da interpretação do significado dos coeficientes no contexto administrativo, ou seja, os estudantes precisariam realizar conversões entre o registro escrito, gráfico e algébrico.

Seu enunciado pode ser verificado a seguir:

- ***Questão 3*** *– Gabriel comprou uma casa no ano de* 2012 *por* $R\$\ 280.000{,}00$ *e revendeu-a, no ano de* 2017*, por* $R\$\ 156.000{,}00$*, pois houve uma depreciação linear em virtude da construção de um viaduto em frente ao imóvel.*

Observação: *suponha o ano de 2012 como o ano zero da compra.*

a) descubra a expressão Matemática que representa, essa situação e esboce seu gráfico;

b) o que os coeficientes angular e linear representam nessa situação?

Durante o desenvolvimento dessa tarefa, mas, principalmente, analisando os registros dos estudantes, observou-se que eles apresentaram três categorias de invariantes operatórios. Na primeira delas, elaboraram um sistema de equações e substituíram os valores do enunciado corretamente, o que forneceu indícios da compreensão de par ordenado e da equação da reta, pois desvendaram a equação de depreciação do imóvel.

Contudo, aparentemente, enfrentaram obstáculos de natureza algorítmica nas operações aritméticas, pois apresentaram um esquema que alongou seu caminho de resolução, além disso, não esboçaram a situação graficamente, também não interpretaram o significado dos coeficientes no contexto da situação. Escolheu-se o registro de E20, Figura 66, para explicitar esta categoria, na tentativa de analisar alguns, prováveis, invariantes operatórios que conduziram seu pensamento para realizar a atividade.

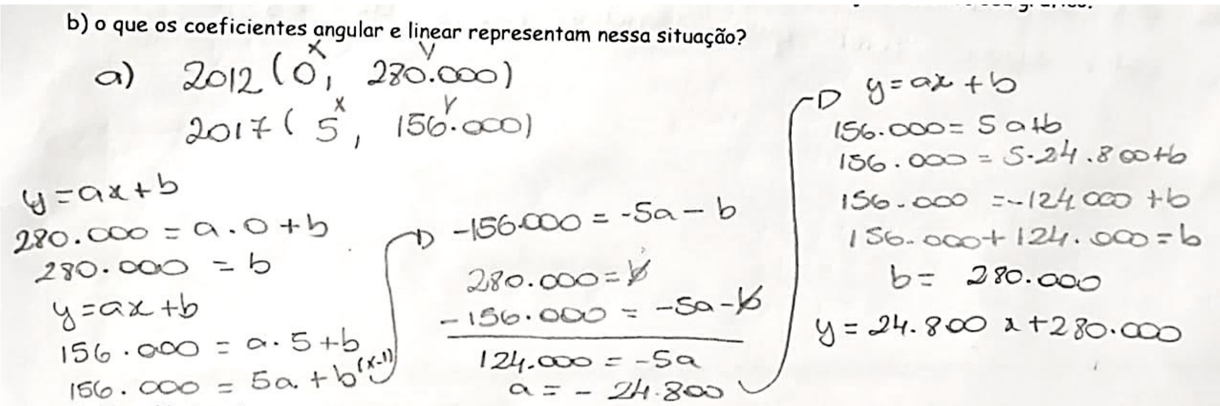


Figura 66: terceira situação do quinto encontro, por E20.

Fonte: dados da pesquisa.

Tal como no registro de E20, verificou-se no de E12, E17 e E19, que eles também encontraram o valor referente ao coeficiente "b" logo no início e seguiram na busca pelo valor do coeficiente "a". Mas, ao desvendá-lo, em vez de explicitarem a equação $y = -24800x + 280000$, provavelmente, não se deram conta de que ela já estava solucionada e fizeram passos, corretos, porém desnecessários na busca pelo coeficiente "b", ou seja, encontraram-no duas vezes. Isso pode ser evidenciado na primeira e na terceira coluna de resolução de E20. Além disso, ele não explicitou o sinal negativo do coeficiente "a" na equação apresentada como resposta na última linha de sua resolução. Na tentativa de desvendar como pensaram, fez-se um questionamento às duas duplas de estudantes.

– *“por que vocês fizeram dessa forma? Vocês estão certos, eu só quero entender a maneira como vocês pensaram!”*

– E19: *“ah sora, eu me lembrei que num sistema, sempre tem aquela historinha de multiplicar por* -1, *daí eu multipliquei!”.*

Os demais colegas riram e confirmaram que tinham feito a multiplicação pelo mesmo motivo: *"é sempre assim"* (E17). De posse dessas informações, obteve-se indícios de que o fator que os influenciou neste processo, poderia ter sido decorrente de estarem situados em um nível de aprendizagem representacional, no qual, possivelmente, teriam memorizado que o símbolo " $-$ 1", estava atrelado à resolução de um sistema de equações.

Na segunda categoria, expressaram os valores do enunciado, em forma de uma equação custo, (supôs-se que pelo fato de a situação mencionar o custo de um imóvel), porém subtraíram o custo variável do custo fixo. Apresentaram uma tentativa de registro gráfico, ainda que equivocada, mas não escreveram a interpretação dos coeficientes no contexto da situação, conforme expõe-se, na Figura 67, o registro de E16.

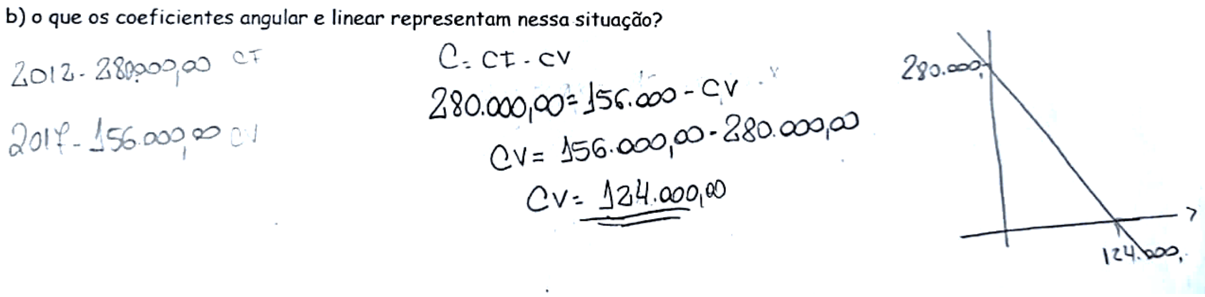


Figura 67: terceira situação do quinto encontro, por E16.
Fonte: dados da pesquisa.

Nesta categoria, além de E16, estavam E1, E3, E6, dispostos em duas duplas. Acreditou-se que os conhecimentos externalizados foram provenientes de uma, possível, aprendizagem representacional dos elementos da equação custo ou, ainda, pode-se supor que, ao entrarem em contato com os conceitos de custo e seus elementos específicos, ocorreu uma aprendizagem superordenada e estes novos conhecimentos passaram a subordinar aqueles que lhes deram origem. Além disso, nos seus registros gráficos, apresentaram o custo variável, assim denominado por eles, como a raiz da equação e isso pode ter fornecido uma pista de que o conceito-em-ação "o coeficiente angular indica o lugar onde a reta corta o eixo x", possivelmente, ainda estava presente em seus esquemas, desde os primeiros encontros.

A terceira categoria, contemplou sete estudantes (E2, E5, E7, E9, E10, E11 e E14), que apresentaram o registro gráfico correto e/ou parcialmente correto, pois explicitaram retas decrescentes, com o coeficiente linear igual a 280.000, todavia, aparentemente, alguns tiveram problemas na conversão do registro algébrico para o registro gráfico e/ou vice-versa, pois escreveram uma equação incorreta (coeficiente angular incorreto) diante de um gráfico correto.

Somente E5 e E7 conseguiram explicitar, corretamente, o gráfico e a equação correspondente, mas não interpretaram a situação no contexto administrativo. Na verdade, ao longo das análises desta tarefa, o único registro escrito que demonstrou indícios de interpretação no contexto administrativo foi o de E10, conforme detalha-se em seu registro mostrado na Figura 68.

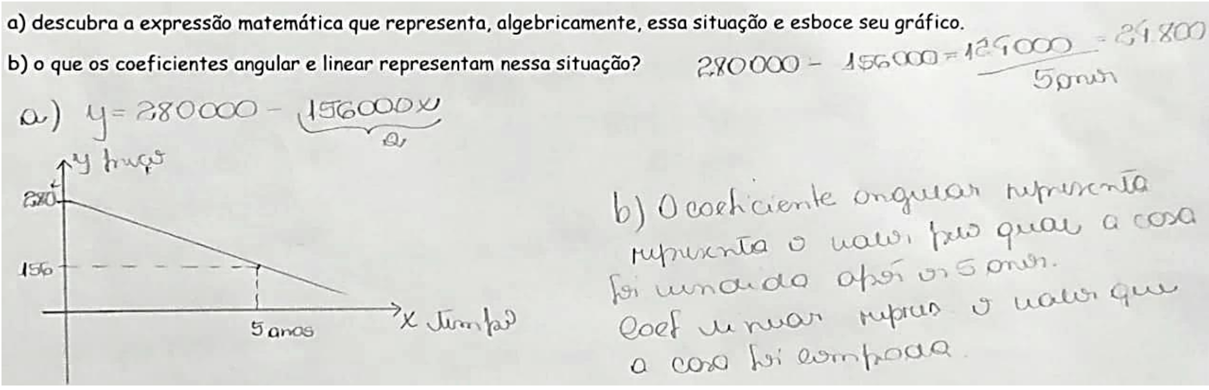


Figura 68: terceira situação do quinto encontro, por E10.
Fonte: dados da pesquisa.

Apesar de sua equação e sua interpretação escrita estarem, parcialmente, incorretas, seu gráfico estava correto e seu registro escrito foi o único que relacionou o coeficiente angular com o valor de compra do imóvel. Os demais escreveram *"o angular cruza na reta decrescente e o linear cruza no eixo que obteve o valor R$ 156.000,00"* (E14), *"o coeficiente angular é negativo, indica que houve depreciação e o coeficiente linear é o valor inicial"* (E2) e *"o coeficiente angular representa uma reta decrescente e o linear o valor inicial da reta"* (E11) ou deixaram o item em branco.

Isso corroborou a concepção de que o contexto da Matemática e o administrativo, no enfrentamento de algumas situações, andavam quase que em planos distintos, pelo menos no momento de explicitação da interpretação dos estudantes. A interpretação de que o coeficiente linear era o valor inicial da reta era um destes indícios, pois ele indicava o valor de compra do imóvel ($R\$ \ 280.000$,00), no entanto, dificilmente, os estudantes explicitaram essa verificação.

Ademais, um estudante (E18), deixou a tarefa, praticamente, por fazer. Inicialmente, ele formava uma dupla com E5 e iniciou o esboço de um sistema de equações, mas, durante algum tempo, ficou ao celular e logo deixou a sala, ausentando-se durante grande parte da atividade.

Um dos propósitos da implementação didática foi a elaboração de situações que estivessem adequadas ao tempo necessário para que os estudantes discutissem entre si, sob o auxílio da mediação docente. Tencionava-se que eles pudessem realizar suas próprias conclusões, não apenas que copiassem informações da lousa ou que assistissem a professora resolver os exercícios nele. Mas, para isso, foi preciso, principalmente, dispor de paciência, pois cada estudante apresentava sua maneira particular de raciocínio e de se expressar, isso carecia de tempo e negociação. As situações não poderiam ser resolvidas/enfrentadas às pressas.

Dessa forma, oportunizava-se algum tempo para que eles discutissem e chegassem a um consenso (ou não), mas que elaborassem algum tipo de registro, que explicitassem alguma forma de conhecimento, para que, depois disso, na lousa, cada situação fosse discutida pelo grande grupo. Neste ponto, ressalta-se a avaliação contínua e qualitativa, pois durante todo este processo, houve a busca pela explicitação, por parte dos estudantes, de como elaboravam suas estratégias, sem exigências de que fossem, necessariamente, corretas, mas, sobretudo, que fossem comunicadas.

Acreditava-se que, dessa maneira, seria possível aproveitar as informações explicitadas por eles, mesmo que estivessem equivocadas, fazia-se questão de encontrar algo em sua fala ou em seu registro escrito que fosse pertinente, de tal forma que eles se sentissem valorizados por contribuir na construção e na conclusão de cada situação.

Contudo, evidenciou-se que tanto no estudo 1 quanto no estudo 2, o da implementação didática, os estudantes foram resistentes quanto à utilização do *Geogebra* nos seus celulares e do *notebook*, disponibilizado em sala de aula (somente no estudo 2). Adotou-se essa postura, pois tinha-se ciência de que não seria possível levá-los ao laboratório de informática toda a semana, devido à necessidade de reserva prévia e dificuldade de disponibilidade do ambiente.

Além disso, as videoaulas propostas para serem assistidas antes de cada encontro, aparentemente, não foram encaradas como uma extensão das atividades da sala de aula pelo grande grupo, pois, de maneira geral, eles não aderiram à ideia. Mesmo consciente dessa resistência, foram orientados a realizarem as atividades extraclasse, assistindo às videoaulas e realizando as tarefas de uma lista composta de quatro exercícios, todos referentes ao ponto de nivelamento (com gabarito), disponibilizados no *Moodle*.

7.2.6 O sexto encontro – 29/03/2019

Neste dia, houve a finalização da quarta etapa da UEPS (novas situações em nível mais alto de complexidade) e, de maneira análoga ao exposto no quinto encontro, proporcionou-se três situações que contemplaram, praticamente, os mesmos conceitos envolvidos, com exceção do ponto de equilíbrio, que ainda não havia sido discutido na semana anterior.

Conforme relatado no capítulo anterior, no estudo 1, esta data, também nomeada de “a última aula antes da prova”, foi demarcada pela baixa assiduidade, pois os sete estudantes que, à época compareceram ao encontro, afirmaram que alguns dos seus colegas preferiam ficar em casa, pois sabiam que *“como hoje é a última aula antes da prova, o pessoal sabe que não perde* *conteúdo se não vem"*[50].

Justamente para contrapor esta ideia e obedecendo à proposta de Moreira (2012b), projetou-se a conclusão da quarta etapa da UEPS neste dia, pois, ao estarem cientes de que haveria "conteúdo novo" e que ele seria abordado na prova, isso poderia ser um fator que desencadearia a sua ida ao encontro. Outro aspecto que poderia influenciá-los nesta decisão (e que emergiu diante de pequenos fracassos evidenciados no estudo 1), foi a combinação feita no início do semestre de que, nesta data, ocorreria um trabalho avaliativo.

Cabe relembrar que este trabalho avaliativo obedeceria aos mesmos princípios do que já havia ocorrido no quarto encontro, com avaliação qualitativa em detrimento da avaliação quantitativa (as atividades entregues valeriam 2,0 pontos no total de 10,0 do somatório do módulo). Desse modo, apostou-se na ideia de que, sabendo que haveria uma avaliação, provavelmente, as chances de os discentes faltarem à aula, diminuiria.

E, aparentemente, esta decisão os influenciou a comparecer na aula pois, diferentemente do estudo 1, obteve-se alto índice de assiduidade, mais especificamente, 17 estavam presentes desde o início da aula e três chegaram em algum momento após o seu início. Somente um estudante faltou (E21), entretanto ele já não frequentava às aulas desde o segundo encontro e já havia realizado o cancelamento da disciplina.

Antes de distribuir a primeira situação, discutiu-se a respeito das tarefas extraclasse e das duas videoaulas, se alguém queria fazer algum questionamento ou comentário. Neste dia, 11 estudantes afirmaram ter assistido aos vídeos e nove, que tinham feito, ao menos, alguns dos exercícios da lista. Além disso, aparentemente, os estudantes demonstraram sentimento de valorização por saber que a professora estava gravando materiais para eles e disponibilizando na *internet*. Obteve-se comentários positivos de alguns deles, a exemplo de E1: *"bei, a professora tá famosa na internet, gravando vídeos pra gente. Que show!"*, de E10: *"ficaram muito legais os vídeos que tu fez! Um monte de gente fez comentários nos vídeos, tu viu prof?"* e de E17: *"sora, tu tá toda blogueirinha [...], ficou muito legal mesmo!"*.

Fez-se uma espécie de retrospecto do que já havia sido discutido nos encontros anteriores na tentativa de que os estudantes reconciliassem integrativamente os significados e isso gerou uma conversa com participação intensa de alguns estudantes. Diversos exemplos foram mencionados a respeito de oferta e demanda, pois eles comentaram aspectos que foram ressaltados nas videoaulas, o que forneceu indícios de que estavam entrelaçando significados de "procura por um item" ou "desejo de compra do consumidor" com o conceito de "demanda"

[50] Este trecho é um excerto da fala de A4, um dos discentes participantes do estudo 1.

e “disponibilidade de um produto no mercado” ou “o desejo de venda de um produto” com o conceito de “oferta”. Também houve a diferenciação de ponto de equilíbrio e ponto de nivelamento, por meio de um esquema feito no quadro de giz (pela professora, com participação verbal dos estudantes).

A partir dessa temática, outros assuntos relacionados, tão importantes quanto, também surgiram, por exemplo, E10 levantou a pauta “sobra de alimentos em restaurantes e/ou padarias”, relacionada a uma lei que proíbe a distribuição de alimentos que sobram em *buffets*, questionando que tantas pessoas passam fome e/ou pedem alimentos nas ruas e E3 mencionou a “preocupação com a preservação ambiental”, referindo-se a empresas que produzem, desenfreadamente, embalagens plásticas como canudos e copos plásticos, que são utilizados por poucos minutos e descartados, mas demoram décadas ou séculos para se decompor.

Estes momentos foram muito interessantes e contaram com intensa participação de alguns discentes, pois, como já mencionado, nada era unanimidade. Alguns permaneceram de braços cruzados com a cabeça escondida, como se estivessem dormindo sobre a classe, outros ficaram ao celular, outros, ainda, saíram da sala.

7.2.6.1 A primeira situação do sexto encontro

O grupo se organizou no formato de sete duplas e um trio para resolver a primeira tarefa, que tencionava dar sentido ao conceito de equação oferta e equação demanda para que, conjuntamente, elas pudessem dar sentido ao conceito de ponto de equilíbrio. Neste contexto, a situação exigia subsunçores de operações aritméticas e algébricas, reconhecimento de letras como incógnitas, da lei da equação da reta, construção gráfica, significado dos coeficientes, do símbolo de igualdade como ideia de equivalência, além do entendimento do conceito de demanda e oferta.

De maneira análoga ao quinto encontro, o nível de dificuldade das situações do sexto encontro aumentava, à medida que exigia cada vez mais subsunçores estabilizados na estrutura cognitiva dos discentes, para serem solucionadas.

Seu enunciado obedecia à seguinte estrutura:

- ***Questão 1*** *– Em certa localidade, a função de oferta anual de um determinado produto agrícola é representada por* $p = 0{,}01x – 3$*, na qual “*p*” é o preço por quilograma e “*x*” a quantidade ofertada, em toneladas.*

a) que preço induz a uma produção de 650 *toneladas?*

b) se o preço, por quilograma, for $R\$7{,}5$*, qual será a produção anual?*

c) qual o ponto de equilíbrio de mercado se a função de demanda anual for $p = 10 - 0{,}01x$*?*

d) apresente o gráfico contendo o ponto de equilíbrio e o que cada eixo representa. Escreva sua interpretação econômica.

Quatro possíveis categorias de invariantes operatórios emergiram diante do enfrentamento dessa situação. Na primeira delas, os estudantes desvendaram, corretamente, o registro algébrico e o registro gráfico, mas apresentaram equívocos na interpretação econômica. Neste grupo estavam E7, E9, E11 e E18 e E19. Aparentemente, os principais motivos que ocasionaram tais equívocos na interpretação do ponto de equilíbrio, foi pelo fato deste grupo ter relacionado o ponto de equilíbrio ao ponto de nivelamento. Inclusive, uma das interpretações, por escrito, elaborada por E18 e E19, foi: *"Nesse ponto não terá lucro e nem prejuízo, pois os dois pontos estão iguais"*.

Na segunda categoria, dois estudantes (E6 e E14), aparentemente, relacionaram a equação de oferta do enunciado à lei da receita, pois multiplicaram a equação de oferta por x e explicitaram a equação da receita como uma equação quadrática. Na sequência, para desvendar o primeiro item, substituíram o x por 650. No item b, substituíram o x por $7{,}5$, o que sugeriu a ideia da não diferenciação das incógnitas "preço" e "quantidade produzida". No item c, igualaram a equação de oferta ao valor encontrado como resposta no item b e deixaram o último item por fazer. Desse modo, E6 e E14 não desvendaram, corretamente, nenhum dos itens da situação.

Na terceira categoria, apresentaram equívocos diante de operações aritméticas no segundo item da tarefa e, mesmo sob o auxílio da calculadora, não descobriram qual seria a produção anual, caso o preço, por quilograma, do produto fosse $R\$\ 7{,}5$. Ademais, não apresentaram o registro gráfico do ponto de equilíbrio e não interpretaram a situação economicamente. Neste grupo estavam E2, E8, E13 e E20.

Na quarta categoria, obtiveram sucesso diante dos dois primeiros itens, contudo não calcularam o ponto de equilíbrio, não apresentaram o gráfico da situação, tampouco interpretaram-na economicamente. Este grupo foi composto por E1, E3, E5, E10, E12 e E17.

Elegeu-se o registro mostrado na Figura 69, elaborado, conjuntamente, por E12 e E17, para ressaltar a, provável dificuldade que eles encontraram diante da elaboração do registro gráfico, pois, a equação de oferta apresentada no enunciado do item c, era $y = 10 - 0{,}01x$ e, ao confrontar seu registro verbal com sua resposta escrita, verificou-se que, supostamente, um conceito-em-ação os guiou, pois "uniram o coeficiente angular e o coeficiente linear para delinear um par ordenado", durante a resolução do ponto de equilíbrio.

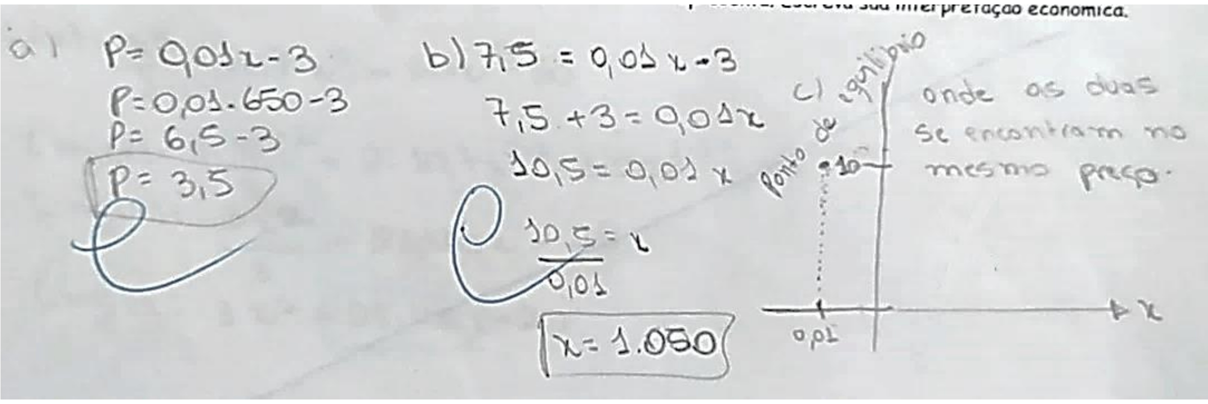


Figura 69: primeira situação do sexto encontro, elaborada por E12 e E17.

Fonte: dados da pesquisa.

Nos seus discursos, evidenciou-se que pareciam receosos na busca pelo ponto de equilíbrio e discutiram:

– E12: *"ela disse que eles são iguais nesse ponto, deve ser isso aqui"*.

– E17: *"o* 0,01 *tem que ser na esquerda porque é negativo. Isso! Aí dá o ponto de equilíbrio"*.

– E17: *"pois é, mas daí como é que vai ficar pro lado negativo?"*

– E12: *"eu acho que é melhor a gente deixar assim, pelo menos a gente tentou! Pelo menos, a gente sabe que é o ponto que elas se encontram no mesmo preço, vamos escrever isso"*.

Mesmo os estudantes que foram contemplados nas outras categorias de resolução, apresentaram, por vezes, uma maneira de resolução análoga a esta. Se, por um lado, no início do encontro, antes de serem confrontados com as situações, houve intensa participação e diálogo a respeito dos conceitos da área administrativa, diante das tarefas, no entanto, evidenciou-se que tais conceitos ficavam em segundo plano ou não permeavam seus esquemas de resolução, em detrimento dos cálculos, puramente, matemáticos.

Interpretou-se que, de maneira geral, ao serem confrontados com situações Matemáticas, era como se, para eles, o rigor da disciplina exigisse que ficassem presos à registros estritamente matemáticos em detrimento dos conceitos administrativos que haviam sido discutidos há poucos minutos.

7.2.6.2 A segunda situação do sexto encontro

A segunda situação, propunha dar sentido ao conceito de equação oferta e equação demanda para que, conjuntamente, elas pudessem dar sentido ao conceito de ponto de equilíbrio. Como pode-se verificar, o objetivo das duas primeiras situações desse encontro era o mesmo, contudo, elas foram apresentadas em uma linguagem distinta e, dessa forma, diferiam quanto aos subsunçores que demandavam, além de sugerirem caminhos distintos para elaboração dos esquemas de resolução, pois, assim, provavelmente, não poderiam ser resolvidas de uma maneira, sequencialmente, memorística.

Nesta tarefa, os subsunçores necessários, compreendiam o reconhecimento de pares ordenados, da lei da equação da reta, resolução de um sistema de equações, operações aritméticas e algébricas, reconhecimento de letras como incógnitas, construção gráfica, significado dos coeficientes, do símbolo de igualdade como ideia de equivalência. Todos estes conceitos envolvidos, para dar sentido ao conceito de demanda e oferta. Além, é claro, de conversões entre o registro escrito, algébrico, gráfico e escrito. Apresenta-se a situação para verificação:

- ***Questão 2*** *– Em uma sorveteria, sabe-se que, quando o preço do sorvete é* $R\$\ 7{,}15$, *a quantidade ofertada será* 350 *por semana e, se o preço for* $R\$\ 9{,}7$, *a quantidade semanal ofertada será* 1.200. *Nessa sorveteria, sabe-se que a função de demanda por sorvetes é* $p = 10 - 0{,}02x$. *Considerando um modelo linear, qual é a função de oferta?*

a) expresse as duas funções no mesmo gráfico;

b) o que os coeficientes angular e linear significam em cada uma das funções?

c) escreva a interpretação econômica dessa situação.

Esta tarefa, contou com a participação de 20 estudantes, que trabalharam em 10 duplas e foram organizados conforme três categorias de invariantes operatórios que foram explicitadas. A primeira delas, compreendeu metade do grupo (E1, E3, E6, E8, E10, E12, E13, E14, E15 e E16). Todos eles iniciaram o esboço do sistema de equações e relacionaram, corretamente, o “preço do sorvete” à incógnita y e a “quantidade semanal ofertada” à x.

Contudo, em algum momento de suas resoluções, apresentaram equívocos diante de operações aritméticas e isso os impediu de desvendar totalmente a situação. Apresenta-se, na Figura 70, como representante deste grupo, o registro de E8 e E14.

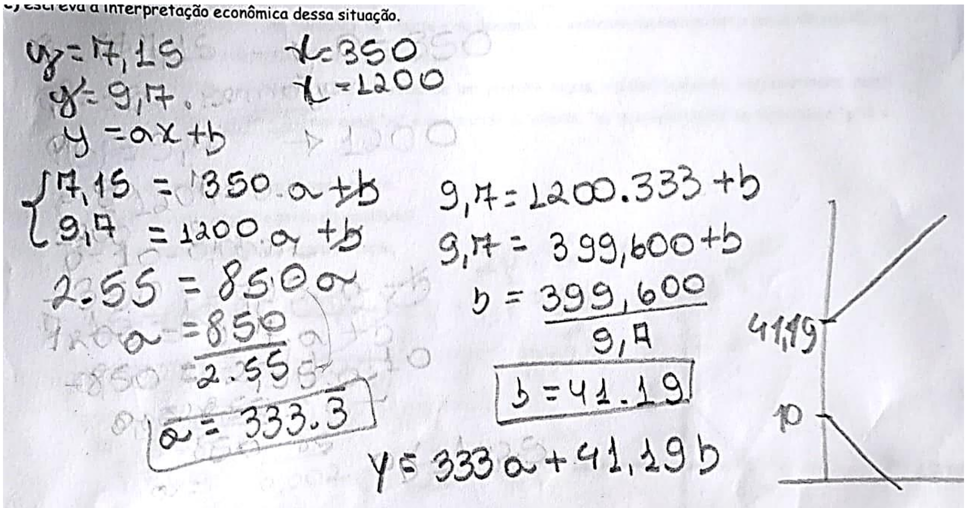


Figura 70: segunda situação do sexto encontro, elaborada por E8 e E14.

Fonte: dados da pesquisa.

Em seu registro, verificou-se que no início da resolução do sistema de equações, provavelmente, multiplicaram a primeira delas por (-1), embora não tenham apresentado essa notação, ou, simplesmente, subtraíram a primeira equação da segunda. O problema consistiu na operação aritmética apresentada, pois inverteram o numerador e o denominador na divisão para encontrar o valor numérico do coeficiente "a".

Tal equívoco, ocasionou uma provável sucessão de erros, pois substituíram o valor incorreto e encontraram um suposto valor para o coeficiente "b". Além disso, esta informação foi explicitada na equação, acompanhada da letra b. Curiosamente, eles explicitaram as duas equações, a que tinham acabado de encontrar e a do enunciado, de tal maneira que as duas retas não se interceptaram, logo não haveria o procurado ponto de equilíbrio. As outras duplas, apresentaram registros distintos, dentro de um contexto semelhante, mas não apresentaram o registro gráfico da mesma forma. Algumas, inclusive, não o fizeram.

A segunda categoria, abarcou os discentes que desvendaram a situação por completo, neste caso, somente dois (E5 e E18). Curiosamente, na primeira tarefa, eles não haviam obtido sucesso para calcular, representar e/ou interpretar o ponto de equilíbrio, contudo não estavam trabalhando conjuntamente. Nessa tarefa, no entanto, obtiveram sucesso e foram além, pois auxiliaram outros colegas a esboçar o gráfico e a encontrar o ponto de equilíbrio. Sua interpretação, forneceu indícios de compreensão do conceito econômico, pois escreveram: *"se o preço for maior do que $R\$\ 8{,}44$, a oferta aumenta e a demanda diminui"*, isso aliado ao seu registro gráfico. Pontua-se, apenas, que eles escreveram, equivocadamente, nos eixos do sistema cartesiano "coeficiente linear" para designar o eixo y e coeficiente angular, para designar o eixo x.

A terceira categoria, contemplou oito estudantes (E2, E4, E7, E9, E11, E17, E19 e E20), que elaboraram e solucionaram, corretamente, o sistema de equações, contudo, ao demonstrarem tentativas do cálculo do ponto de equilíbrio, encontraram a quantidade 980 e o preço $R\$\ 8{,}04$, ou seja, explicitaram o ponto de equilíbrio $P(980, 8{,}04)$, mas não apresentaram o desenvolvimento desse cálculo, a igualdade entre as duas equações. Também explicitaram o registro gráfico e igualaram a equação de demanda à zero, para encontrar a sua raiz. Apresenta-se, na Figura 71, o registro de E2 e E19 para minuciar esse procedimento de resolução.

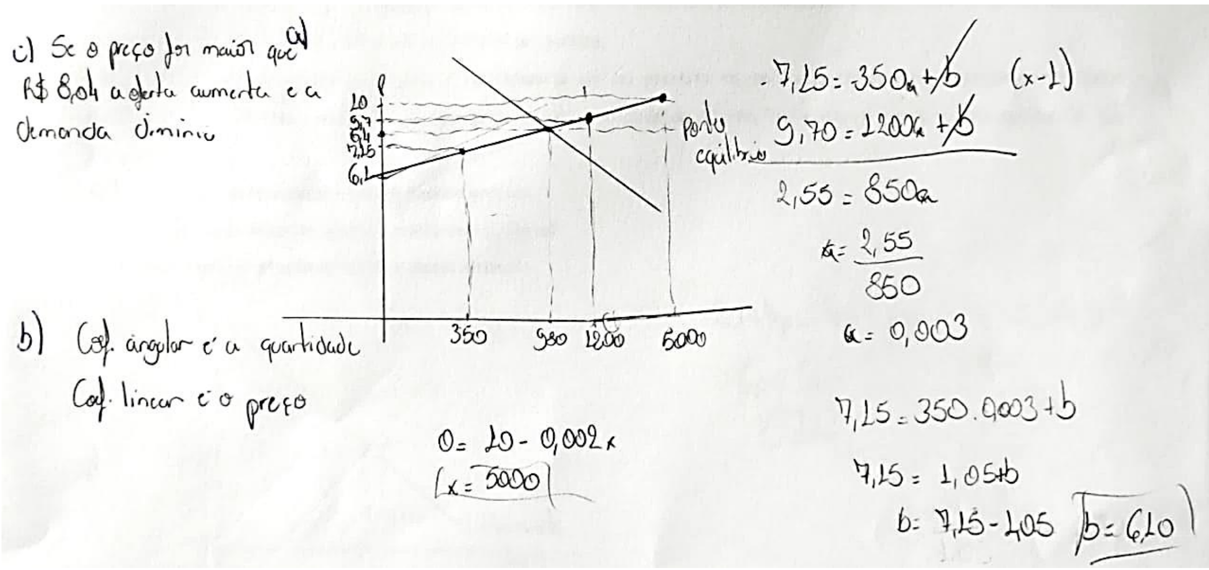


Figura 71: segunda situação do sexto encontro, elaborado por E2 e E19.
Fonte: dados da pesquisa.

Os discentes apresentaram o cálculo da raiz da equação de demanda na parte central, logo abaixo do gráfico, contudo, evidenciou-se que eles não relacionaram este valor ao lugar geométrico onde a reta interceptaria o eixo x. Além disso, demonstraram a não verificação de que o coeficiente linear indicaria a intersecção da reta com o eixo y. Dessa forma, a equação de demanda, aparentemente, estava em um local errôneo. O ponto de nivelamento, embora incorreto, foi interpretado corretamente, o que forneceu indícios de captação do seu conceito econômico.

Ademais, no canto esquerdo inferior de seu registro, verificou-se a explicitação de um provável conceito-em-ação que os norteou nesta e em outras situações. E isto não foi uma exclusividade de E2 e E19, pois, principalmente nos registros verbais captados do grupo de estudantes, por vezes o coeficiente "a" e a incógnita x, se confundiam, quase como se fossem um ente matemático que representavam o mesmo objeto. Isso também valia para o "b" e o y.

Após a finalização da tarefa, todos entregaram as situações e houve o intervalo entre períodos. A correção foi feita quando retornaram, de tal maneira que eles tivessem a oportunidade de rever seus equívocos, questionar e argumentar a respeito de suas dúvidas e de corrigir, em seus cadernos, as tarefas na íntegra. Desse modo, as situações não ficariam com a professora, no sentido de serem feitas e entregues, sem a chance de serem refeitas por eles.

A intenção contida nessa proposta foi seguir a orientação de recursividade, sugerida por Ausubel (1963, 2000), pois acreditou-se que permitindo que os discentes discutissem com os colegas e com a professora, refazendo seus escritos, aprimorando seus erros, poderiam verificar que seus equívocos faziam parte do seu processo de aprendizagem e não simbolizavam o seu fracasso, tal como, em diversos momentos ao longo dos encontros, alguns explicitaram.

7.2.6.3 A terceira situação do sexto encontro

A última situação deste dia, contou com a participação de 18 estudantes. Ela teve um caráter, de certa forma, diferenciado, pois solicitava que eles elaborassem uma situação que envolvesse alguns dos conceitos abordados até então. Para isso, tiveram liberdade de escolha e precisaram de criatividade, as únicas regras que tiveram de seguir, além da elaboração da situação, foram a realização da interpretação econômica e a apresentação da construção gráfica da situação criada.

O enunciado, que foi escrito na lousa, continha a seguinte proposta:

- ***Questão 3*** *– Elabore uma situação que envolva alguns dos conceitos abordados, contendo interpretação econômica e construção gráfica.*

a) Situação;

b) Gráfico;

c) Interpretação econômica/gráfica.

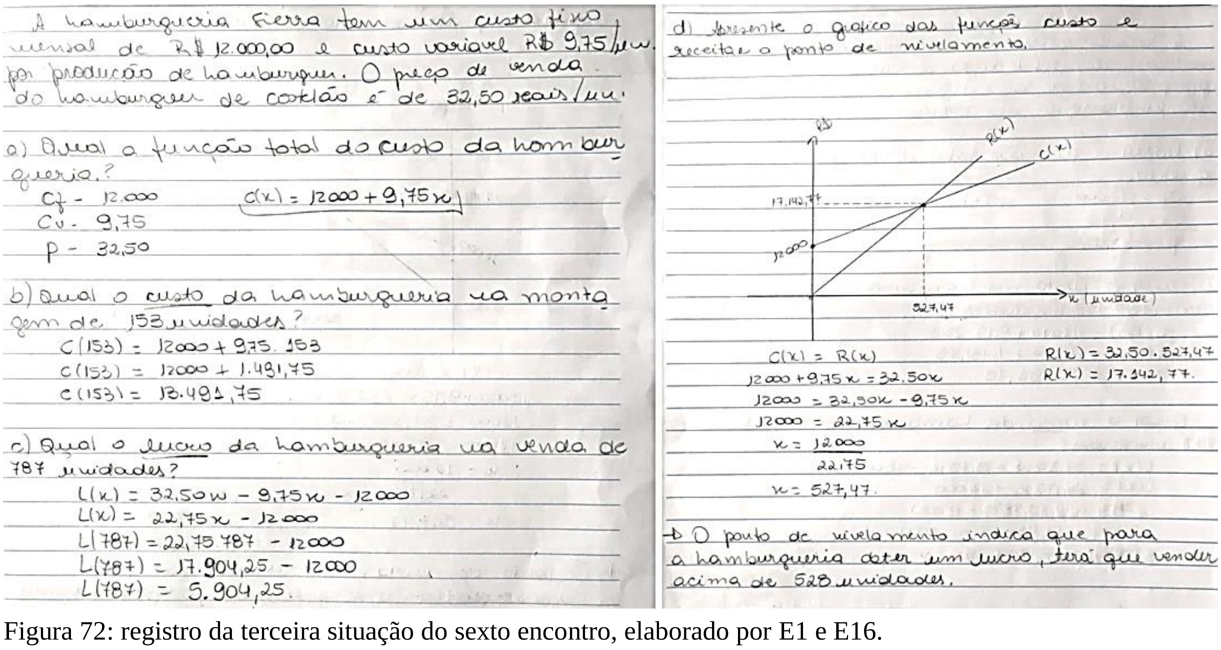
O grupo formou nove duplas para realizar a tarefa, que teve a finalidade de dar sentido ao conceito de equação, pois supôs-se que, qualquer que fosse o tema escolhido pelas duplas, equações emergiriam diante das situações. Além disso, os subsunçores dependeriam do enfoque que eles desejariam dar às situações elaboradas. Contudo, curiosamente, diante dos diversos assuntos que os discentes poderiam elencar para construir uma situação, todos eles optaram pelo ponto de nivelamento, consequentemente, abordaram tópicos de custo, lucro e receita.

Diante dessa constatação generalizada, especulou-se que a aprendizagem do conceito de ponto de nivelamento, talvez, possa ter ocorrido por subordinação. Amparou-se nas afirmações de Moreira (2012a), para seguir esta hipótese, pois o autor afirma que, nesta forma de aprendizagem, os aprendizes atribuem significado aos novos conhecimentos, ancorando-os a seus subsunçores relevantes, ou seja, o novo conhecimento, neste caso, o conceito de ponto de nivelamento, ficou subordinado à estrutura cognitiva dos discentes.

Para além deste indício, foi muito interessante constatar que todos eles criaram situações do seu cotidiano, utilizaram o contexto das empresas onde trabalhavam ou dos lugares que gostavam de frequentar (assim relatado por eles, enquanto elaboravam as tarefas), para utilizar os conceitos de custo, lucro, receita e ponto de nivelamento. Além disso, calcularam quantidades necessárias para não haver prejuízos, fizeram o caminho inverso também (caso quisessem obter uma receita de determinada quantia, qual deveria ser a quantidade vendida).

Três duplas (E3 e E5, E9 e E14 e E11 e E17), explicitaram dois tipos de gráficos, o do lucro e o do custo e receita, com o ponto de nivelamento e indicaram que ambos se referiam ao "marco zero" do lucro. Isso evidenciou que, aparentemente, eles se apropriaram de uma linguagem Matemática para explicar uma situação no contexto administrativo. Isto, notavelmente, foi uma contribuição na construção de uma aprendizagem com significado e para o progresso do domínio do campo conceitual das equações e dos gráficos para este grupo.

Todas as outras seis duplas, apresentaram tentativas de elaboração e de resolução, acompanhadas do registro gráfico e da interpretação econômica do ponto de nivelamento. Obviamente, algumas duplas apresentaram registros com mais, outras com menos, riqueza de detalhes. Expõe-se, a seguir, na Figura 72, o procedimento escrito de E1 e E16, diante da tarefa.


A hamburgueria Fierra tem um custo fixo mensal de R$ 12.000,00 e custo variável R$ 9,75/un. por produção de hamburguer. O preço de venda do hamburguer de costelão é de 32,50 reais/un.

a) Qual a função total do custo da hamburgueria?
Cf - 12.000
Cv - 9,75
P - 32,50
C(x) = 12000 + 9,75x

b) Qual o custo da hamburgueria na montagem de 153 unidades?
C(153) = 12000 + 9,75 . 153
C(153) = 12000 + 1.491,75
C(153) = 13.491,75

c) Qual o lucro da hamburgueria na venda de 787 unidades?
L(x) = 32,50x - 9,75x - 12000
L(x) = 22,75x - 12000
L(787) = 22,75 . 787 - 12000
L(787) = 17.904,25 - 12000
L(787) = 5.904,25.

d) Apresente o gráfico das funções custo e receita e o ponto de nivelamento.

C(x) = R(x)
12000 + 9,75x = 32,50x
12000 = 32,50x - 9,75x
12000 = 22,75x
x = 12000 / 22,75
x = 527,47.

R(x) = 32,50 . 527,47
R(x) = 17.142,77.

→ O ponto de nivelamento indica que para a hamburgueria obter um lucro, terá que vender acima de 528 unidades.

Figura 72: registro da terceira situação do sexto encontro, elaborado por E1 e E16.

Fonte: dados da pesquisa.

Em virtude da redução feita no papel, para que as elaborações da dupla se adequassem à figura, talvez não seja possível visualizar, minuciosamente, as explicitações feitas por eles, contudo, ressalta-se que E16 trabalhava em uma hamburgueria e E1, por sua vez, informou que consumia, com frequência, tal produto e, juntos, elaboraram uma situação que abordava essa temática, ou seja, ela partiu de seu contexto, logo fazia sentido para eles. No gráfico, à direita, pode-se verificar que a quantidade de nivelamento que eles encontraram foi de 527,47, no entanto, decidiram, conjuntamente, que tal valor deveria ser ajustado para 528, pois tratava-se de um produto que só poderia ser vendido em quantidades inteiras.

Faz-se esta afirmação, pois aferiu-se que a atividade promoveu, justamente, um dos aspectos transversais das UEPS, propostos por Moreira (2012b), o qual ressalta a importância de o docente oportunizar tarefas diversificadas aos discentes, dentre elas, solicitar que, eles mesmos, proponham situações. Certamente, as situações elaboradas pelos estudantes neste caso, não eram novas e não familiares, pois carregavam uma linguagem muito parecida com algumas situações que lhes foram propostas neste e nos encontros anteriores, entretanto, eram fruto da sua curiosidade e oriundas de suas estruturas cognitivas.

A respeito disso, Ausubel, Novak & Hanesian (1980, p. 23), asseguram que

> [...] a aprendizagem significativa ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado e quando o aluno adota uma estratégia correspondente para assim proceder.

Ao elaborarem situações contendo todos os aspectos mencionados, os estudantes relacionaram de forma não arbitrária, as novas informações que haviam mobilizado nas aulas, com conhecimentos prévios que possuíam e, mais do que isso, que faziam parte do seu cotidiano. Desse modo, julgou-se que este foi um passo importante, que denotou um provável indício de aprendizagem significativa do conceito de ponto de nivelamento, abarcando as equações custo, lucro, receita e os subsunçores referentes à ideia de pares ordenados, noção do símbolo de igualdade, construção de gráficos, significado dos coeficientes, reconhecimento da lei da equação da reta, operações algébricas e aritméticas.

Outrossim, cumpriram a proposta de Duval (2003), pois elaboraram uma situação em registro escrito, transitaram para o registro algébrico, depois para o registro gráfico e souberam interpretá-la, novamente, por meio do registro escrito. Tudo isso sob a, constante, negociação de significados que o discurso verbal os proporcionou. Disso depreendeu-se que mobilizaram quatro diferentes registros e realizaram conversões, o que também forneceu indícios de compreensão dos objetos matemáticos equações e gráficos, para dar sentido ao conceito de ponto de nivelamento.

Resgatando-se o exposto anteriormente, nem todos os estudantes procederam da mesma forma, tampouco explicitaram o mesmo nível de compreensão. A título de exemplo, conferiu-se que E7 e E15, elaboraram uma situação que referia-se a uma fábrica de preservativos. Eles apresentaram as equações custo, lucro e receita e calcularam quantas unidades a fábrica precisaria vender para ter um lucro de $R\$\,15.000{,}00$. Ademais, apresentaram o gráfico da função lucro, mas não arredondaram o valor para uma quantidade inteira, nem escreveram qualquer tipo de interpretação econômica. Enquanto realizavam a tarefa, sugeriu-se que aproveitassem todas as informações que já dispunham e calculassem o ponto de nivelamento, construíssem o gráfico e interpretassem este ponto econômico, contudo, eles não explicitaram tais registros.

Quando finalizaram a tarefa, convidou-se as duplas para irem até a lousa e apresentarem aos colegas as situações elaboradas por eles, explicando suas suposições e explicitando os gráficos com a interpretação que eles haviam feito. Em virtude do tempo, isso ocorreu em formato de uma conversa, somente os gráficos foram desenhados na lousa. Houve grande resistência e hesitação de alguns discentes e, nestes casos, teve-se que intervir e auxiliá-los, pois estavam extremamente encabulados e, aparentemente, desconfortáveis.

Cabe frisar que, por meio dessa dinâmica, não teve-se a intenção de constrangê-los, ao contrário, pretendia-se que se sentissem valorizados ao verificarem que eram capazes de elaborar e explicar os conceitos para seus colegas, mas entendeu-se que nem todos os estudantes já dispunham de desenvoltura ou do desprendimento necessário para falar em público. Entretanto, isso precisaria ser incentivado, aos poucos, em diferentes atividades ao longo do curso, afinal, uma das inúmeras competências exigidas do administrador é a de falar em público, de expressar suas ideias e de dialogar com diferentes pessoas.

Na finalização deste encontro, informou-se que uma lista de tarefas seria disponibilizada no *Moodle*, com o intuito de que os estudantes entrassem em contato com outras situações em turno extraclasse. Como de costume, todas elas estariam acompanhadas dos respectivos gabaritos e abarcariam aspectos semelhantes aos discutidos em aula. Ademais, caso eles enfrentassem dúvidas, estavam cientes que, por meio do ambiente virtual de aprendizagem, poderiam mandar mensagem para a professora, que poderia auxiliá-los ao longo da semana.

7.2.7 O sétimo encontro – 05/04/2019

Neste dia, houve a implementação da quinta etapa da UEPS (avaliação somativa individual). Esta foi a primeira avaliação individual, pois as duas avaliações anteriores, que ocorreram no quarto e no sexto encontro, respectivamente, haviam sido desenvolvidas em formato de duplas ou trios e os estudantes também puderam contar com o auxílio de material de apoio (seus cadernos, livros, *internet*, calculadoras, *software Geogebra* e do ambiente virtual da disciplina).

O teste individual, totalizou 6,0 pontos na média, pois a nota do módulo era calculada por meio do somatório dos trabalhos e da prova e não poderia exceder 10,0 pontos. Antes desse dia, contudo, os estudantes já estavam cientes de suas notas, que eram atualizadas, juntamente com sua frequência semanal, na página do aluno, no site da instituição. Desse modo, foram para o encontro sabendo qual a nota que precisariam tirar na prova para alcançar a média, pois esta era uma preocupação, constantemente, externalizada por eles, além de ser um direito seu.

Retoma-se que no quarto e no sexto encontros, a avaliação dos estudantes foi, predominantemente qualitativa, de tal modo que os discentes que compareceram aos encontros e realizaram todas as atividades, demonstrando o envolvimento necessário para realizar as tarefas e a recursividade diante de seus equívocos, obtiveram nota 1,5 ou superior (no total de 2,0 pontos cada uma das avaliações).

Alguns, entretanto, obtiveram uma nota menor, em detrimento de não terem completado todas as solicitações, de terem deixado a sala ou de não demonstrarem envolvimento na execução das tarefas junto com seus colegas. Os estudantes sabiam que estavam sendo avaliados nestes aspectos, que fizeram parte da negociação do contrato didático, no primeiro encontro, além disso, foram retomados antes de cada uma das duas avaliações.

Antes de iniciar a prova (ou teste individual), quando adentrou-se na sala, o cenário encontrado foi, de certa forma, muito semelhante ao verificado no primeiro estudo, pois os estudantes esperavam ansiosamente, alguns aparentavam nervosismo, outros queriam externalizar suas dúvidas.

Infelizmente, ratificou-se a cultura de dar ênfase ao estudo dos conteúdos na véspera da prova, pois alguns enfatizaram que haviam estudado a matéria como nunca tinham feito, a exemplo de E17, que comentou: *"passei a noite em claro*[51] *prof, só tomei banho de manhã e fui trabalhar"* e de E7, que discursou: *"bah, eu to com medo professora, quase morri estudando de ontem pra hoje"*.

Na tentativa de acalmá-los, fez-se uma revisão, uma espécie de retomada dos conceitos estudados, de maneira expositiva, em formato de questionamentos, aproveitando-se das dúvidas externalizadas por alguns discentes. Também afirmou-se que, na verdade, a prova seria um compêndio de tudo o que havia sido abordado, para que percebessem-na como uma continuidade e/ou uma culminância do trabalho, um ciclo natural.

Além da verificação de ansiedade por parte do grupo, outro fator comum com o estudo 1 foi que, alguns discentes, insistentemente, não levaram a calculadora científica nas aulas e

[51] Expressão utilizada para indicar que uma pessoa ficou acordada a noite inteira.

protelaram sua utilização para este dia. Sem ter manipulado suas funções nas semanas anteriores, entender seus comandos, no dia da prova, mostrou-se, no mínimo, como um obstáculo a mais. Além disso, dois não tinham calculadoras e tiveram de pedir emprestada para outros colegas de curso.

Resgata-se, portanto, um aspecto já mencionado no estudo 1 e ratificado na implementação didática: a postura de alguns estudantes foi de encontro à verificada na investigação de Cumhur & Tezer (2019), pois, nela, os discentes mencionaram que a aprovação da utilização da calculadora seria uma das ações que o professor poderia adotar nas aulas de Matemática, para minimizar sua ansiedade frente às tarefas propostas. Além disso, verificou-se que alguns discentes demostraram resistência quanto à utilização do *software Geogebra* e para assistir as videoaulas disponibilizadas no *Moodle*.

Quanto à assiduidade, neste dia, todos estavam presentes e, coincidentemente, ninguém chegou atrasado. O único estudante ausente, foi E21 que, como exposto, havia cancelado a disciplina anteriormente.

7.2.7.1 Aspectos evidenciados no teste individual do estudo 2

O teste somativo individual foi composto de cinco situações (Apêndice H) e teve como intuito, verificar o desenvolvimento conceitual obtido pelos discentes, ao longo dos encontros, no campo de equações e gráficos, aplicados à área administrativa.

Pelo fato de o teste ser composto de cinco questões e o grupo estar formado por 20 estudantes, para não extrapolar as análises, pois concebeu-se que seria demasiadamente extenso apresentar e analisar, qualitativamente, todas as situações de todos os estudantes, apresenta-se, a seguir, um panorama com uma espécie de compêndio do seu desempenho na avaliação, com eventuais figuras dos registros dos diferentes estudantes, diante das situações.

Dessa forma, o Quadro 15, a seguir, expõe o desempenho quantitativo dos estudantes em cada questão do teste individual, bem como as capacidades que elas exigiam no seu enfrentamento. Tais capacidades se assemelhavam, em parte, às do Quadro 12 (exposto no item 7.2.1.2, na análise das situações do teste diagnóstico), todavia, elas continham um aprofundamento maior, pois as situações do teste individual obedeciam ao nível de complexidade de uma UEPS, proposto por Moreira (2012b), além de estarem atreladas, necessariamente, ao contexto administrativo, o que, propositalmente, não ocorreu no teste diagnóstico.

Quadro 15: resultados obtidos na análise das produções dos estudantes no teste individual do estudo 2.

QUESTÃO	CAPACIDADES NECESSÁRIAS	RESULTADO	
1	Resolver equações Utilizar letras como incógnitas Reconhecer a equação da reta Conceber o símbolo de igualdade como ideia de equivalência Entender o significado dos coeficientes angular e linear Compreender a ideia de par ordenado Construir gráficos no plano cartesiano Transitar do registro algébrico para o registro gráfico Transitar do registro gráfico para o registro escrito Incorporar o significado de demanda e oferta Interpretar o significado do ponto de equilíbrio	1 conseguiu (5%)	19 não conseguiram (95%)
2	Transitar do registro escrito para o registro algébrico Resolver equações Utilizar letras como incógnitas Reconhecer a equação da reta Conceber o símbolo de igualdade como ideia de equivalência Entender o significado dos coeficientes angular e linear Compreender a ideia de par ordenado Construir gráficos no plano cartesiano Transitar do registro algébrico para o registro gráfico Transitar do registro gráfico para o registro escrito Incorporar o significado de custo, receita e lucro Interpretar o significado do ponto de nivelamento	3 conseguiram (15%)	17 não conseguiram (85%)
3	Transitar do registro escrito para o registro algébrico Resolver equações Utilizar letras como incógnitas Conceber o símbolo de igualdade como ideia de equivalência Utilizar a propriedade distributiva da multiplicação Incorporar o significado de custo, receita e lucro Interpretar a situação no contexto administrativo, para realizar arredondamentos na resposta final	1 conseguiu (5%)	19 não conseguiram (95%)
4	Transitar do registro escrito para o registro algébrico Utilizar letras como incógnitas Reconhecer a equação da reta Compreender a ideia de par ordenado Resolver equações e um sistema de equações Entender o significado dos coeficientes angular e linear Construir gráficos no plano cartesiano Transitar do registro algébrico para o registro gráfico Transitar do registro gráfico para o registro escrito Incorporar o significado de demanda e oferta Interpretar o significado do ponto de equilíbrio	2 conseguiram (10%)	18 não conseguiram (90%)
5	Transitar do registro escrito para o registro algébrico Utilizar letras como incógnitas Resolver equações Calcular porcentagens Incorporar o significado de custo, receita e lucro Interpretar a resposta no contexto administrativo	2 conseguiram (10%)	18 não conseguiram (90%)

Fonte: dados da pesquisa.

Neste quadro, considerou-se, na categoria “conseguiram”, apenas, aqueles estudantes que acertaram a situação na íntegra e na categoria “não conseguiram” os que apresentaram equívocos ao longo do percurso, entretanto, ressalta-se que, tal como evidenciado no teste diagnóstico e no estudo 1, a maioria das situações era composta de mais de um item e, em muitos casos, os estudantes acertaram uns itens e não acertaram outros. Nestes casos, apresentaram acertos parciais e raciocínios corretos, em meio a conclusões incorretas e, certamente, elas foram consideradas quando fazia-se a correção da prova, somente não foram contabilizadas, no quadro acima, como um acerto integral da respectiva questão.

De antemão, apresenta-se o Quadro 16, com características semelhantes ao Quadro 13 (exposto no item 7.2.1.2, na análise das situações do teste diagnóstico). Ele expõe o desempenho individual dos estudantes em cada um dos itens das cinco questões propostas no teste individual, justamente pelo fato de elas não serem minuciadas na íntegra neste item, pois totalizariam 100 análises (cinco questões de 20 estudantes).

Quadro 16: desempenho individual dos estudantes nas cinco questões do teste individual do estudo 2.

	1		2			3	4				5
	a	b	a	b	c		a	b	c	d	
E1	X		X	X	X		X	X	X	X	
E2			X	X							X
E3	X						X	X	X	X	
E4											
E5	X		X								
E6							X	X			
E7			X				X				
E8											
E9	X		X	X	X		X	X		X	
E10											
E11			X	X	X	X	X	X			
E12											
E13											
E14			X								
E15											
E16											
E17											
E18	X	X					X	X	X		
E19	X						X	X	X		X
E20											

Fonte: dados da pesquisa.

Neste quadro, as células que estão assinaladas com um "X", indicam que o estudante acertou na íntegra o respectivo item/questão. Admite-se que, para fins de explicitação, contabilizou-se como acertos, itens que foram desenvolvidos e concluídos com êxito, entretanto, havia questões que estavam corretas, até certo ponto, mas que não foram finalizadas ou ocorreram erros em meio ao seu desenvolvimento, estas foram consideradas incorretas no quadro recém exposto.

Desse modo, analogamente à maneira como detalhou-se as atividades do estudo 1, apresenta-se, a seguir, uma análise qualitativa dos esquemas externalizados pelos estudantes, que abarcavam seus possíveis indícios de invariantes operatórios na resolução do teste individual, pois considerou-se que as situações desta avaliação, deveriam averiguar a evolução da aprendizagem dos discentes, implicando compreensão, evidenciando sua captação de significados e sua capacidade de transferência de conhecimento muito mais do que, simplesmente, catalogar seus erros ou acertos.

A seguir apresenta-se a análise da primeira situação do teste individual.

- ***Questão 1** – Considere que as equações de demanda e oferta de determinado produto são representadas, respectivamente, por $1{,}1x + 2y - 74 = 0$ e $x - 4y + 84 = 0$, na qual y representa o preço e x representa a quantidade.*

a) determine o ponto de equilíbrio e trace o gráfico das equações num mesmo sistema de coordenadas;

b) escreva a interpretação econômica dessa situação.

Nesta atividade, o estudante que conseguiu apresentar todos os registros, corretamente, foi E18, o que não quer dizer que os demais 19 estudantes não sabiam resolvê-la. Isto porque verificou-se que cinco estudantes, apresentaram equívocos, apenas, na interpretação econômica do ponto de equilíbrio (E1, E3, E5, E9 e E19).

Aparentemente, eles enfrentaram problemas nas três últimas capacidades que a questão demandava, pois todos eles encontraram o ponto de equilíbrio $(20{,}26)$, o que estava correto, mas seus erros permitiram concluir que, provavelmente, ainda não haviam se apropriado dos conceitos de demanda e oferta, ou que o conceito de ponto de equilíbrio ainda não estava consolidado em suas estruturas cognitivas, ou, ainda, que a conversão do registro gráfico para o registro escrito, perpassando por uma análise econômica, foi um desafio que, talvez, estivesse aquém da maturidade cognitiva que dispunham naquele momento.

Outro grupo, contemplado por cinco discentes (E2, E4, E10, E11 e E14), encontrou dificuldades na resolução de equações, bem como, diante das operações algébricas e/ou aritméticas.

Obedecendo a uma das orientações de Ausubel, Novak & Hanesian (1978), quando sugerem iniciativas para que seja possível investigar evidências de aprendizagem significativa, formulou-se a primeira situação do teste diagnóstico de maneira não, literalmente, familiar, como já estavam acostumados, pois as equações apresentadas não estavam sob a forma da equação reduzida da reta. Seria necessário que seus elementos fossem manipulados algebricamente e, esta, foi uma opção que encontrou-se de apresentar a situação diferente do que os discentes encontraram no material instrucional.

Apresenta-se, na Figura 73, o registro de E2 como representante deste grupo.

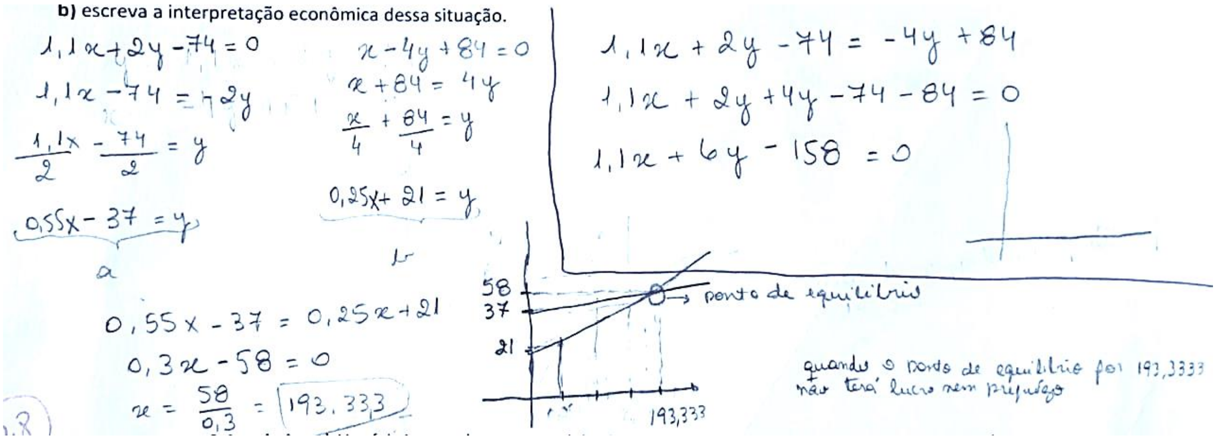


Figura 73: primeira situação do teste individual do estudo 2, por E2.
Fonte: dados da pesquisa.

Verificou-se que o estudante apresentou disponibilidade para resolver a situação, contudo o primeiro erro que cometeu, na equação da coluna à esquerda, o impossibilitou de encontrar a equação de demanda corretamente. Pode-se verificar que ele dividiu ambos os membros por dois, esquecendo-se do sinal negativo que acompanhava o número e isso o fez encontrar uma equação com os sinais equivocados.

Ademais, em sua interpretação do ponto de equilíbrio, E2 apresentou uma possível fragilidade na ideia de par ordenado, pois explicitou que o ponto era formado, apenas, pela coordenada x. Aliado a isso, entrelaçou este conceito econômico com o do ponto de nivelamento, ao denotar que não haveria lucro nem prejuízo.

Outros dois discentes deixaram a questão em branco (E13 e E15) e sete explicitaram tentativas de resolução por meio de um sistema de equações. Este grupo abarcou E6, E7, E8, E12, E16, E17 e E20. Todos eles repetiram as equações do enunciado e realizaram operações de adição ou igualaram ambas para encontrar a raiz da equação (isolaram o x). Nenhum destes sete estudantes, conseguiu encontrar as equações de demanda e de oferta solicitadas.

A segunda situação do teste individual.

- ***Questão 2*** *– Um fabricante de certo modelo de cadeiras tem uma despesa fixa mensal de* $R\$\,9.576{,}00$, *além de um custo de produção de* $R\$\,13{,}00$ *por unidade. Ele estipulou que o preço de venda desse modelo é* $R\$\,85{,}00$ *por unidade.*

a) represente graficamente a função lucro e faça uma análise, por escrito, do gráfico;

b) represente as funções custo e receita em um mesmo gráfico, explicitando o ponto de nivelamento;

c) escreva a interpretação econômica do gráfico do item b), mencionando o que significa o ponto de nivelamento.

Os três estudantes que desvendaram, completamente, a situação foram E1, E9 e E11, mas outros quatro estudantes, chegaram muito próximos disso, pois também descobriram as equações necessárias e explicitaram ambos os gráficos solicitados. Contudo, apresentaram equívocos nas suas resoluções, o que os impediu de calcular o ponto de nivelamento corretamente.

Neste grupo, estavam E2, E5, E7 e E14. De maneira mais específica, E2, demonstrou confundir/entrelaçar os conceitos de ponto de equilíbrio e ponto de nivelamento (muito semelhante à maneira exposta na Figura 73). E5 e E14, enfrentaram equívocos nas operações aritméticas e E7 explicitou o mesmo indício de E2 diante da primeira situação (apresentou uma possível fragilidade na ideia de par ordenado, pois explicitou que o ponto de nivelamento era formado, apenas, pela coordenada x).

Dois discentes deixaram a questão em branco (E13 e E15) e 11 explicitaram tentativas variadas, que permitiram diagnosticar rupturas, supostamente, na maioria das capacidades exigidas diante desta situação. Neste grupo, estavam E3, E4, E6, E8, E10, E12, E16, E17, E18, E19 e E20 e, com exceção de E4 e E12, que não explicitaram corretamente as equações do enunciado, os demais, desvendaram as equações, contudo, cessaram seus escritos pelo caminho, enfrentaram dificuldades nos algoritmos (erros nas operações aritméticas), ou na utilização da calculadora, ou relacionaram os dois pontos econômicos, conforme expõe-se no registro de E6 (Figura 74).

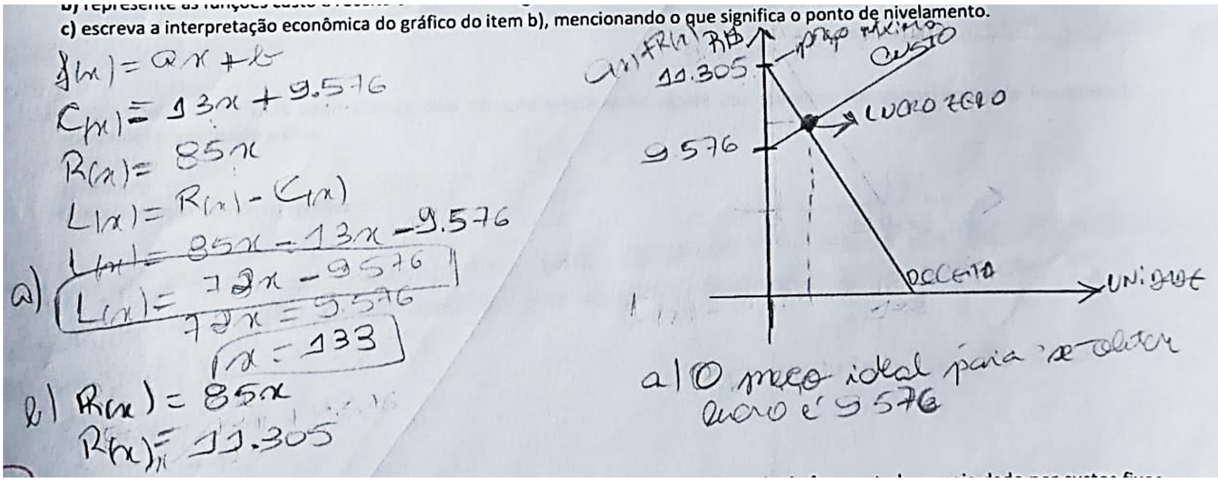


Figura 74: segunda situação do teste individual do estudo 2, por E6.
Fonte: dados da pesquisa.

No registro de E6, verificou-se que, tal como exposto, anteriormente, no registro de E2, houve o, provável, entrelaçamento dos conceitos do ponto de equilíbrio e do ponto de nivelamento. De maneira análoga, E20 também desenhou uma das retas com inclinação decrescente (nesse caso, a da equação custo), o que permitiu supor que eles podem ter assimilado, de maneira mecânica, que, visualmente, uma das retas deveria ser decrescente ou, ainda, que dispunham de invariantes operatórios equivocados para operar com os coeficientes da equação da reta.

A terceira situação do teste individual.

- ***Questão 3*** ***–*** *Suponha que o custo total de uma academia em relação à quantidade de frequentadores seja dado por custos fixos, que totalizam* $R\$\,5.022{,}8$*, além de um custo de* $R\$\,12{,}40$ *por frequentador. Os pacotes de funcional e musculação são oferecidos, individualmente, ao preço unitário de* $R\$\,99{,}00$ *mensais. Quantos frequentadores a academia precisa fidelizar para que seu lucro seja o dobro do custo?*

Modelou-se esta situação, com base nas respostas obtidas no questionário aplicado no primeiro dia de aula, pois, nele, 12 estudantes mencionaram que gostavam de frequentar academias. Além disso, muito próximo à universidade, havia uma academia que era frequentada pela professora pesquisadora e por alguns dos estudantes matriculados na disciplina. Então utilizou-se alguns dados reais (o preço dos pacotes de funcional e musculação), adaptou-se outras informações e disponibilizou-se a situação no teste individual.

Nesta tarefa, E11 obteve êxito do início ao fim de suas explicitações, inclusive na interpretação por escrito da situação. Além dele, outros dois estudantes (E1 e E10), também estiveram muito próximos de desvendá-la, com o adendo que E1, apresentou o valor $243{,}825$ como resposta. Julgou-se que, provavelmente, ele não interpretou a situação no contexto administrativo e E10, enfrentou problemas diante das operações aritméticas, pois ocorreu um erro de sinal, que permitiu discernir que a capacidade de resolução de equações ainda estava no processo de maturação, não estava consolidada em sua estrutura cognitiva.

Um estudante deixou a tarefa em branco (E13) e oito igualaram receita e custo, fornecendo indícios de que estavam prestes a calcular o ponto de nivelamento, porém nenhum deles finalizou este procedimento. Neste grupo, estavam E4, E7, E8, E12, E15, E16, E17 e E20. Deste grupo de oito discentes, alguns, somente, encontraram a equação que representava o lucro e explicitaram a raiz da equação (isolaram o x). Nenhum deles explicitou a multiplicação da equação custo por dois, o que não quer dizer que eles não tinham este conhecimento, mas, frisa-se que não externalizaram tais evidências para apreciação.

Outrossim, um grupo formado pelos outros oito discentes (E3, E5, E6, E13, E9, E14, E18 e E19), forneceu indícios, ainda que com fragilidades e rupturas, de mobilização das diferentes capacidades exigidas para o desvendamento da questão, pois iniciaram seus registros, por meio da explicitação das funções e do cálculo do dobro do custo, porém houve quem calculasse, erroneamente, o dobro do lucro.

Ressalta-se que o equívoco predominante, neste caso, foi diante das operações aritméticas, inclusive, verificou-se problemas com a utilização da calculadora, pois, durante a avaliação, alguns discentes perguntaram à professora como dar comandos específicos no objeto. Como representante deste grupo, explicita-se na Figura 75, o registro de E5.

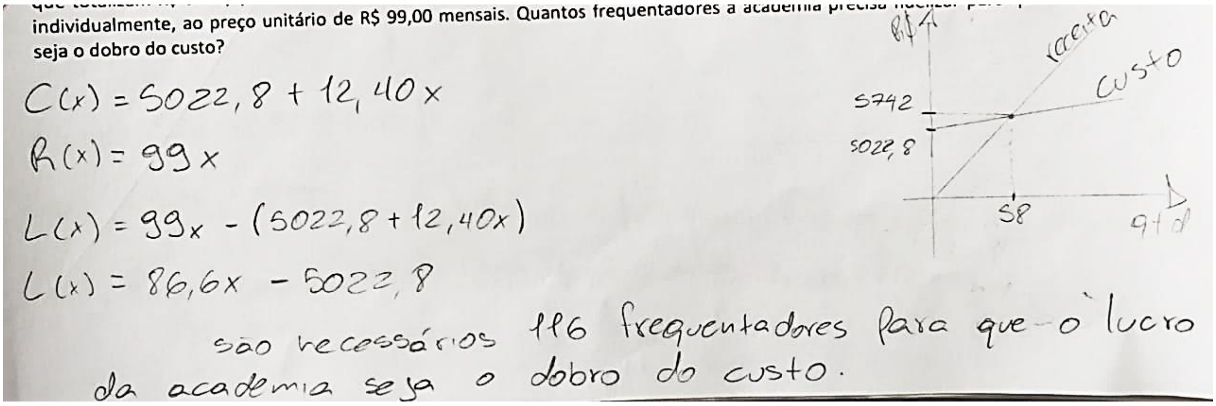


Figura 75: terceira situação do teste individual do estudo 2, por E5.

Fonte: dados da pesquisa.

Em suas explicitações, foi possível detectar que ele calculou a equação do lucro e encontrou a raiz da equação (ou a quantidade de nivelamento). Diante do valor encontrado, 58, o provável conceito-em-ação que o guiou para proceder foi a ideia de que multiplicá-lo por dois, seria o equivalente a calcular a quantidade necessária para que o lucro fosse o dobro do custo, conforme apresentou por escrito.

A quarta situação do teste individual.

- ***Questão 4** – Em uma loja de roupas, quando o preço de certo item é R*$160,00, 20 *itens são vendidos. No entanto, se o preço é R*$150,00, 25 *itens são vendidos.*

a) encontre a equação de demanda para esse item;

b) considere que a equação de oferta desse item seja representada por $y = 2x + 160$. *Determine o ponto de equilíbrio de mercado e escreva a sua interpretação sobre o que essa situação representa;*

c) faça os respectivos gráficos no mesmo sistema de coordenadas, assinalando o ponto de equilíbrio e o que cada eixo representa;

d) Qual é o preço máximo que o mercado suporta para a venda desse item? E qual o preço mínimo? Assinale esses valores no gráfico feito no item c).

Diante desta tarefa, dois estudantes obtiveram sucesso (E1 e E3) e outros seis (E6, E7, E9, E11, E18 e E19), chegaram próximo de desvendá-la, contudo apresentaram equívocos no registro gráfico, na interpretação econômica do ponto de equilíbrio, na identificação do preço máximo/mínimo ou não realizaram tentativas de explicitação do registro escrito. Evidenciou-se, novamente, que o provável conceito-em-ação, equivocado, os guiou, pois os que explicitaram tentativas, unificaram os conceitos de ponto de equilíbrio e ponto de nivelamento, nomeando o equilíbrio entre demanda e oferta de “marco zero do lucro”.

Dois estudantes (E10 e E14), iniciaram corretamente a montagem e resolução de um sistema de equações, demonstrando indícios da verificação de pares ordenados, inclusive multiplicaram uma das equações por (-1), mas cometeram o mesmo erro:

$$10 = -5x$$

$$x = \frac{10}{5}$$

Esqueceram-se do sinal negativo, na segunda linha, o que os levou a encontrar uma equação demanda equivocada. Além deles, outros 10 estudantes, também cometeram erros ao longo da resolução, o que permitiu conferir que eles ainda careciam de tempo e enfrentamento diante de situações neste campo para que dispusessem de todas as capacidades exigidas.

Esta constatação vai ao encontro da proposta de Ausubel (2000), na busca por evidências de aprendizagem significativa, quando o autor menciona que ela é progressiva, não linear. Ainda assegura que os estudantes não estão acostumados a lidar com situações novas e que elas devem ser introduzidas progressivamente.

Apresenta-se, na Figura 76, como representante deste grupo, o registro de E20.

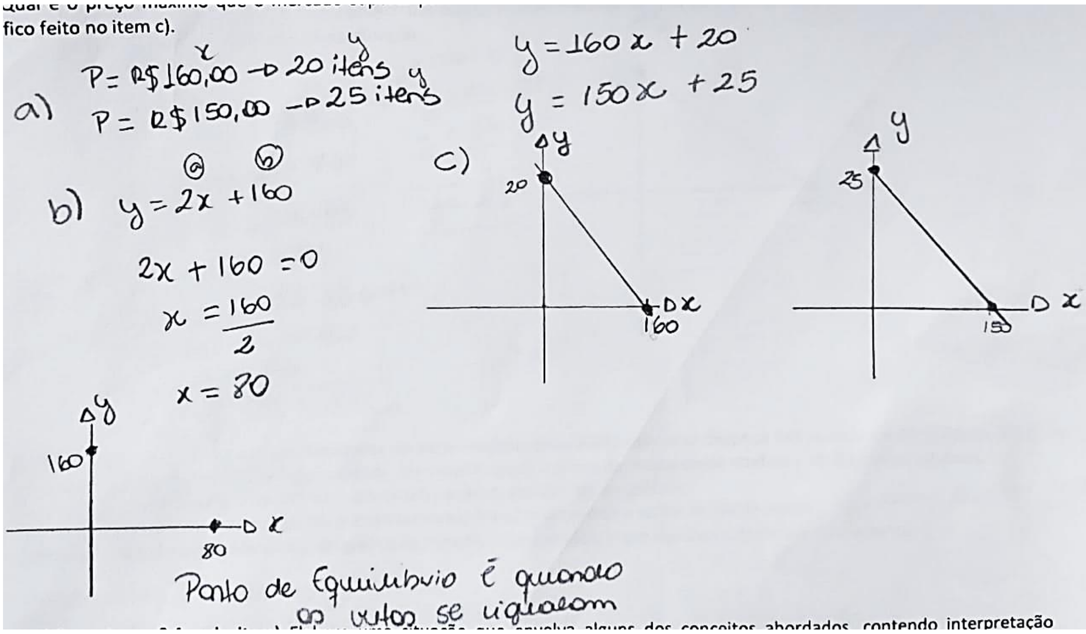


Figura 76: quarta situação do teste individual do estudo 2, por E20.

Fonte: dados da pesquisa.

Verificou-se que não só o registro de E20, como o dos demais nove estudantes que foram contabilizados neste grupo, apresentaram indícios de que seus subsunçores, de certa forma, desconectavam-se na junção da área administrativa com a área da Matemática.

Amparou-se estas considerações nas evidências coletadas, sobretudo, diante das interpretações que os discentes apresentaram a respeito do ponto de equilíbrio e do ponto de nivelamento, pois, os que explicitaram por escrito (neste caso o ponto de equilíbrio), abdicaram o contexto da igualdade entre demanda e oferta, preconizando a igualdade entre as retas. Alguns, inclusive, não realizaram a interpretação. Também foi possível evidenciar que suas resoluções algébricas, em geral, apresentaram algoritmos como o cálculo deliberado da raiz da equação e a substituição dos coeficientes "a" e "b", pelos elementos do par ordenado (x, y), respectivamente.

A quinta situação do teste individual.

- ***Questão 5** – Uma empresa fabrica um produto a um custo fixo de* $R\$\ 1.200{,}00$ *por mês e um custo variável, por unidade produzida, igual a* $R\$\ 2{,}00$. *O preço unitário de venda do produto dessa empresa é* $R\$\ 5{,}00$. *Atualmente, o nível de venda é de mil unidades por mês.*

A empresa pretende reduzir em 20% *o preço de venda, esperando que, com isso, as vendas aumentem. Qual deverá ser o aumento na quantidade vendida mensalmente, para manter o lucro que a empresa já tem?*

Nesta situação, os dois estudantes que a desvendaram, integralmente, foram E2 e E19, contudo, outros quatro discentes (E9, E11, E14 e E18), realizaram todos os cálculos corretamente, mas não realizaram a interpretação econômica necessária para responder à pergunta do enunciado. Todos eles apresentaram como resposta $x = 1500$. Acredita-se que este cenário tenha sido, novamente, fruto de uma resolução Matemática desvinculada do contexto administrativo e, provavelmente, os discentes que procederam desta maneira, enfrentaram problemas nas duas últimas capacidades exigidas (com maior ênfase na última), para apurar a questão.

Os outros 14 estudantes que não conseguiram solucionar completamente a tarefa, externalizaram dificuldades diante dos cálculos matemáticos, pois apresentaram equívocos variados, como esquecimento ou erro de sinal, resolução indiscriminada por regra de três, ou imprecisões no manuseio da calculadora. Um erro recorrente neste item, detectado em seis avaliações, foi o mesmo procedimento apresentado na questão anterior, o que permitiu discernir que, provavelmente, ainda não dominavam as operações aritméticas e o significado do símbolo de igualdade entre os membros da equação.

Julgou-se que eles ainda apresentavam lacunas e/ou carências no conjunto de todas as capacidades demandadas para o enfrentamento desta tarefa. Neste grupo, estavam os discentes

E1, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E12, E13, E15, E16, E17 e E20. Expõe-se, na Figura 77, o registro de E12 como representante desta categoria de resolução.

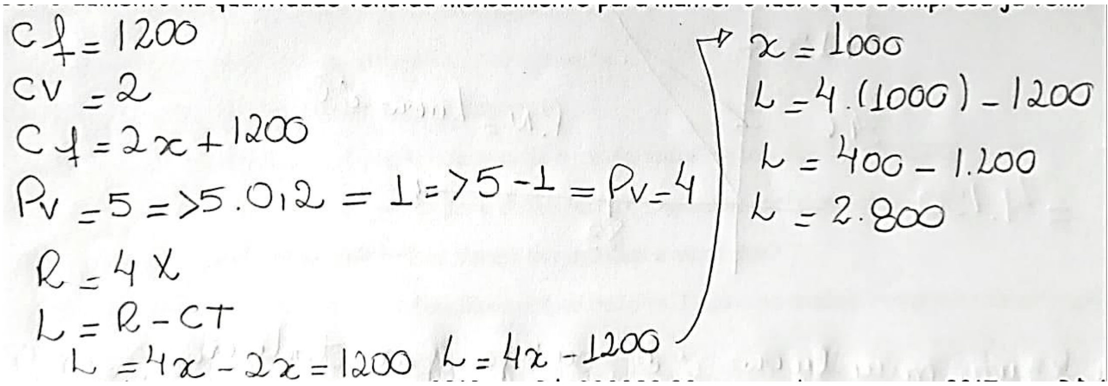


Figura 77: quinta situação do teste individual do estudo 2, por E12.
Fonte: dados da pesquisa.

Esta maneira como E12 procedeu, foi análoga à de E3, E4, E8, E15, E17 e E20. Todos eles iniciaram a resolução por meio do cálculo da redução de 20% do preço de venda. Seus cálculos matemáticos estavam corretos, contudo, eles consideraram o custo variável atual com tal porcentagem de desconto, o que estava incorreto. Provavelmente, isto ocorreu em detrimento de equívocos enfrentados já na primeira capacidade exigida na tarefa e, daquele momento em diante, uma sucessão de equívocos ocorreu.

Para embasar as conclusões obtidas diante dessa e das demais situações do teste individual, além do aprofundamento necessário na TAS e na TCC, recorreu-se, também, às ideias de Duval (2003), pois ele afirma que uma conversão é realizada de forma congruente (satisfatória), quando a transposição de um registro de representação (registro de partida) conduz a outro registro de representação (registro de chegada) de forma natural. Quando isso não acontece, configura-se um caso de não congruência.

De uma maneira geral, todas as cinco questões do teste diagnóstico, exigiram que os estudantes partissem do enunciado em linguagem escrita e transitassem para o registro algébrico (uma conversão), além disso, que resolvessem equações e descobrissem a resposta algébrica (um tratamento dentro de um mesmo tipo de registro), que elaborassem um gráfico (uma conversão do registro algébrico para o registro gráfico), para, então, interpretar a situação no contexto econômico e elaborar a resposta por escrito (uma conversão do registro gráfico para o registro escrito).

Com fulcro nas palavras de Duval (2003), foi possível observar que, toda vez que os estudantes não conseguiram realizar conversões (transitar livremente entre os diferentes registros), o fenômeno de não congruência foi verificado. Ademais, o autor assegura que, na maioria das vezes, existe dificuldade na realização de conversões, pois os estudantes transitam mais facilmente dentro de um único tipo de registro.

Entende-se que as conversões, que Duval (2003), denota, são perfeitamente compatíveis com a ideia de conceito, $C = \{S, I, R\}$, que Vergnaud (1990, 1993), estabelece, pois o autor da TCC, defende que o aprendiz conceitualiza à medida que é confrontado e domina uma variedade de situações, mas que, para isso, necessita utilizar seus invariantes operatórios e mobilizar diferentes representações simbólicas. Estas representações, são chamadas por Vergnaud (ibid.), de significante, estão localizadas no conjunto "R", que compõe a trinca $\{S, I, R\}$ e se referem, justamente, às diferentes formas de representação (linguagem natural, verbal, algébrica, gráficos, diagramas, gestos, etc.).

Supõe-se que essa possa ser uma justificativa para as incontáveis reclamações evidenciadas, por parte de alguns discentes, ao longo dos encontros, pois, sempre que eram instigados a fazer o registro gráfico e a interpretação econômica por escrito, alguns deles, insistentemente, não o faziam ou demonstravam-se incomodados. Provavelmente, este tipo de tarefa, por caracterizar uma conversão e envolver diferentes capacidades, os desacomodou, os desestabilizou e provocou, de certa forma, angústia e/ou medo do erro.

Não obstante, considerou-se que uma possível explicação para o baixo desempenho de alguns discentes na avaliação individual, possa ter sido decorrente de eles terem protelado este tipo de tarefa ao logo dos encontros e, desse modo, no dia do teste individual, provavelmente, ainda não estavam familiarizados com tais ações.

Conforme explicitou-se nos Quadros 15 e 16, além da análise qualitativa, recém exposta, o baixo desempenho de alguns estudantes no teste diagnóstico, permitiu discernir que os conhecimentos abordados ainda careciam de enfrentamento, de negociação e de tempo para serem consolidados e/ou aprimorados em suas estruturas cognitivas. Por este motivo, acreditou-se ser conveniente não cessar a avaliação dos estudantes por meio da correção de seus testes finais e atribuição de uma nota e, desse modo, seguiu-se a orientação de Ausubel, Novak & Hanesian (1978), ao permitir a recursividade aos estudantes, para que, no oitavo encontro, eles tivessem a oportunidade de refazer todas as atividades do teste individual, aproveitando os seus erros, discutindo-os e corrigindo-os, o que poderia ocasionar o lapidamento de seu desenvolvimento cognitivo (Santarosa, 2013).

7.2.8 O oitavo encontro – 12/04/2019

No dia em que ocorreu a última etapa da UEPS (encontro final integrador), ao ingressar na sala de aula, alguns estudantes já aguardavam no seu interior e, conforme diagnosticou-se, estavam ansiosos para visualizar a prova corrigida, pois o primeiro questionamento recebido, junto com um cumprimento, foi: *"professora, tu vai entregar as provas?"* (E7). Ressalta-se que, ao longo da semana anterior, já haviam sido feitas as correções das avaliações e as notas já haviam sido divulgadas na página do estudante, no *site* da instituição, onde todos puderam verificar o seu desempenho individual, por meio do seu *login* e senha.

Contudo, provavelmente, eles esperavam pela correção na lousa, de maneira expositiva, feita pela professora, para que eles copiassem ou realizassem questionamentos, conforme o discurso de E17: *"ai sora, quero ver a correção, a senhora vai explicar todas as questões pra gente né?"*. Entretanto, as avaliações foram entregues, somente, com a nota (que, como mencionado, já era de seu conhecimento), sem símbolos que indicassem seus acertos ou erros nos diferentes itens.

Aparentemente, isso os desestabilizou, pois, quando receberam as avaliações, imediatamente e concomitantemente, vários estudantes expressaram sua indignação: *"mas como é que eu vou saber o que eu acertei e o que eu errei?"* (E17), *"a senhora não corrigiu as questões?"* (E14) e *"bah prof, eu queria ver o que eu errei!"* (E10). Na tentativa de amenizar a situação, foi explicado que teriam a oportunidade de refazer toda a avaliação, em duplas. As atividades deveriam ser feitas em uma folha e entregues, juntamente com os áudios que gravariam enquanto discutissem as questões com seu colega.

Estas atividades foram feitas e, após finalizadas, todas as situações foram comentadas na lousa, pelo grande grupo, sob o auxílio da professora. Como dito, a ideia intrínseca à essa atitude foi a de proporcionar a recursividade aos erros dos estudantes, para que, além de terem a oportunidade de negociar significados com seus colegas e modificar seus esquemas de pensamento, pudessem melhorar suas notas também, pois a atividade valeu 1,0 ponto extra, que foi acrescido na média final de cada um. Tomou-se esta decisão, pois a maior pontuação na avaliação, foi de E1, que obteve nota igual a 4,2 pontos (a avaliação valia 6,0 pontos).

Diante dessa proposta, conforme os discursos e expressões faciais verificadas, alguns estudantes demonstraram descontentamento, provavelmente, por ter que realizar a avaliação, novamente. Outros, no entanto, mostraram-se animados com a possibilidade de ganhar nota extra. No começo do encontro, 15 estudantes estavam presentes e iniciaram as tarefas, formando seis duplas e um trio. Teve-se a preocupação de orientá-los a agrupar-se de tal forma que, estudantes que apresentavam características de facilidade ou (menor dificuldade), pudessem formar uma dupla com estudantes que apresentavam mais dificuldade. Obviamente, isso não foi mencionado, apenas indicou-se as duplas que deveriam ser formadas, como se estivesse escolhendo-as aleatoriamente.

Ao observar os grupos realizando as atividades, acreditou-se que os momentos experienciados foram muito benéficos para todos. Destaca-se dois aspectos predominantemente positivos deste encontro: os registros verbais das duplas/trio, coletados nos áudios dos discentes e as discussões oriundas das correções feitas na lousa, com participação do grande grupo.

Nas gravações dos discursos dos estudantes, foi possível detectar quais foram suas dúvidas diante dos diferentes itens do teste individual, pois eles conversaram com sua respectiva dupla a respeito da possível dificuldade que tinham enfrentado no momento que realizaram a avaliação. Em alguns casos, haviam deixado o item em branco, porém explicitaram, verbalmente, diversos conhecimentos que ficaram implícitos diante de cada situação. Esta verificação, remeteu a concepção de Cury (p. 13, 2013), pois ela defende que

> Ao corrigir qualquer prova, teste ou trabalho de Matemática, muitas vezes o professor costuma apontar os erros cometidos pelos alunos, passando pelos acertos como se estes fossem esperados. Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam somente o que ele não sabe? Qualquer produção, seja aquela que apenas represente uma resolução-modelo, seja a que indica a criatividade do estudante, tem características que permitem detectar as maneiras como o aluno pensa e, mesmo, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal. Assim, analisar as produções é uma atividade que traz, para professor e para os alunos, a possibilidade de entender, mais de perto, como se dá a apropriação do saber pelos estudantes.

Neste ponto, retoma-se a importância de, diante do diagnóstico de um possível erro, considerar e investigar, tanto a fase predicativa, quanto a fase operatória dos aprendizes, pois, caso a avaliação se encerasse levando em conta, apenas, a fase operatória, os estudantes que deixaram os itens em branco ou fizeram de maneira errônea, alcançariam nota zero ou muito próximo disso. No entanto, por meio dessa atividade, foi possível descobrir outros registros de atividade, como a fase predicativa e os conhecimentos que estavam, possivelmente, na zona de desenvolvimento proximal e emergiram por meio da interação com seus pares.

Discerniu-se que esta tarefa obedeceu aos propósitos da investigação mencionada por Vergnaud (2017), quando o autor enfatiza que todos os registros de atividade do sujeito determinam se ele é competente diante de uma classe de situações, ou seja, para averiguar se um estudante apresenta uma determinada capacidade, é necessário levar em consideração todo o caminho percorrido por ele, tudo o que ele produziu (gestos, diálogos, representações) e não, somente, o seu resultado ou sua resposta final diante de uma situação.

Pode-se citar como exemplo, alguns excertos de diálogos evidenciados nas gravações recolhidas, como a de E1 e E16, que conversaram a respeito de como procederam para resolver a questão 2 e quais foram as principais dificuldades que enfrentaram:

– E16: *"bah [...], olha só o que eu errei, eu esqueci de descontar os* $R\$ \ 13{,}00$ *do custo variável e errei a equação do lucro. Daí esse gráfico pra mim foi complicado também, eu nunca* *sei como começar a traçar a reta.*

– E1: *"É, o lucro é a receita menos o custo, por isso que ela fala pra descontar na hora já, ou tu pode colocar entre parênteses e trocar depois. [...] o gráfico tu tem que olhar o sinal do "a", se for positivo a reta é crescente e se for negativo é decrescente. Esse "b" aqui ó é só marcar aqui porque ele é o lugar onde a reta corta o eixo y, é o custo fixo.*

Algum tempo de discussão se passou e outro excerto foi extraído para apreciação:

– E16: *"eu acho que eu tive bastante dificuldade, principalmente na hora de encontrar as equações, depois que eu encontrei foi mais tranquilo pra fazer. Agora, com a tua ajuda eu consegui entender".*

– E1: *"pra mim essa questão, a princípio não foi tão difícil, foi mais uma questão de interpretação mesmo".*

Além deste tipo de constatação, também foi possível diagnosticar alguns indícios das impressões e sensações que o grupo desfrutou diante do enfrentamento das situações, pois confessaram aos colegas, sentimentos que não tinham sido mencionados à professora pesquisadora.

Exemplifica-se esta afirmação, por meio de um trecho do diálogo de E9 e E14, referindo-se à questão 4:

– E9: *"eu tenho mais dificuldade na parte de fazer os gráficos. Não é nem uma dificuldade, é mais uma questão de preferência, eu prefiro fazer o cálculo, não gosto de fazer o gráfico, gosto do cálculo porque é uma coisa mais direta".*

– E14: *"pois é, pra mim, o mais difícil é essa montagem do sistema de equações, até eu me dar por conta que tinha que fazer isso, demorei metade do tempo da prova, daí errei nas contas depois, fala sério. Mas eu acho que fazer os gráficos também é complicado, eu nunca sei decidir onde corta o x e onde corta o y, aquela história do "a" e do "b", x e y, é muita letra, tudo junto e misturado".*

Em um contexto semelhante, expõe-se um fragmento de discussão constatado em outra dupla, E7 e E19, a respeito da questão 5:

– E7: *"o problema na verdade acho que foi a interpretação mesmo, depois que eu entendi o que era pra fazer na questão, a parte da Matemática até ficou mais tranquila, mas a interpretação que eu acho que mata a gente".*

– E19: *"pra mim também! O meu problema foi transformar esse monte de informação do enunciado em função. O problema pra mim sempre é descobrir onde colocar cada valor, depois que as equações tão montadas, eu consigo resolver".*

De posse destes e dos demais discursos apreciados, verificou-se dois principais eixos comuns no qual residiram as dificuldades externalizadas pelos estudantes: tratava-se das interpretações que eles precisavam realizar, principalmente na conversão do registro escrito para o registro algébrico, para traduzir o enunciado dos problemas e na conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

A elaboração do registro gráfico, aliás, mostrou-se como um processo, de certa forma, angustiante para alguns estudantes desde o primeiro até o oitavo encontro, o que, assim como identificado no estudo 1, corroborou os resultados das investigações de Ribeiro (2005) e Zarpelon, Germano, Silva, Resende & Neves (2016), que destacaram a aversão dos estudantes ao traçado e/ou à interpretação de gráficos.

O outro momento no qual a captação de significados ganhou destaque, como dito, foi a correção da avaliação junto ao grande grupo, que ocorreu após o intervalo e contou com a participação de 18 discentes. Este foi um momento de culminância de dúvidas e intensa participação de alguns discentes. Além disso, retomou-se os conceitos abordados, sob a forma de revisão, para discutir o papel da Matemática na área administrativa e a importância da compreensão de cada um dos aspectos trabalhados para a sua formação científico-cultural e profissional. Por meio dessa atividade, estabeleceu-se a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora dos conceitos abordados.

Constatou-se que após terem refeito a avaliação em duplas/trio, dúvidas ainda persistiam e alguns discentes externalizaram, no momento da correção feita na lousa, que não tinham certeza se a maneira como haviam procedido estava correta. De fato, a maior parte do grupo apresentou um baixo desempenho no teste individual e um dos motivos para esse fator, pode ter sido decorrente da ausência de alguns deles em alguns dos encontros anteriores ou em partes dos períodos. Julgou-se que isso pode ter ocasionado uma desestruturação hierárquica de conceitos, pois, os discentes que se inseriam nessa situação, não vivenciaram as atividades da maneira sequencial, como elas foram estruturadas na UEPS.

Mesmo os que estiveram presentes em todos os encontros, apresentaram dificuldades persistentes, principalmente na interpretação econômica dos pontos de equilíbrio/nivelamento e na elaboração/interpretação gráfica. Durante as correções na lousa, alguns estudantes reclamaram deste tipo de tarefa e externalizaram que gostariam que as interpretações econômicas fossem escritas no quadro de giz, para que eles copiassem, conforme o discurso de E5: *"professora, quem sabe a senhora escreve a interpretação e a gente só copia do quadro, aí fica certo?"*.

Além destas dificuldades já descritas, outras também foram explicitadas neste momento, por exemplo, na resolução de equações, no cálculo de porcentagens, na utilização da calculadora, na insistência em resolver as situações com informação de pares ordenados por meio de uma regra de três e na unificação do coeficiente “a” com a incógnita x e do coeficiente “b” com a incógnita y (como se o "a" fosse o mesmo que o x e o "b" fosse o mesmo que o y).

Apesar de, em um primeiro momento, todas estas constatações terem ocasionado um sentimento de preocupação na professora pesquisadora, pois acreditou-se que poderia ser responsável pela não evolução conceitual de alguns discentes, amparou-se no referencial teórico adotado, para conjecturar que todas estas dificuldades só puderam ser verificadas porque os estudantes tiveram a oportunidade de externalizá-las e essa é, justamente, uma das ideias centrais da TAS e da TCC. Logo, caso os estudantes não tivessem tal oportunidade, após um trabalho de oito semanas, isso não significaria que tais dúvidas não existiriam, elas só, provavelmente, não teriam sido externalizadas.

Ademais, em consonância com os criadores e divulgadores das teorias que nortearam esta investigação, verificou-se que este momento proporcionado ao grupo no encontro final integrador, além de ser uma orientação de Ausubel (2003), de Vergnaud (1990, 2007), de Moreira (2006, 2012b), é destacada, também, na BNCC, que alerta a respeito da necessidade de os estudantes discutirem e interpretarem o significado de suas respostas desde o ensino fundamental, pois, conforme verifica-se em Brasil (2017, p. 529),

> Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de comunicar ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua materna, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros.

Dessa forma, supõe-se que os estudantes da turma do primeiro semestre de 2019, estavam no processo de maturação de ideias. Uns[52], já demonstravam indícios de capacidades que não dispunham no começo do semestre, outros, no entanto, forneciam pistas que permaneciam utilizando os mesmos esquemas, por vezes equivocados, desde o primeiro dia de aula (esquemas persistentes). Entretanto, ressalta-se que este era um cenário esperado, pois a aprendizagem não ocorre de maneira uniforme em uma sala de aula, cada aprendiz necessita de experiências e amadurecimento específicos para aprender, a seu tempo.

Ao finalizar este encontro, houve uma discussão a respeito de todas as atividades desenvolvidas até o momento, com o intuito de detectar como os estudantes avaliaram as atividades da UEPS (não foi mencionado este nome ao grupo). Disse-lhes que poderiam

[52] No próximo item (7.3), apresenta-se um detalhamento desta afirmação (quais eram estes estudantes).

escrever e entregar em uma folha, sem identificação, caso assim preferissem, mas todos que contribuíram, o fizeram verbalmente.

Alguns depoimentos foram colhidos e, de maneira geral, eles pontuaram que as aulas ocorreram *“de maneira leve e descontraída”* (E9), que estavam satisfeitos com o andamento das atividades: *“eu to gostando muito das aulas prof, a senhora dá espaço pra gente perguntar na sua aula e não se irrita com nossas dúvidas”* (E6) e agradecidos pela maneira como o trabalho na disciplina vinha sendo conduzido: *“prof sério, tu é uma professora incrível, humana que se preocupa com a gente, se a gente tá aprendendo, tu é uma professora show!”* (E10).

Outro discente, destacou a respeito do formato das avaliações: *“professora, eu achei interessante a senhora conduzir o trabalho com as avaliações distribuídas em trabalhos e provas. A gente tem professores que fazem uma prova valendo* 8,0 *pontos, daí sobrecarrega demais. A gente até tava conversando entre nós, que achamos diferente a senhora dar nota pro nosso esforço de fazer os exercícios em aula. Eu fico muito nervoso na prova de Matemática, não sei o que acontece comigo, se a senhora fosse me avaliar só na prova, eu ia rodar.”* (E18). Quando ele terminou seu discurso, outros colegas concordaram com sua afirmação e complementaram que o nervosismo do dia da prova havia sido um grande empecilho.

O último depoimento obtido, foi de E7, que complementou que gostaria de fazer mais exercícios de repetição: *“ah professora, eu queria que tivesse mais exercícios de listas, daqueles que são parecidos, pra gente praticar, sabe? Que são pra fazer na sequência, sem ter que interpretar, só calcular direto”*. Ele já havia mencionado, no início do semestre, sua predisposição para a realização de exercícios com a aplicação de fórmulas e mostrou-se resistente à explicitação das interpretações econômicas, verbalmente e, principalmente, por escrito, durante parte dos encontros.

Resgata-se que as atividades desta investigação, finalizaram neste encontro, entretanto, o semestre seguiu seu curso e as 12 semanas seguintes ocorreram na continuidade desse processo. Elas, apenas, não estão detalhadas nesta tese, contudo derivaram do seu contexto, pois ocorreram de maneira semelhante, com foco no enfrentamento de situações e na discussão e negociação de significados.

Os conceitos de equações, funções, gráficos, ponto de equilíbrio e ponto de nivelamento, continuaram sendo abordados no estudo de equação do segundo grau, limites e derivadas até o final do primeiro semestre de 2019, ou seja, a aprendizagem dos estudantes, consequentemente o sucessivo domínio do campo conceitual das equações do primeiro grau, de maneira articulada com sua representação gráfica, provavelmente, não cessou no oitavo encontro.

7.3 Conclusões e evidências obtidas por meio do estudo 2

Ao iniciar a investigação, na aplicação do teste diagnóstico, fez-se uma análise do nível de bagagem dos subsunçores dos estudantes, diante do seu enfrentamento com as situações propostas. É preciso confessar que, projetando-se a respeito da escrita desta seção ora exposta, cogitou-se elaborar um panorama análogo ao da Figura 49, do item 7.2.1.2, mas contendo os resultados obtidos no teste individual. Tal elaboração, tencionaria permitir uma comparação da evolução conceitual e/ou do nível de subsunçores que os estudantes apresentavam em suas estruturas cognitivas antes e após o desenvolvimento da UEPS.

No entanto, acreditou-se ser mais prudente fugir de julgamentos, sobretudo, considerando o curto espaço de tempo de aplicação das atividades, pois Ausubel (2003), assegura que a aprendizagem é vagarosa, com falhas e retrocessos. De maneira semelhante, Vergnaud (1993), justifica que o domínio de um campo conceitual é lento, progressivo e depende do confrontamento com inúmeras situações. Dessa forma, conforme detalhado na metodologia desta investigação, enfatizou-se o processo, como um todo, e não, somente, os resultados, que culminaram nas notas obtidas pelos estudantes no teste diagnóstico, até porque elas foram, predominantemente, baixas.

Dadas estas constatações, considerou-se que, caso fosse feita uma comparação da evolução conceitual dos estudantes, considerando um período de oito semanas e o confrontamento com as 17 situações que compunham a UEPS, além das sete questões do teste diagnóstico e das cinco do teste somativo individual, tal comparação apresentaria uma versão frágil e, provavelmente, limitada do nível de aprendizagem ou do domínio do campo conceitual das equações e gráficos que os estudantes apresentavam na ocasião.

Neste caso, poder-se-ia obter um cenário exatamente igual ao evidenciado na primeira etapa da UEPS e, por que não, com alguma involução de algum estudante. Em tão pouco tempo, julgou-se extremamente delicado, senão inapropriado, afirmar se ocorreu ou não, o domínio do campo conceitual e/ou uma aprendizagem significativa dos conceitos de equações articulados com a sua representação gráfica, com ênfase nos conceitos da área administrativa, por parte dos discentes do primeiro semestre do curso de Administração.

Uma possível estratégia para averiguar sua evolução ao longo dos encontros, então, foi utilizar, além de todos os registros colhidos nas aulas, uma adaptação do próprio caderno de chamada da professora pesquisadora. Mas, ao anunciá-lo, pondera-se que seu objetivo não é o de culminar numa implicação do tipo “os estudantes que compareceram a todos os encontros, aprenderam significativamente”, tampouco na ideia de que “os estudantes que apresentaram menor assiduidade, não aprenderam". Neste caso, foge-se destes dois extremos.

Preferiu-se amenizar, apostando-se em uma região que abarca mais possibilidades, na qual discerniu-se que, aparentemente, os discentes que apresentaram maior assiduidade, realizaram as atividades propostas e externalizaram maior quantidade de dúvidas, revelaram indícios de aprimoramento dos seus esquemas, diante das situações propostas, o que, mesmo assim, não significou que todos eles aprenderam significativamente e/ou dominaram o campo conceitual das equações e gráficos.

O Quadro 17, a seguir, conforme anunciado, derivou das anotações feitas no caderno de chamada da professora pesquisadora e apresenta a frequência dos estudantes nas aulas ao longo das oito etapas da UEPS. Com o intuito de facilitar a visualização, sombreou-se as palavras "ausente", "chegou depois" e "saiu antes", para denotar os encontros nos quais os estudantes não estiveram presentes, chegaram atrasados ou saíram antes do término da aula, respectivamente.

Quadro 17: assiduidade dos estudantes nos oito encontros do estudo 2.

	1º DIA	**2º DIA**	**3º DIA**	**4º DIA**	**5º DIA**	**6º DIA**	**7º DIA**	**8º DIA**
E1	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
E2	Presente	Presente	Chegou depois	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
E3	Presente	Ausente	Presente	Presente	Chegou depois	Presente	Presente	Chegou depois
E4	Presente	Ausente	Saiu antes	Ausente	Ausente	Chegou depois	Presente	Presente
E5	Presente	Saiu antes	Ausente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
E6	Presente	Ausente	Chegou depois	Presente	Presente	Presente	Presente	Chegou depois
E7	Presente	Presente	Ausente	Presente	Chegou depois	Presente	Presente	Saiu antes
E8	Presente	Presente	Ausente	Ausente	Chegou depois	Saiu antes	Presente	Chegou depois
E9	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
E10	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
E11	Presente	Ausente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
E12	Presente	Saiu antes	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
E13	Ausente	Chegou depois	Ausente	Ausente	Saiu antes	Saiu antes	Presente	Chegou depois
E14	Presente	Chegou depois	Chegou depois	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
E15	Presente	Saiu antes	Ausente	Chegou depois	Saiu antes	Chegou depois	Presente	Ausente
E16	Ausente	Presente	Presente	Presente	Presente	Chegou depois	Presente	Presente
E17	Presente	Chegou depois	Chegou depois	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
E18	Ausente	Ausente	Presente	Presente	Chegou depois	Presente	Presente	Presente
E19	Presente	Presente	Chegou depois	Presente	Chegou depois	Presente	Presente	Presente

E20	Ausente	Presente	Chegou depois	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
E21	Presente	Presente	Ausente	Ausente	Ausente	Ausente	Ausente	Ausente

Fonte: dados da pesquisa.

Retoma-se que alguns estudantes revelaram, ainda que frágeis, contudo, alguns indícios de aprimoramento de seus esquemas de pensamento, mas estes estudantes não são, necessariamente, os que obtiveram uma nota alta no teste individual.

Este indícios aos quais se referiu, estão pautados nas orientações de Ausubel, Novak & Hanesian (1980), e foram captados por meio das suas externalizações ao longo dos encontros, ou seja, se a conclusão feita para responder ao objetivo geral desta investigação fosse realizada, exclusivamente, por meio da análise quantitativa da nota obtida pelos discentes na prova, provavelmente, dir-se-ia que, somente seis estudantes (E1, E3, E9, E11, E18 e E19), obtiveram um bom ou muito bom desempenho no primeiro módulo da disciplina, pois obtiveram as notas 4,8, 3,5, 4,7, 5,3, 3,8 e 3,9 respectivamente (a prova valia 6,0 pontos). Todos os outros estudantes, alcançaram nota inferior a 3,0 pontos.

Além disso, ao reparar no Quadro 17, evidenciou-se que estes discentes recém mencionados, mantiveram uma assiduidade semelhante à de E2, E5, E10 e E12, E14 E16, E17 e E20, no entanto, estes últimos não apresentaram o mesmo rendimento quantitativo no teste individual, o que revelou que outros fatores contribuíram para o seu desempenho na prova, não somente o fato de estarem presentes nas aulas.

Esta verificação, corroborou a sugestão de Moreira (2012b), que sinaliza a importância de avaliar os estudantes, igualmente, em relação aos trabalhos em grupos, observações feitas pelo professor e avaliações individuais, não em uma única prova individual. Ademais, a busca por indícios de aprendizagem significativa, esteve em consonância com as sugestões de Ausubel, Novak & Hanesian (1978), pois novas situações foram oportunizadas progressivamente ao grupo de discentes, evitando a chamada “decoreba”, na qual os estudantes assistem a resolução ou explicação do professor na lousa e, a seguir, procedem de maneira análoga, diante de uma lista de exercícios similares.

Seguindo-se as orientações propostas na TAS e na TCC, sob o amparo metodológico da UEPS, concluiu-se que os esquemas externalizados pelos discentes, foram muito mais proveitosos quando puderam ser compartilhados e debatidos por meio das atividades colaborativas, do que em relação aos evidenciados no teste individual. Neste último momento de avaliação, inclusive, os esquemas dos estudantes, em parte, permaneceram implícitos e alguns só puderam ser diagnosticados em virtude da atividade de recursividade proposta em duplas/trio, que propiciou a negociação e o compartilhamento de significados diante da correção da avaliação, que aconteceu no oitavo encontro.

Dessa forma, conforme planejou-se na metodologia de pesquisa, os indícios de aprendizagem significativa e a análise do progressivo domínio do campo conceitual, por parte dos discentes, foram colhidos ao longo dos oito encontros e, nesta caminhada, foi possível estabelecer cinco grandes grupos. Pautando-se nas orientações de Moreira (2012b), para diagnosticar se a UEPS foi ou não exitosa, e com base nas evidências obtidas, atreveu-se a elaborar um diagrama, apresentado na Figura 78, para externalizar um provável nível hierárquico de êxito da UEPS para a turma alvo da aplicação das atividades da implementação didática, pois admitiu-se que a UEPS elaborada não atingiu/contemplou todos os estudantes da mesma maneira.

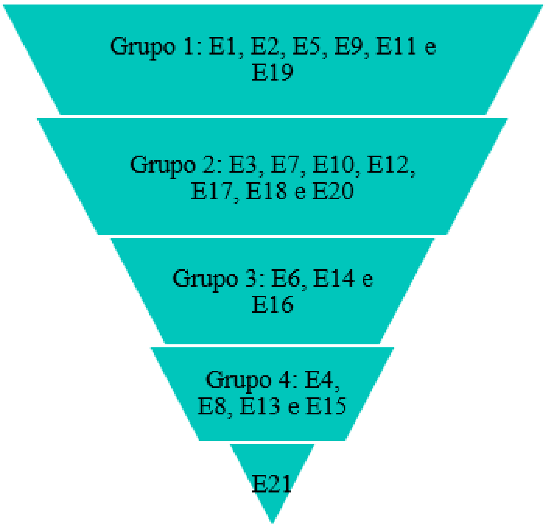


Figura 78: nível hierárquico de êxito da UEPS.

Fonte: elaborado pela autora, com base em dados da pesquisa.

O primeiro grupo estabelecido, que nomeou-se de grupo 1, compreendeu os discentes que possibilitaram maior captação de significados pelo fato de terem realizado mais externalizações. Nele estavam E1, E2, E5, E9, E11 e E19, que eram bastante participativos e desse modo, foi possível verificar o amadurecimento de alguns de seus esquemas, mesmo dado o curto espaço de tempo de aplicação das atividades.

Um dos possíveis exemplos para essa conclusão, foi o cenário apresentado por E1, que no teste diagnóstico apresentou dificuldades no entendimento de frações, equações e operações aritméticas, provavelmente atreladas a uma aprendizagem mecânica de conceitos, mas ao longo dos oito encontros, aperfeiçoou e explicitou entrelaçamentos dos novos conhecimentos com seus esquemas preexistentes. Além disso, conseguiu elaborar novas situações e pequenos textos com interpretações dos conceitos da área administrativa de uma maneira autoral, não literal, o que denotou indícios de aprendizagem significativa e progressos no domínio do campo conceitual em questão.

Reitera-se que isso não significa que E1, juntamente com os demais integrantes do grupo 1, possuíam mais esquemas em suas estruturas cognitivas, mas que eles os externalizaram com mais frequência, o que permitiu um diagnóstico mais rico. Conforme já descrito, eles eram mais desinibidos e mencionaram que gostavam de Matemática. Isso pode ter desencadeado e/ou facilitado essa externalização.

Por todos estes motivos, tais constatações permitiram discernir que os discentes do grupo 1, apresentaram mais indícios de aprendizagem significativa e maiores avanços no domínio do campo conceitual das equações e gráficos. Contudo, pondera-se que, de maneira nenhuma, aferiu-se que eles aprenderam significativamente ou dominaram o este campo conceitual e isto prevaleceu para os demais grupos estabelecidos.

No grupo 2, estavam E3, E7, E10, E12, E17, E18 e E20, que também eram estudantes assíduos, participativos e forneceram alguns indícios de entrelaçamento e enriquecimento de seus conhecimentos prévios ao longo dos encontros, entretanto, apresentaram mais dificuldades e, certa propensão a responder de maneira algorítmica e mecânica à resolução das situações, inclusive as interpretações econômicas.

Desde o teste diagnóstico, até o oitavo encontro, foi possível verificar que, para os estudantes deste grupo, houve uma espécie de aprendizagem subordinada das equações da área administrativa, principalmente do ponto de equilíbrio e ponto de nivelamento, pois eles insistiram nas suas respectivas interpretações como sendo, exclusivamente, a intersecção de duas retas. Outrossim, verificou-se uma provável aprendizagem subordinada, diante da resolução de situações de demanda e oferta, na qual informações como o preço e a quantidade eram mencionados para descobrir uma das equações e o processo de resolução por meio da regra de três foi insistentemente utilizado no percurso da UEPS.

Neste cenário, considerou-se que os discentes do grupo 2, demonstraram mais fragilidades diante da elaboração de seus esquemas e do entrelaçamento de seus subsunçores com os novos conhecimentos do que os do grupo 1 e, por este motivo, foram organizados separadamente.

Supõe-se que alguns dos motivos que possam ter sido relevantes para essa disparidade, estiveram atrelados à fatores como a predisposição ou o tempo de dedicação à disciplina em virtude da sua carga horária de trabalho ou, ainda, as experiências anteriores negativas diante da disciplina, pois alguns integrantes do grupo 2, destacaram no questionário socioeconômico, a sua aversão à Matemática, atrelando este sentimento ao fato de seus professores da escola terem sido muito rigorosos.

Como dito, esta foi uma suposição e, caso este último motivo citado tenha mesmo sido um fator agravante para as fragilidades verificadas nos integrantes do segundo grupo, isto corroboraria os resultados das investigações de Biaggi (2000), Yenilmez, Girginer & Uzun (2007), Peñaloza Fuentes, Lima & Guerra (2009), Roncaglio & Nehring (2013), Laging & Voßkamp (2017) e Cumhur & Tezer (2019), pois todos estes autores, em linhas gerais, conjecturaram que a relação docente-discente e a maneira como os docentes conduzem a abordagem de conceitos, afetam o ensino e podem ser motivadores de obstáculos de aprendizagens, caso sejam permeados por uma relação de autoritarismo e repetição de técnicas.

Isto explicaria algumas atitudes evidenciadas neste grupo de discentes, pois, ocasionalmente, estes fatores podem ter contribuído para uma provável cultura ou predisposição a uma aprendizagem mecânica de conhecimentos em determinados momentos.

O grupo 3, abarcou os discentes E6, E14 e E16, que também foram assíduos nas aulas, entretanto, supôs-se que sua timidez os tornou pouco participativos nos encontros pois raramente eles questionavam ou explicitavam sua maneira de agir em ação, mesmo diante de inúmeras tentativas de os instigar a interagir com os colegas, verificou-se uma postura de trabalho mais solitária. Apesar de ter captado seus registros verbais, detectou-se explicitações com menos riqueza de detalhes e com mais dificuldades de compreensão do que os integrantes dos grupos 1 e 2.

O grupo 4 era composto por E4, E8, E13 e E15, que eram estudantes com baixa assiduidade ou permanência em sala de aula e, por este motivo, vivenciaram a UEPS de uma forma desorganizada, diferente do que estava previsto. Neste caso, supostamente, eles não experienciaram a etapa da consolidação, proposta por Ausubel, Novak & Hanesian (1980), pois as situações que eles enfrentaram, não estavam em nível crescente de complexidade. Contudo, continuaram participando das atividades até o final do segundo semestre de 2019, de modo que foi possível acompanhar, ainda que em menor quantidade, mas algumas externalizações de atividades realizadas por eles.

Isto não ocorreu com E21, que cancelou a disciplina e, por este motivo, ele foi alocado, separadamente, no grupo 5. Conforme exposto no Quadro 17, ele estava presente somente nos dois primeiros encontros, portanto não houve tempo suficiente, além de não ter sido possível evidenciar se houve evolução e/ou captação de significados de sua parte.

Fazendo-se uma espécie de reconciliação integradora da implementação didática, evidenciou-se que os estudantes que participaram da totalidade ou da maior parte dos encontros, puderam experienciar a UEPS na íntegra, da maneira como foi planejada, tiveram uma vivência mais proveitosa e um amadurecimento qualitativo mais enriquecido em relação aos que não estiveram presentes na maior parte dos encontros, pois acompanhando-se grande parte de seus esquemas externalizados, evidenciou-se que, por vezes, eles demonstraram esquemas mais bem elaborados em relação ao início do processo, o que denotou indícios de sua ascensão no domínio do campo conceitual das equações e gráficos.

Contudo eles também apresentaram teoremas-em-ação e conceitos-em-ação que retrocederam, mas isso, conforme Vergnaud (1996) faz parte do processo de conceitualização, que não ocorre de maneira linear.

Ao mencionar avanços e retrocessos na elaboração de esquemas, referiu-se, por exemplo, a quando os estudantes externalizavam a respeito dos conhecimentos da área administrativa/econômica separadamente das situações no contexto da Matemática. Eles demonstravam mais predisposição ao debate a respeito de questões sociais, administrativas, problemas de demanda e oferta e situações hipotéticas de lucro, mas quando estes dados estavam em formato de enunciado de um problema para que eles realizassem cálculos matemáticos, utilizando a calculadora ou o *software Geogebra*, configurava-se um retrocesso.

Da mesma maneira, trabalhavam mais tranquilamente quando se deparavam com exercícios de cálculos similares, repetitivos, que não necessitavam de interpretações econômicas, mas retrocediam quando eram confrontados com a região que pertencia ao entrelaçamento da Matemática com a Administração e tinham que realizar interpretações.

Esta foi uma percepção do todo, pois, conforme minuciado, alguns discentes se saíram muito bem diante das situações propostas, outros, provavelmente, necessitavam de mais situações para avançar no domínio do campo conceitual em questão, mas uma constatação feita foi que, aparentemente, para os discentes que desfrutaram de todas as etapas da UEPS, o material esteve em consonância com seus conhecimentos e, consequentemente, pode ser relacionável à sua estrutura cognitiva, tornando-se um material potencialmente significativo, conforme a orientação de Moreira (2012b).

Por este motivo, acreditou-se que a UEPS foi exitosa em partes, o que permitiu estabelecer um nível hierárquico do seu êxito, considerando-se as externalizações e o acompanhamento da evolução conceitual dos estudantes do primeiro semestre do curso de Administração de 2019.

Desse modo, concatenou-se que para os discentes do grupo 1, a UEPS foi mais exitosa do que para os discentes do grupo 2. Consequentemente, ela foi mais exitosa para os discentes do grupo 2, do que para os do grupo 3 e mais exitosa para os discentes do grupo 3 do que para os do grupo 4. Concluiu-se que que os integrantes do grupo 4, juntamente com E21 (o único componente do grupo 5), foram os que menos demonstraram captação de significados e externalizaram entrelaçamentos dos novos conhecimentos com seus subsunçores, logo, para eles, a UEPS foi menos exitosa.

Por meio de todos os indícios colhidos, corroborou-se os princípios defendidos na TAS e na TCC, de que a apropriação do conhecimento matemático, deriva de um processo gradativo, que necessita de interação, reflexão, apresenta falhas, retrocessos e, nesse cenário, o papel do professor como mediador é crucial, pois ele necessita investigar a forma como o estudante raciocina, elabora e resolve as situações.

Fazendo-se um retrospecto das etapas vivenciadas nas duas aplicações (estudo 1 e estudo 2), foi possível conjecturar que, ao longo de quatro anos de investigação, ocorreram mudanças na estruturação da UEPS, além de diversas modificações na postura e crença profissional da professora pesquisadora, sendo quase que inevitável chegar a este momento da investigação e não mencionar que, provavelmente, a maior parte dos discentes envolvidos em ambos os estudos foram beneficiados, mas que, sobretudo, a autora desta tese já não desfrutava mais da mesma maturidade que possuía ao iniciar o processo de doutoramento, em fevereiro de 2016.

Fruto disso, foram as visíveis reestruturações que ocorreram na UEPS do estudo 1 para o estudo 2, pois o primeiro estudo forneceu evidências de que apostar na quantidade de exercícios e na preocupação em "vencer o conteúdo" estavam indo "de encontro" ao invés de "ao encontro" de oportunizar uma aprendizagem com significado e de favorecer o progressivo domínio do campo conceitual das equações e gráficos, por parte dos estudantes.

Em determinados momentos, principalmente do estudo 1, sentiu-se angustiada, na ânsia de vencer o conteúdo e de estabelecer uma contrapartida a alguns estudantes que reivindicaram o seu papel de "receptores de conteúdo", pois acreditavam que era função do professor escrever a matéria na lousa para eles copiarem, mas buscou-se amparo em Ausubel (2003) e Moreira (2012b), para averiguar que trabalhar em prol de uma aprendizagem significativa, não remete a apresentar o conteúdo na lousa, ou realizar explicações muito bem detalhadas, mas a fornecer subsídios para que os aprendizes possam se deparar com diferentes situações e caminhos, mediando este processo de interação.

Considerou-se que, tanto no estudo 1 quanto no estudo 2, isso os desestabilizou e, por este motivo, julgou-se que as reclamações e recusas por parte de alguns discentes foi, de certa forma, natural, pois este cenário, supostamente, não era o esperado por eles.

Concluindo, no próximo, e último, capítulo são feitas considerações finais e aventadas possíveis continuidades.

CAPÍTULO 8
CONSIDERAÇÕES FINAIS E PROLONGAMENTOS

Este capítulo, tem a finalidade de resgatar e responder o objetivo geral, desdobrando os objetivos específicos da investigação, no item 8.1. Além disso, no item 8.2, apresentar uma visão integradora da tese, com minúcias e acontecimentos relevantes, que guiaram as decisões da autora. Tudo isso, como forma de finalizar a escrita, ciente da continuidade desse processo.

Como em todo longo ciclo, vivenciou-se algumas adversidades em seu decorrer, acredita-se que isto seja inevitável. Desse modo, expõe-se, no item 8.3, as principais fragilidades evidenciadas pela autora acerca da própria investigação e, nos prolongamentos organizados no item 8.4, sugere-se algumas práticas que podem vir a ser implementadas em estudos posteriores.

8.1 Respondendo aos objetivos da investigação

Retomando-se o **objetivo geral desta tese**, que foi verificar em que medida ocorrem indícios de aprendizagem significativa progressiva de conhecimentos na relação de equações e gráficos em uma turma do primeiro semestre de um curso de Administração de Empresas, mediante materiais de apoio e metodologias de ensino fundamentadas na TAS e na TCC, diagnosticou-se que o cenário observado nas duas aplicações[53], tencionou evidências de que os indícios de aprendizagem significativa progressiva no campo de conhecimentos em questão, ocorreram na medida que os discentes demonstraram se apropriar dos conceitos e externalizaram seus subsunçores e esquemas de assimilação, de uma maneira não literal, que permitisse a captação de significados.

Contudo, reitera-se que isso não aconteceu de maneira consonante por parte dos estudantes, tampouco pode-se afirmar que eles aprenderam significativamente ou dominaram o campo conceitual das equações de primeiro grau, em articulação com sua representação gráfica, no contexto administrativo.

Em vez disso, sugere-se que os indícios de aprendizagem significativa progressiva de conhecimentos na relação de equações e gráficos em uma turma do primeiro semestre de um curso de Administração, mediante o entrelaçamento da TAS e da TCC, ocorreram na medida em que a UEPS foi exitosa.

[53] Os resultados dos dois estudos foram corroborados e complementares, mas ressalta-se o estudo 2, em virtude das reformulações na estruturação da UEPS que o primeiro estudo permitiu.

Esse entrelaçamento proposto entre as duas teorias, manifestou-se plenamente compatível e coerente, mas pontuou-se a UEPS como um elo para estabelecer os passos e nortear a construção e organização das situações, ou seja, ela revelou-se como um caminho metodológico crucial para estruturar e responder ao objetivo geral desta pesquisa. Diante dessa afirmação, retoma-se o exposto na Figura 78 (item 7.3), pois nela, os grupos foram alocados perante o êxito da UEPS.

Em outras palavras, aferiu-se que os indícios de aprendizagem significativa progressiva dos conhecimentos, por parte dos estudantes, ocorreram na medida em que algumas características comuns foram observadas com mais frequência por parte de alguns estudantes (esta frequência, obedeceu ao estabelecido nos cinco grupos – G1, G2, G3, G4 e E21 – da Figura 78). Tais características são resumidas a seguir:

- Estudantes que, em geral apresentaram maior assiduidade nos encontros, participaram, questionaram, debateram, explicitaram seus esquemas, negociaram significados, realizaram a recursividade ao erro, elaboraram mais registros (gráficos, verbais, escritos), elaboraram novas situações.

Para que fosse possível realizar estas ponderações, os quatro objetivos específicos elaborados, demonstraram-se relevantes e imprescindíveis, pois como primeiro passo realizou-se a busca pelos subsunçores dos estudantes em relação ao tema equações e gráficos, por meio de um teste diagnóstico. Este foi o **primeiro objetivo específico** e, de fato, norteou a investigação, pois, ao analisar os registros dos estudantes no teste diagnóstico, foi possível conhecer o limiar da sua estrutura cognitiva, elaborar situações que fossem coerentes com sua bagagem de conhecimentos e de acordo com o seu contexto.

Além disso, este mapeamento permitiu verificar a consonância dos resultados desta investigação com os já obtidos em outros estudos, pois conforme o Capítulo 2 da Revisão de Literatura, em todas as 26 obras catalogadas, os autores discerniram que os estudantes iniciam o curso superior de Administração, em geral, com severas dificuldades e defasagens em Matemática básica.

Entretanto, sugere-se que houve um diferencial nesta investigação, pois ela foi proposta na direção do ensino, consequentemente, da aprendizagem da Matemática, voltada a estudantes do curso de Administração, por meio do entrelaçamento da TAS e da TCC, sob amparo metodológico de uma UEPS para o estudo de equações e gráficos.

O **segundo objetivo específico**, foi elaborar uma UEPS, por meio de situações de ensino de equações e gráficos, direcionadas ao progressivo domínio do respectivo campo conceitual, por parte dos estudantes. Conforme minuciado no início deste capítulo, esta ação foi salutar para o desenvolvimento desta tese, pois no estudo 1, que pode ser considerado um estudo piloto, a UEPS ainda não estava completamente delineada e obteve-se um cenário frágil em relação à implementação didática, que contou com o amparo metodológico da UEPS, com todas as suas etapas estruturadas.

Além disso, revisita-se a Figura 8, comentada no Capítulo 3, item 3.3, pois considerou-se que ela foi um dos aspectos mais decisivos para esta investigação acontecer (claro que muitos outros fatores também ancoraram esta possibilidade), mas ressalta-se este, de cunho epistemológico, pois a elaboração da Figura 8, permitiu diversas conjecturas, as mais importantes delas, foram a compreensão de que a UEPS oferecia uma linha metodológica e um melhor entendimento da autora acerca da própria investigação.

Por este motivo, atreve-se a comparar a culminância da figura, com a ideia do *iceberg* da conceitualização, discutida por Moreira (2017), pois ela explicitou uma reconciliação integradora da utilização das duas teorias nas atividades da tese, mas na sua elaboração, houve uma parte invisível, que não foi desenhada e oportunizou muitas descobertas e inspirações para a elaboração da UEPS e para análise das situações a luz da TAS e da TCC.

O **terceiro objetivo específico**, foi investigar como os estudantes utilizam os invariantes operatórios para resolver situações-problema deste campo conceitual, aplicadas à área administrativa. Para realizar este levantamento, a diminuição do número de situações, ocasionada em virtude das reformulações sugeridas pelos professores especialistas e das impressões obtidas no estudo 1, foi uma decisão muito benéfica, pois permitiu identificar e acompanhar alguns indícios de invariantes operatórios, contando com o tempo necessário para que os estudantes vivenciassem todas as etapas da UEPS.

Nesta etapa, os registros coletados e o contexto da sala de aula, permitiram discernir que, sob uma visão macro, os discentes utilizaram os invariantes operatórios de maneira compartimentada para resolver as situações do contexto da Matemática aplicadas à área administrativa.

Isto porque quando tiveram de utilizar conceitos como custo, lucro, receita, demanda e oferta para explicar, teoricamente, em discussões promovidas na sala de aula, situações da área administrativa, por exemplo, ponto de equilíbrio e ponto de nivelamento, demonstraram, indícios de captação de significados. Da mesma forma, quando tiveram que lançar mão de conceitos de equações e gráficos para permanecer no campo algébrico, em um contexto puramente matemático, sem realizar interpretações econômicas, também explicitaram aparentes compreensões dos algoritmos de resolução.

Pelo que pode-se diagnosticar, o ponto frágil da utilização dos subsunçores e/ou invariantes operatórios, por parte dos estudantes, esteve na intersecção das duas áreas, conforme tencionou-se explicitar na Figura 79, a seguir.

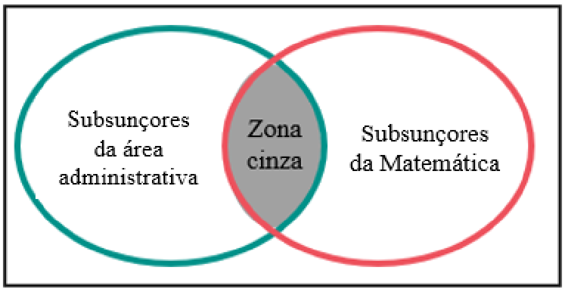


Figura 79: como os estudantes utilizaram os invariantes operatórios para resolver as situações da Matemática no contexto administrativo.
Fonte: elaborado pela autora, com base em dados da pesquisa.

Interpretou-se como se a simbiose entre Matemática e Administração, de alguma forma, permanecesse em uma zona cinza, ou como se a bagagem cognitiva dos estudantes estivesse organizada em "gavetas", com subsunçores específicos para enfrentar situações da área administrativa, outros para enfrentar situações da Matemática. Entretanto, ressalta-se que este foi um diagnóstico feito em oito semanas de acompanhamento e, portanto, não se pode concluir que os discentes não possuíam subsunçores ou invariantes operatórios para lidar, conjuntamente, com as duas áreas, esta afirmação seria muito pretenciosa.

A respeito desta zona cinza mencionada, compactua-se com Moreira (2012a), quando refere-se ao contínuo entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica, pois foi justamente nesta área que apostou-se como mediadora da aprendizagem dos estudantes, oportunizando-se o confrontamento com situações condizentes com a teoria Matemática requerida aos acadêmicos da carreira administrativa, preconizando o seu avanço qualitativo ao longo do processo.

O **quarto objetivo específico**, foi analisar se há evidências de aprendizagem significativa neste processo. Na tentativa de cumprir este objetivo, implementou-se as sugestões de Ausubel (2003) e de Ausubel, Novak & Hanesian (1980), nas situações que compunham a UEPS, para garantir que todos os passos seriam cumpridos. De fato, esta foi mais uma das ações que permitiu conjecturar que a UEPS foi um excelente amparo metodológico para estruturar a investigação.

Desse modo, a resposta para este objetivo foi positiva, pois diante da implementação de todas as etapas propostas pelos autores, diagnosticou-se captação de significados por parte dos discentes de uma maneira nova, não literal, proveniente das discussões vivenciadas nos grupos. Também evidenciou-se que os estudantes foram capazes de elaborar novas situações e de vivenciar tarefas de aprendizagem obedecendo ao nível crescente de complexidade.

Os estudantes que vivenciaram todos estes momentos, que demonstraram predisposição para a aprendizagem, captação de significados de maneira não decorada e que externalizaram seus esquemas, forneceram pistas de que estavam no caminho de uma aprendizagem significativa, mas reitera-se que isto não aconteceu em todos os encontros, tampouco com todos os estudantes, mas em momentos específicos, com determinados estudantes, conforme já minuciado no Capítulo 7.

8.2 Visão integradora da tese: nos bastidores de sua elaboração

Na introdução desta investigação, afirmou-se que, ao iniciar a trajetória como discente de Matemática no curso de Administração, não dispunha-se de conhecimentos específicos para trabalhar a Matemática no contexto dessa área específica. Essa concepção, já havia sido previamente ressaltada por Pinto (2005), pois os professores que contribuíram em sua pesquisa, ressaltaram que, na pós-graduação, poderiam ser realizadas pesquisas que preconizassem a especificidade de determinadas áreas, pois concluíram que é difícil para um professor que nunca teve contato com a área de Administração, dar uma aula que não seja, puramente, Matemática ou com pouca ênfase no contexto administrativo.

Desse modo, conjecturou-se que esta investigação oportunizou a produção de um material que pode servir como fonte de inspiração, como uma sugestão para professores de Matemática que ministram/ministrarão disciplinas no curso de Administração. Isto não quer dizer que o material proposto deverá ser seguido literalmente por outro professor, como um guia. Aliás, isso não deve ser feito com nenhum material. Entretanto, ele poderá servir como um ponto de partida para a elaboração de novas situações, pois evidentemente que, dependendo do contexto, algumas adaptações deverão ser feitas.

Ratifica-se o exposto pelos professores participantes do estudo de Pinto (2005), pois aprecia-se que o compartilhamento de estudos que contenham atividades na íntegra, passíveis de replicações, permite que, quando um discente for trabalhar com determinada área de conhecimento, ele tenha à sua disposição um acervo de questões que ele poderá adaptar, a fim de não seguir materiais didáticos que apresentam a definição, seguida de exercícios, de maneira desarticulada com o contexto.

Além disso, na Revisão de Literatura, no Capítulo 2, evidenciou-se que este é um dos motivos pelo qual considera-se importante que o trabalho do professor de Matemática esteja em sintonia com o dos demais professores do curso em que atua, pois, muitas vezes, por ser lotado em seu curso de origem, o docente de Matemática, supostamente, desconhece a importância da sua disciplina no contexto do curso no qual está ministrando uma disciplina específica ou não dispõe do conhecimento necessário para fazer tais aprofundamentos.

Inclusive, esta ideia é defendida por Macedo (2004), Maggi (2005), Pinto (2005) e Ribeiro (2005) em suas pesquisas, pois todos estes autores alegam que o professor de Matemática precisa estar atento e se adaptar às necessidades dos cursos no qual atua. Mais do que uma ideia defendida, verifica-se essa postura como uma necessidade, pois Macedo (2004), expõe que há professores sem formação em Matemática ministrando essa disciplina no curso de Administração.

Este é um dado preocupante, pois, conforme ressaltado pelo próprio autor, estes docentes podem ser muito bons profissionais nas suas áreas específicas, mas, provavelmente, não tiveram contato com as disciplinas de preparo de docentes, podendo não ter a habilidade pedagógica suficiente para minimizar e responder as dúvidas dos alunos, isso sem falar na formação Matemática que estes profissionais, consequentemente, não possuem.

Estas constatações feitas, por meio da revisão de literatura, foram decisivas para a elaboração de um questionário que norteou uma entrevista com a coordenação do curso de Administração, a qual foi minuciada na metodologia, no Capítulo 4, item 4.4.1. Em virtude da entrevista e da revisão de literatura, pode-se evidenciar a necessidade de adaptar o trabalho às demandas do curso e teve-se a oportunidade de investir pequenos passos no caminho de uma postura menos solitária, buscando o compartilhamento de ideias com outros colegas.

Confessa-se que, no início do processo de doutoramento, após alguns debates com outros colegas e levantamentos de pesquisas, acreditou-se que o corpo de conhecimentos envolvidos no tema proposto para esta investigação poderia representar uma fragilidade ou definir um estudo muito basilar, dado o contexto no qual as atividades seriam desenvolvidas, afinal, nas escolas brasileiras, equações e gráficos são conteúdos apresentados aos estudantes no sétimo ano do ensino fundamental.

Disso surgiu o questionamento: “será que estudar equações de primeiro grau e gráficos no ensino superior não configuraria uma temática muito fácil?” Este foi um questionamento que acompanhou a professora investigadora durante parte do início do processo de elaboração da tese.

Felizmente, dispôs-se de tempo para estudar e aprofundar-se na temática, trocar experiências com outros professores em eventos e vivenciou-se uma etapa que considerou-se como um grandioso presente: quando participou-se de um evento em Porto Alegre, RS, Brasil, em meados de 2018, a respeito da Teoria dos Campos Conceituais, teve-se a grandiosa oportunidade de conversar, pessoalmente, com o professor Gérard Vergnaud.

Nesta ocasião, atreveu-se explanar e a perguntar a ele, qual era a sua opinião a respeito da temática desta tese, pois (ainda) acreditava se tratar de um estudo muito simples. Ele reforçou a respeito da importância de pesquisas com este cunho, averiguou que se tratava de uma investigação muito interessante e foi além, pois contou uma história pessoal, na tentativa de reforçar sua afirmação e auxiliar a professora pesquisadora a entender seu equívoco.

Resumindo, ele relatou que, em determinada ocasião, investigava sobre o ensino da reta real e relatou seu estudo para um importante pesquisador, que era seu colega e categorizou que se este tipo de conteúdo denotava um estudo muito basilar. Foi então que Vergnaud percebeu que muitos professores não levam em conta a intersecção dos conceitos, simplificam o ensino da Matemática, porque não conectam os conceitos entre si, como um campo conceitual. Ele, ainda, enfatizou que não existe um conteúdo de Matemática simples, o que acontece é que os professores não delimitam um campo organizado de conhecimentos antes de organizar o ensino e, nestes casos, os estudantes ficam à deriva, pois os docentes não realizaram um mapeamento das situações e conceitos necessários para tal ação.

Disso, depreendeu-se a importância de delimitar o campo conceitual que seria abordado nesta investigação e a elaboração do item 3.4, juntamente com a Figura 9, em grande parte, foi fruto desta conversa generosa que o professor Gérard Vergnaud se disponibilizou a conceder, como dito, nos bastidores de um evento realizado no Brasil no ano de 2018. Certamente, um momento inesquecível.

Ademais, no que se refere à elaboração e implementação dos dois estudos realizados nesta tese, ressalta-se a importância de ter sido desenvolvido, primeiramente, o estudo 1, no qual pode-se contar com o auxílio dos três professores especialistas para validar as situações, aliado ao tempo que teve-se para publicar o primeiro artigo com os primeiros resultados e para o amadurecimento de ideias até a realização do estudo 2.

Todo este processo abarcou fatores imprescindíveis para o aprimoramento da investigação. Cabe ressaltar que, tal como os resultados do estudo 1, os recém descritos no capítulo anterior, obtidos do estudo 2, foram submetidos à publicação (na Revista Ensino e Tecnologia em Revista – ETR).

Neste ponto, busca-se amparo, novamente, na literatura utilizada nesta investigação, pois houve tempo necessário para a etapa da consolidação, Ausubel, Novak & Hanesian (1980), da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora em relação ao próprio estudo desenvolvido, Ausubel (2003), e de vivenciar diferentes situações frente a diferentes grupos de discentes, Vergnaud (1990).

Recorda-se que, antes de iniciar o processo de doutoramento, a TAS e a TCC eram novos conhecimentos para a autora, além disso, desconhecia-se o que são as UEPS, tampouco imaginava-se construir uma.

O aprendizado que teve-se por meio de todos os momentos vivenciados e relatados no estudo 1 e no estudo 2, promoveu o entrelaçamento destes novos conhecimentos com os conhecimentos prévios e derivaram de uma aprendizagem com significado para a própria professora pesquisadora, portanto puderam ser acreditadas, defendidas e passaram a ser implementadas, aos poucos, na prática docente (pois isso requer tempo).

Isso, sem dúvidas, ocasionou inúmeros benefícios na postura profissional, desse modo, no estudo 2, os materiais oportunizados aos estudantes foram provenientes de uma concepção que estava mais consolidada, mais enraizada na estrutura cognitiva da professora pesquisadora.

8.3 Possíveis fragilidades identificadas neste estudo

Identificou-se três eixos de fragilidades ao longo deste estudo. Ressalta-se que eles foram identificados na realização do estudo 2, momento no qual supôs-se não ser mais possível de superá-los devido a toda estruturação dos encontros estar elaborada conforme as etapas da UEPS. Por este motivo, acreditou-se que seria inadequado modificar sua estrutura no andamento das ações, isso poderia comprometer todo o processo. Desse modo, discute-se cada um dos aspectos a seguir.

- Os materiais instrucionais (ou organizadores prévios)

O planejamento de disponibilizar as videoaulas, aos estudantes, previamente, para que entrassem em contato com o material antes das aulas, emergiu de uma combinação feita, em comum acordo, no primeiro dia de aula. Verbalmente, todos concordaram, mas verificou-se que, no decorrer das semanas, nem todos aderiram à ideia, pois alguns não assistiram e isso, de certa forma, prejudicou a sequência da proposta.

Da mesma forma como as videoaulas foram denotadas como materiais instrucionais, em determinados encontros (no quarto, por exemplo), as próprias situações discutidas no início da aula, serviram como organizadores prévios e, nestes casos, verificou-se que, aparentemente, elas surtiram maior efeito, pois os estudantes debruçaram-se sobre o material. Talvez, tenha sido prematura a ideia de oportunizar materiais no ambiente virtual da disciplina, na expectativa de que todos, de fato, assistissem as videoaulas.

- O ambiente virtual de aprendizagem (AVA/*Moodle*) visando a interação entre docente/discentes e discentes entre si

Ao propor atividades no ambiente virtual, a intenção inicial era de que ele funcionasse como uma extensão da sala de aula, ou uma espécie de “rede social da turma”, na qual os discentes se sentissem confortáveis para questionar a professora pesquisadora por meio do fórum de dúvidas e/ou interagissem uns com os outros. Caso preferissem, poderiam enviar mensagens individuais também, somente para a professora, mas isso raramente aconteceu.

Pelo fato de este ambiente, aparentemente, não ser tão convidativo para a totalidade dos estudantes participantes, isso pode ter sido um fator que contribuiu para a fragilidade anterior ter sido verificada, pois as videoaulas foram disponibilizadas neste ambiente.

- Incluir mais situações como a última tarefa do sexto encontro

Nesta situação específica, propôs-se aos estudantes, que elaborassem novas situações, ligadas ao contexto administrativo, utilizando os conceitos já abordados anteriormente. Por meio dela, verificou-se um envolvimento, aparentemente, maior do que nas demais situações oportunizadas.

Além disso, obteve-se mais indícios e externalizações de significados por parte dos estudantes. Desse modo, discerniu-se que teria sido mais oportuno, incluir uma ou duas situações nos encontros anteriores, com este mesmo enfoque, pois isto poderia ter enriquecido a coleta de registros, suas externalizações de esquemas e negociação de significados.

8.4 Prolongamentos da investigação

- No estudo de Macedo (2004), o autor elaborou uma atividade para encontrar o ponto de equilíbrio de uma empresa, de modo que os estudantes escolheram uma empresa real, recolheram os seus dados (produtos vendidos e tabela de preços) e os levaram para a sala de aula. Nesta investigação, embora tenha feito parte de um planejamento inicial, isto não ocorreu, mas esta ideia compõe um encaminhamento para os próximos semestres. Tenciona-se convidar os estudantes para coletar dados de alguma(s) empresa(s) ou firmar uma parceria com alguma empresa/empresário, que permita o acesso a alguns dados que possam ser utilizados na sala de aula. Desse modo, os discentes poderiam coletar e organizar os dados para calcular o ponto de equilíbrio e o ponto de nivelamento de uma empresa real, que fará parte de seu entorno;
- Conforme exposto, as atividades da implementação didática ocorreram no ano de 2019 e, nesta época, de maneira geral, os estudantes ainda não apresentavam uma postura de acessar o *Moodle* de maneira voluntária. Recorda-se que nos anos de 2017 e 2018, a instituição ofereceu dois cursos de capacitação para os professores aprenderem a utilizar as ferramentas do *Moodle*. Estes cursos não foram obrigatórios

aos docentes, mas, felizmente, optou-se por cursá-los. Foi em virtude dessa formação que familiarizou-se com as diversas ferramentas do ambiente e, desde então adotou-o como tentativa de extensão da sala de aula. O fato de ter evidenciado que os estudantes, em sua maioria, não utilizaram as ferramentas do *Moodle* para entrar em contato com a professora e, em diversos encontros, alguns não assistiram as videoaulas disponibilizadas, provavelmente, sofrerá modificações no contexto pós pandemia, pois, neste momento, todos utilizam suas ferramentas[54], do ambiente e supõe-se que estejam familiarizando-se com este formato diferente das aulas;

- Ao realizar a revisão de literatura, conheceu-se, virtualmente, o professor Geraldo Biaggi, que, prontamente, disponibilizou sua pesquisa, Biaggi (2000), para a autora e, desde então estabeleceu-se uma troca de ideias e o desejo de elaborar um estudo em parceria, com atividades de Matemática aplicadas aos cursos de Administração das duas instituições. Acredita-se que estas ações serão muito benéficas para todo o cenário educativo, pois essa troca de experiências oportunizará o conhecimento de ideias que já foram implementadas, com seus erros e acertos, o conhecimento de outras realidades e a união de diferentes professores em prol de um mesmo objetivo: contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem de Matemática nos cursos de Administração.
- Sugere-se que haja um maior entrosamento entre professores de Matemática que ministram aulas no curso de Administração e os professores do curso, que têm a formação específica (administradores). Neste cenário, o trabalho de Ribeiro (2005), aponta que os conteúdos desenvolvidos nas disciplinas de Matemática, nos cursos de Administração, devem ser submetidos à análise prévia, para evitar assuntos que não sejam relevantes no contexto do curso, e incluir aqueles que possibilitem uma contextualização da Matemática na prática profissional. Ele pondera a respeito da integração do trabalho envolvendo professores de Matemática e das disciplinas afins do curso de Administração.

[54] Devido ao novo Coronavírus, as aulas estão acontecendo em meios digitais e a plataforma *Moodle* vem sendo amplamente utilizada na instituição, pelos estudantes e professores.

REFERÊNCIAS

Anastasiou, L. D. G. C, Alves, L. P. (2003). Processos de ensinagem na universidade. *Pressupostos para as estratégias de trabalho em aula*, 3, 67-100. Joinville, SC: Univille.

Araújo, C. L. J. (2002). *Um estudo sobre o Referencial Matemático dos Alunos do Curso de Administração de Empresas da PUCPR.* Memoria inédita de la Maestría en Educación Superior: Departamento de Educação. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba.

Ausubel, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning.* New York: Grune & Stratton.

Ausubel, D. P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e retenção de conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva.* Lisboa: Plátano Edições Técnicas. Tradução ao português de Lígia Teopisto, do original *The acquisition and retention of knowledge*: a cognitive view.

Ausubel, D. P., Novak, J. D. & Hanesian, H. (1978). *Educational psychology:* A cognitive view. 2 ed. New York: Holt, Renehart and Winston.

Ausubel, D. P., Novak, J. D. & Hanesian, H. (1980). *Psicologia Educacional.* Rio de Janeiro: Interamericana. Tradução ao português, de Eva Nick et al., da segunda edição de *Educational psychology: A cognitive view.*

Behrens, M. A. (2000). *O paradigma emergente e a prática pedagógica.* 2 ed. Curitiba: Champagnat.

Bezerra, F. J. B. (2009). *Desafios e dilemas de professores de Matemática atuando em cursos de Administração.* Tese de Doutorado. Doutorado em Educação Matemática. Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

Biaggi, G. V. (2000). Uma nova forma de ensinar Matemática para futuros administradores: Uma experiência que vem dando certo. *Revista de Ciências da Educação. XXXX*, *20,* 103-113.

Bogdan, R., Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto editora.

Brasil, M. D. E. (2017). Base nacional comum curricular. *Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica*.

Chester, R. (2018). *Minuto do Empreendedorismo*. Vídeo da Água Rick Chester. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=5ikZc5fhHkg.

Cumhur, M., & Tezer, M. (2019). Anxiety about mathematics among university students: A multi-dimensional study in the 21st century. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, *14*(2), 222-231.

Cunha, A. G. (2002). *Dicionário etimológico nova fronteira da língua portuguesa.* 2 ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira.

Cury, H. N. (2013). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Autêntica.

D’Ambrosio, U. (2001). *EtnoMatemática: Elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (Org). *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica.* Campinas: Papirus, 11-33.

Duval, R. (2014). *Rupturas e omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: História de uma sequência de atividades em geometria.* In: Brandt, C. F., Moretti, M. T. (org.), *As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação Matemática.* Ijuí: Ed. Unijuí, 256 p.

Ferreira, D. H. L., Jacobini, O. R. (2010). Modelagem Matemática e ambiente de trabalho: Uma combinação pedagógica voltada para a aprendizagem. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *1*(1), 9-26.

Fiorentini, D., Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação Matemática:* Percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados.

Fogaça, L. S. (2017). *Matemática 1º Ano E.M*. Marista Santa Maria - RS. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=mZxc_1vhgls&t=14s.

Fogaça, L. S. (2018). *Questão que analisa o ponto de equilíbrio de uma empresa*. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=pnYEeb7-j_U&t=20s.

Fogaça, L. S. (2018). *Questão que analisa o ponto de nivelamento de uma empresa*. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=4V8vAHnnxUo&t=31s.

Fogaça, L. S, Moreira, M. A & Caballero, M. C. (2018). *Estudo sobre a aprendizagem de equações e gráficos, em um curso de Administração, fundamentado nas Teorias da Aprendizagem Significativa e dos Campos Conceituais.* Revista Aprendizagem Significativa em Revista (ASR). 8(2): 1-18. http://www.if.ufrgs.br/asr/?go=home.

Freire, P. (2011). *Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa.* 43ª São Paulo: Paz e Terra Coleção Leitura.

Freire, P. (2014). *Pedagogia da esperança: Um reencontro com a pedagogia do oprimido*. Editora Paz e Terra.

Software Geogebra. Recuperado de https://www.geogebra.org/graphing.

Laging, A., & Voßkamp, R. (2017). Determinants of Maths performance of first-year Business Administration and Economics students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(1), 108-142.

Laperriére, A. (2010). *Os critérios de cientificidade dos métodos qualitativos.* In: Poupart, Jean et al. *A pesquisa qualitativa: Enfoques epistemológicos e metodológicos.* Petrópolis: Vozes.

Llancaqueo, A., Caballero, M. C., & Moreira, M. A. (2003). El aprendizaje del concepto de campo en física: Una investigación exploratoria a luz de la teoría de Vergnaud. *Revista Brasileira de Ensino de Física.* 25(4): 399-417. http://doi.org/10.1590/S1806-11172003000400011.

Leite, A., & Fuita, H. (2008). *Aplicações da Matemática: Administração, economia e ciências contábeis*. Cengage Learning.

Luccas, S. (2011). *O ensino introdutório de Matemática em cursos de Administração: Construção de uma proposta pedagógica.* Tese de Doutorado. Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Paraná.

Luccas, S., & Batista, I. D. L. (2011). O papel da matematização em um contexto interdisciplinar no ensino superior. *Ciência & Educação (Bauru)*, *17*(2), 451-468.

Lüdke M., André, M. E. D. A. (2013). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. 2 ed. Rio de Janeiro: E.P.U.

Macedo, L. R. D. (2004). *A aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos e seus reflexos em alunos dos cursos de Administração de Empresas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba. http://www.biblioteca.pucpr.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=187.

Macintyre, A. B. L. (2002). *Tecnologia e Prazer:* O ensino da Matemática aplicada a Administração. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Maggi, L. (2005). Fatores críticos no ensino da Matemática nos cursos de Administração de Empresas: As dificuldades apresentadas pelos alunos ingressantes e as suas implicações na aprendizagem. *Enangrad*, *13*. http://www.angrad.org.br/.

Me Salva! (2012). *Introdução às Funções de 1º Grau*. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=8WGJSZ1eBgE.

Moreira, M. A. (2002). A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*, 7(1): 7-29. Publicação eletrônica: http://www.if.ufrgs.br/ienci

Moreira, M. A. (2004). A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a investigação nesta área. *A teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a investigação nesta área.* Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 7-32.

Moreira, M. A. (2009). Pesquisa em Ensino: aspectos metodológicos. *Actas del PIDEC:* textos de apoio do Programa internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidade de Burgos, Porto Alegre, p.1-73.

Moreira, M. A. (2011). *Aprendizagem significativa: A teoria e textos complementares.* São Paulo: Editora Livraria da Física.

Moreira, M. A. (2012a). *O que é afinal aprendizagem significativa?* Aula Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, MT, 23 de abril de 2010. 27 p.

Moreira, M. A. (2012b). Unidades de ensino potencialmente significativas – UEPS. In: Silva, M. G. L., Mohr, A., Araújo, M. F. F. (orgs). *Temas de ensino e formação de professores de ciências.* Natal: EDUFRN, p.45-71.

Moreira, M. A. (2017). O iceberg da conceitualização. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta área. In: Grossi, E. P. (Org). *O que é aprender? Iceberg da conceitualização*. Porto Alegre: Geempa, 61-117.

Moreira, M. A., Masini, E. F. S (2001). *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*. São Paulo: Editora Centauro.

Morettin, P. A., Hazzan, S., & de Oliveira Bussab, W. (2003). *Cálculo: funções de uma e várias variáveis*. Saraiva Educação SA.

Onuchic, L. D. L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *Pesquisa em educação Matemática: Concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP*, 199-218.

Paulette, W. (2003). *Novo enfoque da disciplina Matemática e suas Aplicações, no Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista – Unip*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual paulista, Rio Claro. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102087.

Pérez, D. A., Jaramillo, D. V., & Asbahr, F. (2020). Los estudios de caso: Enseñanza de las Matemáticas en una Escuela de Administración. *Praxis & Saber, 11*(26), e10093-e10093.

Peñaloza Fuentes, V. L., Lima, R., & Guerra, D. D. S. (2009). Actitudes en relación a la Matemática en estudiantes de Administración. *Psicologia Escolar e Educacional*, *13*(1), 133-141.

Pinto, A. L. M. F. A. (2005). *Concepções e práticas de professores de Matemática de um curso de Administração.* Dissertação de Mestrado. Mestrado em Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Pinto, N. B. (2003). Contrato didático ou contrato pedagógico? *Revista Diálogo Educacional*, 4(10), 93-106.

Pinto, F. R. (2009). *O ensino do conceito matemático de função por meio de softwares gráfico-visuais: Criação de desenhos digitais por alunos iniciantes do curso de Administração.* Dissertação de Mestrado. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

Ribeiro, R. (2005). *Redescobrindo as funções elementares nos cursos de ciências administrativas.* Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Romeu, W., & Bianchini, B. L. (2014). A educação Matemática no curso de graduação em Administração de Empresas: Diagnósticos e propostas. *Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul*, *2*(1).

Roncaglio, V. & Nehring, C. M. (2013). A Matemática em Cursos de Administração: Seu Papel. *Revista da Universidade Unijui.* https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/.../article/.../1795.

Santarosa, M. C. P. (2013). *Investigação da aprendizagem em Física básica universitária a partir de um ensino que integra situações e conceitos das disciplinas de Cálculo I e de Física I.* Tese de Doutorado em Ensino de Física. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da UFRGS.

Santos, A. K., Capelari, R. & Sperandio, D. (1998). É relevante o estudo da Matemática na formação do administrador contemporâneo? *Enangrad*, 9. http://www.angrad.org.br/.

Schneider, E., & Parente, A. (2015). A importância da Matemática para o administrador. *Maiêutica-Ensino de Física e Matemática*, *3*(1).

Silva, L., & Machado, M. (2010). *Matemática Aplicada à Administração, Economia e Contabilidade: Funções de uma e várias variáveis.* São Paulo: Cengage Learning.

Silva, R. G. T. (2016). *Mobile learning: Uma nova forma de aprender Matemática nos cursos de Administração.* Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade estadual da Paraíba (UEPB).

Sosa, J. M. B. (2011). *Resolução de Problemas: Uma metodologia no primeiro período de um curso de Administração: Possibilidades e limitações na prática educativa em Matemática.* Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais.

Stewart, J. (2009). *Cálculo, volume I.* Tradução: Antonio Carlos Moretti. São Paulo: Cengage Learning.

Stoodi. (2014). *Matemática - Função do 1º Grau - Resolução do Exercício 1.* Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=6Vnf-u3rSSI.

Tan, S. T. (2003). *Matemática aplicada à Administração e Economia.* Pioneira Thomson Learning.

Usiskin, Z. (1995). Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. *IN: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. As Ideias da Álgebra. São Paulo: Atual*.

Vergnaud, G. (1983). Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: Les structures additives. *Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique.* La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho.

Vergnaud, G. (1990). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos Campos Conceituais. In: Nasser, L. (Ed.). *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro,* 1-26.

Vergnaud, G. (1996). A Teoria dos Campos Conceituais. In: Brun, J. *Didáctica das Matemáticas.* Tradução ao português de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 155-191.

Vergnaud, G. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 167-181.

Vergnaud G. (2009). O que é aprender? In: Bittar M. Muniz, C. A (Orgs). *Aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.* 1 ed. Curitiba: Editora CRV, p.13-35.

Vergnaud, G. (2016). Quais questões a Teoria dos Campos Conceituais busca responder. *Anais: LADIMA-I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática. Bonito-Mato Grosso do Sul*.

Vergnaud, G. (2017). O que é aprender? Por que a Teoria dos Campos Conceituais? In: Grossi, E. P. (Org). *O que é aprender? Iceberg da conceitualização.* Porto Alegre: Geempa, 15-53.

Vergnaud, G., Plaisance, E. (2003). *As Ciências da educação*. Tradução ao português de Nadyr de Salles Penteado e Odila Aparecida de Queiroz. São Paulo: Edições Loyola.

Vygotsky, L. S. (1988). *A formação social da mente.* 2ª ed. Brasileira. São Paulo: Martins Fontes. 168p.

Zarpelon, E., Germano, E. D. T., Silva, S. D. C. R., Resende, L. M. M., & Neves, M. C. D. (2016). O *software Maple* como ferramenta auxiliar no processo ensino-aprendizagem de cálculo para alunos do curso de Administração. *Revista ESPACIOS 37(33).*

Zimmer, L. A. (2011). *A problematização como metodologia de ensino para aprendizagens significativas na Matemática: Um estudo de caso em curso de Administração.* Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES.

Yenilmez, K., Girginer, N., & Uzun, O. (2007). Mathematics anxiety and attitude level of students of the faculty of economics and business administrator: The Turkey model. In *International Mathematical Forum*, 2(41), 1997-2021.

APÊNDICE A – Termo de consentimento

Prezado(a) acadêmico do curso de Administração da Universidade Franciscana – UFN

Sou doutoranda em Educação na Universidade de Burgos – Espanha. Minha pesquisa visa contribuir para a melhoria do ensino de Matemática, em particular da construção da relação entre os conceitos de equações e gráficos, de estudantes do curso de Administração de Empresas.

Os estudantes selecionados para participar deste estudo, devem estar matriculados na disciplina de Matemática I, ofertada no primeiro semestre do curso de Administração da UFN.

Seu consentimento é voluntário e envolverá o preenchimento de um questionário, a participação nas atividades didáticas e a autorização de eventuais gravações de áudio para posterior transcrição.

Cabe salientar que a pesquisadora assume o compromisso de manter sigilo sobre a identidade dos participantes durante e após a apresentação dos resultados do estudo.

Conto com a sua participação e saliento a importância do desenvolvimento de uma cultura educacional que proporcione espaços de discussão e construção do conhecimento.

Subscrevo-me, atenciosamente,

Letícia dos Santos Fogaça

Eu, ____, concordo em responder ao questionário supracitado, participar das atividades didáticas e autorizo que, ocasionalmente, ocorram gravações de áudio, estando ciente do objetivo do estudo e de meu envolvimento. Concordo que minha produção intelectual seja divulgada nos meios científicos, respeitando meu anonimato.

____

Assinatura do participante

Santa Maria, _________ de ______________________ de 2019.

APÊNDICE B – Questionário socioeconômico

Caro estudante! Este questionário tem por objetivo levantar dados sobre sua trajetória e perspectivas iniciais. De maneira alguma, sua identidade será revelada, pois os dados que você fornecer aqui servirão, somente, para que eu possa adaptar nossas aulas às suas necessidades, além de conhecê-lo melhor. Muito obrigada por respondê-lo!

Profª Letícia Fogaça

1. Qual a sua idade? ____

2. Gênero: ( ) M ( ) F ( ) Outro

3. Você mora em qual cidade? ____

4. Em qual rede de ensino você concluiu o ensino médio?

( ) Escola pública ( ) Escola privada

( ) EJA ou supletivo ( ) Realizou a prova do ENEM para obter certificação

5. Em que ano você concluiu o ensino médio? ___________________________________

6. Você tem filhos?

( ) Não ( ) Sim, tenho 1 ( ) Sim, tenho 2 ( ) Sim, tenho 3 ou mais

7. Você trabalha? Em qual turno e em qual setor ou empresa?

8. Qual a sua atividade de lazer mais comum?

9. Administração foi a sua primeira opção de curso? Por qual motivo você escolheu este curso? Escreva sobre o que significa ser um administrador para você.

10. Este é o seu primeiro semestre?

( ) Sim

( ) Não. Há quanto tempo está cursando Administração? ____

11. Você já iniciou outra graduação? ( ) Não. ( ) Sim. Qual? _______________________________

12. Quem é(são) o(s) responsável(is) financeiro(s) pelos custos de sua faculdade? (Você pode marcar mais de uma opção)

( ) Você ( ) Sua família

( ) Financiamento estudantil ( ) Prouni ( ) Outro. Qual? ____________________________________

13. Você gosta de Matemática? Por quê?

14. Você cursaria esta disciplina, caso ela não fosse obrigatória?
( ) Sim ( ) Não

Nas questões 15, 16, 17 e 18, marque a opção que mais se adequa, conforme a escala de níveis.
15. Quanto à Matemática, você:

1 ( )	2 ( )	3 ( )	4 ( )	5 ( )
Tem muita dificuldade em aprender				Tem muita facilidade em aprender

16. Referente à disciplina Matemática I no curso de Administração, quão importante você acha que ela será?

1 ( )	2 ( )	3 ( )	4 ( )	5 ( )
Ela será pouco importante				Ela será muito importante

17. Você acredita que os conceitos trabalhados na disciplina Matemática I serão utilizados em outras disciplinas ao longo do curso?

1 ( )	2 ( )	3 ( )	4 ( )	5 ( )
Raramente serão utilizados				Serão muito utilizados

18. Você acredita que os conceitos trabalhados na disciplina Matemática I serão utilizados, após concluir o curso, ao exercer a profissão de administrador?

1 ( )	2 ( )	3 ( )	4 ( )	5 ( )
Raramente serão utilizados				Serão muito utilizados

19. Quanto tempo você costuma (ou pretende) dedicar aos estudos? (Marque uma ou mais opções)

( ) Durante as aulas ( ) Aos finais de semana

( ) Na véspera das provas ( ) Outro. Qual? ____

( ) Diariamente

20. Como você prefere estudar Matemática? (Marque uma ou mais opções)

( ) Sozinho, utilizando recursos impressos e internet.

( ) Prefere ajuda de um ou mais colegas.

( ) Outro. Qual? ____

21. Quais características você considera que um bom professor precisa ter?

22. Quais características você considera que um bom aluno precisa ter?

23. Como você gostaria que fossem as aulas da disciplina Matemática I? Quais as suas expectativas? (Você pode sugerir algo, isso pode me ajudar a preparar as atividades do semestre).

APÊNDICE C – Teste diagnóstico do estudo 1

1. Uma região retangular tem 42 cm de perímetro e 104 cm^2 de área. Quais são as dimensões dessa região retangular?

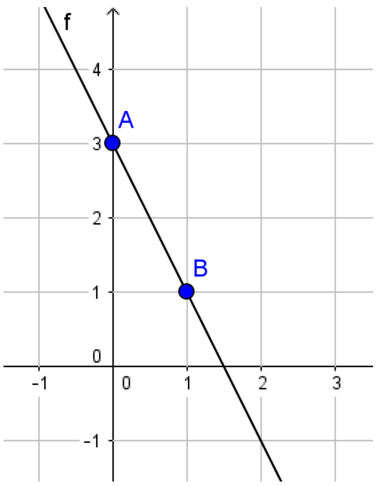
2. Suponha que um item de uma empresa de produtos veganos apresente um custo fixo mensal de R$ 4.000,00, além de um custo variável por unidade de R$ 1,25. Sabe-se que tudo o que é produzido é vendido ao preço unitário de R$ 9,60. Quantas unidades devem ser vendidas para que o lucro seja o triplo do custo de produção?

3. Para alugar determinado modelo de carro, a locadora Aluga-Car cobra uma taxa fixa de R$ 40,00 por dia, além de R$ 0,75 por quilômetro rodado. Lucas alugou este modelo e devolveu-o após dois dias, pagando R$185,00. Quantos quilômetros Lucas percorreu com o carro?

4. Somando os salários, um casal recebe R$ 3.762,00 por mês. Se a mulher ganha 20% a mais que o marido, quanto cada um recebe mensalmente?

5. Dados os pontos A(1,2) e B(3,-1), qual a equação da reta que os contém? Represente graficamente a situação.

6. De acordo com a figura abaixo, qual é a equação que a reta representa?



7. Resolva as equações a seguir:

a) Somando o dobro de um número ao seu triplo, obtemos 125. Que número é esse?

b) $3(x+2) = 5x - 12$

c) $8x - 25 = 5 + 2x$

d) Somando três números consecutivos, obtém-se 66. Quais são esses números?

APÊNDICE D – Situações da UEPS do estudo 1

2º Encontro – funções, equações e gráficos

1. Resolva as equações/funções abaixo e esboce os seus gráficos:

a) $f(x) = -3x + 13$

b) $22 = 10x - f(x)$

c) $-34 + 8x = 2y$

d) $-1{,}5 - 5x = y$

2. Um bombeiro hidráulico cobra uma taxa de R$ 31,00 e mais R$ 2,60 a cada meia hora de trabalho. Um outro bombeiro cobra R$ 25,00 e mais R$ 3,20 a cada meia hora.

a) ache um critério para decidir que bombeiro chamar, se forem levadas em conta apenas considerações de ordem financeira;

b) faça um gráfico comparativo com as duas situações juntas.

3. O lucro mensal de uma loja de suplementos alimentares é dado por $L(x) = 50x - 2.000$, na qual x são as unidades mensais de suplementos alimentares vendidos.

a) qual a quantidade de suplementos que deve ser vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a R$ 5.000,00?

b) se o dono da loja de suplementos ofertou ao mercado 96 suplementos e não sobrou nenhum produto em seu estoque, qual foi o seu lucro mensal?

c) expresse a situação do enunciado por meio de um gráfico.

4. Suponha que o custo fixo de produção de x bolsas universitárias seja R$ 450,00 e que o custo variável seja igual a 60% do preço de venda, que é de R$ 15,00 por unidade.

a) qual é a função custo do dono da loja de bolsas universitárias?

b) expresse a situação por meio de um gráfico.

5. Suponha que o custo mensal de produção de x smartphones da marca "Ching Ling" seja dado por $C(x) = 370 + 15x$.

a) qual será a quantidade mensal produzida sabendo-se que o custo mensal será de R$ 850,00?

b) qual será o custo mensal se 547 smartphones forem produzidos?

c) expresse a situação do enunciado por meio de um gráfico.

6. Suponha que a função $C(x) = 20x + 40$ represente o custo total de produção de um determinado artigo, onde C é o custo (em reais) e x é o número de unidades produzidas. Determine.

a) o custo de fabricação de 5 unidades.

b) quantas unidades devem ser produzidas para que o custo total seja R$12.340,00.

c) expresse a situação do enunciado por meio de um gráfico.

7. Carol é representante comercial de uma empresa de cosméticos. Seu lucro mensal pode ser representado pela expressão $L(x) = 15x - 82$, na qual $L(x)$ é o lucro e x é a quantidade de cosméticos vendidos.

a) se Carol não quer ter um lucro menor do que R$ 950,00, quantos produtos ela precisa vender?

b) expresse a situação do enunciado por meio de um gráfico.

8. Suponha que o lucro mensal de uma empresa de calçados seja dado por $L(x) = 30x - 4.000$, na qual x é a quantidade mensal de pares de calçados vendidos.

a) quantos pares a empresa precisa vender para que o lucro seja igual ou superior a R$ 11.000,00?

b) expresse a situação do enunciado por meio de um gráfico.

9. Considere os preços dos aluguéis de dois carros representados no quadro abaixo

Carro A	R$ 50,00 fixos mais R$ 0,37 por quilômetro
Carro B	R$ 64,00 fixos mais R$ 0,27 por quilômetro

a) se você quisesse percorrer um trajeto de 248 km, qual dos dois carros escolheria?

b) qual a quilometragem que torna a escolha, entre o carro A e o carro B, indiferente?

c) esboce as duas situações em um mesmo gráfico.

3º Encontro – Funções, equações e gráficos

1. Uma empresa de garçons "A" cobra, por serviço feito em festas, um valor fixo de R$ 223,00 e R$ 12,3 por hora trabalhada. Uma outa empresa de garçons "B" cobra, pelo mesmo serviço, um valor fixo de R$ 140,05 e R$ 36,00 por hora trabalhada.

a) qual o valor pago no momento em que a escolha entre as empresas é indiferente?

b) a partir de quantas horas de festa é preferível contratar a empresa A?

c) um cliente que dispõe de R$ 290,00 pagará por quantas horas de festa na empresa A? E na empresa B?

d) expresse as duas situações em um mesmo gráfico, especificando todos os valores e o que cada eixo representa.

2. Suponha que o preço cobrado de um paciente que precisa fazer uma cirurgia de apêndice em um hospital seja uma diária de R$ 300,00 em um quarto privativo além de R$ 1.500,00 pela operação (incluindo gastos com anestesia e instrumentador).

a) sugira um modelo matemático que represente essa situação;

b) expresse o valor pago se o paciente ficou 2 dias internado;

b) quantos dias ele ficou internado se pagou R$ 3.300,00?

c) represente essa situação por meio de um gráfico, explicitando o que cada eixo representa e o(s) ponto(s) de intersecção.

3. Suponha que uma pessoa vai ao supermercado e gasta R$ 80,00 em dois produtos, cujos preços são, respectivamente, R$ 12,00 e R$ 8,00.

a) descreva uma expressão que relacione a quantidade destes dois produtos.

b) quais são as quantidades possíveis para se comprar estes dois itens? Dica: Faça uma tabela.

c) esboce essa situação por meio de um gráfico, explicitando o que cada eixo representa e o(s) ponto(s) de intersecção.

4. Suponha que um fabricante de esmaltes tenha um custo fixo mensal de R$ 1200,00 e um custo variável de R$ 0,60/unidade.

a) qual a função custo total do fabricante?

b) qual o custo envolvido na fabricação de 97 unidades?

c) faça o esboço do gráfico, explicitando o que cada eixo representa e o(s) ponto(s) de intersecção.

5. O IMC (índice de massa corpórea) é uma função Matemática que categoriza uma pessoa adulta quanto ao seu peso. Esse valor é encontrado dividindo-se a massa da pessoa, em quilogramas, pelo quadrado de sua altura em metros ($\frac{M}{A^2}$). Determine qual deve ser a massa de uma pessoa com 1,90 metros de altura, para que seu IMC seja considerado normal, de acordo com a tabela abaixo.

Classificação	IMC
Abaixo do peso	Abaixo de 18,5
Peso normal	18,5 -24,9
Sobrepeso	24,9 – 29,9
Obesidade grau I	30 – 34,9
Obesidade grau II	35-39,9
Obesidade grau III ou mórbida	Maior ou igual 40

Fonte: http://www.ipr.pt/index.aspx?p=IMC. Acesso em 28 mar 2017.

6. Uma fábrica de camisetas tem um custo mensal de R$ 5.000,00 mais R$ 15,00 por camiseta produzida. Cada camiseta é vendida por R$ 25,00. Para ter um lucro de R$ 4.000,00, quantas camisetas a fábrica deverá produzir e vender, mensalmente?

7. Com o início das aulas, Fernanda foi à livraria para comprar canetas, cujo preço unitário é R$ 6,00, e cadernos, cujo valor unitário é R$ 12,00. Suponha que, para isso, ela disponha de R$ 120,00 e que ela queira utilizar todo o valor na compra destes itens.

a) quais são as quantidades possíveis para que ela compre os dois itens.

b) descreva uma expressão Matemática que relacione as quantidades dos dois itens.

c) expresse essa situação por meio de um gráfico, especificando todos os valores e o que cada eixo representa.

8. Esboce os gráficos das funções abaixo:

a) f(x) = $-\frac{1}{2}x$ 	c) y = $10 + \frac{x}{2}$ 	e) f(x) = $-\frac{2x}{5} + 12$

b) y= - 8 + 6x 	d) y = -2x - 3 	f) y = 7 - 5x

9. Obtenha a equação da reta que passa pelos seguintes pontos:

a) A(1,3) e B(2,5)

b) A(2,3) e B(4,7)

4º Encontro – Função custo, função receita e função lucro (ponto de nivelamento)

1. Determine o ponto de nivelamento e esboce os gráficos da função receita e custo com o ponto de nivelamento em cada caso.

a) $R(x) = 4x \; e \; C(x) = 50 + 2x$ 	c) $R(x) = \; 200x \; e \; C(x) = 10.000 + 150x$

b) $R(x) = \; \frac{1}{2}\,x \; e \; C(x) = 20 + \; \frac{1}{4}\,x$

2. Obtenha a função lucro em cada caso do exercício anterior e esboce o seu gráfico.

3. Uma editora vende certo livro por R$ 60,00 a unidade. Seu custo fixo é R$ 10.000,00 por mês, e o custo variável por unidade é R$ 40,00.

a) qual o ponto de nivelamento? O que ele significa?

b) apresente o gráfico das funções c/ o ponto de nivelam;

c) quantas unidades a editora deverá vender para ter um lucro mensal de R$ 8.000,00?

4. Um fabricante tem um custo mensal fixo de R$ 40.000,00 e um custo de produção de R$ 8,00 para cada unidade produzida. O preço de venda do produto é R$ 12,00/unidade.

a) explicite as funções custo, receita e lucro;

b) expresse as funções custo e receita em um mesmo gráfico, com o ponto de nivelamento;

c) calcule os lucros (ou prejuízos) correspondentes aos níveis de produção de 8.000 e 12.000 unidades.

5. Suponha que um fabricante tenha um custo fixo mensal de R$ 1.490,00 e um custo variável de R$ 34,00/unidade na produção de um determinado produto.

a) qual a função custo total do fabricante?

b) qual o custo do fabricante na fabricação de 107 unidades?

c) apresente o gráfico da função custo.

6. Considerando os dados do exercício anterior e, ainda, que um determinado modelo desse produto é vendido por R$ 119,00 a unidade, determine:

a) as funções receita e lucro da empresa nessa situação;

b) o lucro do fabricante na fabricação de 207 unidades de tal modelo;

c) qual o ponto de nivelamento dessa situação? O que ele significa?

7. Suponha que um fabricante de filtros de água tenha a seguinte função custo: $C(x) = -0{,}0001x^2 + 10x + 10.000$, na qual x representa a quantidade de filtros fabricados por mês. Suponha, ainda, que a função receita desse fabricante seja $R(x) = -0{,}0005x^2 + 20x$.

a) qual a função lucro total?

b) qual o lucro quando o nível de produção é de 10.000 filtros por mês?

8. Uma empresa que trabalha com um produto de precisão estima um custo diário de R$ 2.000,00 quando nenhuma peça é produzida e um custo de R$ 8.000,00 quando 250 unidades são produzidas.

a) obtenha a função custo, admitindo que ela seja uma função de 1º grau da quantidade produzida;

b) qual o custo diário para que 300 unidades sejam produzidas?

9. Sabendo que a margem de contribuição por unidade de um determinado produto é R$ 3,00, que seu preço de venda é R$ 10,00 e que seu custo fixo é R$ 150,00, obtenha:

a) a função custo e receita;

b) o ponto de nivelamento. O que ele significa?

c) o esboço do gráfico com o ponto de nivelamento.

10. Levando em consideração o enunciado da questão anterior, determine:

a) a função lucro;

b) o esboço do gráfico da função lucro;

c) a quantidade que deve ser vendida para que haja um lucro de R$ 180,00 por dia.

11. O preço de venda de um produto é R$ 25,00. O custo variável por unidade deste produto é R$ 15,00 e o custo fixo mensal é de R$ 2.500,00.

a) qual o ponto de nivelamento? O que ele significa?

b) qual a margem de contribuição por unidade?

c) qual o lucro se a empresa produzir e vender 1.000 unidades por mês?

12. O custo fixo mensal de uma empresa é R$ 5.000,00, o custo variável por unidade produzida é R$ 30,00, e o preço de venda é R$ 40,00. Desse modo:

a) Qual a quantidade que deve ser vendida por mês para que a empresa tenha um lucro de R$ 2.000,00?

b) qual o ponto de nivelamento? O que ele significa?

c) expresse as funções custo e receita em um mesmo gráfico.

5º Encontro – Função demanda e função oferta (Ponto de equilíbrio)

1. Uma fábrica de taças tem um custo mensal fixo de R$ 15.000,00 mais um custo variável de R$ 4,00 por peça produzida. Sabendo que o preço de venda dessa taça é R$ 12,00, determine:

a) as funções custo, receita e lucro;

b) o custo médio envolvido na produção de 500 unidades;

c) a quantidade de taças que a empresa deverá vender para que se tenha lucro;

d) as funções custo, receita e o ponto de nivelamento em um mesmo gráfico.

2. Quando o preço de venda por metro quadrado de piso de granito natural é de R$ 120,00, nenhum metro quadrado de piso é vendido. Porém, quando o preço é liberado gratuitamente, 100 metros quadrados são procurados. Sabendo-se que a representação é uma reta, pede-se:

a) a função demanda;

b) o esboço do gráfico;

c) a demanda se o preço for R$ 60,00;

d) qual o preço do metro quadrado, se a demanda é de 75 metros quadrados?

3. Suponha que, em uma determinada loja, quando o preço de um par de tênis é de R$ 150,00, cinquenta pares estão à venda. Quando o preço é de R$ 200,00, cem pares estão disponíveis. Desse modo, responda:

a) qual a lei da oferta para esse produto?

b) represente o gráfico da função de oferta;

c) qual é o preço, quando 37 pares são ofertados?

d) qual é a quantidade ofertada quando o preço é R$ 174,00?

4. Uma empresa fabrica e vende um produto por R$ 100,00 a unidade. O departamento de marketing da empresa trabalha com a equação da demanda apresentada a seguir, onde Y_D e X_D representam, respectivamente, o preço e a quantidade demandada.

$$Y_D = -2X_D + 10100$$

Como um primeiro passo para a elaboração do plano de produção dessa empresa, responda à seguinte pergunta: “Quantas unidades produzir?”

5. Uma revendedora estima que um carro popular será comprado por 1850 pessoas se vendido a R$ 10.400,00. Mas, se vendido a R$ 9.660,00, haverá um aumento de 20% nas vendas em relação ao previsto anteriormente.

a) determine a equação da função de demanda;

b) construa o gráfico da função;

c) qual é o preço máximo pelo qual esse artigo poderia ser vendido?

d) para uma unidade do produto demandada, qual é o preço correspondente?

e) para um preço de R$ 14.000,00, a quantidade demandada é de 50 carros populares. Se a quantidade demandada cair para 49 carros, como o preço será afetado?

6. Os itens abaixo apresentam leis de oferta e demanda. Em cada um deles, encontre o ponto de equilíbrio, faça o esboço do gráfico e a análise econômica.

a) $p = 5 + 2x$ e $p = 40 - x$

b) $p = 2x + 30$ e $p = 36 - x$

c) $q = -p + 30$ e $q = p - 10$

7. Uma empresa de bebidas tem analisado o desempenho de um de seus produtos no mercado: O refrigerante x teve uma demanda de 35.000 litros por dia na região A, quando seu preço estava fixado em R$ 1,25 o litro. Com uma redução de 20% no preço, a empresa prevê um aumento da demanda de 1.000 litros.

a) determine a equação da demanda para esse refrigerante;

b) qual é o preço máximo que o mercado suportaria?

c) esboce o gráfico da função demandada do item a).

8. Determine a equação de demanda/oferta em cada item:

a) (1; 122,00) e (10; 95,00)

b) a = $-\frac{1}{8}$ e (0; 300)

c) a = 7 e (0; 56)

d) a = 4,3 e preço mínimo igual a R$ 70,00

e) a = -4 e preço máximo igual a R$ 26,00

9. As funções de demanda e oferta de um produto são, respectivamente, $p = 40 + x$ e $x = 100 - p$.

a) qual o preço de equilíbrio?

b) se o governo instituir um imposto igual a R$ 6,00 por unidade vendida, cobrado junto ao produtor, qual o novo preço de equilíbrio?

6º Encontro – Função custo, lucro, receita, demanda e oferta

1. Suponha que o preço de venda de um determinado produto seja R$ 57,90. O custo variável por unidade desse produto é R$ 17,60 e o custo fixo mensal desse produto é R$ 822,70. Desse modo:

a) faça o esboço do gráfico contendo as funções receita, custo e o ponto de nivelamento;

b) qual o ponto de nivelamento? Escreva a sua interpretação;

c) qual o lucro se a empresa vender 264 unidades por mês?

d) quantas unidades a empresa precisa vender para ter um lucro de R$ 3.500,00?

2. O custo de fabricação de x unidades de um produto é dado pela função $C(x) = 2x^2 - 102 + 2x$.

a) qual o custo de fabricação de 14 unidades?

b) qual o custo de fabricação da 14ª unidade?

3. A função custo de produção de uma empresa em relação à quantidade produzida é dada por custos fixos que totalizam R$ 10.000,00 e por um custo variável de R$ 3,40. Sabe-se que tudo o que é produzido é vendido ao preço unitário de R$ 29,60. Quantas unidades devem ser vendidas para que o lucro seja o triplo do custo de produção?

4. Uma fábrica estima que um carro será comprado por 2480 pessoas se vendido a R$ 33.964,00. Mas, se vendido a R$ 29.500,00, haverá um aumento de 15% nas vendas em relação ao previsto anteriormente. Desse modo:

a) determine a função de demanda e o preço máximo pelo qual esse artigo pode ser vendido.

b) se a função de oferta dessa fábrica for dada por $f(x) = 38.356 + 2x$, calcule o ponto de equilíbrio.

c) construa, em um mesmo gráfico, as funções de demanda e oferta explicitando o ponto de equilíbrio.

d) para um preço de R$ 40.000,00 a quantidade demandada é de 1977 carros. Se a quantidade demandada cair para 1900 carros, como o preço será afetado?

5. Suponha que o lucro mensal de uma loja de suplementos alimentares seja dado por $L(x) = 50x - 2.000$, na qual x são as unidades mensais de suplementos alimentares vendidos.

a) qual a quantidade de suplementos que deve ser vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a R$ 6.500,00?

b) se o dono da loja de suplementos ofertou ao mercado 104 suplementos e não sobrou nenhum produto em seu estoque, qual foi o seu lucro mensal?

c) expresse a situação do enunciado por meio de um gráfico, explicitando o que cada eixo representa.

APÊNDICE E – Teste individual do estudo 1

1. Um grupo de amigos deseja montar um curso de inglês. Eles observaram que teriam um gasto fixo mensal de R$ 1.680,00 e gastariam ainda R$ 24,00, em materiais e pagamento de professores, por aluno. Cada aluno deverá pagar R$ 40,00.

a) qual o ponto de nivelamento? Escreva o que ele representa nessa situação.

b) qual será o lucro ou prejuízo do curso, se existirem 70 alunos?

c) quantos alunos o curso precisa ter para atingir um lucro de R$ 592,00?

d) expresse as funções custo, receita e o ponto de nivelamento em um mesmo gráfico, indicando o que cada eixo representa.

2. A pedroso Ltda. está realizando um estudo de viabilidade econômica para a Aloha Surf Ltda., uma fábrica de pranchas de surfe. Para tal, determinou o custo fixo anual de operação da fábrica em R$ 1.500.000,00 e um custo unitário variável de R$ 100,00. A Aloha pretende vender suas pranchas a um preço unitário de R$ 200,00. De quantas unidades deve ser o ponto de equilíbrio anual da fábrica?

3. Suponha que o lucro mensal de uma loja de acessórios para carro seja dado por $L(x) = 64x - 2432$, na qual x representa as unidades mensais vendidas.

a) qual a quantidade de itens que deve ser vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a R$ 6.300,00?

b) se o dono da loja de acessórios para carro ofertou ao mercado 204 itens e não sobrou nenhum produto em seu estoque, qual foi o seu lucro mensal?

c) expresse a situação do enunciado por meio de um gráfico, explicitando o que cada eixo representa.

4. Em uma loja, quando o preço de cada bicicleta é R$ 160,00, 20 bicicletas são vendidas. No entanto, se o preço é R$ 150,00, 25 bicicletas são vendidas. Suponha que a situação obedece ao contexto linear.

a) encontre a equação de demanda.

b) considere que a equação de oferta desse produto é representada por $y = 2x + 160$. Determine o ponto de equilíbrio de mercado e escreva a sua interpretação sobre o que essa situação representa.

c) faça os respectivos gráficos no mesmo sistema de coordenadas, assinalando o ponto de equilíbrio e o que cada eixo representa.

d) Qual é o preço máximo que o mercado suporta para a venda dessa bicicleta? Explicite esse valor no gráfico feito no item c).

APÊNDICE F – Teste diagnóstico do estudo 2

Caro estudante, peço que você responda às questões a seguir, com tranquilidade, sem se preocupar em ser avaliado. Caso você não chegue à uma resposta final, não há problemas, apenas escreva o seu raciocínio, pois me interesso em entender como você pensou para resolver/tentar resolver cada questão

Profª Letícia Fogaça

1. O somatório dos salários de um casal totaliza R$ 3.762,00 por mês. Se a mulher ganha 20% a mais que o marido, qual é o salário de cada um?

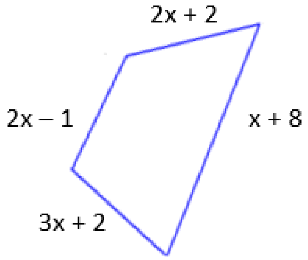
2. Somando-se quatro números naturais consecutivos, obtém-se o número 162. Quais são esses números?

3. Resolva as equações a seguir.

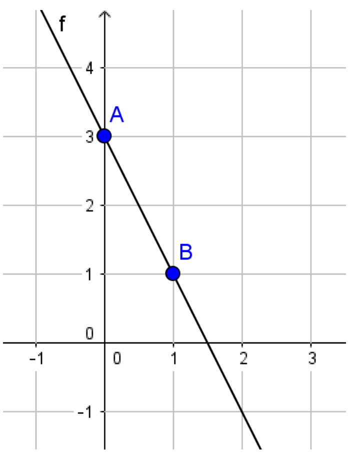
a) $3(x + 2) = 5x - 12$

b) $\frac{2x}{4} + 9 = \frac{4x}{4} - 18$

4. Sabendo que o perímetro do quadrilátero abaixo é 27 cm, determine a medida dos lados desse quadrilátero.



5. De acordo com o gráfico abaixo, qual é a equação que a reta representa?



6. Dados os pontos A (2,5) e B (0,3), qual a equação da reta que os contém? Represente graficamente a situação.

7. Com o início das aulas, Fernanda precisa ir à livraria para comprar cadernos de 200 folhas, cujo preço unitário é R$ 12,00, e canetas, cujo valor unitário é R$ 6,00. Para isso, Fernanda dispõe de R$ 120,00. Suponha que ela queira utilizar todo o dinheiro na compra de cadernos e canetas. Pede-se:

a) Descreva uma expressão Matemática que represente essa situação.

b) Quais são as quantidades possíveis para se comprar os dois itens?

c) Represente graficamente essa situação.

APÊNDICE G – Situações da UEPS do estudo 2

2° encontro:

1. Disponibilizar o vídeo "Rick Chester: Minuto do Empreendedorismo". Página disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=5ikZc5fhHkg>.

Observação: Para esta atividade é necessária a utilização de *Datashow*. Após assistirem ao vídeo, levantar discussões iniciais sobre porcentagens (aumentos e descontos), lucro, arrecadação, custos (fixos e variáveis).

2. Uma balança de dois pratos está em equilíbrio. Em um prato há três pesos iguais de valor desconhecido (medido em gramas) e um terceiro peso de 13g. No outro prato da balança há um outro exemplar igual aos anteriores de peso desconhecido e um peso de 45g. Qual é o valor do peso desconhecido?

3. Vocês irão em uma festa, mas o valor da entrada só será pago ao final dela, no caixa, junto com o valor de cada unidade de bebida consumida. Como seria a expressão Matemática que representaria o custo dessa festa? Construa o gráfico, a tabela e escreva o significado dos coeficientes.

4. Uma pessoa vai ao supermercado e gasta R$ 80,00 em dois produtos, cujos preços são, respectivamente, R$ 12,00 e R$ 8,00.

a) descreva uma expressão Matemática que relacione a quantidade destes dois produtos;

b) quais são as possibilidades de compra dos produtos para esta pessoa?

c) esboce graficamente a situação;

d) o que ocorre se os produtos entrarem em promoção com desconto de 20%?

3° encontro:

1. Resolva as expressões abaixo e esboce os seus gráficos (indique os coeficientes e os pontos de intersecção com os eixos):

a) $y - 9 = -3x + 13$

b) $22 = 10x - f(x)$

c) $-34 + 8x = 2y$

d) $-1{,}5 - 5x = y$

2. Os pontos a seguir indicam as retas que passam pelos pontos A e B. Em cada um dos casos, elabore o gráfico e apresente a equação da reta corresponde para responder às seguintes questões:

a) $A(0,0)\ e\ B(2,3)$

b) $A(-4,1)\ e\ B(1,3)$

c) $A(0,4)\ e\ B(1,2)$

d) $A(0,3)\ e\ B(5,1)$

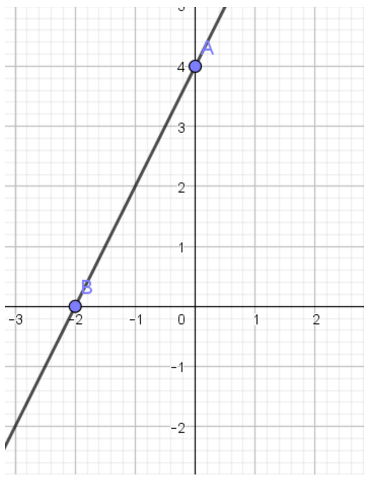
Questionamentos:

– Qual é o coeficiente angular? E o linear?

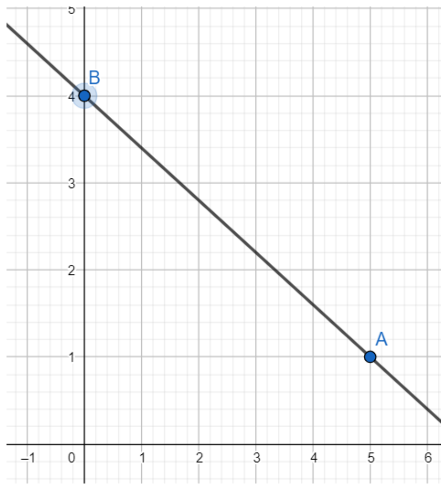
– Esta reta é crescente ou decrescente?

3. Em cada um dos itens, descubra qual é a equação da reta representada no sistema cartesiano.

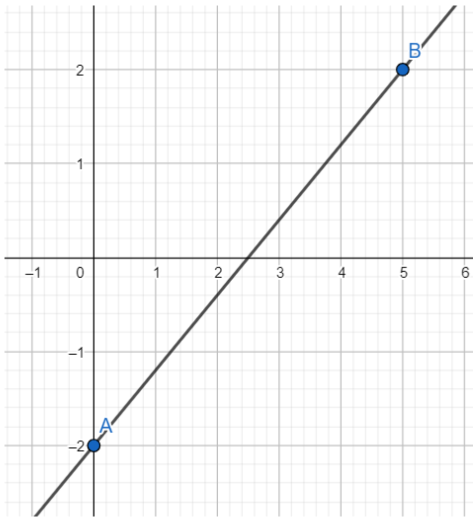
a)



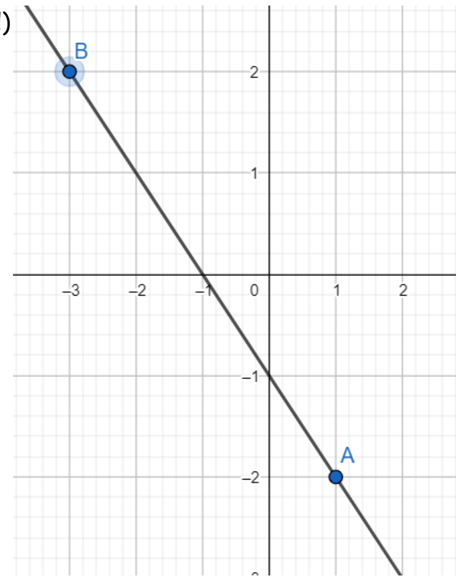
b)



c)



d)



4° encontro:

1. Uma empresa de garçons "A" cobra, por serviço feito em festas, um valor fixo de R$ 500,00 e R$ 68,00 por hora trabalhada. Outra empresa de garçons "B" cobra, pelo mesmo serviço, um valor fixo de R$ 480,00 e R$ 73,00 por hora trabalhada.

a) escreva duas equações Matemáticas: uma que expresse a situação da "empresa A" e outra que expresse a situação da "empresa B";

b) apresente as duas situações em um mesmo gráfico, especificando todos os valores e o que cada eixo representa;

c) qual o valor pago no momento em que a escolha entre as empresas é indiferente?

d) após fazer a análise financeira, escreva um critério que você utilizaria para decidir qual empresa contratar.

2. Uma loja de equipamentos para academias estima que um de seus produtos será comprado por 1.850 clientes, se vendido a R$ 10.400,00. Mas, se vendido a R$ 9.660,00, haverá um aumento de 20% nas vendas em relação ao previsto anteriormente.

a) determine a equação de demanda para este produto represente-a graficamente;

b) o que o coeficiente linear significa nessa situação?

3. Uma editora pretende lançar um livro e estima que a quantidade vendida seja 40.000 exemplares. Se o custo fixo de fabricação for R$ 250.000,00 e o custo variável, por unidade, for R$ 20,00, qual o preço mínimo que a editora deverá cobrar por livro?

4. Qual o custo da disciplina de Matemática I?

Elabore uma expressão Matemática que leve em consideração o seu custo fixo e os seus gastos variáveis para se deslocar até a UFN toda sexta-feira. Compare com a de seu colega e elaborem uma expressão que rege o custo médio mensal da disciplina de Matemática I.

5º encontro:

1. Suponha que o custo fixo de produção de "x" bolsas universitárias seja $R\$\ 450{,}00$ e que o custo variável seja igual a 20% do preço de venda, que é de $R\$\ 125{,}00$ por unidade.

a) expresse, algebricamente, as funções custo total e receita total;

b) qual será a quantidade mensal produzida quando o custo total mensal for $R\$\ 1.200{,}00$?

c) quantas bolsas o dono precisa vender para obter lucro? Expresse a função lucro graficamente;

d) qual será o lucro mensal se 247 bolsas forem produzidas e vendidas?

e) expresse em um mesmo gráfico as funções custo e receita. Faça uma análise econômica da situação.

2. Para produzir embalagens, uma pequena empresa tem um custo representado por $C(x) = 4500 + 0{,}2x$, na qual "x" representa o número de unidades produzidas.

Se cada embalagem for vendida por $R\$\ 15{,}5$, qual é o número mínimo de unidades que devem ser vendidas para que o lucro da empresa seja o triplo do custo? Represente a função lucro graficamente.

3. Gabriel comprou uma casa no ano de 2012 por $R\$\ 280.000{,}00$ e revendeu-a, no ano de 2017, por $R\$\ 156.000{,}00$, pois houve uma depreciação linear em virtude da construção de um viaduto em frente ao imóvel.

Observação: suponha o ano de 2012 como o ano zero da compra.

a) descubra a expressão Matemática que representa, essa situação e esboce seu gráfico;

b) o que os coeficientes angular e linear representam nessa situação?

6º encontro:

1. Em certa localidade, a função de oferta anual de um determinado produto agrícola é representada por $p = 0{,}01x–3$, na qual "p" é o preço por quilograma e "x" a quantidade ofertada, em toneladas.

a) que preço induz a uma produção de 650 toneladas?

b) se o preço, por quilograma, for $R\$7{,}5$, qual será a produção anual?

c) qual o ponto de equilíbrio de mercado se a função de demanda anual for $p = 10 - 0{,}01x$?

d) apresente o gráfico contendo o ponto de equilíbrio e o que cada eixo representa. Escreva sua interpretação econômica.

2. Em uma sorveteria, sabe-se que, quando o preço do sorvete é $R\$\ 7{,}15$, a quantidade ofertada será 350 por semana e, se o preço for $R\$\ 9{,}7$, a quantidade semanal ofertada será 1.200. Nessa sorveteria, sabe-se que a função de demanda por sorvetes é $p = 10 - 0{,}02x$. Considerando um modelo linear, qual é a função de oferta?

a) expresse as duas funções no mesmo gráfico.

b) o que os coeficientes angular e linear significam em cada uma das funções?

c) escreva a interpretação econômica dessa situação.

3. Elabore uma situação que envolva alguns dos conceitos abordados, contendo interpretação econômica e construção gráfica.

a) Situação;

b) Gráfico;

c) Interpretação econômica/gráfica.

APÊNDICE H – Teste individual do estudo 2

1. Considere que as equações de demanda e oferta de determinado produto são representadas, respectivamente, por $1{,}1x + 2y - 74 = 0$ e $x - 4y + 84 = 0$, na qual y representa o preço e x representa a quantidade.

a) determine o ponto de equilíbrio e trace o gráfico das equações num mesmo sistema de coordenadas;

b) escreva a interpretação econômica dessa situação.

2. Um fabricante de certo modelo de cadeiras tem uma despesa fixa mensal de $R\$\ 9576{,}00$, além de um custo de produção de $R\$\ 13{,}00$ por unidade. Ele estipulou que o preço de venda desse modelo é $R\$\ 85{,}00$ por unidade.

a) represente graficamente a função lucro e faça uma análise, por escrito, do gráfico;

b) represente as funções custo e receita em um mesmo gráfico, explicitando o ponto de nivelamento;

c) escreva a interpretação econômica do gráfico do item b), mencionando o que significa o ponto de nivelamento.

3. Suponha que o custo total de uma academia em relação à quantidade de frequentadores seja dado por custos fixos, que totalizam $R\$\ 5022{,}8$, além de um custo de $R\$\ 12{,}40$ por frequentador. Os pacotes de funcional e musculação são oferecidos, individualmente, ao preço unitário de $R\$\ 99{,}00$ mensais. Quantos frequentadores a academia precisa fidelizar para que seu lucro seja o dobro do custo?

4. Em uma loja de roupas, quando o preço de certo item é $R\$160{,}00$, 20 itens são vendidos. No entanto, se o preço é $R\$150{,}00$, 25 itens são vendidos.

a) encontre a equação de demanda para esse item;

b) considere que a equação de oferta desse item seja representada por $y = 2x + 160$. Determine o ponto de equilíbrio de mercado e escreva a sua interpretação sobre o que essa situação representa;

c) faça os respectivos gráficos no mesmo sistema de coordenadas, assinalando o ponto de equilíbrio e o que cada eixo representa;

d) Qual é o preço máximo que o mercado suporta para a venda desse item? E qual o preço mínimo? Assinale esses valores no gráfico feito no item c).

5. Uma empresa fabrica um produto a um custo fixo de $R\$\ 1.200{,}00$ por mês e um custo variável, por unidade produzida, igual a $R\$\ 2{,}00$. O preço unitário de venda do produto dessa empresa é $R\$\ 5{,}00$. Atualmente, o nível de venda é de mil unidades por mês.

A empresa pretende reduzir em 20% o preço de venda, esperando que, com isso, as vendas aumentem. Qual deverá ser o aumento na quantidade vendida mensalmente, para manter o lucro que a empresa já tem?