Master en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Universidad de Burgos

INFORME TRABAJO FIN DE MASTER:

Aprender a aprender mediante la resolución de problemas

CURSO 2010-2011

Miguel Ángel Báez Sánchez

Especialidad: *Matemáticas*

Directora del trabajo fin de master:

Dra. María Consuelo Saiz Manzanares

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

En las siguientes hojas se analizarán, desde el punto de vista de las estrategias de aprendizaje, las competencias básicas y se intentará ver si estos se consiguen. Además, se estudiará el currículo de bachillerato. En dicho currículo los objetivos, indican, expresados en términos de competencias, cómo se debe de impartir la formación para poder conseguir que los alumnos desarrollen los competencias establecidas con el fin de que su aprendizaje sea un aprendizaje para su vida, ya sea en su ámbito laboral o personal.

Posteriormente, se presentará un estudio relacionado sobre las estrategias de aprendizaje. Ellas, se clasifican en cognitivas, metacognitivas y sociales. Las estrategias de aprendizaje han constituido uno de los temas privilegiados de la práctica y reflexión psicológica y pedagógica en los últimos años. Diversas corrientes han subrayado su significación, a partir de aproximaciones teóricas y metodológicas del más variado carácter. Es extraño encontrar un área de la psicología y pedagogía actuales en la que no se planteen las condiciones que propician el surgimiento, la formación, el desarrollo y la evaluación de los aprendizajes.

Las estrategias de aprendizaje son especialmente importantes en el proceso de enseñanza - aprendizaje puesto que constituirían herramientas para el desarrollo de competencias comunicativas básicas, en tal sentido se considera que estos resultados podrían ser usados para el planteamiento de un plan de intervención cuya finalidad sería el desarrollo de las habilidades cognitivas y metacognitivas.

Para conseguir una generalización y transferencia de los mismos, se hace necesaria una planificación de las instrucciones que empleemos. Dentro de este proceso, la motivación hacia el aprendizaje, es un punto clave para el éxito instruccional.

Por los motivos anteriormente expuestos, se realizará un estudio de la actual metodología y se analizará una nueva metodología desde el punto de vista comparativo entre el uso de una metodología tradicional de enseñanza y una metodología innovadora. Dicha metodología consiste en la aplicación de la técnica metacognitiva de resolución de problemas.

Por último, mencionar la labor del docente es la de conseguir que los alumnos consigan adquirir las estrategias de aprendizaje apropiadas para cada uno de ellos, ya que una estrategia que valga para uno puede ser no válida para otro. De todas formas, no hay que olvidarse de las de uso general y profundizar en estas para que luego ellos vayan experimentando con otras que les guiamos o indicamos el proceso, puesto que el sistema de ensayo – error resulta muy útil en las ciencias experimentales, pero no en la vida porque a algún alumno puede que una determinada estrategia le funcione para conseguir aprobar con un determinado profesor o materia, pero cuando se cambie alguno de estos elementos, puede fracasar estrepitosamente y cuando más joven sea, mayor capacidad de maniobra tendrá para explorar otras y conseguir el éxito con la tarea que vaya a realizar.

1.1 Competencias básicas

Hoy en día las competencias básicas son cada vez más necesarias, por ejemplo, es más frecuente que las empresas se decidan a contratar a personas con unas determinadas competencias o bien desarrolladas. Este es uno de los motivos por los que se decidió su implantación en todas las fases educativas.

A fin de determinar su importancia, relevancia y alcance, es importante determinar qué se entiende por competencias. Al respecto, se pueden señalar algunas definiciones que permitan determinarlo:

Para Boyatzis (1982) (p. 14) son: "conjuntos de patrones de conducta, que la persona debe llevar a un cargo para rendir eficientemente en sus tareas y funciones".

Ansorena Cao (1996) (p. 76): "Una habilidad o atributo personal de la conducta de un sujeto, que puede definirse como característica de su comportamiento, y, bajo la cual, el comportamiento orientado a la tarea puede clasificarse de forma lógica y fiable".

Spencer y Spencer (1993) (p. 9) las define como "Una características subyacentes de un individuo, que está causalmente relacionada con un rendimiento efectivo o superior en una situación o trabajo, definido en términos de un criterio.".

Woodruffe (1993) (p. 31) "Una dimensión de conductas abiertas y manifiestas, que le permiten a una persona rendir eficientemente".

Lo que queda claro es que aquellas competencias que hayan sido asimiladas por el individuo, perdurarán a lo largo de la vida, siendo su empleo, no solo en un nivel de estudios, sino para su vida diaria o para en el trabajo como hemos visto anteriormente. Aquellos alumnos que tengan un mayor grado de desarrollo de estas competencias obtendrán mejores resultados siendo más probable que la ejecución de tareas o actividades esté bien realizada.

Vista la importancia de las competencias básicas en el aprendizaje, atendiendo al Real Decreto 1631/2006 (p. 678 (BOE nº 5)) señala que:

- *Se consideran imprescindibles, de carácter básico, y son aquellas habilidades o destrezas que debe haber desarrollado un joven o una joven al finalizar la enseñanza obligatoria para poder lograr su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida.*

Y establece las finalidades:

- *Integrar los diferentes aprendizajes, tanto los formales, incorporados a las diferentes áreas o materias, como los informales y no formales.*
- *Permitir a todos los estudiantes integrar sus aprendizajes, ponerlos en relación con distintos tipos de contenidos y utilizarlos de manera efectiva cuando les resulten necesarios en diferentes situaciones y contextos.*
- *Orientar la enseñanza, al permitir identificar los contenidos y los criterios de evaluación que tienen carácter imprescindible y, en general, inspirar las distintas decisiones relativas al proceso de enseñanza y de aprendizaje.*

Las competencias básicas se mencionan en dicho documento, son ocho:

- *Competencia en comunicación lingüística.*
- *Competencia matemática.*
- *Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.*
- *Tratamiento de la información y competencia digital.*

- *Competencia social y ciudadana.*
- *Competencia cultural y artística.*
- *Competencia para aprender a aprender.*
- *Autonomía e iniciativa personal.*

Se hará un breve resumen de cada una de ellas para aclarar que es lo que pretenden:

- Competencia en comunicación lingüística: Pretende que el estudiante sea capaz de emplear un lenguaje, ya sea oral o escrito, de una manera correcta y comprender su significado en diferentes contextos. De esta manera, podrá generar juicios de valor.
- Competencia matemática: Pretende que los estudiantes tengan la habilidad de emplear las matemáticas para interpretar y resolver problemas de la vida cotidiana.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico: Es la habilidad para desenvolverse de forma autónoma en distintos ámbitos como la salud, el consumo o la ciencia, de modo que se sepa analizar, interpretar y obtener conclusiones personales en un contexto en el que los avances científicos y tecnológicos están en continuo desarrollo.
- Tratamiento de la información y competencia digital: Sirve para buscar y obtener información. Después de esto, tiene que poder ser transformada en conocimiento. Otro aspecto que trata es el de ser capaz de resolver problemas de la vida cotidiana mediante el empleo de estos recursos.
- Competencia social y ciudadana: Entre las habilidades de esta competencia se incluyen el conocerse y valorarse, saber comunicarse en diferentes contextos, expresar las ideas propias y escuchar las ajenas, comprendiendo los diferentes puntos de vista y valorando tanto los intereses individuales como los de un grupo, en definitiva habilidades para participar activa y plenamente en la vida cívica.
- Competencia cultural y artística: Sirve para apreciar las distintas expresiones de arte existentes y valorarlas críticamente, al igual que poder realizar creaciones propias con diferentes recursos.

- Competencia para aprender a aprender: Es una de las más importantes ya que con ella se consigue que el individuo tenga la capacidad de interesarse por aprender a lo largo de su vida de una manera autónoma. Para conseguir esto, ha de tener un conocimiento de sí mismo y de igual manera de sus capacidades. Es aquí donde entran las estrategias de aprendizaje que el sujeto haya adquirido a lo largo de su etapa formativa.
- Autonomía e iniciativa personal: Responsabilidad, perseverancia, autoestima, creatividad, autocrítica o control personal son algunas de las habilidades relacionadas con esta competencia, unas habilidades que permiten al estudiante tener una visión estratégica de los retos y oportunidades a los que se tiene que enfrentar a lo largo de su vida y le facilitan la toma de decisiones. De esta manera conseguimos crear a personas con una fuerte autoestima.

En el currículo de Bachillerato, las competencias no están desglosadas como tales, aparecen de forma implícita en los objetivos que los estudiantes han de superar, si bien algunos se mencionan de una manera explícita, como es el de aprender a aprender, por ejemplo en el currículo de Castilla y León en el Decreto 42/2008, de 5 de Junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León, en el "Anexo: Ciencias para el mundo moderno" (p. 11310 del BOCyL nº III):

"*Las materias surgen para formar futuros ciudadanos que deberán enfrentarse a nuevos retos técnicos, sociales y ambientales, en una sociedad sometida a grandes cambios, fruto de las revoluciones científico-tecnológicas y de la transformación de los modos de vida, marcada por intereses y valores particulares a corto plazo, que están provocando graves problemas ambientales y a cuyo tratamiento y resolución pueden contribuir la ciencia y la tecnología. El enfrentamiento a estos retos puede hacerse de la manera más positiva posible gracias al desarrollo de diferentes tipos de capacidades cognitivas, conductuales, afectivas e instrumentales.*

*Por ello estas materias tiene un marcado carácter funcional en el que se prioriza la labor de enseñar al alumnado a «***aprender a aprender***» y no se dan respuestas cerradas a los diferentes temas tratados que pudieran transmitir una imagen inexacta del conocimiento científico. Para ello, se deben trabajar aspectos como la búsqueda, clasificación y análisis de información, la argumentación y el debate desde el punto de vista científico, Así como la influencia del contexto histórico, ético, social, económico, político y ambiental en el que se crea el conocimiento científico y tecnológico.*

Además, contribuye a la comprensión de la complejidad de los problemas actuales y las formas metodológicas que utiliza la ciencia para abordarlos, el significado de las teorías y modelos como explicaciones humanas a los fenómenos de la naturaleza, la provisionalidad del conocimiento científico y sus límites."

Todas las competencias descritas anteriormente son importantes para el desarrollo adecuado de los individuos, ya que no sólo incluye conocimientos, sino procesos cognitivos y socio – afectivos que se pueden aplicar a diferentes situaciones. Aun así, en la actualidad, son pocos los libros de texto que realmente aplican esta metodología o no la llegan a aplicar de una manera adecuada, no llegando a explotar todas las posibilidades que ofrece.

Desde un punto de vista crítico, se debería afianzar la competencia de "aprender a aprender" pues como se dijo anteriormente desarrolla aspectos tanto cognitivos como emocionales. Desde luego, supone adquirir determinadas competencias metacognitivas, es decir, capacidades que permiten al estudiante conocer y regular sus propios procesos de aprendizaje. Pero, de nada sirve conocerse como aprendiz si lo que "vemos" al analizarnos nos desagrada y nos lleva por tanto a considerarnos poco capaces. La autoestima, la capacidad de aceptar el rechazo que provoca el error, la tensión que implica mantener el esfuerzo…son algunas de las dimensiones de aprender a aprender que con mayor claridad revelan su naturaleza emocional.

Así, por ejemplo, en Nisbet y Shucksmith (1986) (p. 28, 29) indican:

"*La idea de aprender a aprender ha atraído en los últimos años la atención de diversos grupos: defensores de la educación permanente, teóricos del currículo, psicólogos cognitivos, reformadores de la educación y profesores de técnicas de estudio.*

Los defensores de la educación permanente sostienen que aprender a aprender es un objetivo prioritario de la etapa de enseñanza obligatoria: si se quiere que la «educación de por vida» sea un rasgo de la moderna sociedad tecnológica, las escuelas deben preocuparse de enseñar a los jóvenes a aprender a aprender con eficacia y de inculcarles la disposición a seguir aprendiendo".

Hirst y Phenix (1965) (citado por Nisbet y Shucksmith (1986) (p. 29)), refiriéndose al currículo, sugieren que:

"*En un currículo destinado a transmitir las formas básicas de conocimiento, los estudiantes deben aprender los distintos modos de pensar*".

Se puede indicar que aprender a aprender es:

- Saber obtener información.
- Aprender reglas generales que puedan ser aplicadas a la resolución de un conjunto amplio de problemas.
- Asimilación de los principios sobre la investigación.
- Ser autónomo en el aprendizaje.
- Tener una disposición a aprovechar el tiempo.
- Ser capaz de generalizar y transferir lo aprendido a otros contextos

1.2 Estrategias de aprendizaje

Como se vio anteriormente, lo más importante es hacer ver a los alumnos las herramientas necesarias para que se sigan formando, y es ahí, en donde entran las estrategias de aprendizaje, que nosotros, como sus docentes, tendremos que aplicar para conseguir tal reto. De esta manera, la mejor edad para conseguirlo es en alumnos de diez a catorce años, siendo esa edad la mejor para iniciar tal proceso ya que, en esos años, ya dominas las estrategias básicas y si no lo conseguimos, lastraremos las capacidades de esos alumnos ya que perderían una gran oportunidad para mejorar.

Con lo anterior, podemos concluir que los maestros o profesores enseñan a sus alumnos quieran o no las estrategias de aprendizaje que ellos emplean, de esta manera, si da matemáticas o física, estarán más relacionadas con el método científico, por ejemplo, buscar algoritmos de resolución para determinados problemas o analizar los datos para estudiar que se puede obtener de ellos, mientras que si diese algo relacionado con lengua o arte, enseñaría la manera adecuada de expresión de ideas. Pero no sólo se centra en estrategias para cada una de las ramas, sino que pueden ser más genéricas, como las reglas mnemotécnicas, subrayado, esquematización, resúmenes,…

Citando a Nisbet y Shucksmith (1986) (p. 27):

"*Es necesario que los profesores transmitan en su enseñanza, sólidas estrategias de aprendizaje y sepan hacerlo de un modo que aliente en los alumnos el paso a métodos más generales de aprendizaje*"

Es por ello, que aprender a aprender es tan importante, con esto se consigue la motivación de los estudiantes para el trabajo diario en el aula y además, debido a la sociedad tan cambiante, a que estén preparados en el futuro, es decir, ganan en adaptabilidad, pero no se deben de confundir con las relacionadas con "pasar los exámenes", como pudieran ser aquellas de discriminar parte del temario, hacerlo "bonito" para el profesor de turno,…

Para conseguirlo, como se dijo anteriormente, con las estrategias de aprendizaje, pero… ¿qué son las estrategias de aprendizaje?

Las estrategias de aprendizaje son el conjunto de actividades, técnicas y medios que se planifican de acuerdo con las necesidades de la población a la cual van dirigidas, los objetivos que persiguen y la naturaleza de las áreas y cursos, todo esto con la finalidad de hacer más efectivo el proceso de aprendizaje.

Al respecto Brandt (1998) (p. 16) las define como, "Las estrategias metodológicas, técnicas de aprendizaje andragógico y recursos varían de acuerdo con los objetivos y contenidos del estudio y aprendizaje de la formación previa de los participantes, posibilidades, capacidades y limitaciones personales de cada quien".

Es relevante mencionar que las estrategias de aprendizaje son conjuntamente con los contenidos, objetivos y la evaluación de los aprendizajes, componentes fundamentales del proceso de aprendizaje.

Las estrategias de aprendizaje pueden ser generales o específicas, macro estrategias o micro estrategias. Las mismas pueden clasificarse en estrategias cognitivas, estrategias metacognitivas, estrategias sociales y estrategias de apoyo o auxiliares.

Las primeras se refieren al procesamiento de la información (comprensión, recuerdo, recuperación y aplicación de la información), las segundas al control y dirección de las acciones de aprendizaje, las terceras a la búsqueda del aprendizaje a través de la interacción con los demás y las últimas se refieren al apoyo, aseguramiento, organización y autocontrol de los recursos del procesamiento cognitivo.

Cada una de ellas desempeña un importante papel durante el desarrollo de las tareas de aprendizaje, pues facilitan el proceso y consigo la obtención del éxito en el resultado final o producto de aprendizaje.

Cada estrategia tiene una función bien definida, pues en cada momento del proceso se ejecutan las acciones y los procedimientos generales y específicos para que el aprendiz pueda solucionar operativamente el problema planteado en el aprendizaje.

Existen además, las estrategias de tipo afectivas y aquellas de aseguramiento de las condiciones externas (medios para el aprendizaje: libros, instrumentos, espacios apropiados, planificación del tiempo y distribución de las actividades de aprendizaje), que desempeñan un importante papel, desde el momento en punto que se asume el criterio de la formación y desarrollo de la personalidad en lo cognitivo y lo afectivo.

Veamos a continuación una jerarquía de las estrategias (Ver Tabla 1):

Tabla 1: *Jerarquía de estrategias de aprendizaje*

Tipo	**Características**	**Ejemplo**
Estrategias central (estilo, método de aprendizaje)	Guarda relación con las actitudes y motivaciones	Planteamiento
Macroestrategias (procesos ejecutivos estrechamente relacionados con el conocimiento metacognitivo)	Son altamente generalizables. Se perfeccionan con la edad y la experiencia. Pueden perfeccionarse, aunque difícilmente, mediante la enseñanza.	Control Comprobación Revisión Autoevaluación
Microestrategias (procedimientos ejecutivos)	Son menos generalizables. Más fáciles de enseñar. Forman un continuo con las habilidades de orden superior. Son específicas de cada tarea	Formulación de cuestiones Planificación

Las estrategias se clasifican:

A) **Estrategias cognitivas** – Como ya se ha visto, estas estrategias tienen que ver con la relación de conocimientos nuevos con lo ya aprendido (la integración de lo nuevo dentro de esquemas mentales ya establecidos). Un profesor que quiere hacer uso de las estrategias cognitivas tiene que intentar siempre relacionar lo que los alumnos y alumnas están a punto de aprender con los conocimientos previos que puedan tener y que les sean más familiares.

B) **Estrategias metacognitivas** – Ya se ha dicho que estas estrategias tienen que ver con el "control" del aprendizaje de uno mismo. Es decir, un alumno que sabe autorregular su estudio (que sabe cómo estudiar bien y sacar buenas notas) sabe utilizar las estrategias metacognitivas eficazmente. Un buen profesor debe intentar enseñar a sus alumnos y alumnas estrategias de esta clase para que puedan llegar a autorregularse en asuntos académicos.

C) **Estrategias sociales** – Éstas son las estrategias que implican la interacción social entre los miembros del alumnado para llegar a aprender materia nueva. Ejemplos de esta clase de estrategias en la práctica son trabajos en grupos y en equipos, interacción en el aula, etc.

D) **Estrategias de apoyo o auxiliares** – Estas estrategias auxilian al estudiante durante el proceso aprendizaje, pero no siempre reconocen que las mismas regulan el comportamiento cognitivo, aseguran el proceso de aprendizaje desde la organización, aseguramiento y utilización adecuada del tiempo y los recursos de apoyo al aprendizaje. No sólo son de apoyo, sino que también regulan y optimizan el comportamiento cognitivo durante el acto de aprendizaje, constituyendo estrategias afectivas del aprendizaje.

En la segunda mitad de este trabajo (la parte práctica), se dará unos ejemplos básicos de las estrategias de cada clase y cómo éstas pueden ser puestas en práctica dentro del aula.

Pero antes de hacer eso, nos gustaría hablar un poco de otro paradigma de clasificación de estrategias de aprendizaje.

Existen diferentes clasificaciones de las estrategias, una de ellas es la que proponen Weinstein y Mayer (1985) (315-327). Para estos investigadores, las estrategias cognoscitivas de aprendizaje se pueden clasificar en ocho categorías generales, seis de ellas dependen de la complejidad de la tarea, además de las estrategias metacognoscitivas y las denominadas estrategias afectivas.

1 Estrategias de ensayo para tareas básicas de aprendizaje

Existe un número de tareas educativas diferentes que requieren de un recuerdo simple. Un ejemplo de estrategia en esta categoría lo constituye la repetición de cada nombre de los colores del espectro, en un orden serial correcto. Estas tareas simples ocurren particularmente en un nivel educacional menor o en cursos introductorios.

2 Estrategias de ensayo para tareas complejas de aprendizaje

Las estrategias de aprendizaje en esta categoría son más complejas y tienden a involucrar el conocimiento que se extiende más allá del aprendizaje superficial de listas de palabras o segmentos aislados de información. Las estrategias en esta categoría incluyen copiado y subrayado del material de lectura. Generalmente involucran la repetición dirigida hacia la reproducción literal.

3 Estrategias de elaboración para tareas básicas de aprendizaje

La elaboración involucra el aumento de algún tipo de construcción simbólica a lo que uno está tratando de aprender, de manera que sea más significativo. Esto se puede lograr utilizando construcciones verbales o imaginables. Por ejemplo, el uso de imaginería mental puede ayudar a recordar las secuencias de acción descritas en una obra, y el uso de oraciones para relacionar un país y sus mayores productos industriales. La creación de elaboraciones efectivas requiere que el alumno esté involucrado activamente en el procesamiento de la información a ser aprendida.

4 Estrategias de elaboración para tareas complejas de aprendizaje

Las actividades de esta categoría incluyen la creación de analogías, parafraseo, la utilización de conocimientos previos, experiencias, actitudes y creencias, que ayudan a hacer la nueva información más significativa. Una vez más, la meta principal de cada una de estas actividades es hacer que el alumno esté activamente involucrado en la construcción de puentes entre lo que ya conoce y lo que está tratando de aprender.

5 Estrategias organizacionales para tareas básicas de aprendizaje

Las estrategias en esta categoría se enfocan a métodos utilizados para traducir información en otra forma que la hará más fácil de entender. En este tipo de estrategias, un esquema existente o creado se usa para imponer organización en un conjunto desordenado de elementos. Nótese que las estrategias organizacionales, como las de elaboración, requieren un rol más activo por parte del alumno que las simples estrategias de ensayo.

6 Estrategias organizacionales para tareas complejas de aprendizaje

Las estrategias organizacionales pueden ser también muy útiles para tareas más complejas. Ejemplos comunes del uso de este método con tareas complejas incluyen el esbozo de un capítulo de un libro de texto, la creación de un diagrama conceptual de interrelaciones causa-efecto, y la creación de una jerarquía de recursos para ser usados al escribir un trabajo final.

7 Estrategias de monitoreo de comprensión.

La metacognición se refiere tanto al conocimiento del individuo acerca de sus propios procesos cognoscitivos, como también a sus habilidades para controlar estos procesos mediante su organización, monitoreo y modificación, como una función de los resultados del aprendizaje y la realimentación.

Una subárea dentro de la metacognición que es particularmente relevante, se llama monitoreo de comprensión. Operacionalmente, el monitoreo de la comprensión involucra el establecimiento de metas de aprendizaje, la medición del grado en que las metas se alcanzan y, si es necesario, la modificación de las estrategias utilizadas para facilitar el logro de las metas.

El monitoreo de la comprensión requiere de varios tipos de conocimiento por parte de los alumnos. Por ejemplo, ¿cuáles son sus estilos preferidos de aprendizaje?, ¿cuáles son las materias más fáciles o más difíciles de entender?, ¿cuáles son los mejores y los peores tiempos del día? Este tipo de conocimiento ayuda a los individuos a saber cómo programar sus horarios de actividades de estudio y los tipos de recursos o asistencia que necesitarán para una ejecución eficiente y efectiva.

8 Estrategias afectivas

Las estrategias afectivas ayudan a crear y mantener climas internos y externos adecuados para el aprendizaje. Aunque estas estrategias pueden no ser directamente responsables de conocimientos o actividades, ayudan a crear un contexto en el cual el aprendizaje efectivo puede llevarse a cabo.

Algunos ejemplos de estrategias afectivas incluyen ejercicios de relajación y auto-comunicación o auto-hablado positivo para reducir la ansiedad de ejecución; encontrar un lugar silencioso para estudiar para así reducir distracciones externas; establecer prioridades, y programar un horario de estudio.

Cada uno de estos métodos está diseñado para ayudar a enfocar la capacidad (generalmente limitada) del procesamiento humano sobre la meta a aprender. Eliminando las distracciones internas y externas se contribuye a mejorar la atención y lograr la concentración.

Hemos introducido el concepto de metacognición, ahora expondremos una definición de la misma realizada por Flavell (1976) (p. 232):

"*Metacognición significa el conocimiento de uno mismo concerniente a los propios procesos y productos cognitivos o a todo lo relacionado con ellos, por ejemplo, las propiedades de información o datos relevantes para el aprendizaje. Así, practico la metacognición (metamemoria, metaaprendizaje, metaatención, metalenguaje, etc.) cuando caigo en la cuenta de que tengo más dificultad en aprender A que B; cuando comprendo que debo verificar por segunda vez C antes de aceptarlo como un hecho; cuando se me ocurre que haría bien en examinar todas y cada una de las alternativas en una elección múltiple antes de decidir cuál es la mejor; cuando advierto que debería tomar nota de D porque puedo olvidarlo…*

La metacognición indica, entre otras cosas, el examen activo y consiguiente regulación y organización de estos procesos en relación con los objetos cognitivos sobre los que versan, por lo general al servicio de algún fin u objetivo concreto” que la metacognición es el empleo inteligente de la cognición.

Wellman (1977) (Citado por Nisbet y Shucksmith p. 55) estableció un modelo de cognición basado en la memoria para explicar de una forma mejor la metacognición, y para ello, estableció cuatro categorías:

- Procesos básicos de la cognición. Evolucionan muy poco con la edad. La denominan "hardware".
- Efectos relativamente directos, involuntarios y por lo común inconscientes del nivel de desarrollo cognitivo de la memoria. Se perfecciona con la edad. La denominan "conocimiento".
- La llaman "estrategia" es la diferencia entre conocer y conocer como se conoce, ya que es necesario un conocimiento estratégico para realizar determinadas tareas.
- La llaman "metacognición" o conocer como conocer. En este caso es necesario tener consciencia de las capacidades de uno mismo.

Todo esto, para qué. La solución es sencilla, no basta con enseñar un determinado número de estrategias a los alumnos para que las empleen, ya que no lo harán, sino que tendrán que darse cuenta del uso que tiene esa estrategia y cómo les funciona a cada uno de ellos, entonces nos estamos dando cuenta de que existe otro concepto que no tenemos que olvidar para conseguir el éxito, que es el de la "transferencia" de las estrategias de aprendizaje.

El principal problema que se plantea con las estrategias de aprendizaje es su transferencia, es decir, utilizar las mismas estrategias que eran válidas en un determinado contexto en otras situaciones o problemas totalmente distintas al inicial para lo que fueron utilizadas. Dicho de otra manera, ¿Pueden ser útiles estrategias utilizadas para aprender unos contenidos de Historia cuando lo que se tiene que aprender es Matemáticas?

Una posible solución al problema de la transferencia es la que plantean Aguilar y Díaz, en su artículo “La problemática de las estrategias: la transferencia” (1988), cuando mencionan que este problema se puede resolver cuando el alumno no solamente aprende estrategias de aprendizaje, sino también estrategias metacognitivas, las cuales se pueden utilizar para detectar las diferencias entre lo que se sabe y no se sabe, y para ir controlando los procesos de adquisición y comprensión de la nueva información. De esta manera, los estudiantes no solamente mejoran la ejecución de la tarea, sino la transferencia y mantenimiento de las habilidades adquiridas.

Según el estudio de Tabberer y Allman (1983) (p. 3) si las habilidades para el estudio se enseñan fuera de contexto, no es probable que sean aplicadas en la práctica y por el otro lado, enseñar esas habilidades en el contexto de las clases ordinarias limita la capacidad de transferencia. El problema es la deficiencia en la aplicación puesto que los alumnos no son capaces de aplicar las habilidades apropiadas cuando se enfrentan a un problema diferente.

Por lo tanto, tendremos que enseñar tales habilidades dentro del contexto adecuado. Enseñar de esa manera, tiene que hacer que el alumno caiga en la cuenta de los elementos que se pueden transferir o ser aplicables a otros elementos, es decir, de una manera más general.

1.3 Motivación en el aprendizaje

Ya se ha hablado de lo importante que son las estrategias de aprendizaje a la hora de conseguir que los alumnos adquieran la competencia de aprender a aprender, pero existe el problema de la transferencia de las mismas a los estudiantes, ya que es fundamental el entorno que se elija para desarrollarlas se obtendrá mayor o menor éxito. Una manera de lograrlo es mejorar la motivación que muestren los alumnos frente a esas nuevas actividades, porque no es lo mismo ver los contenidos con una letra minúscula, sin interlineado, etc. a verlo gráficos y explicado de una manera amena, pero sin perder rigurosidad, es decir, se tendrá que tener cuidado de como presentemos dichas habilidades y en qué entorno.

Pero antes de avanzar, tendremos que definir motivación. Según Martínez-Salanova (1999) es:

"*Es el interés que tiene el alumno por su propio aprendizaje o por las actividades que le conducen a él. El interés se puede adquirir, mantener o aumentar en función de elementos intrínsecos y extrínsecos.*

Hay que distinguirlo de lo que tradicionalmente se ha venido llamando en las aulas motivación, que no es más que lo que el profesor hace para que los alumnos se motiven.".

Según este mismo autor, como docentes que somos, nos debemos plantear tres objetivos fundamentales para conseguir una adecuada motivación en nuestras aulas:

- Suscitar interés.
- Dirigir y mantener el esfuerzo
- Lograr el objetivo de aprendizaje prefijado

Otro autor, Tapia (1998) (p. 35), considera que para conseguir motivar a os alumnos tenemos que lograr:

- Que valorasen más el hecho de aprender que el hecho de conseguir tener éxito o fracasar en una tarea en particular.
- Que consideren a la inteligencia como algo que se modifica con el esfuerzo y no como algo estable.
- Facilitar la experiencia de autonomía y control a través de la organización de la actividad escolar.
- Mostrar la importancia de la realización de las tareas como consecución a otros fines, como la responsabilidad, facilidad para lograr nuestras metas en los estudios…
- Que considerasen la experiencia de enfrentarse a nuevos retos como un desafío o un reto que logran superar.

Todo lo expuesto por los autores es complejo y difícil de conseguir con todos los alumnos. Tradicionalmente sólo bastaba con que los alumnos mostrasen cierto interés inicial, pero se ha demostrado, como indica Martínez-Salanova (1999), que la motivación ha de mantenerse hasta el final para conseguir unos resultados óptimos refiriéndonos al aprendizaje. Si el caso planteado funciona, puede dar lugar a nuevos procesos motivacionales.

Se tiene que partir del hecho de que cada alumno se motiva por diferentes razones, al igual que no les sirven las mismas estrategias de aprendizaje, cada estudiante será único, y es por ese motivo, por el que la función del profesor es la de alguien exterior a los alumnos que ha de conseguir que estos se motiven. En ciertos casos podremos llegar a incentivos, que presentan una limitación motivacional, puesto que la respuesta será diferente entre los alumnos y además, en el mismo, dependiendo del estado de ánimo u otro factor de la infinidad que existen.

La forma de facilitar esto se hace teniendo una atención individualizada dentro del entorno motivacional colectivo creado en la clase. Esto se debe a las peculiaridades intrínsecas de cada uno de nuestros alumnos. Además, según Stipek (1984) (Citado por Tapia en la p. 41) se produce una variación de la motivación de los alumnos, entorno a los ocho años de edad, promovido por la escuela, en la que cambian, por ejemplo, las expectativas, las metas y las atribuciones que persiguen, y en la mayoría de los casos se aprecia un descontento con la escuela.

Hay que tener en cuenta que es más importante crear interés por la actividad que por el mensaje. Empleando las palabras de Martínez-Salanova (1999), *"Hay muchos profesores que tienden a buscar técnicas interesantes para ellos pero que no provocan ninguna motivación en los alumnos. Los alumnos no se motivan por igual, por lo que es importante buscar y realizar actividades motivadoras que impliquen mayor participación del alumno.*

Identificamos el aprendizaje a partir de la experiencia. Podemos extrapolar esta situación para definir que se motiva más y mejor quien mayores y mejores experiencias vive en el aula. Leemos ya con bastante frecuencia, que en situaciones de aprendizaje nos importan más los procesos que los resultados. La razón es que los procesos permanecen siempre y sirven de refuerzo o motivación para posteriores aprendizajes.".

Tapia (1999) (p. 45), describe cuáles son los principios de la motivación en las aulas, a través de un simple esquema que ponemos a continuación:

- *La forma de presentar y estructurar la tarea*. Se pretende activar la curiosidad y el interés del alumno por el contenido del tema a tratar o de la tarea a realizar mediante la presentación que efectuemos, plantar problemas que haya que resolver y variar los elementos.

  También es importante mostrar la relevancia del contenido o la tarea para el alumno a través de realizar una simple relación de los contenidos utilizando experiencias anteriores y mostrando su importancia en el futuro (ejemplos de uso como hospitales, laboratorio, naturaleza, etc.).
- *La forma de organizar la actividad en el contexto de la clase*. Procuramos organizar la actividad en grupos cooperativos, haciendo depender de la evaluación de cada alumno de los resultados globales obtenidos por el grupo. Se ha comprobado (Pardo y Tapia (1990) (Citado por Tapia (1999) en p. 35)) que las actividades cooperativas tienen buen resultado.

  Cuando la actividad lo permita, tenemos que dar el máximo de opciones posibles de actuación para mejorar de esa manera la autonomía.
- *Los mensajes que da antes, durante y después de la tarea y que afectan a la relevancia y valor de las metas, a la valoración del sujeto, a la adecuación de las formas de pensar y actuar, etc*. No debemos despreocuparnos cuando mandemos a los alumnos las tareas, debemos orientar la atención de los mismos antes, durante y después de la tarea y recordándoles que la inteligencia es algo modificable, que la tendencia de atribuir los resultados a causas percibidas como internas, modificables y controlables y por último, que tomen conciencia de los factores que les hacen estar más o menos motivado.
- *El modelado de valores y de estrategias, así como de las formas de pensar y actuar al enfrentarse con las tareas*. Ser coherente, nosotros mismos, con las normas establecidas, es decir, ser un ejemplo válido.

- *La forma que va a adoptar la evaluación del alumno*. Dado que las evaluaciones son algo inevitables y necesarias, organizar las evaluaciones a lo largo del curso de forma que los alumnos las consideren como una ocasión de aprender y en la que procuraremos evitar la comparación de unos con otros y se acentúe la comparación con uno mismo, intentando maximizar la constatación de los avances.

1.4 Planteamiento del problema

Tras la creación de la L.O.E. hubo que hacer un replanteamiento de los currículos, que no consistió en aumentar el número de horas de las materias respectivas, pues los horarios y los propios contenidos estaban ya muy recargados, sino que se les dio un enfoque más global hacia el aprendizaje, que permita una relación más estrecha con las necesidades cambiantes de la realidad.

En este sentido, lo importante es insistir más en las herramientas esenciales del aprendizaje: comprensión lectora, expresión oral y escrita y cálculo y resolución de problemas en la educación obligatoria, y, por otro los contenidos fundamentales: conocimientos, capacidades, actitudes y valores.

El cambio, no supuso reformar entero el currículo, al menos a lo que se refiere a los contenidos. Lo que provocó fue que se tuvo que cambiar el enfoque. Hay que tratar de que el aprendizaje de los contenidos siga una metodología que conduzca a la adquisición de competencias. Se trata de transformar la enseñanza en aprendizaje.

De esta manera, hubo que cambiar la metodología docente para que los alumnos adquiriesen dichas competencias en la convergencia de todas las materias. Pues todos los profesores desde sus respectivas materias tienen una responsabilidad compartida en esta tarea. Las competencias básicas no están vinculadas a una materia determinada, sino a todas.

Pero… ¿Realmente se produjo tal cambio?

Analizando varios libros de texto, antes de la L.O.E. y después de esta, descubrimos que son prácticamente los mismos, al menos en los libros de texto de matemáticas que se han consultado, incluso se podría decir que la complejidad o el número de problemas a los que se enfrentan los alumnos ha disminuido ostensiblemente, pero esta no es la labor del presente trabajo.

El informe PISA mide el nivel de adquisición de las competencias que poseen los alumnos en diversos países del mundo. Todo ello se especificará en las conclusiones.

Analicemos los resultados del informe PISA del año 2009.

El Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA por sus siglas en inglés, Programme for International Student Assessment) es desde hace unos años la medida más aceptada internacionalmente para medir el rendimiento educativo en los países ricos. Hay un cierto consenso entre los expertos de que sus tres pruebas son una buena manera de evaluar la calidad de un sistema educativo. Desde que se inició, España ha estado siempre por debajo de la media de la OCDE en prácticamente todas las métricas.

Pero veamos qué es lo que hace. PISA, por encargo de la OCDE y con cooperación de diversas comisiones asesoras de un consorcio de la industria examinadora, realiza la prueba en la que en los países participantes también colaboran los centros nacionales relacionados con la educación.

El examen incluye una sesión cognitiva con una duración de 2 horas y una sesión de cuestionarios con una duración aproximada de 1 hora. En el examen cognitivo no todos los estudiantes resuelven los mismos problemas.

Las soluciones de los estudiantes se registran digitalmente y se envían al centro del proyecto internacional en Australia, donde se evalúan. Ahí, las preguntas y los problemas se califican como “correctos” o “incorrectos”. Según la cantidad de estudiantes que hayan respondido un problema de forma “correcta” se define la “dificultad” del problema. Dependiendo también de la cantidad de problemas que haya resuelto un estudiante, se reconoce un margen de valores de competencia “plausibles” en el mismo. Después se establecen las escalas de dificultad y de competencia, de forma que el puntaje promedio dentro de los estados de la OCDE sea de 500 y el desvío sea de aproximadamente 100.

En una segunda etapa se evalúa la distribución estadística de las competencias de los estudiantes en los países participantes o en poblaciones específicas.

En su última edición, la de 2009, los estudiantes españoles han sacado 481 puntos en Comprensión Lectora, 483 en Competencia Matemática y 488 en Ciencia. Las medias de la OCDE son de 493, 496 y 501 respectivamente. Y aún más destacada es la diferencia con las calificaciones en otros países de la UE, como Finlandia (536, 541 y 554) u Holanda (508, 526 y 522).

Año tras año, se publican los resultados del informe (Ver tabla 2) y se inician numerosos debates sobre el gasto en la enseñanza, la calidad de la educación pública, los nuevos métodos educativos, la necesidad de volver al estudio de las humanidades o la falta de disciplina en las aulas españolas. Sin embargo, en pocas de estas discusiones se analizan con profundidad las claves de los sistemas educativos más eficientes. Y tampoco se suelen abordar cuestiones que están fuera del debate políticamente correcto habitual.

Las conclusiones están orientadas en la misma dirección: hay que dar más autonomía a colegios, padres y profesores.

Tabla 2: *El top 10 de PISA* (Fuente: Rafael Pampillón, Economy WebLog)

El top 10 de PISA 2009			
	Comprensión lectora	Competencia matemática	Competencia científica
Media de la OCDE	**493**	**496**	**501**
Shanghái	556	600	575
Corea	539	546	538
Finlandia	536	541	554
Honk Kong	533	555	549
Singapur	526	562	542
Canadá	524	527	529
Nueva Zelanda	521	519	532
Japón	520	529	539
Australia	515	514	527
Países Bajos	508	526	522

España sigue contando con muy pocos alumnos en los niveles más altos de resultados (divididos en seis): un 3% de los estudiantes comparado con el 8% de media de la OCDE. Sin embargo, en los niveles más bajos, lo que se podría considerar un suspenso, el porcentaje del 20% de alumnos es similar al de la media de la OCDE.

En cuanto a los resultados por Comunidades Autónomas, en la parte alta de mejores resultados están Madrid, Castilla y León y Cataluña, y en la más baja, Andalucía, Baleares y Canarias.

En el lado positivo, el informe refleja un sistema muy homogéneo, en el que las diferencias de resultados entre alumnos dependen en un 4% de la comunidad autónoma donde se viva y en un 20% del centro en el que se estudie. Es decir, que las mayores diferencias de resultados, un 70%, se dan dentro del mismo centro.

Ahora los resultados de la comunidad de Castilla y León (Ver tabla 3):

Tabla 3 *Resultados*

(Fuente: www.educa.jcyl.es/es/temas/calidad-evaluacion /evaluacion-educativa/pisa-castilla-leon)

	Alumnos	Centros
Total países participantes	475.460	17.145
España	25.887	889
Castilla y León	**1.515**	**51**

Nivel de confianza de 95% (muestra representativa del universo)

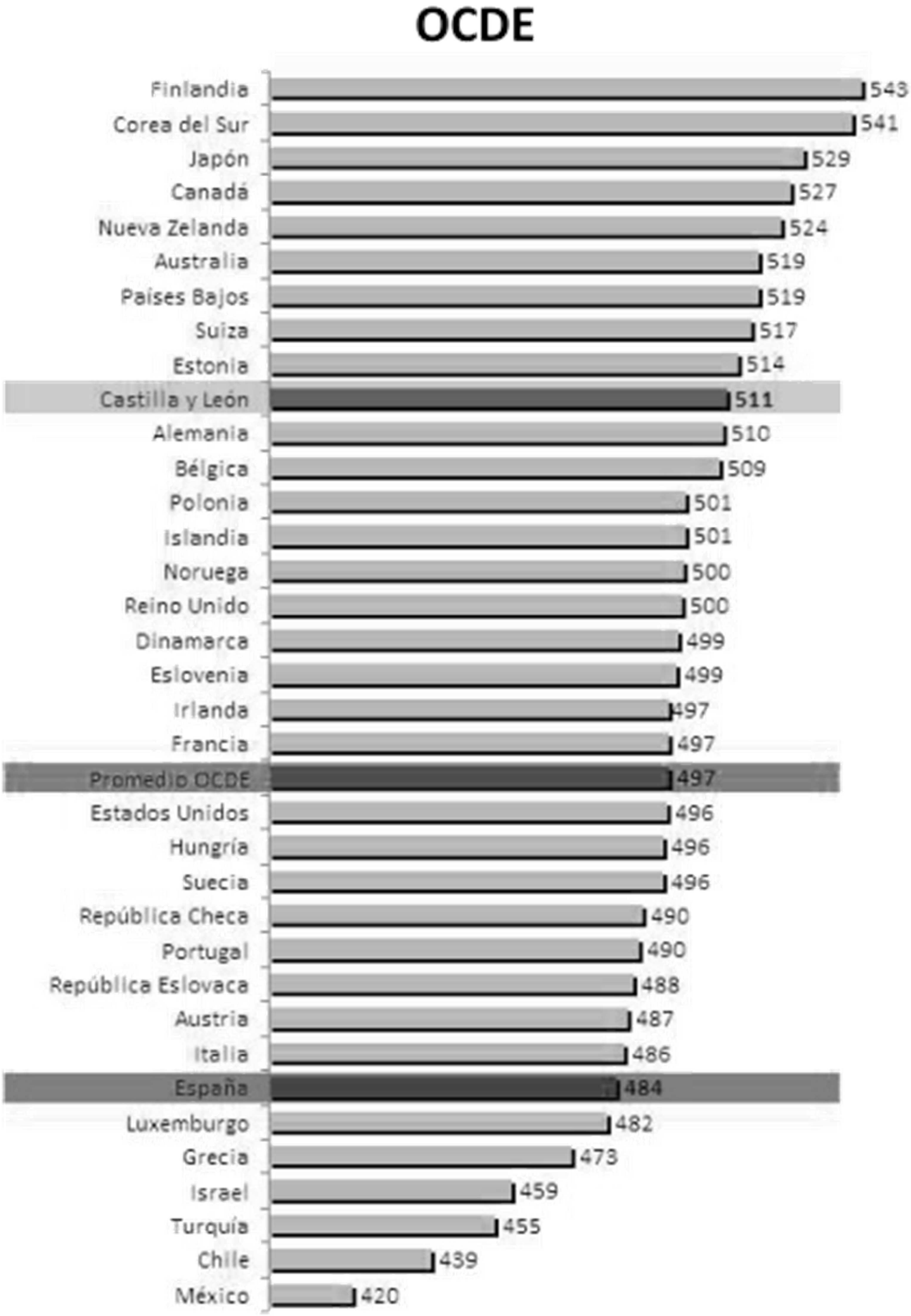
Existen ciertas peculiares que excluyen a diversos alumnos:

- Alumnos escolarizados en centros muy pequeños con menos de 5 alumnos de 15 años.
- Discapacidad física o intelectual.
- Nivel muy limitado de dominio de la lengua en que se realiza la prueba, con menos de un año de instrucción.

De esta manera, los resultados obtenidos en esta comunidad son buenos, como vemos en la comparación global siguiente (Ver tabla 4):

Tabla 4: *Comparación Castilla y León con el resto de países*

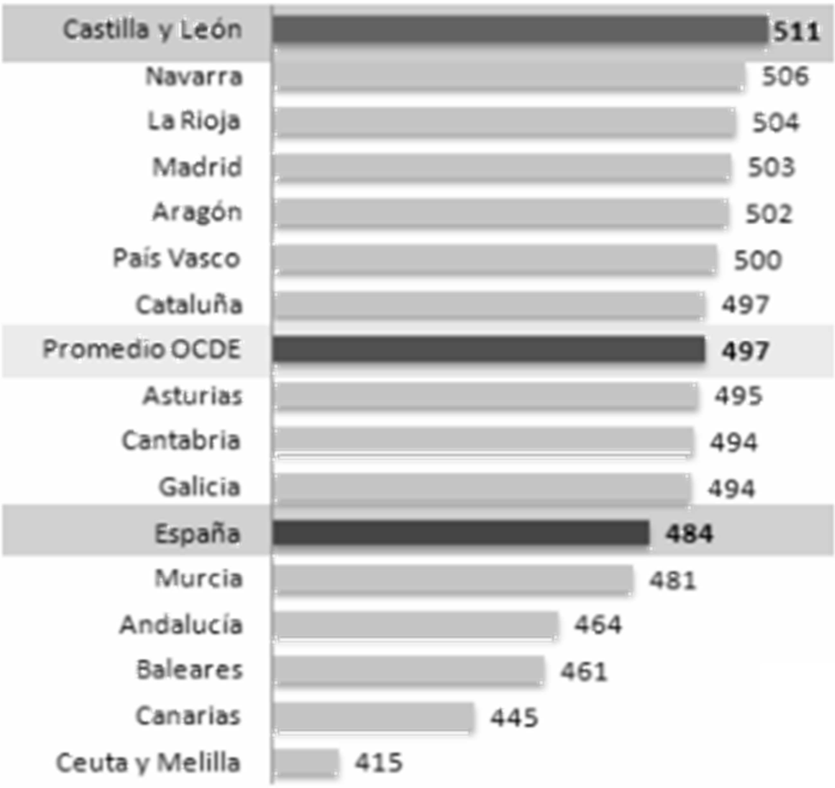
(Fuente: www.educa.jcyl.es/es/temas/calidad-evaluacion /evaluacion-educativa/pisa-castilla-leon)



Es el mejor resultado de las comunidades autónomas españolas (Ver tabla 5), por encima del promedio de la OCDE (14 puntos) y muy por encima del conjunto de España (27 puntos)

Tabla 5: *Resultados por comunidades*

(Fuente: www.educa.jcyl.es/es/temas/calidad-evaluacion /evaluacion-educativa/pisa-castilla-leon)



Además, de los datos que se ofrecen, sabemos que en esta comunidad se produce una mejora a lo largo de los años y que el nivel de los alumnos y las alumnas está diferenciado según la prueba, ya que ellas, obtienen mejores resultados en lectura y ellos en ciencias y matemáticas.

De las competencias que figuran en el real decreto 1513/2006, se consigue un mayor valor en el informe PISA, si tratamos la competencia lingüística, la matemática, en el conocimiento y la interacción con el mundo físico y, la última de ese orden, la competencia social y ciudadana.

Como se ha señalado, los resultados de Castilla y León son bastante buenos, tanto si se comparan con los del resto de Europa o a nivel por Comunidades Autónomas en España. Esto nos puede indicar que el trabajo que se está realizando es bueno, pero no lo suficiente, aún se puede mejorar, potenciando los puntos comentados anteriormente, en especial, para la asignatura de matemáticas, para la que se ha realizado el presente trabajo.

1.5 Planteando una nueva metodología

"*Un buen profesor tiende a usar estrategias de aprendizaje y a mostrárselas a sus alumnos en su método de enseñanza*". Nisbet y Shucksmith (1986) (p. 81).

¿Por qué dice esto el autor? Según los estudios de Schallert y Kleiman (1979) (Citado por Nisbet y Shucksmith en la p. 81), quienes observaron las características de los profesores cuyos alumnos obtenían mejores resultados académicos, revelaron las siguientes características de las que son capaces:

- Adaptar, lo que intentan enseñar, al nivel de comprensión de los estudiantes.
- Relacionar hechos relevantes a través de recordarles tópicos o ideas relacionadas con la tarea con la que se trabaja.
- Centrar la atención en los hechos relevantes, importantes o necesarios y desechen o no tengan en cuenta lo superfluo.
- Controlar la comprensión de la tarea mediante el método socrático, tales como generalizaciones parciales, ejemplos contrarios y verificación de la realidad, tratando de que los estudiantes obtengan estas tácticas.

Respecto de la primera, se puede decir que si los estudiantes obtienen malos resultados, se debe a que son incapaces de comprender total o parcialmente lo que se les propone, mientras que existe otro grupo de alumno más aventajados que son capaces de realizar la tarea aunque no consigan entender que es lo que se pretende con ella. El grupo deseable es el de aquellos alumnos que realizan la tarea y además entiende el por qué de la misma, siendo capaces de buscar ayuda con aquellas tareas que no logran comprender, consiguiendo de esa manera controlar la situación.

Y seguimos con las estrategias descritas por Baron (1978) (p. 44) a la hora de realizar una jerarquía, estableció tres que las englobaban a las demás. La segunda característica de la que hablan Schallert y Kleiman está englobada por la "*investigación conexa*" que habla Baron. La tercera es el "*análisis de estímulos*" y la cuarta es la de "*verificación*".

Es decir, se tendrá que poder transmitir las estrategias a los alumnos, ya sea de una manera intencionada explícitamente o no. La tercera característica de la que se habló antes, consiste en la realización de diversas preguntas y poner a prueba, de esta forma, los puntos débiles, permitiendo al estudiante darse cuenta de lo que necesita aprender, repasar o estudiar de nuevo. Esta es la estrategia basada en la autointerrogación, autodiagnosis y autocorrección que, supuestamente, tienen ya adquirida los docentes.

Es por eso que procuramos que los alumnos incorporen dichas estrategias, pero para conseguirlo, es necesario que adquieran previamente la autorregulación, que es la que se encarga de estos procesos.

¿Cómo se consigue? Meichenbaum y Goodman (1971) (p. 115-126) han desarrollado trabajos de "*entrenamiento en autoinstrucciones*" con la finalidad de que los estudiantes sean capaces de regular su propia conducta para actuar de una manera más eficaz en las diferentes situaciones que se den. Consiste en enseñarles a emplear respuestas mediadoras que ejemplifiquen una "*estrategia general*" para controlar su conducta.

El proceso para que los estudiantes consigan el "*entrenamiento autoinstruccional*" se realiza en los siguientes pasos:

- *Modelado cognitivo*: Un adulto realiza una tarea mientras se habla a sí mismo en voz alta.
- *Guía externa-manifiesta*: El estudiante realiza la misma tarea bajo la dirección de las instrucciones del modelo.
- *Autoguía manifiesta*: El estudiante realiza la tarea mientras se da instrucciones a sí mismo (en voz alta).
- *Autoguía manifiesta atenuada*: El estudiante repite subvocalmente las instrucciones mientras avanza en la tarea.
- *Autoinstrucción encubierta*: El estudiante realiza la tarea mientras guía su actuación de forma encubierta.

En síntesis el adulto modela estrategias de:

- Definición del problema: "¿Qué tengo que hacer?".
- Focalización de la atención: "¿Cómo lo voy a hacer?".
- Autorrefuerzo: "Cómo lo estoy haciendo" ("Bien,…", "regular,…").
- Habilidades de autodominio de la auto-evaluación: ("¡Esto va bien, incluso si cometo un error vuelvo a intentarlo, no pasa nada!").

Siguiendo este guión, nos encontramos que la metodología ha de buscar las siguientes "*situaciones*", empleando la clasificación de Light (1983) (Citado por Nisbet y Shucksmith (1986) (p. 84)):

- "***Situación didáctica*** *en la que se supone que el niño aprende observando cómo el experimentador realiza la tarea*". La más común en el aula.
- "***Situación de diálogo*** *en la que el niño realiza la tarea, pero se pide que describa y explique las acciones que lleva a cabo, simulando al estadio intermedio de la transición que hemos expuesto anteriormente*".
- ***Situación de acción*** *que se basa en el aprendizaje por descubrimiento o aprendiendo por el ejercicio sin estructuración.*

Se descarta el uso de la "*situación de acción*" que se basa en que el profesor realiza la tarea sin descripción alguna. La transmisión de conocimientos es más fácil si se realiza a través del lenguaje.

La metodología buscada es aquella que estimule el aprendizaje de estrategias, logrando una regulación de las mismas mediante la metacognición a través de la competencia de "aprender a aprender", que se base en la autointerrogación.

2. ACTUACIÓN

Seguidamente, se realizará una explicación del trabajo llevado a cabo durante dos meses de la realización del Practicum en el master de profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en un centro de Burgos, contando la metodología que se propone a partir de las experiencias y teorías de diversos autores que se describió previamente.

2.1 Introducción

Las prácticas se realizaron en un centro de Burgos, en el curso de 2º de Bachillerato y concretamente en la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales. También se impartieron clases en 2º de Bachillerato en la especialidad de Ciencia y Tecnología.

Se decidió realizar el trabajo cuasiexperimental en el bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales por el ambiente general, ya que el temario era más propicio para el trabajo de resolución de problemas. Se tuvo que tener en cuenta la diversidad, pues en la clase había un alumno de origen chino que tenía algunos problemas con el idioma.

El estudio consiste en una fase previa en la que se verá el tipo de estrategias que emplean los alumnos de ambas clases, para ver si hay diferencias significativas entre ambas clases o si los que emplean unas determinadas estrategias van por un lado u otro.

La segunda parte del estudio se realiza íntegramente en la clase de Humanidades y consta de un cuestionario inicialen el que se pretende ver qué tipo de conocimientos tienen sobre los nuevos temas que se impartían en dicha clase a lo largo del temario en esos dos meses, que fueron un total de tres temas relacionados con la estadística como veremos en las siguientes hojas.

Después de esto, se realizará el auténtico procedimiento planteado, que consiste en el material que se adjunta en el Anexo IV y en el que se explica a los alumnos el temario de una manera diferente.

2.2 Empleo de estrategias

Objetivos:

1.- Conocer los estilos de aprendizaje de los alumnos de 2º de bachillerato a los que se impartió clase en el centro.

2.- Conocer las estrategias de aprendizaje de los alumnos de 2º de bachillerato a los que se impartió clase en el centro.

3.- Ver si existen diferencias significativas entre el grupo de intervención con metodología de aprender a aprender y el grupo de no intervención en el uso de las estrategias de aprendizaje.

Hipótesis:

1.- Existen diferencias en el estilo de aprendizaje dependiendo de la rama de Bachillerato elegida entre la especialidad de Ciencias y Tecnología y la de Humanidades y Ciencias de la Salud.

2.- Existen diferencias en el uso de estrategias de aprendizaje antes-después de la intervención entre el grupo de intervención y el de no intervención.

Método:

Se trabajó con una muestra de diez (10) alumnos de segundo curso de Bachillerato, cinco (5) en el de Bachillerato de Ciencias y Tecnología y otros cinco (5) en el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales. Los datos que se extraen son: Existen dos grupos “a” y “b”, siendo el “a” = “Humanidades y Ciencias de la Salud” y el “b” = “Ciencias y Tecnología”. n=10, de los cuales el 60% eran hombres y el 40% mujeres, el intervalo de edad fue de 17 a 20 años y la media de edad de 18 años; todos los alumnos son del mismo colegio comentado en el apartado “2. ACTUACIÓN”, durante el curso 2010-2011.

La participación de los estudiantes fue voluntaria y anónima.

Diseño:

Diseño cuasiexperimental, sin grupo de control (siguiendo la clasificación de Campbell y Stanley (1978)).

Instrumentos de Evaluación

El análisis consiste en que los alumnos de ambas clases, realizasen dos cuestionarios sobre el uso de estrategias (Son los que presenta el Anexo I y el Anexo II).

El primero (Ver Anexo I) es el cuestionario diseñado por Honey, Alonso y Gallego sobre las estrategias de aprendizaje que posee 80 preguntas que se tienen que contestar con sí o no. Con este test, sabremos cuál de los cuatro estilos principales emplean. Estas son sus características:

- *Activo*: Ser alguien animador, descubridor, improvisador y espontaneo.
- *Reflexivo*: Concienzudo, analítico, observador, e investigador.
- *Teórico*: Metódico, lógico, objetivo, panificado y estructurado.
- *Pragmático*: Práctico, eficaz, realista y decidido.

El segundo test que se utilizó es el de la Escala de estrategias de aprendizaje (ACRA) de Román y Gallego (1996) (Ver Anexo II). Dicha escala, identifica 32 estrategias de aprendizaje referidas a los distintos momentos de procesamiento de la información: Adquisición de información (estrategias atencionales y de repaso) (20 preguntas), Codificación de la información (nemotecnias, organización y elaboración) (46 preguntas), Recuperación de la información (búsqueda y generación de respuesta) (18 preguntas), Metacognición (autoconocimiento, planificación y regulación y evaluación) (15 preguntas) y de Apoyo al Procesamiento (autoinstrucciones, autocontrol, contradistractoras, interacciones sociales, motivación intrínseca y extrínseca y motivación de escape) (20 preguntas).

En el Anexo III Se muestran los resultados generales obtenidos para ambos test mediante unas tablas. En el primero de ellos, indica el mayor o menor uso de cada grupo (Se presentan ordenadas de mayor a menor) y el segundo indica el grado de adquisición, para cada uno de los alumnos, de cada escala de estrategias.

En esta investigación se analizaron las dos últimas escalas, en las que las puntuaciones máximas por escalas son:

- En Apoyo al Procesamiento: autoinstrucciones=20, autocontrol=4, contradistractoras=12, interacciones sociales=16, motivación intrínseca y extrínseca=16 y motivación de escape=4.
- Metacognición: autoconocimiento=24, planificación=16 y regulación y evaluación=24.

La fiabilidad del instrumento presenta, por escalas, un alfa de Cronbach: Escala de adquisición α =.78; Escala de Codificación: α =.92; Escala de Recuperación α =.83 y Escala de Apoyo y Metacognición: α =.90.

Variables

Las variables independientes asignadas fueron: la rama de especialización de Ciencias y Tecnología vs Humanidades y Ciencias Sociales, de una muestra de estudiantes de 2º de Bachillerato de un colegio de Burgos.

Las variables dependientes fueron las puntuaciones de los sujetos en las escalas de estrategias de apoyo al procesamiento y metacognitivas del ACRA.

Se muestran los estadísticos descriptivos y los porcentajes de adquisición de las estrategias.

Proceso

Con este estudio, se pretende ver si existen diferencias significativas entre el empleo de estrategias entre los alumnos de Humanidades y los de Ciencias.

El problema reside en el número de alumnos que hay en cada clase, que es un total de cinco para cada una de las clases.

Esto supone, que sin realizar el estudio, será muy difícil que haya diferencias significativas entre ambos grupos, debido al bajo número de individuos y a la alta variabilidad de los datos, a no ser que la tendencia de ambos grupos esté fuertemente marcada.

Resultados

Tabla 6: *Medias, Desviaciones Típicas y porcentajes de adquisición de las estrategias de aprendizaje de apoyo al procesamiento por titulaciones y generales.*

Estrategias de Apoyo al procesamiento	Grupos	Media	Porcentaje de adquisición de la estrategia	DT	N
	Ciencias y T.	12,8	64,00 %	2,95	5
Autoinstrucciones	Humanidades	12,4	62,00 %	1,34	5
	TOTAL	12,6	63,00 %	2,17	10
	Ciencias y T.	1,8	45,00 %	0,84	5
Autocontrol	Humanidades	1,8	45,00 %	0,45	5
	TOTAL	1,8	45,00 %	0,63	10
	Ciencias y T.	6,8	56,67 %	3,49	5
Contradistractoras	Humanidades	5,8	48,33 %	1,48	5
	TOTAL	6,3	52,50 %	2,58	10
	Ciencias y T.	10,8	67,50 %	2,77	5
Interacciones Sociales	Humanidades	9,4	58,75 %	1,67	5
	TOTAL	10,1	63,13 %	2,28	10
	Ciencias y T.	9,2	57,50 %	2,59	5
Motivación intrínseca y extrínseca	Humanidades	9,2	57,50 %	1,92	5
	TOTAL	9,2	57,50 %	2,15	10
	Ciencias y T.	2,4	60,00 %	1,14	5
Motivación y escape	Humanidades	2,8	70,00 %	1,30	5
	TOTAL	2,6	65,00 %	1,17	10

Tabla 7: *Medias, Desviaciones Típicas y porcentajes de adquisición de las estrategias de aprendizaje metacognitivas por titulaciones y en general.*

Estrategias de Apoyo al procesamiento	Grupos	Media	Porcentaje de adquisición de la estrategia	DT	N
Autoconocimiento	Ciencias y T.	18,20	75,83 %	3,56	5
	Humanidades	16,60	69,17 %	3,36	5
	TOTAL	17,40	72,50 %	3,46	10
Automanejo. Planificación	Ciencias y T.	11,00	68,75 %	5,15	5
	Humanidades	9,80	61,25 %	2,17	5
	TOTAL	10,40	65,00 %	3,66	10
Automanejo. Regulación y evaluación	Ciencias y T.	13,80	57,50 %	1,10	5
	Humanidades	13,00	54,17 %	3,61	5
	TOTAL	13,40	55,83 %	2,36	10

Técnicas de análisis de datos

En función de los datos de la muestra y de las hipótesis planteadas, la investigación se sitúa en un diseño antes-después. La técnica de análisis de datos empleada fue una t de student para factor de efectos fijos: grupo (tipo de Bachillerato). Todos los cálculos se efectuaron con el paquete estadístico SPSS en su versión 18.

Conclusiones

A partir de los datos se demuestra que no existen diferencias significativas en el uso de estrategias de aprendizaje entre ambos grupos.

El tamaño muestral adecuado para analizar los datos (atendiendo a la desviación típica) es igual a nueve (9) en cada grupo.

Tienen un grado medio en el empleo de este tipo de estrategias de aprendizaje, siendo aconsejable el desarrollo de estas.

2.3 Trabajo en el aula

Lo que se pretende en este caso es poner en práctica lo enunciado en la parte teórica del presente trabajo. Para eso, como ya se adelantó, se impartió el temario de estadística de una forma diferente. El proceso que se siguió, fue el siguiente:

- Explicación, de forma resumida, de la teoría, contando lo necesario para avanzar en el tema pues será en los problemas donde quedará más claro.
- Poner en práctica dicha teoría mediante problemas, que se realizan, mediante autopreguntas, en voz alta recordando parte de la teoría y si es necesario, hacerles anotar esquemas o algoritmos de resolución. Resaltando que no copien la solución pues estará presente en los problemas resueltos, siendo necesario que copien las ideas esenciales para ellos que les ayuden a resolverlo.
- Que ellos resuelvan, bien en el cuaderno o en la pizarra, al alumno que toque, otro problema similar para que lo resuelvan de la misma manera, mediante los algoritmos enseñados y recordarles las mismas autopreguntas o ideas principales.
- Se les proporciona los problemas resueltos presentes en el Anexo IV para que los lean y los trabajen con otros problemas semejantes.
- Realizar varios problemas más para afianzar los conocimientos.

El esquema de realización de los problemas que se les entrega a los alumnos es:

- Problema, con el enunciado en cursiva
- Proceso de resolución:
    - ¿Qué nos piden?
    - Conocimientos previos. (¿Qué se necesita saber para poder resolver dicho problema?)
    - ¿Cómo podemos resolverlo?

El problema, se define en la sentencia, ésta debe de ser lo más clara y explícita para que la comprensión del mismo sea lo más posible.

El proceso de resolución, consta de los tres pasos comentados anteriormente.

1º ¿Qué nos piden? ó ¿Cuál es el problema?

En este paso es necesario que se lea el problema con atención, e incluso, que se le divida en pasos pequeños con el fin de poder extraer de él los datos relevantes y qué es lo que tenemos que solucionar.

2º ¿Qué conocimientos previos implica el problema?

Hace referencia a los conocimientos que son necesarios para poder resolver adecuadamente el problema.

3º ¿Cómo se puede resolver?

Se procede al modelo de resolución del problema, paso a paso, comentando aspectos de la teoría, e incluso, planteando nuevas preguntas que se transforman en nuevos problemas dentro del inicial. Además, se incluyen algoritmos, esquemas, etc. y se hace referencia a las estrategias de aprendizaje necesarias para resolverlo.

Objetivos

Lo que se pretendía con estos problemas es que los alumnos dispusieran de la resolución completa de los mismos, indicando, de esa manera las ideas o procesos esenciales para conseguir la resolución de los problemas.

En los problemas está incorporada la metodología de aprender a aprender, fomentan así dicha competencia.

La referencia del profesor hace que los alumnos consigan trabajar de una manera más óptima la resolución de problemas.

También pueden utilizar diversos recursos, ya sean en soporte informáticos o en papel, como por ejemplo el libro de texto del aula.

Al tenerlos entre sus manos, pueden consultarlos cuando les surja cualquier tipo de duda a la hora de realizar otros problemas.

Analicemos uno de los problemas para comprobarlo y tenerlo más claro:

Figura 1: *Enunciado*

Problema 1 → Combinatoria

Joselillo va a tener tres exámenes en el mismo día para la segunda evaluación. Como es previsor sabe que tendrá que empezar a estudiar pronto, pero no sabe por cuál empezar, así que decide colocar los apuntes en su mesa de estudio. Sabiendo que las asignaturas son las de álgebra, biología y cálculo, de cuántas maneras se pueden ordenar en la mesa de estudio.

La figura 1, indica la sentencia del problema, la cual, está formulada mediante elementos cercanos que puedan comprender e incluso utilizar.

Figura 2: *Paso 1 del proceso de resolución*

Proceso de resolución

1) ¿Qué nos piden?

Leemos el enunciado, y de él extraemos que tenemos que colocar 3 objetos en un lugar, en este caso, apuntes en una mesa, y se nos pide que de cuántas maneras podemos colocarlas.

Aquí comienza el proceso de resolución. Primero decimos que leemos el enunciado extrayendo de él los datos relevantes. Por último, vemos que nos pide. (Ver Figura 2)

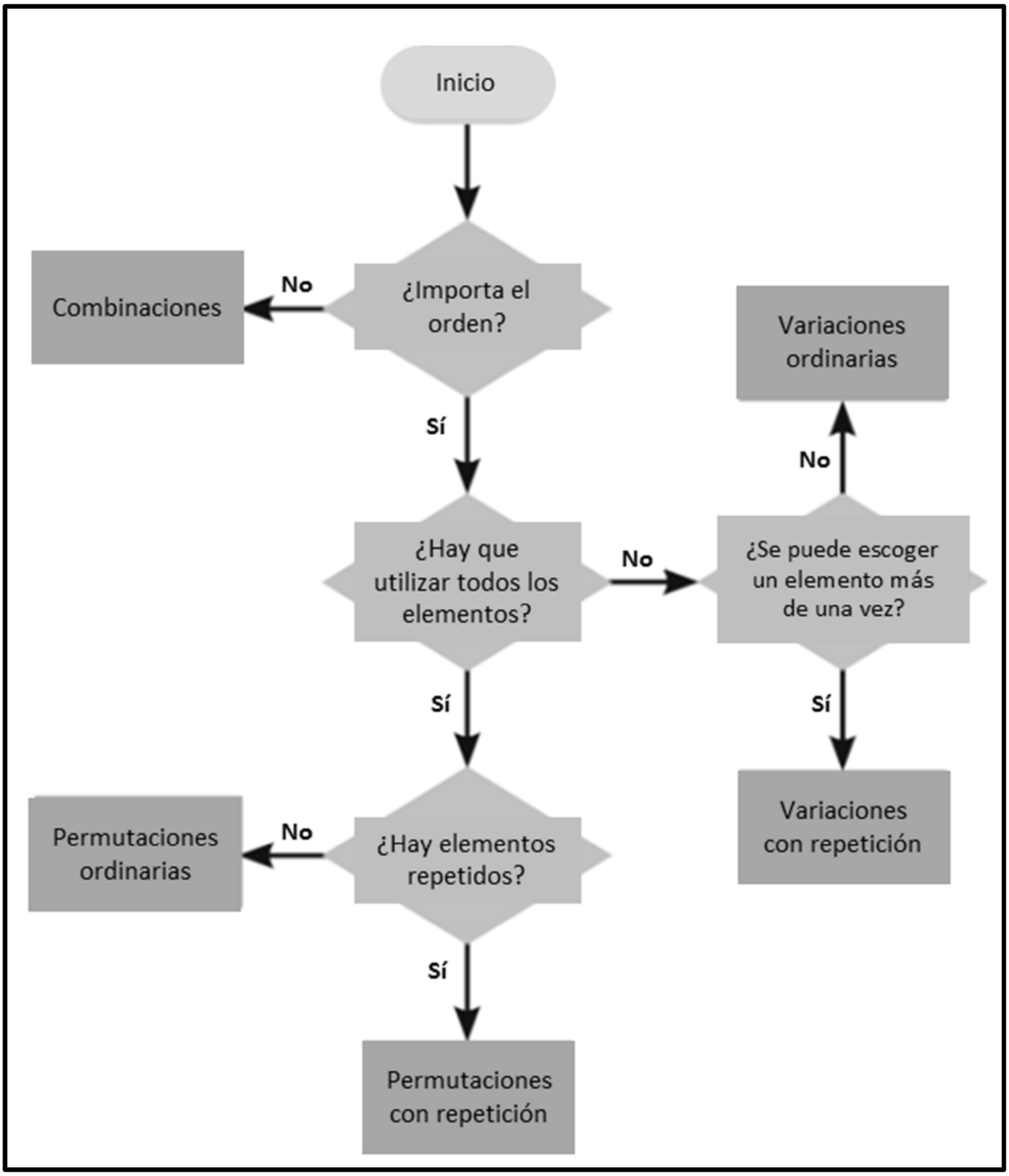
Figura 3: *Paso 2 del proceso de resolución*

2) Conocimientos previos

Necesitamos identificar de qué tipo es, para así resulte más sencilla la forma de resolución. Para lograr esto, nos hacemos de un esquema general que incluya todos los casos que hemos estudiado (No deja de ser un algoritmo de resolución para este tipo de problemas). Para no repetir la teoría, se pondrá según se resuelva el problema.

Este es el esquema del que hablábamos:

Figura 4: *Continuación del paso 2 del proceso de resolución*



En este apartado vemos la parte teórica. Aquí se muestra el esquema (Ver Figura 4) o algoritmo para resolver este tipo de problemas. Normalmente, parte de la teoría (Ver Figura 3) se desarrolla a lo largo del proceso de resolución.

Figura 5: *Paso 3 del proceso de resolución*

3) ¿Cómo podemos resolverlo?

Vamos a realizar el ejercicio de dos formas diferentes. Comencemos con la primera:

Vamos al esquema general para saber en qué caso estamos:

Iniciamos el proceso con "*¿Importa el orden?*".

En este caso, vemos que el orden **SI** afecta al resto, no es lo mismo estudiar cálculo, después álgebra y por último biología, porque al mirar una célula, tras tantos números, pensaríamos que estamos en "matrix".

Proseguimos con las preguntas. La siguiente es "*¿Hay que utilizar todos los elementos?*"

Aunque quizás, nosotros al ver que tenemos tres exámenes, posiblemente dejásemos alguno, Joselillo está decidido, al menos de momento, a sacar y estudiar los apuntes con bastante antelación, para aprovechar el mucho o poco tiempo que disponga, en los siguientes días antes de los exámenes. Por lo que **SI** se emplean todos los elementos.

La última pregunta que nos hacemos es "*¿Hay elementos repetidos?*"

La verdad es que esperemos que Joselillo no se tenga que estudiar dos veces la misma asignatura, al menos de lo que se deduce del enunciado. En él, sólo tiene que colocar las tres asignaturas, entonces, **NO** hay elementos repetidos.

Con todo esto, sabemos que el problema es de **permutaciones sin repetición** u ordinarias. Si hacemos un poco de memoria, sabemos que la ecuación de las permutaciones es:

$P_n = n!$ → En este caso "n" es igual a tres (n = 3) porque son 3 las asignaturas que hay que ordenar, con lo que queda:

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ → es decir, hay seis posibles formas de colocar los apuntes.

Esperemos que Joselillo haya estudiado y tenga suerte con los exámenes.

--- La segunda forma ---

Es algo menos formal, pero en las matemáticas, no es necesario saber un sinfín de fórmulas, sino, más bien, saber pensar en la manera de resolver un problema y así obtener la solución.

En principio se puede elegir cualquiera de los 3 apuntes para colocar en primer lugar:

A → Álgebra

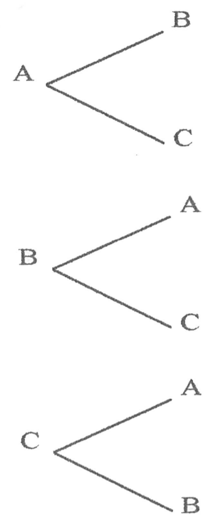
B → Biología

C → Cálculo

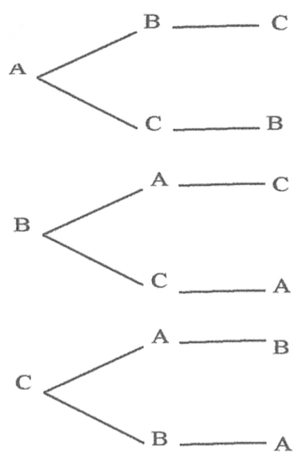
1ª	2ª	3ª
A		
B		
C		

Figura 6: *Continuación del paso 3 de resolución*

Una vez elegido uno de ellos, para ocupar el primer lugar, quedan 2 posibles para ubicar



Se ve entonces que hasta ahora hay 3 · 2 maneras distintas de ordenarlos. Pero una vez dispuestos las 2 primeros queda unívocamente determinado cuál debe ser el tercero.



O sea que el número total de maneras posibles de ordenar los 3 libros se puede calcular como: 3 · 2 · 1 = 6

Como vemos no hace falta conocer la fórmula para obtener el resultado, porque este caso era lo suficientemente sencillo debido al pequeño **diagrama en árbol** que se genera.

En las dos últimas figuras (Ver Figura 5 y Figura 6), se muestra el desarrollo paso a paso la resolución. Al inicio del primero de los dos recuadros, se inicia la explicación del esquema y cómo usarlo y a lo largo del mismo, las fórmulas necesarias. En el segundo, se muestra otra forma de resolverlo. Gran parte de ellos tiene dos formas de resolverlo, y así ampliar los recursos de los alumnos.

Cuestionarios

Para comprobar el avance de los alumnos a lo largo de un nuevo tema, se realiza un pequeño test inicial y a lo largo del tema se comprueban ciertos aspectos. Las preguntas que realizan son las siguientes:

- *Conocimientos sobre el tema*: Se contesta con "Sí" o "No" y pretende ver si los estudiantes conocen o recuerdan cosas del tema
- *¿De dónde?*: Si la pregunta anterior es contestada de forma afirmativa, han de contestar de dónde proceden tales conocimientos.
- *¿Cuánto?*: Se pretende que digan el grado de conocimiento previo que poseen, en una escala de 0 a 5 (Al final de las preguntas se procederá a realizar una breve explicación de tal graduación).
- *¿Reconocen su utilidad?*: Esta pregunta es un claro indicador de la motivación inicial hacia el tema que presentan los alumnos. En caso de que estos no vean la utilidad del tema no prestarán suficiente atención y, de esa manera, no trabajaran el tema con la profundidad que se merece. Pueden tener diferentes tipos de "utilidad", como aprobar, buenas notas,…
- *¿Saben utilizarlo?*: Puede que los alumnos reconozcan su utilidad, ya sea para aprobar selectividad o para que sus padres no les castiguen, pero que sepan utilizar los conocimientos adquiridos es más complejo. Indica el grado de adquisición de los conceptos.
- *Capacidad para seguir la clase*: Se realiza mediante la observación de los alumnos en clase, analizando sus reacciones o preguntas tras la explicación del temario.

- *Interés por el tema*: Al igual que la anterior, es por observación. Se atiende a aspectos como las ganas de hacer ejercicios, salidas al aula de informática para profundizar,…
- *Participación*: Está relacionada con el interés, pero aquí se pretende analizar la motivación del alumno por realizar ejercicios en la pizarra o bien ayudar a sus compañeros en las explicaciones.
- *Trabajo del tema*: Aquí se atiende al trabajo en clase y en casa, es decir, si realizan la tarea y se saben la teoría.
- *Conocimientos finales*: Es a juicio del profesor, tras el trabajo en clase y las repuestas que dan los alumnos. Es diferente a la nota del examen pero suele estar relacionada.
- *Nota examen*: Es la nota que se obtiene en el examen al final del tema. Este examen consta de preguntas de teoría y problemas semejantes a los tratados en clase. La nota varía de 0 a 10.

Para la pregunta de "¿Cuánto?", relacionada con los conocimientos previos, la puntuación de 0 a 5 implica que si no se sabe nada del tema se coloque un 0 y si se sabe todo, pues un 5, los valores intermedios depende del grado de conocimiento respecto del tema. Para el resto de preguntas, las puntuaciones son las mismas, es decir, nada sería cero y todo un cinco.

Resultados

Estos son los datos que se recogieron tras la impartición de los respectivos temas de estadística (Combinatoria, Probabilidad 1 y Probabilidad 2) en la clase de 2º de Bachillerato de Humanidades y Ciencias de la Salud.

Tabla 8: *Test del Tema de Combinatoria*

Codificación alumno	6	7	8	9	10
Conocimientos previos sobre el tema	Sí	Sí	No	Sí	Sí
De dónde	1ºBach	1ºBach	-	1ºBach	1ºBach
Cuánto	2	2	0	3	4
Reconocen su utilidad	2	0	1	2	3
Saben utilizarlos	4	1	3	3	4
Capacidad para seguir la clase	3	2	1	4	4
Interés por el tema	2	0	2	4	3
Participación	2	1	1	5	5
Trabajo del tema	4	3	2	5	5
Conocimientos finales	4	2	2	3	3
Nota examen	8	3	5	5	7

Tabla 9: *Test del Tema de Probabilidad 1*

Codificación alumno	6	7	8	9	10
Conocimientos previos sobre el tema	Sí	Sí	No	Sí	Sí
De dónde	1ºBach	1ºBach	-	1ºBach	1ºBach
Cuánto	2	1	0	3	3
Reconocen su utilidad	3	3	2	3	4
Saben utilizarlos	3	2	3	4	4
Capacidad para seguir la clase	2	1	1	3	4
Interés por el tema	2	2	3	3	3
Participación	3	2	3	3	5
Trabajo del tema	3	2	4	4	5
Conocimientos finales	3	2	2	4	4
Nota examen	5	4	5	7	6

Tabla 10: *Test del Tema de Probabilidad 2*

Codificación alumno	6	7	8	9	10
Conocimientos previos sobre el tema	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
De dónde	Prob. 1	Prob. 1	Prob. 1	Prob. 1	Prob. 1
Cuánto	1	0	1	1	1
Reconocen su utilidad	1	1	1	1	1
Saben utilizarlos	2	2	1	2	2
Capacidad para seguir la clase	4	3	3	5	4
Interés por el tema	2	2	3	3	3
Participación	4	2	3	5	5
Trabajo del tema	5	3	4	4	5
Conocimientos finales	4	3	4	5	5
Nota examen	4	3	8	9	8

Información que muestran los cuestionarios

No se ha realizado ningún análisis estadístico ya que la variabilidad es muy grande y tenemos un tamaño de muestra pequeño, pero la información que se extrae de las tablas es:

- Ser capaz de seguir la clase, tener interés por el tema, participar y trabajar adecuadamente el tema, indica que los conocimientos finales de los alumnos son elevados.
- Los conocimientos finales no están relacionados con la nota del examen, aunque afecta de manera positiva.
- Los alumnos no reconocen la utilidad de los temas.
- Los alumnos saben utilizar los nuevos conocimientos dentro un determinado contexto, fuera de él, les resulta más complejo, incluso en ciertas ocasiones, imposible.

Propuestas

Es recomendable que este estudio se realice en diferentes materias para ver la evolución de los alumnos según las materias y aplicar a tales al empleo de las estrategias de aprendizaje.

El otro punto relevante es que se debe de ampliar el estudio a más aulas de la ciudad o de la provincia, siendo de esa manera, un estudio más completo y sujeto a menos variabilidad, permitiendo ver, de esa manera, las debilidades de los alumnos desde la perspectiva de las estrategias de aprendizaje.

3. CONCLUSIÓN

Los aspectos más relevantes que se han detectado tras la finalización del presente trabajo, son:

- Los alumnos son más conscientes de como plantear la resolución de problemas al tener presente los esquemas o algoritmos de resolución descritos verbalmente de forma escrita.
- Con todo lo anterior, se aprecia que ciertos alumnos tienen mayores dificultades para iniciar los esquemas o los algoritmos de resolución en determinados problemas. Los posibles motivos pueden ser debidos a la falta de aplicación al enfrentarse a los problemas o por un trabajo insuficiente para el grado de dificultad que presenta el tema que se trata.
- Falta de motivación, promovida por conseguir unos buenos resultados en la selectividad, debido a que procuran realizar lo mínimo para conseguir aprobar o por comprender la resolución, mostrando cierta reticencia, en ciertos casos, al cambio de metodología que se les presentaba.
- Siguiendo lo anterior, existe una cierta descoordinación entre el resto de las asignaturas, puesto que el trabajo se ralentizaba por los continuos exámenes de las diferentes materias, haciendo pensar que es mejor concentrarlos en una semana cada cuatro o cinco semanas, sirviendo esta de repaso y resolución de dudas, ya que los alumnos no están acostumbrados a trabajar varios exámenes a la vez y realizar una planificación con ese fin.
- Los valores del uso de las estrategias es relativamente bueno, siendo debida a la buena preparación que tenían estos alumnos, pero, como todo, es mejorable, en especial en alguna de ellas.

- Debido a la corta duración del planteamiento de la nueva metodología, no se aprecian grandes cambios en la forma de actuar de los alumnos, pero tras terminarlas, sí que pedían esquemas o algoritmos, desarrollados como los desarrollados en el aula, al antiguo profesor. Esto, hace pensar que si se hubiera trabajado un poco más, hubieran sido los alumnos quienes los hubieran realizado por sí mismos.

4. BIBLIOGRAFÍA

Aguilar, L. & Díaz, A. (1988). La problemática de las estrategias: La transferencia. *Revista de la educación superior*

Alcántara, M. D. (2009). Importancia de las competencias básicas en el currículo. *Innovación y experiencias educativas. Nº 16. Marzo 2009*. Obtenido 28 de abril de 2011 de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_16/DOLORES_ALCANTARA_1.pdf

Alonso, C. M., Gallego, D. J. & Honey, P. (1994). *Cuestionario Honey-Alonso de Estilos de Aprendizaje (CHAEA).* En www.estilosdeaprendizaje.es/chaea/chaea.htm. Visitada el 10-05-2011.

Baron, J. (1978). *Intelligence and general strategies.* London: Academic Press

Boyatzis R. E. (1982). *The competent manager: A model for effective performance.* New York: John Wiley & Sons.

Brandt, M. (1998). *Estrategias de evaluación*. Barcelona: Herder.

Campbell, D. T. y Stanley, J. C. (1978). *Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la experimentación social.* Buenos aires: Amorrortu.

Claxton, G. (1990). *Teaching to learn*. London: Cassell.

De Ansorena, A. (1996). *15 pasos para la selección de personal con éxito*. Barcelona: Paidós.

Dearden, R. F. (1976). *Problem in Primary Education*. London: Routledge & Kegan Paul.

Flavell, J. (1976). *Metacognitive aspects of problem solving*. Resnick: The nature of intelligence.

Hirst, P. (1965). *Liberal education and the nature of knowledge*. Archanmbaul: Philosophical analysis and education.

Justicia, F. (1996). Metacognición y currículum. En J. Beltrán y C Genovard (eds.), *Psicología de la instrucción I. Variables y procesos básicos,* 359-381. Madrid: Síntesis.

Light, P. (1983). *Social interaction and cognitive development: A review of Post-Piagetian Research.* London: Methuen.

Martínez-Salanova, E. (1999). *La motivación en el aprendizaje*. Extraído de http://www.uhu.es/cine.educacion/didactica/0083motivacion.htm

Nisbet, J. & Shucksmith J. (1986). *Learning startegies*. London: Routledge & Kegan Paul.

Phenix, P. (1964). *Realms of meaning*. New York: McGraw-Hill.

Román, J. M. & Gallego, S. (1996). *Escala de estrategias de aprendizaje (ACRA)*. Madrid. TEA ediciones.

Schallert, D. L. & Kleiman G. M. (1979). Some reason why the teacher is easier understands than a textbook, *Reading Education Report Series*. Illinois: University of Illinois.

Spencer L. M. & Spencer, S. (1993). *Competence at work: models for superior performance.* New York: Wiley & Sons.

Tabberer, R. & Allman, J. (1983). *Introducing Study Skill: An appraisal of initiatives at 16+.* Windsor: NFER-Nelson.

Tapia, J. A. (1998). *Motivación y aprendizaje en el aula: Cómo enseña a pensar.* Madrid: Santillana.

Weinstein, C. E. y Mayer, R. E. (1985). *The teaching of learning strategies*. Nueva York: MacMillan.

Wellman, H. M. (1977). Preschoolers' Understanding of Memory-relevant. *Child development.* San Francisco: Freeman

Woodruffe, C. (1993). *What is meant by a competency? Leadership and Organization Development Journal*, 14 (1), pp.29-36.

Recursos web

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. De la página web: http://www.boe.es/aeboe/consultas/bases_datos/doc.php?id=BOE-A-2006-7899. Obtenido el 30-04-2011.

- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. De la página web: http://www.boe.es/aeboe/consultas/bases_datos/doc.php?id=BOE-A-2007-238. Obtenido el 30-04-2011.

- Decreto 42/2008, de 5 de Junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. De la página web: http://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/d-42-2008-5-06-establece-curriculo-bachillerato-comunidad-c. Obtenido el 30-04-2011.

- Competencias en los reales decretos y en los diferentes currículos de las comunidades. De la página web: www.competenciasbasicas.com. Obtenido el 02-05-2011.

- Página web de la OECD, que es la responsable del Programa de evaluación de alumnos internacionales (PISA). Página principal: http://www.pisa.oecd.org/pages/0,3417,en_32252351_32235731_1_1_1_1_1,00.html

4. ANEXOS

Anexo I

Cuestionario Honey-Alonso de Estilos de Aprendizaje

Instrucciones:

- Este cuestionario ha sido diseñado para identificar su Estilo preferido de Aprendizaje. No es un test de inteligencia , ni de personalidad
- No hay límite de tiempo para contestar al Cuestionario. No le ocupará más de 15 minutos.
- No hay respuestas correctas o erróneas. Será útil en la medida que sea sincero/a en sus respuestas.
- Si está más de acuerdo que en desacuerdo con el ítem seleccione 'Mas (+)'. Si, por el contrario, está más en desacuerdo que de acuerdo, seleccione 'Menos (-)'.
- Por favor conteste a todos los items.
- El Cuestionario es anónimo.

Más(+)	Menos(-)	**Ítem**
		1. Tengo fama de decir lo que pienso claramente y sin rodeos.
		2. Estoy seguro lo que es bueno y lo que es malo, lo que está bien y lo que está mal.
		3. Muchas veces actúo sin mirar las consecuencias.
		4. Normalmente trato de resolver los problemas metódicamente y paso a paso.
		5. Creo que los formalismos coartan y limitan la actuación libre de las personas.
		6. Me interesa saber cuáles son los sistemas de valores de los demás y con qué criterios actúan.
		7. Pienso que el actuar intuitivamente puede ser siempre tan válido como actuar reflexivamente.
		8. Creo que lo más importante es que las cosas funcionen.
		9. Procuro estar al tanto de lo que ocurre aquí y ahora.
		10. Disfruto cuando tengo tiempo para preparar mi trabajo y realizarlo a conciencia.
		11. Estoy a gusto siguiendo un orden, en las comidas, en el estudio, haciendo ejercicio regularmente.
		12. Cuando escucho una nueva idea en seguida comienzo a pensar cómo ponerla en práctica.

		13. Prefiero las ideas originales y novedosas aunque no sean prácticas.
		14. Admito y me ajusto a las normas sólo si me sirven para lograr mis objetivos.
		15. Normalmente encajo bien con personas reflexivas, analíticas y me cuesta sintonizar con personas demasiado espontáneas, imprevisibles.
		16. Escucho con más frecuencia que hablo.
		17. Prefiero las cosas estructuradas a las desordenadas.
		18. Cuando poseo cualquier información, trato de interpretarla bien antes de manifestar alguna conclusión.
		19. Antes de tomar una decisión estudio con cuidado sus ventajas e inconvenientes.
		20. Me crezco con el reto de hacer algo nuevo y diferente.
		21. Casi siempre procuro ser coherente con mis criterios y sistemas de valores. Tengo principios y los sigo.
		22. Cuando hay una discusión no me gusta ir con rodeos.
		23. Me disgusta implicarme afectivamente en mi ambiente de trabajo. Prefiero mantener relaciones distantes.
		24. Me gustan más las personas realistas y concretas que las teóricas.
		25. Me cuesta ser creativo/a, romper estructuras.
		26. Me siento a gusto con personas espontáneas y divertidas.
		27. La mayoría de las veces expreso abiertamente cómo me siento.
		28. Me gusta analizar y dar vueltas a las cosas.
		29. Me molesta que la gente no se tome en serio las cosas.
		30. Me atrae experimentar y practicar las últimas técnicas y novedades.
		31. Soy cauteloso/a a la hora de sacar conclusiones.
		32. Prefiero contar con el mayor número de fuentes de información. Cuantos más datos reúna para reflexionar, mejor.
		33. Tiendo a ser perfeccionista.
		34. Prefiero oír las opiniones de los demás antes de exponer la mía.
		35. Me gusta afrontar la vida espontáneamente y no tener que planificar todo previamente.

		36. En las discusiones me gusta observar cómo actúan los demás participantes.
		37. Me siento incómodo con las personas calladas y demasiado analíticas.
		38. Juzgo con frecuencia las ideas de los demás por su valor práctico.
		39. Me agobio si me obligan a acelerar mucho el trabajo para cumplir un plazo.
		40. En las reuniones apoyo las ideas prácticas y realistas.
		41. Es mejor gozar del momento presente que deleitarse pensando en el pasado o en el futuro.
		42. Me molestan las personas que siempre desean apresurar las cosas.
		43. Aporto ideas nuevas y espontáneas en los grupos de discusión.
		44. Pienso que son más consistentes las decisiones fundamentadas en un minucioso análisis que las basadas en la intuición.
		45. Detecto frecuentemente la inconsistencia y puntos débiles en las argumentaciones de los demás.
		46. Creo que es preciso saltarse las normas muchas más veces que cumplirlas.
		47. A menudo caigo en la cuenta de otras formas mejores y más prácticas de hacer las cosas.
		48. En conjunto hablo más que escucho.
		49. Prefiero distanciarme de los hechos y observarlos desde otras perspectivas.
		50. Estoy convencido/a que debe imponerse la lógica y el razonamiento.
		51. Me gusta buscar nuevas experiencias.
		52. Me gusta experimentar y aplicar las cosas.
		53. Pienso que debemos llegar pronto al grano, al meollo de los temas.
		54. Siempre trato de conseguir conclusiones e ideas claras.
		55. Prefiero discutir cuestiones concretas y no perder el tiempo con charlas vacías.
		56. Me impaciento con las argumentaciones irrelevantes e incoherentes en las reuniones.
		57. Compruebo antes si las cosas funcionan realmente.

		58. Hago varios borradores antes de la redacción definitiva de un trabajo.
		59. Soy consciente de que en las discusiones ayudo a los demás a mantenerse centrados en el tema, evitando divagaciones.
		60. Observo que, con frecuencia, soy uno de los más objetivos y desapasionados en las discusiones.
		61. Cuando algo va mal, le quito importancia y trato de hacerlo mejor.
		62. Rechazo ideas originales y espontáneas si no las veo prácticas.
		63. Me gusta sopesar diversas alternativas antes de tomar una decisión.
		64. Con frecuencia miro hacia adelante para prever el futuro.
		65. En los debates prefiero desempeñar un papel secundario antes que ser el líder o el que más participa.
		66. Me molestan las personas que no siguen un enfoque lógico.
		67. Me resulta incómodo tener que planificar y prever las cosas.
		68. Creo que el fin justifica los medios en muchos casos.
		69. Suelo reflexionar sobre los asuntos y problemas.
		70. El trabajar a conciencia me llena de satisfacción y orgullo.
		71. Ante los acontecimientos trato de descubrir los principios y teorías en que se basan.
		72. Con tal de conseguir el objetivo que pretendo soy capaz de herir sentimientos ajenos.
		73. No me importa hacer todo lo necesario para que sea efectivo mi trabajo.
		74. Con frecuencia soy una de las personas que más anima las fiestas.
		75. Me aburro enseguida con el trabajo metódico y minucioso.
		76. La gente con frecuencia cree que soy poco sensible a sus sentimientos.
		77. Suelo dejarme llevar por mis intuiciones.
		78. Si trabajo en grupo procuro que se siga un método y un orden.
		79. Con frecuencia me interesa averiguar lo que piensa la gente.
		80. Esquivo los temas subjetivos, ambiguos y poco claros.

Anexo II

Test 2: *Escala de estrategias de aprendizaje (ACRA)*

Este test se divide en cuatro escalas:

- **Adquisición de información**: Ayuda al alumno a conocer como debe adquirir la información necesaria para el estudio.
- **Codificación de información**: Informa de cómo se deben diferenciar las ideas principales y secundarias de un texto.
- **Recuperación de la información**: Expone los mecanismos necesarios para recuperar la información almacenada anteriormente.
- **Apoyo de la información**: Qué medios y condiciones van a ayudar a la mejora del estudio.

A continuación el alumno debe realizar dicho test, el cuál se debe contestar del siguiente modo:

Las preguntas que se realizan deben ser contestadas de la siguiente manera:

- Si **NUNCA o CASI NUNCA** se hace lo que se pregunta, hay que poner **A**.
- Si **ALGUNA VEZ** se hace lo que se pregunta, hay que poner **B**.
- Si **BASTANTES VECES** se hace lo que se pregunta, hay que poner **C**.
- Si **SIEMPRE** se hace lo que se pregunta, hay que poner **D**.

ESCALA I: ESTRATEGIA DE ADQUISICIÓN DE INFORMACIÓN:

1. Antes de comenzar a estudiar leo el índice, o el resumen, o los apartados del material a aprender.	A B C D
2. Cuando voy a estudiar un material, anoto los puntos importantes que he visto en una primera lectura superficial para obtener más fácilmente una visión de conjunto.	A B C D
3. Al comenzar a estudiar una lección, primero la leo toda por encima.	A B C D
4. A medida que voy estudiando, busco el significado de las palabras desconocidas, o de las que tengo dudas de su significado.	A B C D
5. En los libros, apuntes u otro material a aprender, subrayo en cada párrafo las palabras, datos o frases que me parecen más importantes.	A B C D
6. Utilizo signos (admiraciones, asteriscos, dibujos…), algunos de ellos sólo inteligibles por mí, para resaltar aquellas informaciones de los textos que considero especialmente importantes.	A B C D
7. Hago uso de lápices o bolígrafos de distintos colores para favorecer el aprendizaje.	A B C D
8. Empleo los subrayados para facilitar la memorización.	A B C D
9. Para descubrir y resaltar las distintas partes de que se compone un texto largo, lo subdivido en varios pequeños mediante anotaciones, títulos y epígrafes.	A B C D
10. Anoto palabras o frases del autor, que me parecen	A B C D

significativas, en los márgenes de libros, artículos, apuntes, o en hoja aparte.	
11. Durante el estudio, escribo o repito varias veces los datos importantes o más difíciles de recordar.	A B C D
12. Cuando el contenido de un tema es denso y difícil vuelvo a releerlo despacio.	A B C D
13. Leo en voz alta, más de una vez, los subrayados, esquemas, etc…, hechos durante el estudio.	A B C D
14. Repito la lección como si estuviera explicándosela a un compañero que no la entiende.	A B C D
15. Cuando estudio trato de resumir mentalmente lo más importante.	A B C D
16. Para comprobar lo que voy aprendiendo de un tema, me pregunto a mí mismo apartado por apartado.	A B C D
17. Aunque no tenga que hacer un examen, suelo pensar y reflexionar sobre lo leído, estudiado, u oído a los profesores.	A B C D
18. Después de analizar un gráfico o dibujo de texto, dedico algún tiempo a aprenderlo y reproducirlo sin el libro.	A B C D
19. Hago que me pregunten los subrayados, esquemas, etc. hechos al estudiar un tema.	A B C D
20. Cuando estoy estudiando una lección, para facilitar la comprensión, descanso, y después la repaso para aprenderla mejor.	A B C D

ESCALA II: ESTRATEGIAS DE CODIFICACIÓN DE INFORMACIÓN

1. Cuando estudio hago dibujos, figuras, gráficos o viñetas para representar las relaciones entre ideas fundamentales.	A B C D
2. Para resolver un problema, empiezo por anotar con cuidado los datos y después trato de representarlos gráficamente.	A B C D
3. Cuando leo, diferencio los aspectos y contenidos importantes o principales de los accesorios o secundarios.	A B C D
4. Busco la "estructura del texto", es decir, las relaciones ya establecidas entre los contenidos del mismo.	A B C D
5. Reorganizo o llevo a cabo, desde un punto de vista personal, nuevas relaciones entre las ideas contenidas en un tema.	A B C D
6. Relaciono o enlazo el tema que estoy estudiando con otros que he estudiado o con los datos o conocimientos anteriormente aprendidos.	A B C D A B C D
7. Aplico lo que aprendo en unas asignaturas para comprender mejor los contenidos de otras.	A B C D
8. Discuto, relaciono o comparo con los compañeros los trabajos, esquemas, resúmenes o temas que hemos estudiado.	A B C D
9. Acudo a los amigos, profesores o familiares cuando tengo dudas en los temas de estudio o para intercambiar información.	A B C D
10. Completo la información del libro de texto o de los apuntes de clase acudiendo a otros libros, enciclopedias, artículos, etc.	A B C D
11. Establezco relaciones ente los conocimientos que me proporciona el estudio y las experiencias, sucesos o anécdotas de mi vida particular y social.	A B C D
12. Asocio las informaciones y datos que estoy aprendiendo	A B C D

con fantasías de mi vida pasada o presente.				
13. Al estudiar, pongo en juego mi imaginación, tratando	A	B	C	D
de ver, como en una película, aquello que me sugiere el				
tema.	A	B	C	D
14. Establezco comparaciones elaborando metáforas con				
las cuestiones que estoy aprendiendo (ej.: los riñones	A	B	C	D
funcionan como un filtro).				
15. Cuando los temas son muy abstractos, trato de buscar	A	B	C	D
algo conocido (animal, planta, objeto o suceso), que se				
parezca a lo que estoy aprendiendo.	A	B	C	D
16. Realizo ejercicios, pruebas o pequeños experimentos,				
etc., como aplicación de lo aprendido.	A	B	C	D
17. Uso aquello que aprendo, en la medida de lo posible,	A	B	C	D
en mi vida diaria.				
18. Procuro encontrar posibles aplicaciones sociales en los	A	B	C	D
contenidos que estudio.	A	B	C	D
19. Me intereso por la aplicación que puedan tener los				
temas que estudio a los campos laborales que conozco.	A	B	C	D
20. Suelo anotar en los márgenes de que lo que estoy				
estudiando (o en una hoja aparte) sugerencias o dudas	A	B	C	D
de lo que estoy estudiando.				
21. Durante las explicaciones de los profesores, suelo				
hacerme preguntas sobre el tema.				
22. Antes de la primera lectura, me planteo preguntas	A	B	C	D
cuyas respuestas espero encontrar en el material que				
voy a estudiar.				
23. Cuando estudio, me voy haciendo preguntas sugeridas	A	B	C	D
por el tema, a las que intento responder.				
24. Suelo tomar nota de las ideas del tutor, en los	A	B	C	D
márgenes del texto que estoy estudiando o en la hoja				
aparte, pero con mis propias palabras.	A	B	C	D
25. Procuro aprender los temas con mis propias palabras				
en vez de memorizarlos al pie de la letra.	A	B	C	D
26. Hago anotaciones críticas a los libros y artículos que				
leo, bien en los márgenes o en hojas aparte.	A	B	C	D
27. Llego a ideas o conceptos nuevos partiendo de los	A	B	C	D
datos, hechos o caos particulares que contiene el texto.				
28. Deduzco conclusiones a partir de la información que	A	B	C	D
contiene el tema que estoy estudiando.	A	B	C	D
29. Al estudiar, agrupo y clasifico los datos según criterios				
propios.	A	B	C	D
30. Resumo lo más importante de cada uno de los	A	B	C	D
apartados de un tema, de la lección o los apuntes.				
31. Hago resúmenes de lo estudiado al final de cada tema.	A	B	C	D
32. Elaboro los resúmenes ayudándome de las palabras o				
frases anteriormente subrayadas.	A	B	C	D
33. Hago esquemas de lo que estudio.				
34. Construyo los esquemas ayudándome de las palabras o				
frases subrayadas de los resúmenes hechos.	A	B	C	D
35. Ordeno la información a aprender según algún criterio				
lógico: causa-efecto, problema-solución, etc.	A	B	C	D
36. Cuando el tema objeto de estudio presenta la				
información organizada temporalmente (aspectos	A	B	C	D
históricos), la aprendo teniendo en cuenta esa				
secuencia temporal.	A	B	C	D
37. Si he de aprender distintos pasos para llegar a resolver				
un problema, utilizo diagramas para ayudar en la	A	B	C	D
captación de la información.				
38. Durante el estudio, o al terminar, diseño mapas	A	B	C	D
conceptuales para relacionar los conceptos de un tema.				
39. Para elaborar mapas conceptuales, me apoyo en las				

palabras clave subrayadas.				
40. Cuando tengo que hacer comparaciones o clasificaciones, utilizo cuadros.	A	B	C	D
41. Al estudiar alguna asignatura, utilizo diagramas en V, para resolver lo expuesto.	A	B	C	D
42. Dedico un tiempo de estudio a memorizar, sobre todo, los resúmenes, los esquemas, los mapas conceptuales, etc. es decir, a memorizar lo importante de cada tema.	A	B	C	D
43. Para fijar datos al estudiar, suelo utilizar "trucos" para que se me quede esa idea en la memoria.	A	B	C	D
44. Construyo "rimas" o "muletillas" para memorizar listados de conceptos.	A	B	C	D
45. Para memorizar, sitúo mentalmente los datos en lugares de un espacio muy conocido.	A	B	C	D
46. Aprendo nombres o términos no familiares elaborando una "palabra-clave" que sirva de puente entre el nombre conocido y el nuevo a recordar.	A	B	C	D

ESCALA III: ESTRATEGIAS DE RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN:

1. Antes de hablar o escribir, voy recordando palabras, dibujos que tienen relación con las "ideas principales" del material estudiado.	A	B	C	D
2. Previamente a hablar o escribir, utilizo palabras clave o muletillas que me ayuden a diferenciar las ideas principales y secundarias de lo que estudio.	A	B	C	D
3. Cuando tengo que exponer algo oralmente o por escrito, recuerdo dibujos, imágenes, etc. mediante las cuales elaboré la información durante el aprendizaje.	A	B	C	D
4. Antes de responder a un examen, recuerdo aquellos agrupamientos de conceptos (resúmenes, esquemas, etc.) hechos a la hora de estudiar.	A	B	C	D
5. Para cuestiones importantes, que me es difícil recordar, busco datos secundarios con el fin de poder acordarme de lo importante.	A	B	C	D
6. Me ayuda a recordar lo aprendido el evocar sucesos, episodios o claves, ocurridos durante la clase o en otros momentos del aprendizaje.	A	B	C	D
7. Me resulta útil acordarme de otros temas que guardan relación con lo que realmente quiero recordar.	A	B	C	D
8. Ponerme en situación mental y afectiva semejante a la vivida durante la explicación del profesor o en el momento del estudio, me facilita el recuerdo de la información importante.	A	B	C	D
9. A fin de recuperar mejor lo aprendido tengo en cuenta las correcciones y observaciones que los profesores hacen en los exámenes, ejercicios o trabajos.	A	B	C	D
10. Para recordar una información, primero la busco en mi memoria y después decido si se ajusta a lo que me han preguntado o quiero responder.	A	B	C	D
11. Antes de empezar a hablar o escribir, pienso y preparo mentalmente lo que voy a decir o escribir.	A	B	C	D
12. Intento expresar lo aprendido con mis propias palabras en vez de repetir literalmente o al pie de la letra lo que dice el libro o el profesor.	A	B	C	D
13. A la hora de responder un examen, antes de escribir, primero recuerdo, en cualquier orden, todo lo que puedo, luego lo ordeno y hago un esquema o guión y finalmente lo desarrollo punto por punto.	A	B	C	D
14. Cuando tengo que hacer una redacción libre sobre cualquier tema, voy anotando las ideas que se me ocurren, luego las ordeno y finalmente las redacto.	A	B	C	D
15. Al realizar un ejercicio o examen me preocupo de su presentación, orden, limpieza, márgenes.	A	B	C	D
16. Antes de realizar un trabajo escrito confecciono un esquema, guión o programa de los puntos a tratar.	A	B	C	D

17. Frente a un problema o dificultad considero, en primer lugar, los datos que conozco antes de aventurarme a dar una solución intuitiva.	A	B	C	D
18. Cuando tengo que contestar a un tema del que no tengo datos, genero una respuesta "aproximada" relacionando lo que ya sé de otros temas.	A	B	C	D

ESCALA IV: ESTRATEGIAS DE APOYO AL PROCESAMIENTO

1. He reflexionado sobre la función que tienen aquellas estrategias que me ayudan a ir centrando la atención en lo que me parece más importante.	A	B	C	D
2. He caído en la cuenta del papel que juegan las estrategias de aprendizaje que me ayudan a memorizar lo que me interesa, mediante repetición.	A	B	C	D
3. Soy consciente de la importancia que tienen las estrategias de elaboración, las cuales me exigen establecer distintos tipos de relaciones entre los contenidos del material de estudio (dibujos, gráficos, imágenes mentales, metáforas, …)	A	B	C	D
4. He pensado sobre lo importante que es organizar la información haciendo esquemas, secuencias, mapas conceptuales, etc.	A	B	C	D
5. He caído en la cuenta que es beneficioso (cuando necesito recordar información para un examen, trabajo, etc.) buscar en mi memoria dibujos, mapas conceptuales, etc. que elaboré al estudiar.	A	B	C	D
6. Soy consciente de lo útil que es para recordar informaciones en un examen, evocar anécdotas u otras cuestiones relacionadas o ponerme en la misma situación mental y afectiva de cuando estudiaba el tema.	A	B	C	D
7. Me he parado a reflexionar sobre cómo preparo la información que voy a poner en un examen oral o escrito (redacción, presentación…).	A	B	C	D
8. Planifico mentalmente aquellas estrategias que creo me van a ser más eficaces para "aprender" cada tipo de material que tengo que estudiar.	A	B	C	D
9. En los primeros momentos de un examen programo mentalmente aquellas estrategias que pienso me van a ayudar a "recordar" mejor lo aprendido.	A	B	C	D
10. Antes de hincar el estudio, distribuyo el tiempo de que dispongo entre todos los temas que tengo que aprender.	A	B	C	D
11. Tomo nota de las tareas que he de realizar en cada asignatura.	A	B	C	D
12. Cuando ser acercan los exámenes establezco un plan de trabajo estableciendo el tiempo a dedicar a cada tema.	A	B	C	D
13. Dedico a cada parte del material a estudiar un tiempo proporcional a su importancia o dificultad.	A	B	C	D
14. A lo largo del estudio voy comprobando si las estrategias de "aprendizaje" que he preparado me funcionan, es decir, si sin eficaces.	A	B	C	D
15. Al final de un examen, valoro o compruebo si las estrategias utilizadas para recordar la información han sido válidas.	A	B	C	D
16. Cuando compruebo que las estrategias que utilizo para "aprender" no son eficaces, busco otras alternativas.	A	B	C	D
17. Voy reforzando o sigo aplicando aquellas estrategias que me han funcionado bien para recordar información en un examen, y elimino o modifico las que no me han servido.	A	B	C	D
18. Pongo en juego recursos personales para controlar mis estados de ansiedad cuando me impiden concentrarme en el estudio.	A	B	C	D
19. Imagino lugares, escenas o sucesos de mi vida para tranquilizarme y para concentrarme en el trabajo.	A	B	C	D
20. Sé autorrelajarme, autohablarme, autoaplicarme pensamientos positivos para estar tranquilo en los exámenes.	A	B	C	D
21. Me digo a mí mismo que puedo superar mi nivel de rendimiento actual (expectativas) en las distintas asignaturas.	A	B	C	D
22. Procuro que en el lugar que estudio no haya nada que pueda distraerme, como personas, ruidos, desorden, falta de luz y ventilación, etc.	A	B	C	D
23. Cuando tengo conflictos familiares, procuro resolverlos antes, si	A	B	C	D

puedo, para concentrarme mejor en el estudio.	
24. Si estoy estudiando y me distraigo con pensamientos o fantasías, los combato imaginando los efectos negativos de no haber estudiado.	A B C D
25. En el trabajo, me estimula intercambiar opiniones con mis compañeros, amigos o familiares sobre los temas que estoy estudiando.	A B C D
26. Me satisface que mis compañeros, profesores y familiares valoren positivamente mi trabajo.	A B C D
27. Evito o resuelvo, mediante el diálogo, los conflictos que surgen en la relación personal con compañeros, profesores o familiares.	A B C D
28. Para superarme me estimula conocer los logros o éxitos de mis compañeros.	A B C D
29. Animo y ayudo a mis compañeros para que obtengan el mayor éxito posible en las tareas escolares.	A B C D
30. Me dirijo a mí mismo palabras de ánimo para estimularme y mantenerme en las tareas de estudio.	A B C D
31. Estudio para ampliar mis conocimientos, para saber más, para ser más experto.	A B C D
32. Me esfuerzo en el estudio para sentirme orgulloso de mí mismo.	A B C D
33. Busco tener prestigio entre mis compañeros, amigos y familiares, destacando en los estudios.	A B C D
34. Estudio para conseguir premios a corto plazo y para alcanzar un status social confortable en el futuro.	A B C D
35. Me esfuerzo en estudiar para evitar consecuencias negativas, como amonestaciones, disgustos u otras situaciones desagradables en la familia, etc.	A B C D

Anexo III

Tabla 11: *Resultados del Test 1: Cuestionario Honey, Alonso y Gallego*

Grupo	Alumnos de Ciencias				
Cód. Alumno	1	2	3	4	5
1ª	Activo	Activo	Teórico	Pragmático	Teórico
2ª	Teórico	Teórico	Reflexivo	Activo	Pragmático
3ª	Reflexivo	Reflexivo	Pragmático	Teórico	Activo
4ª	Pragmático	Pragmático	Activo	Reflexivo	Reflexivo

Grupo	Alumnos de Humanidades				
Cód. Alumno	6	7	8	9	10
1ª	Activo	Reflexivo	Activo	Reflexivo	Teórico
2ª	Pragmático	Teórico	Teórico	Pragmático	Pragmático
3ª	Reflexivo	Activo	Reflexivo	Activo	Reflexivo
4ª	Teórico	Pragmático	Pragmático	Teórico	Activo

Tabla 12: *Resultados del Test 2: Escala de estrategias de aprendizaje (ACRA)*

		Alumnos de Ciencias				
	Cód. Alumno	1	2	3	4	5
Adquisición de la información	Puntuación I	53	56	38	44	39
	Porcentaje I	45 %	67 %	2 %	9 %	3 %
Codificación de la información	Puntuación II	120	143	101	100	90
	Porcentaje II	73 %	95 %	30 %	29 %	14 %
Recuperación de la información	Puntuación III	57	54	43	58	43
	Porcentaje III	70 %	57 %	17 %	75 %	17 %
Metacognición y apoyo al procesamiento	Puntuación IV	95	95	82	105	72
	Porcentaje IV	30 %	30 %	10 %	54 %	4 %

		Alumnos de Humanidades				
	Cód. Alumno	6	7	8	9	10
Adquisición de la información	Puntuación I	53	45	45	51	54
	Porcentaje I	45 %	10 %	10 %	30 %	50 %
Codificación de la información	Puntuación II	103	102	95	99	132
	Porcentaje II	34 %	32 %	21 %	26 %	88 %
Recuperación de la información	Puntuación III	37	40	35	43	55
	Porcentaje III	5 %	9 %	3 %	17 %	60 %
Metacognición y apoyo al procesamiento	Puntuación IV	88	80	69	81	99
	Porcentaje IV	17 %	9 %	3 %	9 %	40 %

Anexo IV

<u>Problema 1 → Combinatoria</u>

Joselillo va a tener tres exámenes en el mismo día para la segunda evaluación. Como es previsor sabe que tendrá que empezar a estudiar pronto, pero no sabe por cuál empezar, así que decide colocar los apuntes en su mesa de estudio. Sabiendo que las asignaturas son las de álgebra, biología y cálculo, de cuántas maneras se pueden ordenar en la mesa de estudio.

<u>Proceso de resolución</u>

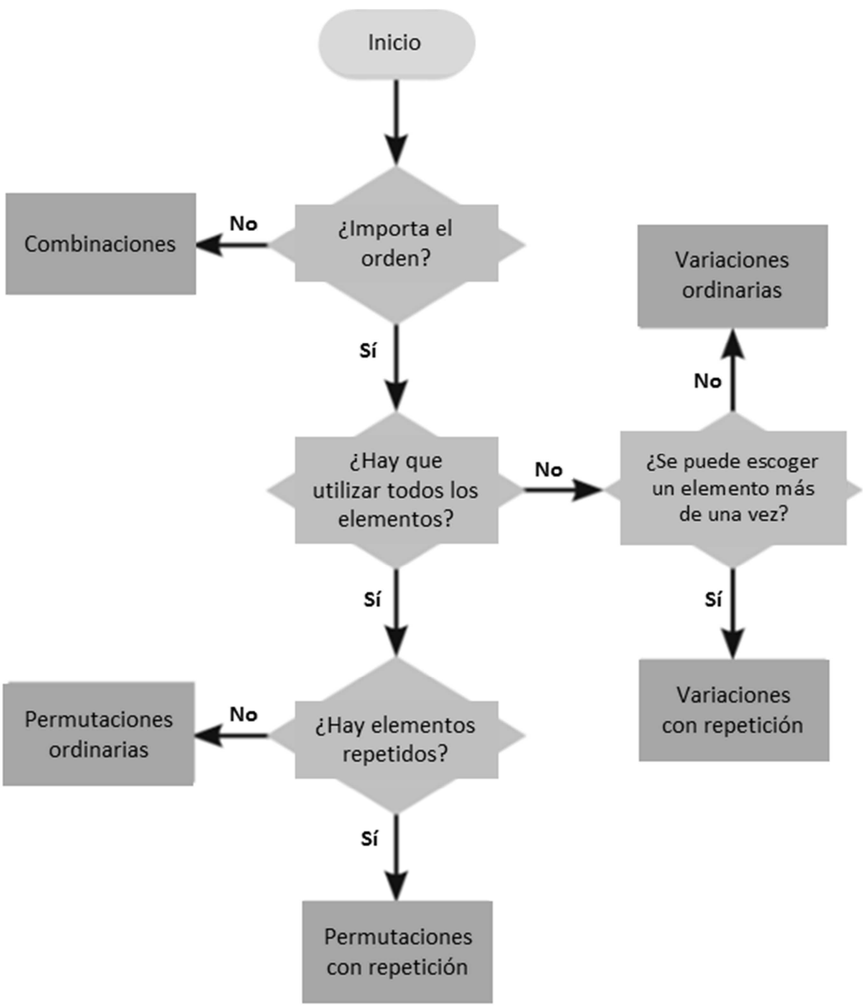
4) ¿Qué nos piden?

Leemos el enunciado, y de él extraemos que tenemos que colocar 3 objetos en un lugar, en este caso, apuntes en una mesa, y se nos pide que de cuántas maneras podemos colocarlas.

5) Conocimientos previos

Necesitamos identificar de qué tipo es, para así resulte más sencilla la forma de resolución. Para lograr esto, nos hacemos de un esquema general que incluya todos los casos que hemos estudiado (No deja de ser un algoritmo de resolución para este tipo de problemas). Para no repetir la teoría, se pondrá según se resuelva el problema.

Este es el esquema del que hablábamos:



6) ¿Cómo podemos resolverlo?

Vamos a realizar el ejercicio de dos formas diferentes. Comencemos con la primera:

Vamos al esquema general para saber en qué caso estamos:

Iniciamos el proceso con "*¿Importa el orden?*".

En este caso, vemos que el orden **SI** afecta al resto, no es lo mismo estudiar cálculo, después álgebra y por último biología, porque al mirar una célula, tras tantos números, pensaríamos que estamos en "matrix".

Proseguimos con las preguntas. La siguiente es "*¿Hay que utilizar todos los elementos?*"

Aunque quizás, nosotros al ver que tenemos tres exámenes, posiblemente dejásemos alguno, Joselillo está decidido, al menos de momento, a sacar y estudiar los apuntes con bastante antelación, para aprovechar el mucho o poco tiempo que disponga, en los siguientes días antes de los exámenes. Por lo que **SI** se emplean todos los elementos.

La última pregunta que nos hacemos es "*¿Hay elementos repetidos?*"

La verdad es que esperemos que Joselillo no se tenga que estudiar dos veces la misma asignatura, al menos de lo que se deduce del enunciado. En él, sólo tiene que colocar las tres asignaturas, entonces, **NO** hay elementos repetidos.

Con todo esto, sabemos que el problema es de **permutaciones sin repetición** u ordinarias. Si hacemos un poco de memoria, sabemos que la ecuación de las permutaciones es:

$P_n = n!$ → En este caso "n" es igual a tres (n = 3) porque son 3 las asignaturas que hay que ordenar, con lo que queda:

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ → es decir, hay seis posibles formas de colocar los apuntes.

Esperemos que Joselillo haya estudiado y tenga suerte con los exámenes.

--- La segunda forma ---

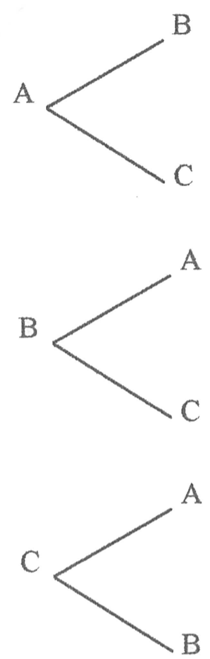
Es algo menos formal, pero en las matemáticas, no es necesario saber un sinfín de fórmulas, sino, más bien, saber pensar en la manera de resolver un problema y así obtener la solución.

En principio se puede elegir cualquiera de los 3 apuntes para colocar en primer lugar:

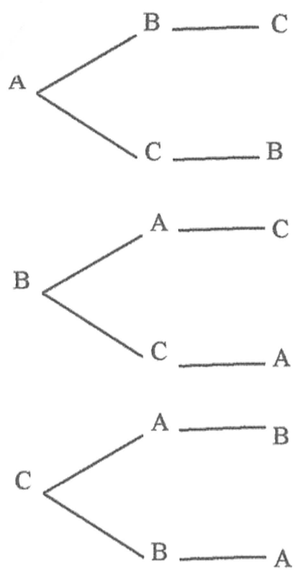
A → Álgebra
B → Biología
C → Cálculo

1^a	2^a	3^a
A		
B		
C		

Una vez elegido uno de ellos, para ocupar el primer lugar, quedan 2 posibles para ubicar



Se ve entonces que hasta ahora hay 3 · 2 maneras distintas de ordenarlos. Pero una vez dispuestos las 2 primeros queda unívocamente determinado cuál debe ser el tercero.



O sea que el número total de maneras posibles de ordenar los 3 libros se puede calcular como:
3 · 2 · 1 = 6

Como vemos no hace falta conocer la fórmula para obtener el resultado, porque este caso era lo suficientemente sencillo debido al pequeño diagrama en árbol que se genera.

Problema 2 → Combinatoria

María acaba de comprar siete poster de sus grupos de música favorita pero en su habitación sólo dispone de tres espacios en las que colocarlos. Ella desea saber de cuántas maneras distintas puede colocar los tres poster elegidos entre los siete recién comprados, suponiendo que no tenga razones para escoger alguno en especial, ya que todos la parecen igual de buenos.

Proceso de resolución

1) ¿Qué nos piden?

Tras realizar la lectura del enunciado, concluimos que nos pide que indiquemos de cuántas maneras diferentes se pueden colocar siete poster en tres paredes si sólo podemos colocar uno en cada pared.

2) Conocimientos previos

Al igual que en el caso anterior, también tenemos que identificar el caso en el que nos encontramos empleando el esquema general. Sabiéndolo, solo tendremos que aplicar la fórmula que empleamos en la resolución.

3) ¿Cómo podemos resolverlo?

De igual manera, también podemos realizar el ejercicio de dos maneras distintas. Empezaremos por la gráfica: (Representaremos cada poster comprado por un número)

Disponemos de tres paredes en las que colocar los poster:

Vamos a ver cuántos poster podemos colocar, vayamos paso a paso:

Para la primera, podemos elegir entre los siete poster.

En la segunda pared, disponemos sólo de seis poster, ya que hemos colocado uno en la primera pared.

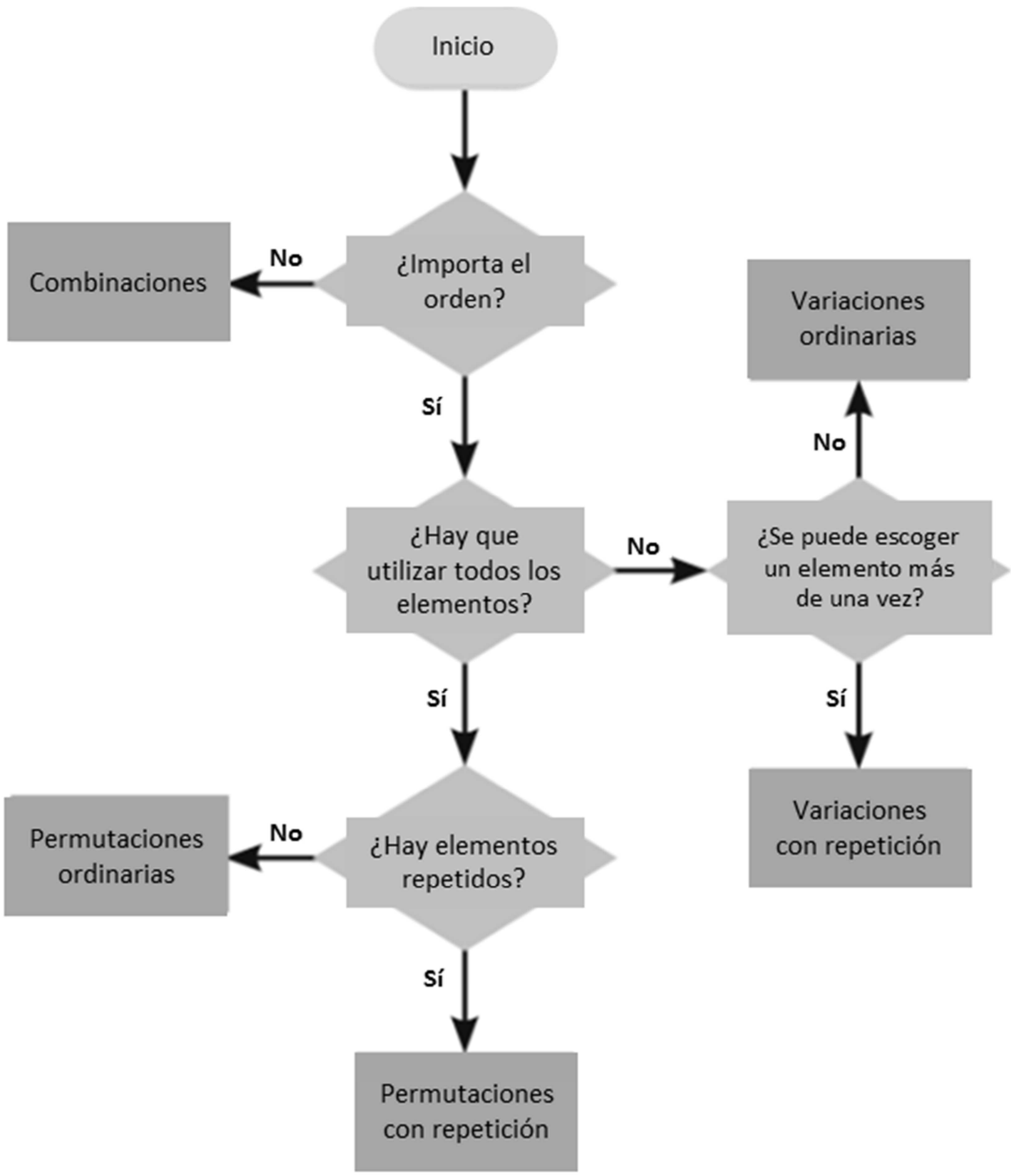
En la tercera y última pared, sólo nos quedan cinco poster porque hemos colocado ya dos en los pasos anteriores.

Resultando que:

$$P = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \quad \rightarrow formas\ distintas\ de\ colocar\ los\ poster$$

--- La segunda forma ---

Realicemos el ejercicio de una forma más formal. Hacemos un proceso para identificar cuál es el caso en el que estamos y así saber cuál es la fórmula que debemos aplicar.



Iniciamos el proceso con “*¿Importa el orden?*”.

En este caso, vemos que el orden **SI** afecta al resto, no es lo mismo colocar un poster enfrente de la cama que al lado de esta.

Proseguimos con las preguntas. La siguiente es “*¿Hay que utilizar todos los elementos?*”

Pues debido a que los poster son muy grandes sólo puede haber uno en cada una de las paredes. En este caso sólo podemos poner tres, por lo que **NO** usamos todos.

La última pregunta que nos hacemos es “*¿Se puede escoger un elemento más de una vez?*”

Aunque a María le gusten mucho sus grupos, no compra los poster repetidos para tener dos iguales en la habitación, al igual que tampoco podemos poner un poster en dos paredes, consecuentemente, **NO** hay elementos que se puedan escoger más de una vez.

Con todo esto, sabemos que el problema es de **variaciones sin repetición** u ordinarias. Si hacemos un poco de memoria, sabemos que la fórmula es:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot (m-n+1)$$

Donde m es el número de elementos y n las posibles variantes o lugar de colocación

$$V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Es decir, **hay 210 posibles formas de colocar los poster en la habitación.**

Esperemos que María pruebe todas las combinaciones porque estará mucho tiempo colocando los poster.

Problema 3 → Combinatoria

Debido al frío de los últimos días, gran parte de la plantilla del hospital Yagüe de Burgos está de baja, quedando tan sólo veintiuno. El problema es para realizar las guardias, ya que se necesitan a tres personas. Un médico se ha apostado con otro que no hay más de cien grupos posibles. ¿Quién ganará la apuesta?

Proceso de resolución

1) ¿Qué nos piden?

Leemos detenidamente el enunciado y extraemos lo principal:

- Hay 21 médicos
- Grupos de 3 en tres

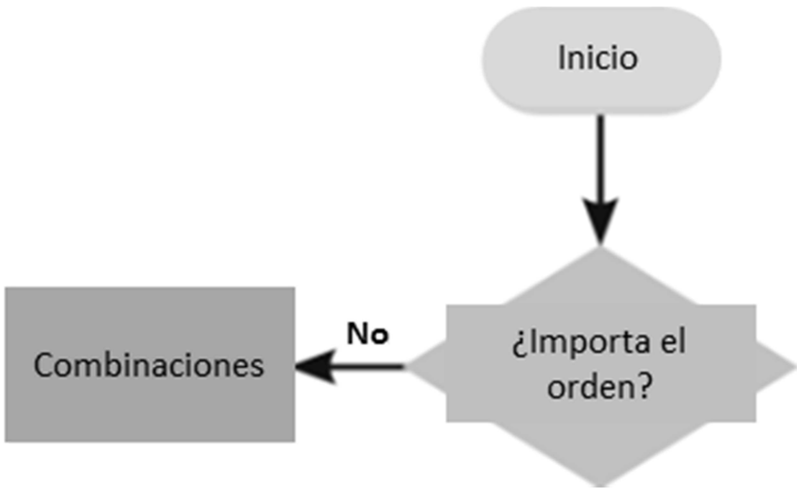
Nos pide que determinemos el número de grupos distintos con los 21 médicos estando estos agrupados de 3 en 3.

2) Conocimientos previos

Como en los anteriores si conocemos el caso en el que nos encontramos será mucho fácil resolver el problema. Para obtenerlo, con el esquema general.

3) ¿Cómo podemos resolverlo?

La pregunta inicial es ver si importa el orden. En este caso **NO** importa, porque el grupo formado por los médicos A, B, y C es el mismo que el formado por B, C y A (al igual que C,A,B; A,C,B; B,A,C o C,B,A), entonces sólo tenemos una opción, que es emplear las **combinaciones** y como sabemos que no se pueden repetir los elementos, es decir, que no se puede formar un grupo con el médico A tres veces (A,A,A), porque igual no puede con la presión y se da de baja por estrés, con lo que es ordinaria o sin repetición.



La fórmula es

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot (m-n+1)}{n\,!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

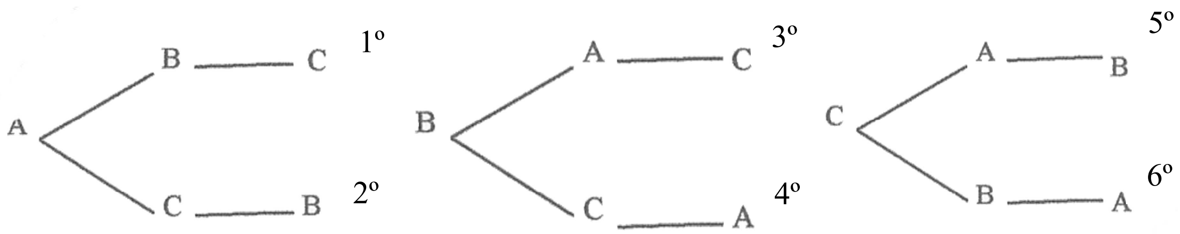
¿Qué quiere decir que es una variación sin repetición, entre una permutación sin repetición? Vamos a demostrarlo con el ejemplo que nos dan.

Si no importase el orden como en el ejemplo número dos, veamos los casos posibles, sabiendo que son 21 objetos y se pueden colocar en 3 lugares, es decir, sería:

$$V_{21,3} = 21 \cdot 20 \cdot 19 = 7.980$$

En el caso de sólo se empleasen 3 elementos, cómo sabríamos de cuantas formas se pueden colocar. Al igual que en el primer ejemplo, a través de las permutaciones.

Supongamos que son A, B y C. Los posibles grupos serían:



Es decir 6 grupos.

A través de la fórmula

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Juntándolo todo y aplicándolo a la de combinatoria

$$C_{21,3} = \frac{V_{21,3}}{P_3} = \frac{7.980}{6} = \frac{21!}{3! \cdot (21-3)!} = 1.330$$

Son posibles 1.330 grupos distintos los que se pueden formar.

Esperemos que a nuestro médico se le dé mejor la medicina que las apuestas, porque se ha equivocado por más de 1.200. ¿Cuánto dinero habrá perdido?

Problema 4 → Probabilidad

Se extrae una carta de una baraja española. Consideramos los siguientes sucesos:

- *A = "Salir una figura"*
- *B = "Salir un as"*
- *C = "Salir una carta del palo de espadas"*

a) ¿Son A y B incompatibles? Calcula P(A U B).
b) ¿Son A y C compatibles? Calcula P(A U C).

Proceso de resolución

1) ¿Qué nos piden?

Leemos detenidamente el enunciado y extraemos que tenemos que hallar la probabilidad de sacar figura, sacar as y sacar una del palo de espadas en una baraja española y, después, determinar si son incompatibles o no.

2) Conocimientos previos

Para resolver el ejercicio, antes tendremos que comprenderlo, y viene a decir que cogemos una carta de una bajara española.

Tenemos que saber que una baraja española está compuesta por 40 cartas diferentes, que se organizan en 4 palos (oros, copas, espadas y bastos) y en cada uno de ellos hay 10 cartas, que van desde el 1 (también llamado "**as**") a 7 y después sota, caballo y rey (a estas tres últimas se las denomina "**figuras**"). Desarrollémoslo:

- Oros: As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, Sota, Caballo y Rey (de oros)
- Copas: As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, Sota, Caballo y Rey (de copas)
- Espadas: As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, Sota, Caballo y Rey (de espadas)
- Bastos: As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, Sota, Caballo y Rey (de bastos)

En total, suman las cuarenta cartas de las que hablábamos al principio. Con esto, ya estamos dispuestos a resolver el problema. Lo haremos por partes, calculando cada suceso:

- → Suceso A: Hay tres figuras por palo y cuatro palos, por lo tanto hay 4 x 3 = 12 figuras en la baraja. La probabilidad será 12 / 40 (simplificando 3 / 10)
- → Suceso B: Hay un as por palo. De la solución simplificada anterior podemos escribirlo directamente 1 / 10 (o bien 4 / 40).
- → Suceso C: Hay 4 palos y queremos 1, luego la probabilidad es 1 / 4 (otra forma de escribirlo es que tenemos 10 cartas en el palo de espadas y 40 cartas en total, la probabilidad es 10 / 40 y simplificando da el mismo resultado 1 / 4)

Para hacer lo anterior hemos aplicado la **regla de Laplace** que se utiliza para hallar la probabilidad de un suceso y se define como:

$$P\ (A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

3) ¿Cómo podemos resolverlo?

Resolvemos ahora el apartado a):

- ¿Qué indica que “sean incompatibles”? Pues que el suceso no se pueda dar a la vez, por ejemplo con un dado, que sea impar y que se pueda dividir entre dos.
  Luego, en este caso, los sucesos son incompatibles ya que no se puede dar que salga figura y as a la vez.

  Al ser incompatible, la probabilidad de la unión es:

$$P\ (A\ \cap\ B) = P\ (A) + P(B)$$

  Ahora solamente tenemos que sustituir

$$P\ (A\ U\ B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Hagamos ahora el apartado b):

- ¿Son compatibles? Como explicamos anteriormente, que sean incompatibles implica que los sucesos se den a la vez.

  En este caso, sí es posible que se den a la vez, ya que podemos sacar el rey de espadas y estaríamos cumpliendo los dos casos.

  Por este motivo, la unión de sucesos compatibles tiene una fórmula diferente:

$$P\ (A\ \cup\ C) = P\ (A) + P(C) - P(A\ \cap C)$$

  (En el caso de que sea incompatible, la intersección sería igual a cero)

  Nuestro problema ahora es calcular la intersección de ambos sucesos. Los casos que lo cumplen es la sota de espadas, el caballo de espadas y el rey de espadas de entre todas las cartas de la baraja, por lo que la probabilidad de intersección es 3 / 40. Sustituyamos:

$$P(A\ \cup C) = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40} = 0{,}475$$

Problema 5 → Probabilidad

Se lanza un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 al 6, y se anota su puntuación:
Se consideran los sucesos:

- *A = "salir un número par"*
- *B = "salir un número que es divisor de 12"*

a) ¿Son A y B sucesos incompatibles?
b) ¿Calcula la probabilidad de A U B?

Proceso de resolución

1) ¿Qué nos piden?

Leemos detenidamente el enunciado y extraemos que tenemos que hallar la probabilidad de sacar par y sacar un divisor de 12 al tirar un dado y, después, determinar si el suceso es incompatible.

2) Conocimientos previos

Vamos a realizar el ejercicio de una forma más gráfica, para ello, lo que haremos será estudiar cada uno de los casos que nos pide, procurando que esté todo ordenado para que sea más claro.

En un dado, los sucesos que se pueden dar son (*También llamado espacio muestral*):

1, 2, 3, 4, 5 y 6 *(hacen un total de 6 casos posibles)*

3) ¿Cómo podemos resolverlo?

El suceso A, lo forman:

2, 4 y el 6 *(Los casos favorables son 3)*

La probabilidad del suceso A es:

Empleando la regla de Laplace →

$$P\ (A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ahora hacemos lo mismo con el suceso B, pero antes tendremos que obtener los divisores de 12, que son:

1, 2, 3, 4, 6 y 12

Sabiendo esto, tendremos que coger los números que se puedan dar en nuestro espacio muestral, es decir, los casos posibles en un dado. Resultando:

1, 2, 3, 4 y 6 *(Los casos favorables son 5)*

La probabilidad es:

$$P\ (A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles} = \frac{5}{6}$$

Juntémoslo para aclararnos:

<u>Suceso A:</u> **2, 4, 6**

<u>Suceso B:</u> **1, 2, 3, 4, 6**

En el apartado a) se nos pregunta si son incompatibles. Recordemos que sean incompatibles implica que no se puedan dar simultáneamente ambos sucesos. Vemos que si sale el **1**, **3** o **5** serían incompatibles, pero si vemos el **2**, el **4** o el **6**, se daría en los dos sucesos, por lo tanto, son **<u>compatibles.</u>**

Ahora hacemos el apartado b), en el que tenemos que calcular la unión de ambos sucesos, que serían aquellos números que estén en cualquiera de los dos sucesos, en este caso, el **1**, **2**, **3**, **4** y **6** (el suceso A aporta el **2**, **4** y **6** y el suceso B aporta el **1**, **2**, **3**, **4** y **6**) Por lo que la probabilidad es **P (A U B) =** $\mathbf{{}^{5}/_{6}}$

Veámoslo con la fórmula:

$$P\ (A\ \cup\ B) = P\ (A) + P(B) - P(A\ \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

La intersección de ambos sucesos, lo forman los números 2, 4 y 6.

Su probabilidad es

$$P(A \cup B) = {}^{3}/_{6} = \mathbf{{}^{1}/_{2}}$$

Problema 6 → Probabilidad

En un pueblo se somete a sus vecinos a votación sobre la instalación de una antena de telefonía. Los resultados vienen recogidos en la siguiente tabla:

	A: Varones	*$\overline{A}$: Mujeres*	
B: Sí	*317*	*303*	*620*
$\overline{B}$: No	*223*	*314*	*537*
	540	*617*	*1.157*

Seleccionamos al azar un vecino. Halla P(A), P(A/B), P($\overline{B}$) y P($\overline{B}/A$)

Proceso de resolución

1) *¿Qué nos piden?*

Co la tabla de contingencia que nos dan, tenemos que hallar, cuando seleccionamos a un vecino, las probabilidades de:

- P(A) →Probabilidad de que sea varón
- P(A/B) → Probabilidad de que votando "Sí" sea varón
- P($\overline{B}$) → Probabilidad de que votase "No"
- P($\overline{B}/A$) → Probabilidad de que votando "No" siendo varón.

2) *Conocimientos previos*

La tabla que muestra el enunciado es una tabla de contingencia. Las **tablas de contingencia,** se emplean para registrar y analizar la relación entre dos o más variables, en este caso, A y B, es decir, ser "varón" (A) y votar "Sí" (B). Como vemos, el suceso contrario también está registrado con $\overline{A}$ y $\overline{B}$, que corresponde, respectivamente a, "No varón" o lo que es lo mismo, "Mujer" y "No" que el contrario de "Sí".

P(A/B) es una probabilidad condicionada que veremos posteriormente qué es lo que indica y como se puede obtener de una manera sencilla la probabilidad.

3) *¿Cómo podemos resolverlo?*

Calcular la probabilidad de P(A) y P($\overline{B}$) es inmediata, ya que solo tenemos que aplicar la regla de Laplace para obtenerla, es decir:

$$P\ (A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

El "número de casos posibles" es 1.157, ya que representa la suma de "A" (540) y su contrario (617) y también la de "B" (620) y su contrario (537).

El "número de casos favorables" es el total del suceso. Empezando por "A", tenemos 540 que es la suma de los varones que digan Sí (317) y los que digan No (223). De igual manera para *"$\overline{B}$",* resulta 537, siendo la suma de los "varones" y las "mujeres" que digan que "No"

$$P\ (A) = \frac{540}{1.157} \approx 0{,}46$$

$$P\ \left(\overline{B}\right) = \frac{537}{1.157} \approx 0{,}46$$

Los otros dos casos indican que un suceso está condicionado a otro suceso, es decir, en P(A/B) sería "hallar la probabilidad de A condicionada al suceso B". La fórmula general es la siguiente:

$$P(A/B)\ =\ \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Nuestro problema es saber cuál es $P(A \cap B)$. Si nos dan una tabla de contingencia (la tabla que presenta el ejemplo con los datos) es muy sencillo, ya que si lo traducimos a un lenguaje más comprensible, viene a decir que "cuál es la probabilidad de que sea varón y diga Sí". La probabilidad de que sea varón (P(B)) es ${}^{620}/_{1.157}$ y la probabilidad de que diga Sí siendo varón es de ${}^{317}/_{1.157}$. Sustituyendo en la fórmula:

$$P(A/B)\ =\ \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\ =\ \frac{{}^{317}/_{1.157}}{{}^{620}/_{1.157}}\ =\ \frac{317}{540}\ \approx\ 0{,}51$$

Para *P($\overline{B}$/A) hacemos lo mismo:*

$$P(\overline{B}/A)\ =\ \frac{P\left(\overline{B} \cap A\right)}{P(A)}\ =\ \frac{{}^{223}/_{1.157}}{{}^{540}/_{1.157}}\ =\ \frac{223}{540}\ \approx\ 0{,}41$$

Indica que "Probabilidad de que diga No siendo Varón".

Problema 7 → Probabilidad

El 60% de los alumnos de un centro aprobaron filosofía y el 70% aprobaron Matemáticas. Además, el porcentaje de alumnos que aprobaron Filosofía habiendo aprobado Matemáticas es del 80%. Si Juan sabe que ha aprobado Filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también Matemáticas?

Proceso de resolución

1) *¿Qué nos piden?*

Para la resolución de este ejercicio, primero tendremos que sacar los datos que de él podamos extraer y después ver qué es lo que nos pide, para concluirlo con un determinado método para alcanzar la solución.

- 60% aprueban Filosofía, es decir, P(F) = 0,6
- 70% aprueban Matemáticas, es decir, P(M) = 0,7
- 80% aprueban Filosofía si han aprobado Matemáticas, es decir, P(F/M) = 0,8

→ Pregunta que nos hace "*Probabilidad de aprobar Matemáticas si apruebas Filosofía*" ←

2) *Conocimientos previos*

Lo que en realidad no pide el problema, expresado en lenguaje matemático es P(M/F)

Expresemos la fórmula de la probabilidad condicionada respecto a un suceso, para ver si nos aclara algo el problema:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

3) ¿Cómo podemos resolverlo?

--- Método resolución 1 ---

Proseguiremos de **forma numérica** la resolución del ejercicio.

Sustituyamos en la ecuación anterior para tener más claro si podemos hacer algo:

$$P(F/M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)}$$

Parece que tenemos $P(F/M)$ y P(M), por lo tanto, podemos despejar $P(F \cap M)$

$$P(F \cap M) = P(M) \cdot P(F \ \cap M) = 0,7 \ \cdot 0,8 = 0,56$$

Nos piden P(M/F), que con la fórmula:

$$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)}$$

Y sabiendo que la intersección es la misma independientemente de la colocación de los sucesos, por las propiedad conmutativa que posee la intersección sabemos que $\rightarrow P(M \cap F) = P(F \cap M)$ $ver\ imagen$).

Entonces, podemos sustituir en la ecuación:

$$P(M/F) = \frac{P(F \cap M)}{P(F)}$$

Y dando valores:

$$P(M/F) = \frac{0{,}56}{0{,}6} \approx 0{,}93 \rightarrow 93\%$$

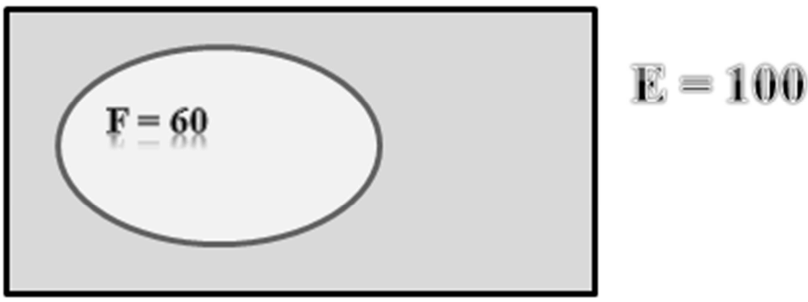
--- Método resolución 2 ---

Vamos a hacerlo por otro método y comprobar que sale lo mismo de las dos maneras, si no da, entonces alguno estará mal hecho. ¿Seremos capaces de hacerlo de **forma gráfica**?

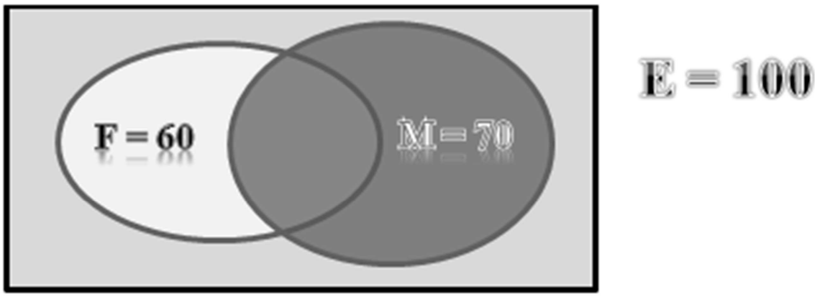
Hagámoslo paso a paso:

1) Podemos definir un espacio muestral "E" igual a 100 alumnos que se examinan. De esta forma trabajamos con números más grandes y no tenemos que dividir los porcentajes (o multiplicarlos). *Dibujamos un rectángulo de 100 personas*

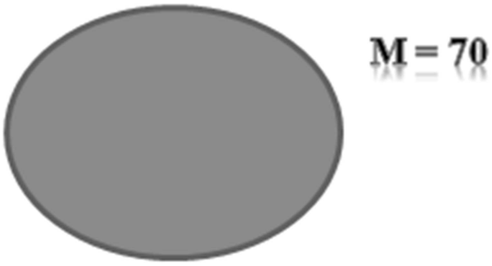
2) Dibujamos, en el anterior, los alumnos que han aprobado Filosofía. Podemos hacer cualquier figura que queramos pero lo más cómodo será una circunferencia o algo que se le parezca. *Dibujamos una circunferencia de 60 personas.*



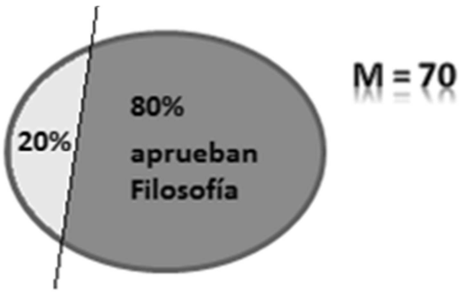
3) Ahora hacemos lo mismo, pero con los de matemáticas. *Dibujamos una circunferencia de 70 personas*.



4) En el siguiente paso, tenemos que descubrir que significa que hayan aprobado el 80% Filosofía de las personas que han aprobado Matemáticas. Pues… tal vez, si aislamos a las 70 personas que han aprobado matemáticas, lo tengamos más claro. *Sacamos el suceso "aprobar matemáticas".*



5) ¡Ah!, mucho mejor. Sabemos que el 80% han aprobado filosofía, por lo que tendremos que saber cuántas personas lo han hecho. Lo podemos hacer gráficamente, pero no será muy exacto, por lo que tendremos que hacer unos numerillos. *Hacemos el 80% del paso anterior.*



Si 70 personas equivalen al 100%, ¿cuántos serán el 80%? Con una regla de tres, podremos hacerlo.

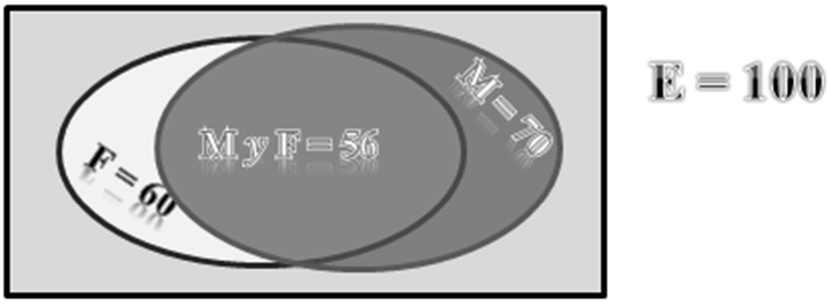
$$\frac{70}{100} = \frac{x}{80} \rightarrow \frac{70 \cdot 80}{100} = \frac{5600}{100} = 56\, personas$$

6) Ahora tenemos que, 56 personas han aprobado Filosofía sabiendo que han aprobado matemáticas, y que las mismas 56 personas han aprobado matemáticas sabiendo que han aprobado filosofía, o que 56 personas han aprobado ambas asignaturas. Con esto, nos preguntarnos, ¿cuántas personas, que hayan aprobado filosofía, han aprobado matemáticas? Sabemos que 56 han aprobado ambas y que el total de aprobados de filosofía era de 60 personas. Sólo tenemos que dividirlos y multiplicarlos por 100 para obtener el porcentaje.

$$\frac{56}{60} \cdot 100 \approx 93{,}3\%$$

7) Con todo lo anterior, seríamos capaces de saber cuántas personas han aprobado una sola asignatura o cuántos no han aprobado ninguna. Sabemos:
   - 60 personas aprueban filosofía
   - 70 personas aprueban matemáticas
   - 56 han aprobado las dos asignaturas
   - 100 es el total de personas que se han presentado a los exámenes

   Tendremos que corregir nuestro gráfico para adaptarlo a los nuevos datos



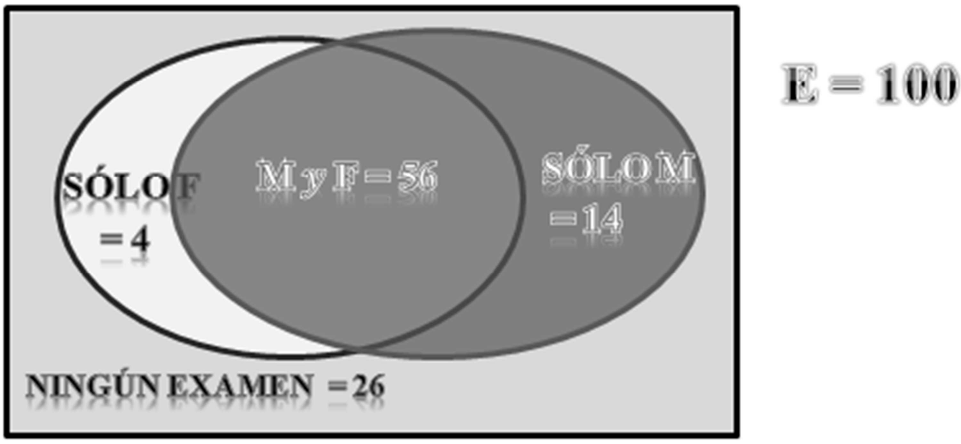
   Personas que han aprobado filosofía y no matemáticas. Del gráfico resulta que:
$$60 - 56 = 4\ personas$$

   Personas que han aprobado matemáticas y no filosofía. Igual que el caso anterior:
$$70 - 56 = 14\ personas$$

   ¿Cuántas personas sólo han aprobado una asignatura?
   Es la suma de los dos anteriores, es decir, o han aprobado matemáticas o filosofía.
$$4 + 14 = 18$$
$$18\ personas\ sólo\ han\ aprobado\ una\ asignatura$$

   ¿Cuántas personas no han aprobado nada?
   Para hacerlo, restamos del total los que han aprobado ambos exámenes y los que han aprobado sólo una asignatura, entonces:
$$100 - 56 - (14 + 4) = 44 - 18 = 26$$
$$26\ personas\ no\ han\ aprobado\ ninguna\ asignatura$$

8) Representemos los datos en nuestro gráfico:



Problema 8 → Probabilidad

Se extraen dos cartas de una baraja española. Halla la probabilidad de que sean las dos figuras (sota, caballo o rey) en los siguientes casos:

a) Con devolución
b) Sin devolución

Proceso de resolución

1) ¿Qué nos piden?

Como se comentó en el problema 4, las características de la baraja española, no las repetiremos otra vez.

Antes de hallar la probabilidad de que salga figura, nos fijamos en que se nos plantea un problema, que es determinar qué es eso de la "*devolución*". Bueno, pues no es más que devolver la carta extraída a la baraja, es decir, que siempre tenemos el mismo número de cartas y de posibilidades.

2) Conocimientos previos

Tenemos que aplicar la regla de Laplace, que se muestra en las siguientes líneas.

3) ¿Cómo lo resolvemos?

--- Con devolución ---

--- Método resolución 1 ---

Resolvamos el primer apartado para tenerlo más claro:

Tenemos 40 cartas, repartidas en cuatro palos y en cada uno hay tres figuras, por lo que en total tendremos 4 x 3 = 12 figuras en la baraja.

Sacamos una carta, que por la regla de Laplace, sabemos que la probabilidad es:

$$P\ (A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

La probabilidad de sacar una figura es de 0,3, si sólo sacamos una carta, pero nos indican que tenemos que sacar dos cartas. Como devolvemos la carta, volvemos a tener 40 cartas y 12 figuras. Volvemos a hacer lo mismo:

$$P\ (B) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

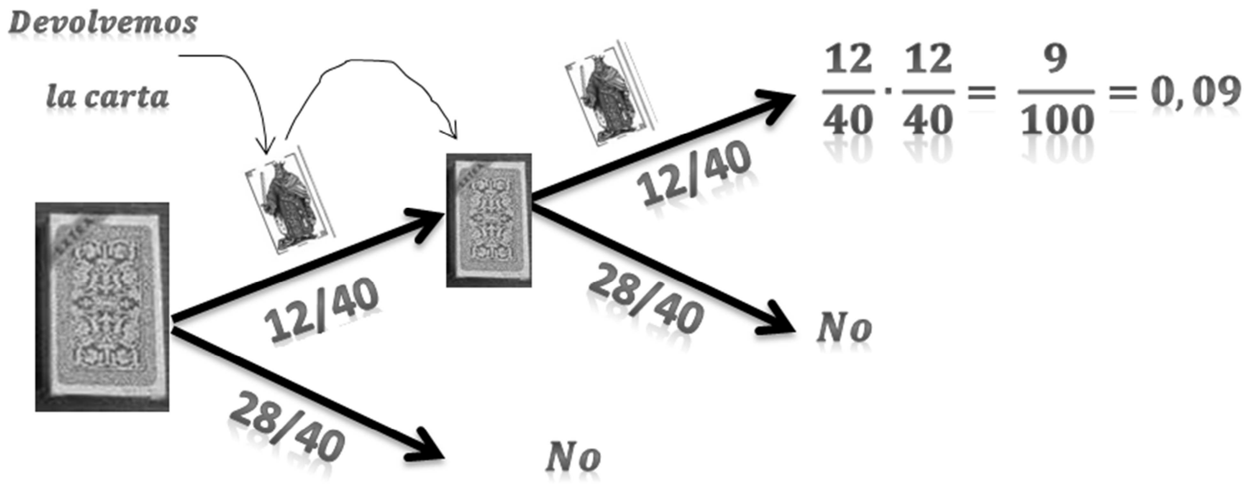
El suceso A es igual a sacar una figura en la primera extracción y el suceso B implica sacar figura en la segunda extracción. Como lo que queremos es sacar figura en la segunda extracción habiendo sacado figura en la primera, es decir, en lenguaje matemático, estaríamos hablando de la intersección de los dos sucesos.

En este caso, está claro que los sucesos son independientes, se ve que no hay relación (o condicionamiento) entre sacar una carta y otra, por lo que al ser sucesos independientes, la probabilidad la calcularíamos de la siguiente manera:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$$

--- Método resolución 2 ---

Veámoslo en forma de <u>diagrama en árbol</u>



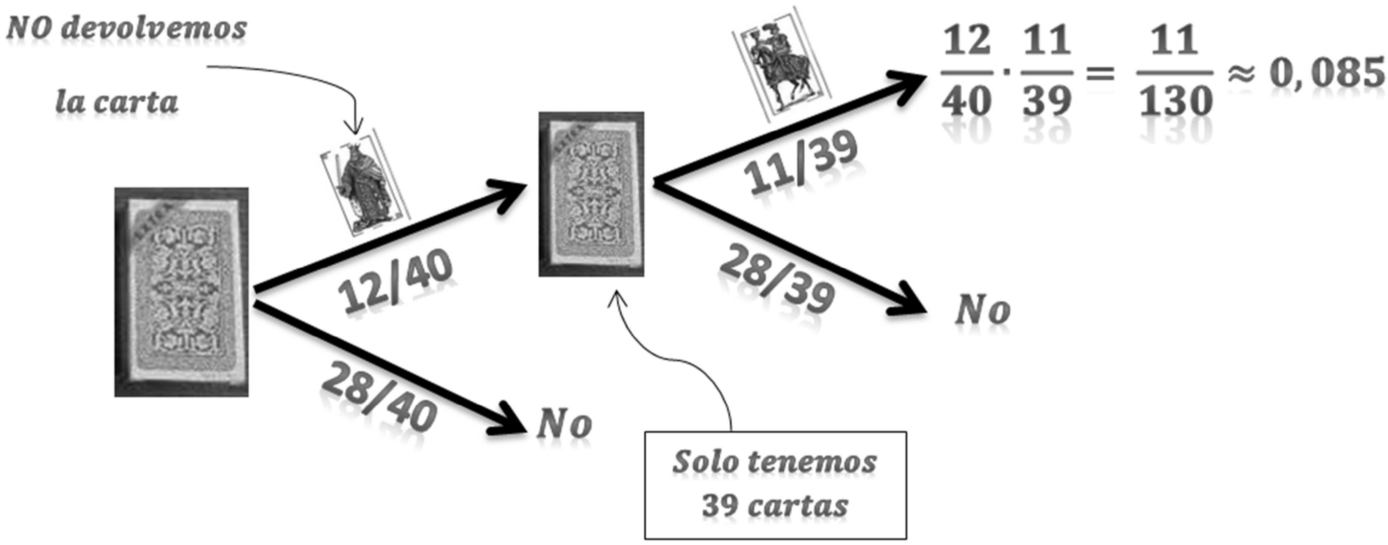
Cómo vemos en la imagen puede que saquemos la misma carta, ya que la hemos devuelto.

--- <u>Sin devolución</u> ---

¿Qué significa? Significa que la carta que retiremos de la baraja nos la quedamos, por lo que habrá que descontar una carta para calcular la probabilidad. El suceso es dependiente y expresado matemáticamente es:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{11}{130} \approx 0{,}085$$

Si lo representamos con el diagrama en árbol, lo veremos mucho más claro.



Problema 9 → Probabilidad

Juan es el responsable del motor de una fábrica y no se puede confiar en él, pues la probabilidad de que se olvide de hacer el mantenimiento de un ordenador en ausencia de su jefe es de $2/3$*. Si Juan le hace el mantenimiento al motor, este tiene la misma probabilidad de estropearse que de funcionar correctamente, pero si no le hace el mantenimiento, solo hay una probabilidad de 0,25 de que funcione correctamente.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el motor funcione correctamente a la vuelta del jefe?

b) A su vuelta, el jefe se encuentra el motor averiado. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan no le hiciera el mantenimiento?

Proceso de resolución

1) ¿Qué nos piden?

Debido a que el enunciado es bastante extenso, parece que tendremos que leerlo lo bastante despacio como para conseguir interpretarlo correctamente. Podemos sacar las siguientes conclusiones:

- Juan representa algo importante, es del que queremos sacas las conclusiones "su **jefe no puede confiar en él**"
- **Olvida el mantenimiento** del motor 2 de cada 3 veces. (2/3)
- Juan **hace** el mantenimiento, el motor se puede estropear o no de forma **equiprobable** (igual probabilidad).
- Juan **NO hace** el mantenimiento, entonces $1/4$ de las veces el motor funciona correctamente

Apartado a) El jefe no está y vuelve, cuál será lo **probabilidad de que funcione el motor**.

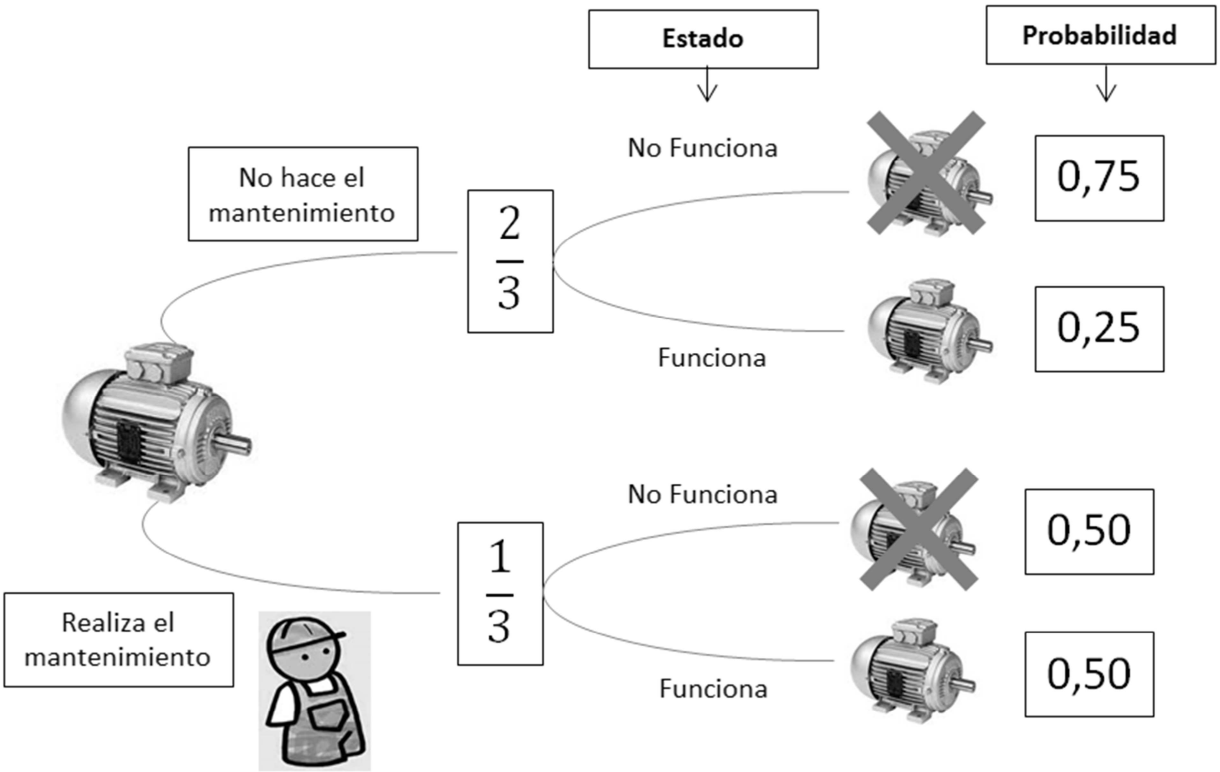
Apartado b) Vuelve el jefe y no funciona el motor, cuál será la **probabilidad de que olvidase el mantenimiento del mismo**.

2) Conocimientos previos

Hemos visto que la probabilidad no es la misma según el caso que estudiemos, entonces nos indica que tendremos que utilizar la probabilidad total y en caso de necesitarlo emplear el teorema de Bayes, ya sea de una manera directa o indirecta, es decir, sabiéndolo o haciendo "el cuento de la vieja".

3) ¿Cómo podemos resolverlo?

Es inviable manejar los datos proporcionados "de cabeza" por lo que haremos mejor en representarlos de forma ordenada y una vez hecho esto, conseguiremos sacar más conclusiones de la manera adecuada de la resolución.



Ahora está todo más claro. En el apartado a) nos pide la probabilidad de que funcione. No sabemos si realiza el mantenimiento o no lo hace, por lo que tendremos que sumar ambos casos.

Rama "No hace el mantenimiento" a la que llamamos PaM, son 2/3 y de que funcione 0,25. Como nos movemos dentro de la misma rama, tenemos que multiplicar dentro de ella

$$PaM = \frac{2}{3} \cdot 0{,}25 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Rama "Realiza el mantenimiento" a la que llamamos PaN, es 1/3 y de que funcione de 0,50, como antes, al movernos dentro de la misma rama, multiplicamos

$$PaN = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Como son dos ramas diferentes, tenemos que sumarlas, por lo que la probabilidad de que funcione al volver el jefe, será la suma de que haga el mantenimiento y de que no lo haga.

$$Pa = PaM + PaN = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \approx 0{,}33$$

Apartado b) nos pide la propiedad de que se olvidase del mantenimiento sabiendo que no funciona. Esto es un proceso condicionado, sabemos, que no haga el mantenimiento es de 2/3 y dentro de esa rama, que no funcione es de 0,75. Al movernos dentro de esta rama, tenemos que multiplicarlas (2/3*0,75 = 0,50). En el caso anterior hemos calculado que funcione, por lo tanto, que no funcione es el proceso contrario, es decir, 1- Pa = 1- 1/3 = 2/3. Tendremos que dividir ambas (la parcial y la total del suceso) para obtener la probabilidad condicionada. (Teorema de Bayes)

$$Pb = \frac{{}^{2}/_{3} \cdot 0{,}75}{1 - {}^{1}/_{3}} = \frac{{}^{1}/_{2}}{{}^{2}/_{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{4}} = 0{,}75$$

<u>Problema 10 → Probabilidad (Binomial)</u>

*En una competición de baloncesto, dos equipos, A y B, juegan una eliminatoria al mejor de cinco partidos. Ganará el equipo que consiga ganar **LOS** tres partidos. Si se sabe que en cada partido el equipo A tiene una probabilidad de ganar de 0,55, ¿qué probabilidad tendrá el equipo B de ganar la eliminatoria?*

<u>Proceso de resolución</u>

1) ¿Qué nos piden?

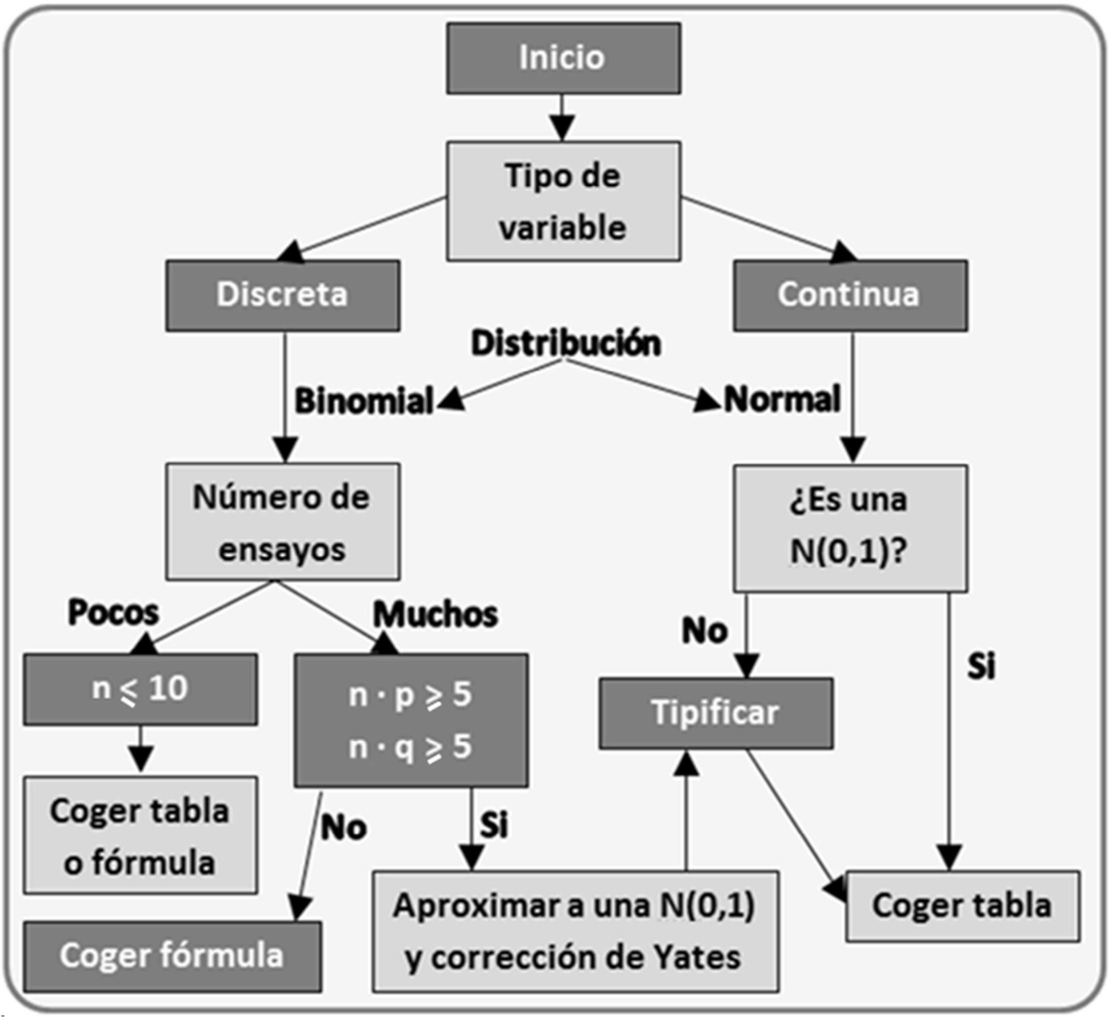
Leemos detenidamente el enunciado y extraemos lo principal:

- Hay dos equipos, uno **A** y otro **B**
- Pasa la eliminatoria quien gane **tres partidos**
- El total de partidos jugados es de **cinco**.
- El equipo A gana un **55%** de las veces (es lo mismo que tenga una probabilidad de ganar de 0,55)

La pregunta que nos hace, al final, nos indica cuál es la probabilidad de que el equipo B pase la eliminatoria.

2) Conocimientos previos

Ahora tenemos que "descubrir" qué tipo de distribución sigue el caso que tenemos que resolver. Hagamos un simple esquema:



Empecemos por el inicio, y vemos que la siguiente que nos pide es que definamos el "*Tipo de variable*". Las hay de dos tipos, "*discretas*" y "*continuas*". La primera es aquella que no puede tomar cualquier valor, por ejemplo, al tirar un dado, no podemos pedir que salga "2,5", ya que, o sale un "2" o un "3", pero no "2,5", entonces es una variable discreta. La continua puede tomar cualquier valor, y suele estar relacionada con experimentos en los que midamos el tiempo, la longitud, peso, altura, … Sabiendo esto, podemos concluir, sin lugar a dudas, que es una **variable discreta.**

Seguimos con el esquema y nos dice que sigue una **distribución binomial** y lo siguiente que tenemos que contestar es "*Número de ensayos*" del que salen dos ramas "*pocos*" y "*muchos*". Si seguimos por el de pocos, nos indica que si son menos de 10, si son más, tendremos que ir a la otra rama, y realizar las comprobaciones que nos indica ($n \cdot p > 5$ y $n \cdot q > 5$) teniendo que cumplirse ambas. El significado de cada una de ellas es "n" el número de ensayos que realizamos, por ejemplo, si tirar un dado cinco veces, entonces tenemos un n = 5; "p" es la probabilidad de éxito del suceso, siguiendo con el caso anterior, si nos pide sacar "6", entonces tendremos p=1/6 ya que sólo se puede sacar "6" si sale 6 en la tirada de entre los 6 casos posibles al lanzar un dado {1, 2, 3, 4, 5, 6}; "q" es la probabilidad del suceso contrario, es decir 1 – p, en el caso anterior, q = $^5/_6 \rightarrow 1 - {^1/_6} = {^6/_6} - {^1/_6} = {^{6-1}/_6} = {^5/_6}$. Del enunciado del problema, sabemos que **n < 10**, porque el número de jugados es de cinco (n = 5).

Si seguimos con el esquema, éste nos pone "*Coger tabla o fórmula*", nos indica que tendremos que resolverlo, mediante la tabla de la binomial o la fórmula de la binomial. Para comprobar que da lo mismo, lo resolveremos por **ambos métodos**.

3) *¿Cómo podemos resolverlo?*

Del proceso anterior, extraemos lo siguiente:

- Es una binomial
- n = 5
- Podemos resolverlo con la fórmula o con la tabla

Para resolverlo, tenemos que:

- **Definir la variable**
- **Definir la binomial**
- **Definir la probabilidad que piden**

En el problema:

- Como nos dicen, *¿qué probabilidad tendrá el equipo B de ganar la eliminatoria?*, definimos como variable "X = **Ganar B el partido**"
- Para definir la Binomial, tenemos que analizar el número de ensayos y la probabilidad de los mismos, porque la binomial se define así B (n, p). Sabemos que n = 5 porque se juegan cinco partidos y p_B es la probabilidad contraria de que gane A y como que gane A es de 0,55, entonces $p_B = 1 - p_A = 1 - 0,55 = 0,45$, ahora ya podemos definirla **X $\sim$ B (5; 0,45)**.
- Nos dicen que para ganar la eliminatoria es necesario que, al menos, gane tres partidos de los cinco que se disputan, entonces **P (X $\geq$ 3)**.

La probabilidad de P (X ≥ 3) = P (X =3) + P (X = 4) + P (X =5). Esto es porque al decirnos que la eliminatoria se gana con tres partidos ganados, también sabemos que lo hace si se gana cuatro o si gana los cinco partidos que dispute. De esta manera es por lo que sumamos las probabilidades.

Vamos a resolverlo, primero con la tabla y después con la fórmula de la binomial:

- Cogemos la tabla

Tabla de la distribución Binomial

n	r \ p	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2601	.2500
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4444	.4550	.4800	.4950	.4998	.5000
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1111	.1225	.1600	.2025	.2401	.2500
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1327	.1250
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4444	.4436	.4320	.4084	.3823	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890.	.2222	.2389	.2880	.3341	3674	.3750
	3	.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0370	.0429	.0640	.0911	.1176	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1785	.1296	.0915	.0677	.0625
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2500
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1636	.2109	.2646	.2963	.3105	.3456	.3675	.3747	.3750
	3	.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.4609	.0756	.0988	.1115	.1536	.2005	.2400	.2500
	4	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0123	.0150	.0256	.0410	.0576	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3855	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0283	.0312
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0467	.0277	.0176	.0156
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2634	.2437	.1866	.1359	.1014	.0938
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3292	.3280	.3110	.2780	.2437	.2344
	3	.0000	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2195	.2355	.2765	.3032	.3121	.3125
	4	.0000	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0823	.0951	.1382	.1861	.2249	.2344
	5	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0165	.0205	.0369	.0609	.0864	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0014	.0018	.0041	.0083	.0139	.0156
7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0585	.0490	.0280	.0152	.0090	.0078
	1	.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.2048	.1848	.1306	.0872	.0603	.0574
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.3073	.2985	.2613	.2140	.1740	.1641
	3	.0000	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2561	.2679	.2903	.2918	.2786	.2734
	4	.0000	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1280	.1442	.1935	.2388	.2676	.2734
	5	.0000	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0384	.0466	.0774	.1172	.1543	.1641
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0064	.0084	.0172	.0320	.0494	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0006	.0016	.0037	.0068	.0078
8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0390	.0319	.0168	.0084	.0046	.0039
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1561	.1373	.0896	.0548	.0352	.0312
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2731	.2587	.2090	.1569	.1183	.1094
	3	.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2731	.2786	.2787	.2568	.2273	.2188
	4	.0000	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1707	.1875	.2322	.2627	.2730	.2734
	5	.0000	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0683	.0808	.1239	.1719	.2098	.2188
	6	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0171	.0217	.0413	.0703	.1008	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0024	.0033	.0079	.0164	.0277	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0002	.0007	.0017	.0033	.0039

Ahora explicamos cómo usar la tabla:

n	r
5	0
	1
	2
	3
	4
	5

La primera columna (empezando por la izquierda y que va del 2 al 10) tiene dentro de ella tiene dos columnas, la primera indica el número de ensayos que se han de realizar, como en el problema n = 5, por eso se escoge la imagen de la izquierda.

La otra columna, que siempre empieza por el 0 y acaba en el número de la izquierda, indica la probabilidad de que se dé el suceso 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 veces. En el problema $X \geq 3$ porque es necesario que **gane B tres veces, al menos,** para que pase la eliminatoria **de cinco** partidos que se disputan, es decir, que ganando tres o cuatro pasa, al igual que si gana todos los partidos.

n \ r	p	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3855	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0283	.0312

La primera fila indica la probabilidad p de la binomial. En el problema, p_B = 0,45, por lo que para buscar la probabilidad tendremos que buscar en la columna de 0,45.

El resto de la tabla indica la probabilidad de que se dé ese suceso según el número de ensayos o repeticiones que hagamos.

Veamos el proceso que hemos seguido para que todo esté más claro:

Buscamos en la primera columna n = 5

Tabla de la distribución Binomial

n \ r	p	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2601	.2500
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4444	.4550	.4800	.4950	.4998	.5000
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1111	.1225	.1600	.2025	.2401	.2500
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1327	.1250
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4444	.4436	.4320	.4084	.3823	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890.	.2222	.2389	.2880	.3341	3674	.3750
	3	.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0370	.0429	.0640	.0911	.1176	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1785	.1296	.0915	.0677	.0625
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2500
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1636	.2109	.2646	.2963	.3105	.3456	.3675	.3747	.3750
	3	.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.4609	.0756	.0988	.1115	.1536	.2005	.2400	.2500
	4	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0123	.0150	.0256	.0410	.0576	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3855	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0283	.0312
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0467	.0277	.0176	.0156

Ampliamos la fila de n = 5 y buscamos a continuación, en la primera fila p = 0,45

n	p / r	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3855	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0283	.0312

Volemos a recortar y procedemos al último paso para obtener
la probabilidad

n	p / r	.45
5	0	.0503
	1	.2059
	2	.3369
	3	.2757
	4	.1128
	5	.0185

La probabilidad es P (X $\geq$ 3) = P (X =3) + P (X = 4) + P (X =5) = 0,2757 + 0,1128 + 0,0185 = **0,4070**

La probabilidad de que el equipo B pase la eliminatoria es 0,4070

Ahora hacemos lo mismo pero con las fórmulas, pero antes de eso, tenemos que saber cuál es la fórmula de la binomial y qué significa cada una de las partes.

$$X \sim B\ (n,p)\ \rightarrow\ P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

- B (n, p), es la distribución binomial, que está definida por “n” y por “p” que son el número de ensayos y la probabilidad de éxito del mismo, respectivamente.
- $P(X = k)$ es la probabilidad de que la variable “X” se cumpla “k” veces.
- $\binom{n}{k}$ es el número combinatorio nCk, que se calcula de la siguiente manera:
  $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\ \rightarrow siendo\ "!"\ el\ factorial;\ n! =\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Siguiendo con el problema $X \sim\ Ganar\ B\ el\ partido$

$$X \sim B\ (5, 0{,}45)\ \rightarrow\ P(X \geq 3) = P\ (X = 3) + P\ (X = 4) + P\ (X = 5) =$$

$$= \binom{5}{3} \cdot 0{,}45^3 \cdot (1 - 0{,}45)^{5-3} + \binom{5}{4} \cdot 0{,}45^4 \cdot (1 - 0{,}45)^{5-4} + \binom{5}{5} \cdot 0{,}45^5 \cdot (1 - 0{,}45)^{5-5} =$$

$$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}45^3 \cdot (0{,}55)^2 + \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0{,}45^4 \cdot (0{,}55)^1 + 1 \cdot 0{,}45^5 \cdot (0{,}55)^0 =$$

$$=\ 0{,}2757\ +\ 0{,}1128\ +\ 0{,}0185 = \mathbf{0,4070}$$

Como vemos, da lo mismo haciéndolo de una manera que de otra, pero si podemos hacerlo con la tabla tardaremos bastante menos, por lo que es el método recomendado de resolución.

¿Qué pasaría si … *pedimos la probabilidad de que gane A la eliminatoria?*

Para hacer este caso particular que nos piden a continuación, podemos hacerlo directamente, ya que sabemos que es el suceso contrario de que B pase la eliminatoria, por lo que daría

$$P_A = 1 - P_B = 1 - 0{,}4070 = 0{,}5930$$

Ya lo tenemos hecho, pero si no hubiéramos calculado el apartado anterior lo habríamos hecho tan rápido. Supongamos que no lo teníamos hecho y así volvemos a hacer el problema.

Ahora sabemos que "X" sigue una distribución binomial, que el número de partidos que se disputan es de cinco y que para que A pase la eliminatoria es necesario ganar, al menos, tres partidos, es decir, que puede ganar tres, cuatro o los cinco partidos.

Seguimos y para resolverlo, tenemos que:

- **Definir la variable**
- **Definir la binomial**
- **Definir la probabilidad que piden**

Procedemos con los datos del problema

- Como nos dicen, *¿… probabilidad de que A gane la eliminatoria?*, definimos como variable "X = **Ganar A el partido**"
- Sabemos que n = 5 porque se juegan cinco partidos y p_A es igual a 0,55, entonces ya podemos definirla X ∾ **B (5; 0,55)**.
- Nos dicen que para ganar la eliminatoria es necesario que, al menos, gane tres partidos de los cinco que se disputan, entonces **P (X ≥ 3)**.

Al igual que el caso anterior, podemos resolverlo con las fórmulas y con la tabla. Vemos que resolverlo con la fórmula no es más que sustituir los valores que antes hemos obtenido. Hagámoslo:

$$X \sim B\ (n,p)\ \rightarrow\ P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$X \sim B\ (5, 0{,}55)\ \rightarrow\ P(X \geq 3) = P\ (X = 3) + P\ (X = 4) + P\ (X = 5) =$$

$$= \binom{5}{3} \cdot 0{,}55^3 \cdot (1 - 0{,}55)^{5-3} + \binom{5}{4} \cdot 0{,}55^4 \cdot (1 - 0{,}55)^{5-4} + \binom{5}{5} \cdot 0{,}55^5 \cdot (1 - 0{,}55)^{5-5} =$$

$$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}55^3 \cdot (0{,}45)^2 + \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0{,}55^4 \cdot (0{,}45)^1 + 1 \cdot 0{,}55^5 \cdot (0{,}45)^0 =$$

$$=\ 0{,}3369\ +\ 0{,}2059\ +\ 0{,}0503 = \mathbf{0{,}5931}$$

Como vemos, no hemos tenido ningún problema, simplemente era botonear (pulsar muchas botones) en la calculadora. ¿*Nos pasará lo mismo si decidimos emplear la tabla para resolver la nueva pregunta del problema*? La respuesta es **No**, por eso lo estamos haciendo de nuevo. No tenemos en la tabla todas las probabilidades, de hecho solo llegan hasta 0,5.

¿Qué podemos hacer?

Analicemos la tabla para ver qué conclusiones sacamos de la misma.

Supongamos que tenemos que utilizar la parte de la tabla que se muestra a continuación (n = 5)

n	p / r	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3855	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0283	.0312

Nos dicen que la probabilidad de éxito de un suceso es de 0,24. ¿Podremos sumar cuatro veces la probabilidad de 0,01 a la de 0,20 para hallar la solución? Comprobémoslo para k = 0:

$$P = 0{,}01 * 4 + 0{,}20 = 0{,}24$$

$$0{,}9510 * 4 + 0{,}3277 = \cancel{4{,}1317}$$

Parece que la probabilidad obtenida es **IMPOSIBLE,** por ser **mayor que uno,** entonces no está bien hecho lo anterior. Evidentemente el valor que buscamos ha de estar entre los valores de la probabilidad de 0,20 y 0,25, es decir, entre 0,3277 y 0,2373. Entonces:

Si la probabilidad es menor a 0,50 y no está en la probabilidad de la tabla,

tenemos que hacerlo mediante la fórmula

Pero todavía podemos hacer algo más para intentar calcularlo, podemos hacer el suceso contrario.

- En un mismo partido, si el **equipo A** gana → El equipo B pierde
- Para ganar la eliminatoria el **equipo A** tiene que ganar, como mínimo, tres de los cinco partidos.
- Para ganar la eliminatoria el **equipo A** tiene que perder, como máximo, dos de los cinco partidos. (Si pierde tres, sólo ganaría dos y no pasa la eliminatoria)
- Entonces si el **equipo A** pierde, como máximo, dos partidos, el **equipo B gana, como máximo, dos** de los cinco partidos.

Siguiendo lo anterior, sería:

- "**X = Ganar B el partido**" Ya tenemos definida la variable
- Sabemos que n = 5 porque se juegan cinco partidos y p_B es la probabilidad contraria de que gane A y como que gane A es de 0,55, entonces $p_B = 1 - p_A = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$, ya podemos definir la distribución **X** $\sim$ **B (5; 0,45)**.
- El equipo B tiene que ganar como máximo dos partidos de los cinco que se disputan en total, entonces **P (X ≤ 2)**.

Ahora ya está todo definido, procedemos a resolverlo con las tablas:

Buscamos en la primera columna n = 5

Tabla de la distribución Binomial

n	p r	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2601	.2500
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4444	.4550	.4800	.4950	.4998	.5000
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1111	.1225	.1600	.2025	.2401	.2500
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1327	.1250
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4444	.4436	.4320	.4084	.3823	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890.	.2222	.2389	.2880	.3341	3674	.3750
	3	.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0370	.0429	.0640	.0911	.1176	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1785	.1296	.0915	.0677	.0625
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2500
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1636	.2109	.2646	.2963	.3105	.3456	.3675	.3747	.3750
	3	.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.4609	.0756	.0988	.1115	.1536	.2005	.2400	.2500
	4	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0123	.0150	.0256	.0410	.0576	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3855	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0283	.0312
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0467	.0277	.0176	.0156

Ampliamos la fila de n = 5 y buscamos a continuación, en la primera fila p = 0,45

n	p r	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3855	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0283	.0312

Volemos a recortar y procedemos al último paso para obtener la probabilidad

n	p r	.45
5	0	.0503
	1	.2059
	2	.3369
	3	.2757
	4	.1128
	5	.0185

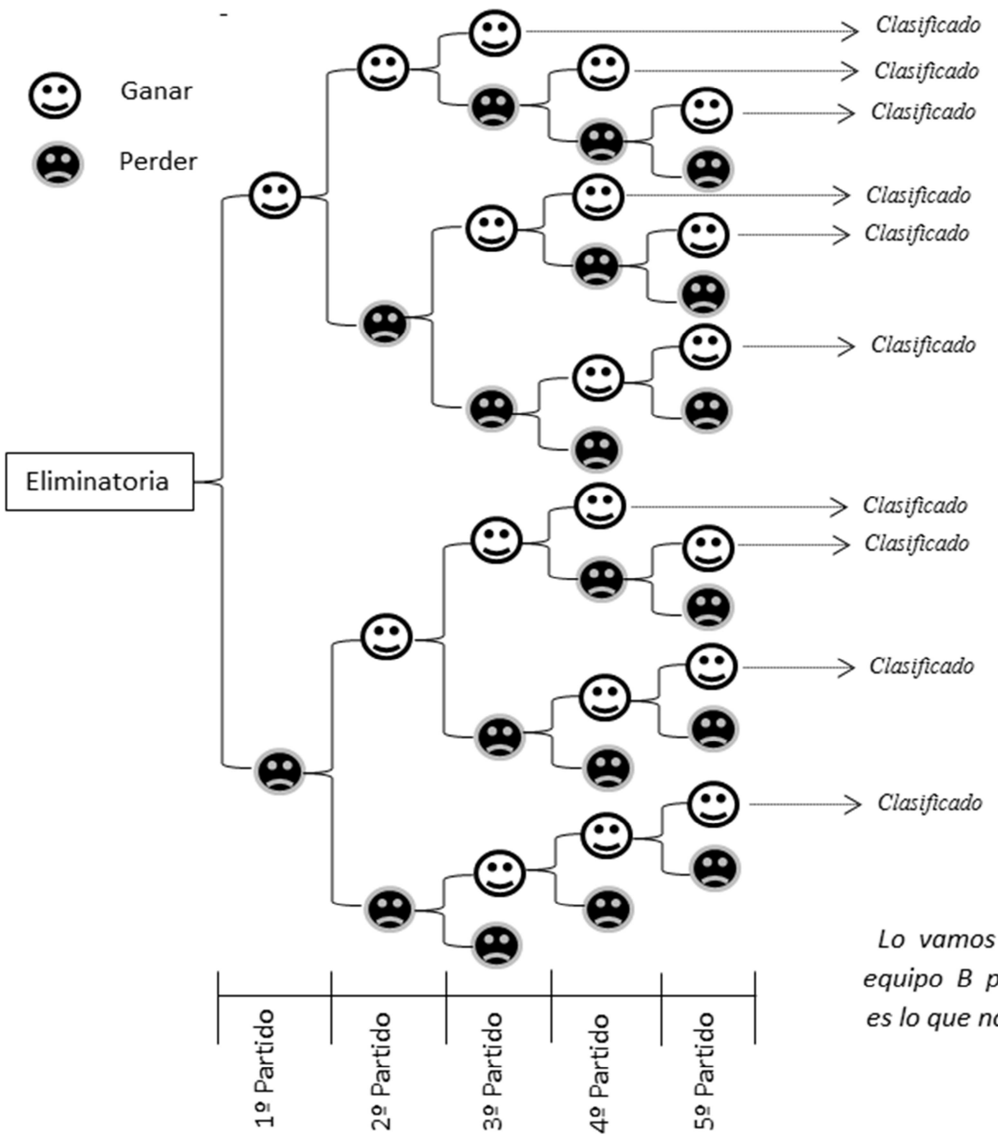
La probabilidad es P (X $\leq$ 2) = P (X =0) + P (X =1) + P (X =2) = 0,0503 + 0,2059 + 0,3369 = **0,5931**

La probabilidad de que el equipo A pase la eliminatoria es 0,5931

¿Qué pasaría si … *pedimos la probabilidad de que gane el equipo B la eliminatoria, y esta fuera "al primero que gane tres partidos"?*

Ahora ya no se juegan cinco partidos seguros, por lo que "n" no es igual a cinco, sino que variará. Parece que tendremos que hacer un esquema para poder ver con más claridad que es lo que pasa en la eliminatoria.

- El equipo B tiene que ganar tres partidos para pasar la eliminatoria.
- Se juegan, como máximo, cinco partidos (dos derrotas y tres victorias para un equipo para pasar la eliminatoria).
- Si el equipo B gana los tres primeros partidos, la eliminatoria se acaba y pasaría a la siguiente ronda.
- Si el equipo B pierde un partido y tiene que pasar la eliminatoria, entonces sólo se juegan cuatro partidos.
- Si el equipo B pierde dos partidos y pasa la eliminatoria, se han jugado cinco partidos en total.
- Da igual el orden en el que pierdas los partidos.
- Parece algo complejo pero no lo es, hagamos un gráfico si lo anterior no nos ha resuelto todas nuestras dudas.



Lo vamos a hacer para que el equipo B pase la eliminatoria que es lo que nos piden en el problema

Parece bastante lioso, por lo que haremos una tabla para ordenar el gráfico anterior y tener los posibles casos ordenados.

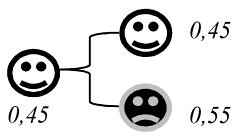
1º	O	O	O	-	-
2º	O	O	X	O	-
3º	O	O	X	X	O
4º	O	X	O	O	-
5º	O	X	O	X	O
6º	O	X	X	O	O
7º	X	O	O	O	-
8º	X	O	O	X	O
9º	X	O	X	O	O
10º	X	X	O	O	O

“O” victoria
“X” derrota
“-“ No se juega

La verdad es que nos sigue sin aclarar nada, pero el gráfico que hicimos anteriormente se parece bastante a un diagrama en árbol (de hecho lo es) y lo único que le falta es la probabilidad en cada una de las ramas, pero como sabemos que es la misma si pierde o gana:

- Si perdía, es porque el equipo A ganaba, y la probabilidad de que este lo hiciera era de 0,55, entonces que pierda el equipo B tiene una probabilidad de 0,55.
- Si gana, es el suceso contrario a que pierda, por lo tanto es 1 – 0,55 = 0,45

¡Vale, ya tenemos las probabilidades!, pero… ¿*cómo las usamos*? Anteriormente se expuso que lo único que le faltaba al diagrama eran las probabilidades, pues bien ya las tenemos, simplemente tendremos que colocarlas en cada una de las ramas.



Al hacer esto nos damos cuenta de que si gana ponemos 0,45 y si pierde 0,55. Sabemos, de temas anteriores, que **dentro de una rama** las probabilidades se **multiplican** y que **diferentes ramas** se **suman** (Teorema probabilidad total). Aquí tenemos un total de diez ramas (cada una de las de la gráfica). Vamos a utilizar la tabla anterior a la que le cambiamos los datos:

1º	*0,45*	*0,45*	*0,45*	*1*	*1*	**0,0911**
2º	*0,45*	*0,45*	*0,55*	*0,45*	*1*	**0,0501**
3º	*0,45*	*0,45*	*0,55*	*0,55*	*0,45*	**0,0276**
4º	*0,45*	*0,55*	*0,45*	*0,45*	*1*	**0,0501**
5º	*0,45*	*0,55*	*0,45*	*0,55*	*0,45*	**0,0276**
6º	*0,45*	*0,55*	*0,55*	*0,45*	*0,45*	**0,0276**
7º	*0,55*	*0,45*	*0,45*	*0,45*	*1*	**0,0501**
8º	*0,55*	*0,45*	*0,45*	*0,55*	*0,45*	**0,0276**
9º	*0,55*	*0,45*	*0,55*	*0,45*	*0,45*	**0,0276**
10º	*0,55*	*0,55*	*0,45*	*0,45*	*0,45*	**0,0276**

La suma de todas y cada una de las ramas da igual a ***0,4070***

La suma de todas las ramas es **0,4070,** entonces la probabilidad que tiene el equipo B de ganar en la eliminatoria “al primero que llegue a tres” es de 0,4070.

Si nos piden la probabilidad de “el primero que gane tres partidos” es lo mismo que si nos dicen que la eliminatoria es a cinco partidos. Esto es por las propiedades de la combinatoria.

Problema 11 → Probabilidad (Normal)

La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántos estudiantes pesan:

1) *Entre 60 kg y 75 kg.*
2) *Más de 90 kg.*
3) *Menos de 64 kg.*
4) *64 kg.*
5) *64 kg o menos.*

Proceso de resolución

1) ***¿Qué nos piden?***

Antes de nada tendremos que leer con atención el enunciado para sacar de él todos los datos relevantes:

- La media es 70 kg. ($\mu = 70$)
- La población elegida es de 500 ($n = 500$)
- La desviación típica es 3 kg. ($\sigma = 3$)

Y el resto de objetos del texto se refieren a los elementos que tendremos que hallar el número de estudiantes entre:

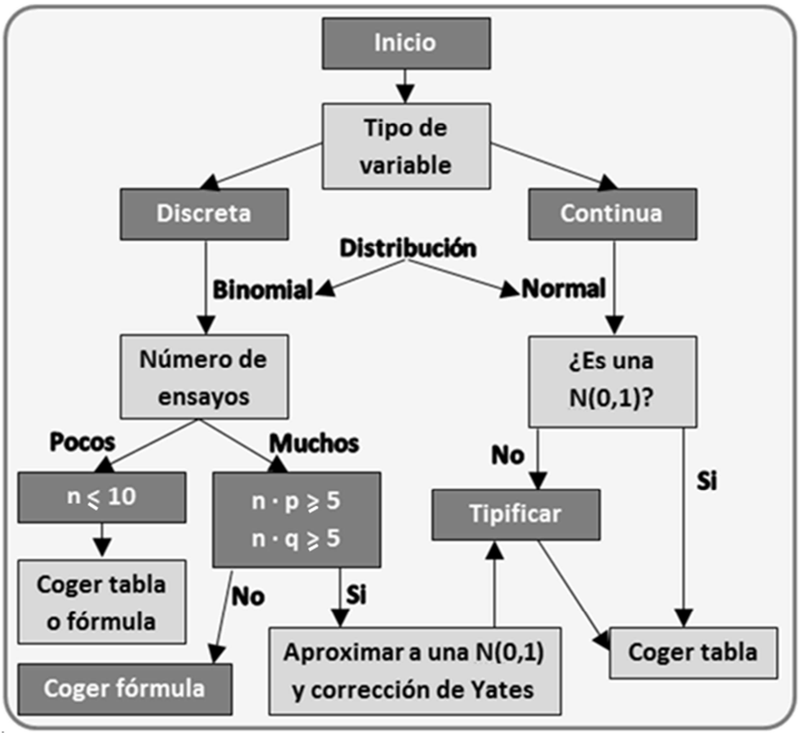
- ($60 \leq X < 75$)
- ($X > 90$)
- ($X < 64$)
- ($X = 64$)
- ($X \leq 64$)

Estos son todos los puntos que tendremos que calcular en el problema

2) ***Conocimientos previos***

Ahora tenemos que "descubrir" qué tipo de distribución sigue el caso que tenemos que resolver. Sigamos el esquema:

Empezamos por el "*Inicio*" y vamos al siguiente recuadro, en el que pone "*tipo de variable*". En este caso, el peso, puede tomar cualquier valor, por ejemplo 51,2345 kg, entonces estamos ante una **variable continua**, y por lo tanto ante una **distribución normal** N (μ, σ).



Seguimos el esquema y nos pregunta “*¿Es una N (0,1)?*” esto significa que la media “µ” es igual a cero (µ = 0) y la desviación típica “σ” es igual a uno (σ = 1). Del enunciado del problema sabemos que la media “µ” es igual a 70 y que la desviación típica “σ” es igual a 3, por lo que **NO es una N (0, 1)**.

La flecha nos dice que será necesario “*Tipificar*”. Tipificar una variable sirve para poder emplear las tablas existentes de las normales estándar, la más general es la N (0, 1) que la que se presenta y con la que trabajaremos. Para tipificar es necesario hacer una transformación que se expone a continuación:

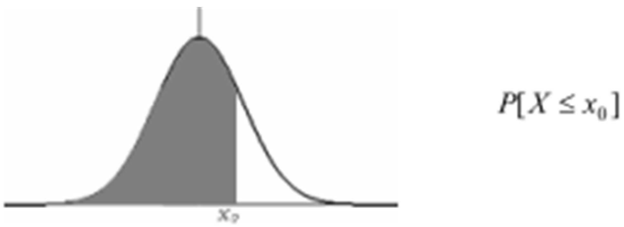
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Describimos sus componentes:

- µ → la media de la distribución
- σ → la desviación típica de la distribución
- X → la variable que pretendemos tipificar o estandarizar
- Z → la variable tipificada o estandarizada

Cuando veamos el ejemplo lo tendremos más claro que ahora.

Seguimos la flecha que sale del cuadro “*Tipificar*” y vamos a “*Coger tabla*”. Esto es porque no emplearemos las fórmulas para obtener la probabilidad en una distribución normal. Cojamos la tabla:



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7704	0,7793	0,7823	0,7652
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133

La primera columna representa el valor de la unidad y la primera cifra decimal de “Z” y la primera fila indica la segunda cifra decimal de “Z”. Por ejemplo, la probabilidad de que Z ≤ 0. Tenemos que ir a la primera columna y buscar “0,0” y después a la primera fila y buscar “0,00” P (Z ≤ 0) = 0,5000. (**Z ha de tener dos cifras decimales**)

Como hemos visto, la tabla nos indica la probabilidad que hay desde “– ∞” hasta “Z”. Al tratarse de una variable continua la probabilidad de que salga un valor concreto es cero. (**Da la probabilidad a la izquierda** y **P (Z = h) = 0**)

La tabla da el valor de la probabilidad para aquellas Z positivas, por lo que hay que hacer algo “especial” si tenemos una Z negativa, que ya veremos más adelante. (**Solo Z ≥ 0**)

3) ¿Cómo podemos resolverlo?

Del proceso anterior, extraemos lo siguiente:

- Es una normal
- n = 500
- Vamos a resolverlo mediante la tabla de la normal N (0, 1)

Para resolverlo, tenemos que:

- **Definir la variable**
- **Definir la normal**
- **Definir la probabilidad que piden**

En el problema:

- Como nos dicen, *"… el peso de los estudiantes…",* definimos como variable "**X = Peso en kg.**"
- Para definir la Normal (μ, σ), necesitamos conocer la media y la desviación típica, como nos las dan en el enunciado solo tenemos que colocarlas **X ∼ N (70; 3)**.
- Como son muchos apartados lo haremos para cada uno de ellos, más adelante.

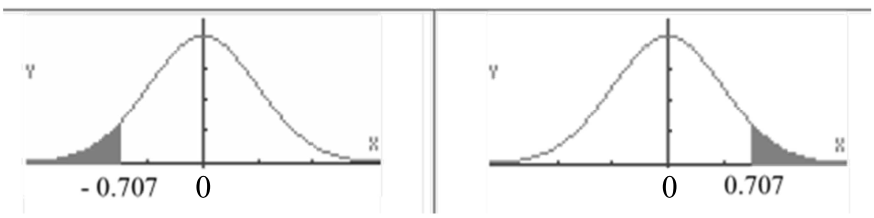
Ahora tenemos que aplicar el esquema en el punto en el que nos quedamos, es decir, en el de tipificar, tipifiquemos el primer apartado del problema (estudiantes con peso entre 60 y 75). Ahora emplearemos el lenguaje matemático.

$$P\ (60\ \leq X < 75) = P\ \left(\frac{60-\mu}{\sigma}\ \leq \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{75-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= P\ \left(\frac{60-70}{3} \leq Z < \frac{75-70}{3}\right) = P(-3{,}33\ \leq Z < 1{,}67)$$

Al interior del paréntesis le hemos **restado** la media "**μ**" y después lo **dividimos por** la desviación típica "**σ**". Esto es hacer una tipificación, por eso **sustituimos** $\boldsymbol{\frac{x-\mu}{\sigma}}$ **por Z** y en el resto hemos realizado las operaciones. Otro aspecto a tener en cuenta es el redondeo a dos cifras decimales ya que la tabla no nos proporciona más. (**Redondear a dos cifras decimales**)

Antes comentamos que la tabla sólo da los valores de la probabilidad a la izquierda y que era necesario realizar una operación "especial" para poder hallar esa probabilidad. Como sabemos que la tabla es simétrica respecto del cero, le quitamos el signo, pero la tabla nos da la probabilidad a la izquierda, por lo que tendremos que hacer el suceso contrario, es decir, **P (Z < p) = 1 – P(Z ≥ p)**



En el ejemplo, P (Z ≤ - 0,707) = P (Z ≥ 0,707) = 1 – P (Z < 0,707)

OJO

Sigamos resolviendo el problema

$$P(-3{,}33 \ \leq Z < 1{,}67) =$$

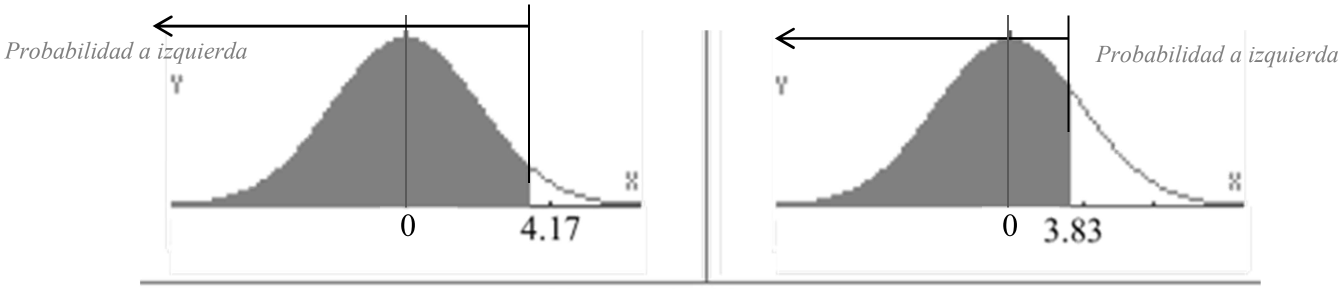
$$= P\ (Z < 1{,}67) - P(Z \leq -3{,}33) =$$

$$= P\ (Z < 1{,}67) - P(Z \geq 3{,}33) =$$

$$= \ P\ (Z < 1{,}67) - (1 - P(Z < 3{,}33))$$

Explicaré que es lo que se ha realizado:

Para disolver el primer paréntesis, nos basamos en la representación gráfica, ya que esta nos da la probabilidad a la izquierda. De esta manera, tenemos que restar la menor, por eso, en la segunda igualdad, cambiamos el orden y restamos la primera. Vamos a ver la imagen:



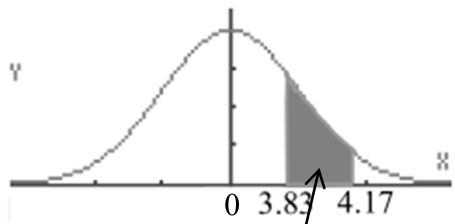
P(Z ≤ 4.17) - P(Z ≤ 3.83)

En este caso es P (3,83 ≤ Z ≤ 4,17) →

Separamos el conjunto, cambiamos el orden

y restamos las probabilidades.

→ P (Z ≤ 4,17) - P (Z ≤ 3,83)



Hacemos esto porque la gráfica de la Normal es <u>simétrica respecto del cero</u>

El resultado de restar el área grande la pequeña es ese y además, es la probabilidad que queremos calcular.

Al hacer el suceso contrario, también tenemos que cambiar el intervalo

OJO

$$P(Z \geq k) = 1 - P(Z < k) \ siendo \ \text{"k"} \ un\ valor\ cualquiera$$

Esto es, porque al incluir "k" en el primer intervalo (por el <u>mayor o igual</u> a "k" (**≥** k)), al hacer el contrario no lo podemos poner en el segundo (todo, menos los <u>menores</u> de "k" (1 – … **<** k)).

Los pasos para resolverlo son:

1) **Deshacer el intervalo, cambiar el orden y restarlos.**
2) **Hacer el simétrico si procede (números negativos).**
3) **Hacer el complementario de los que hicimos simétrico.**
4) **Operar y simplificar.**

Otro ejemplo aplicando los pasos anteriores:

$$P(-2 \leq Z \leq -1) =$$

1º Deshacemos el intervalo, cambiamos el orden y restamos

$$= P(Z \leq -1) - P(Z \leq -2) =$$

2º Hacemos el simétrico de cada uno

$$= P(Z \geq 1) - P(Z \geq 2) =$$

3º Hacemos el complementario de cada uno

$$= (1 - P(Z < 1)) - (1 - P(Z < 2)) =$$

4º Operamos

$$= 1 - P(Z < 1) - 1 + P(Z < 2) =$$

y Simplificamos

$$= P(Z < 2) - P(Z < 1)$$

Volvemos al problema, y recordamos en donde nos habíamos quedado:

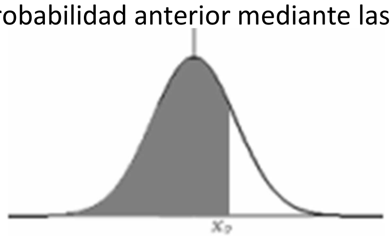
$$= P\,(Z < 1{,}67) - (1 - P(Z < 3{,}33))$$

Hacemos el paso 4º (Operar y simplificar)

$$= P\,(Z < 1{,}67) + P(Z < 3{,}33) - 1$$

Y ahora tenemos que calcular la probabilidad anterior mediante las tablas, veamos como:

1) Cogemos la tabla



$P[X \leq x_0]$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7704	0,7793	0,7823	0,7652
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8364	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8930
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9235	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9762	0,9767
2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9934	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9975	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997

2) Lo hacemos primero para Z < 1,67. Buscamos en la primera columna 1,6

1,5	0,9332	0,9345	0,93
1,6	0,9452	0,9463	0,94
1,7	0,9554	0,9564	0,95
1,8	0,9641	0,9649	0,96
1,9	0,9713	0,9719	0,97

3) Buscamos en la primera fila, la centésima siete (0,07)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

4) Vamos en horizontal y en vertical hasta que se encuentren ambas flechas, y así obtenemos la probabilidad para Z < 1,67

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7704	[illegible]	0,7823	0,7652
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	[illegible]	0,8364	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	[illegible]	0,8810	0,8930
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	[illegible]	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	[illegible]	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9235	0,9251	0,9265	0,9279	[illegible]	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]	0,9429	0,9441
1,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9762	0,9767

Ahora para Z < 3,33

3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	[illegible]	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	[illegible]	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	[illegible]	0,9995	0,9995
3,3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9996	0,9996	0,9997
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Hagamos ahora la operación $P\ (Z < 1{,}67) + P(Z < 3{,}33) - 1 = 0{,}9525 + 0{,}9996 - 1 =$

$$= 1{,}9521 - 1 = \mathbf{0{,}9521}$$

La probabilidad de encontrar a un estudiante que pese entre 60 y 75 es de 0,9521. Pero esto no es lo que nos pide el problema, no dice "… número de estudiantes entre 60 y 75 kg." Por lo que tendremos que <u>multiplicar la probabilidad por el número de estuantes que hay</u> para hallar lo que nos piden (hay 500 estudiantes):

$$0{,}9521 \cdot 500 = \boldsymbol{476{,}05\ estudiantes}$$

Habrá 476 estudiantes que pesen entre 60 y 75 kg (Solo ponemos la parte entera, porque no existen 0,05 personas)

Pasamos al siguiente apartado, que será resuelto de una manera más rápida:

b) X > 90

$$P\,(X > 90) =$$

1º Tipificamos la variable (Restar la media y dividir por la varianza)

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{90-\mu}{\sigma}\right) =$$

2º Sustituir y operar

$$= P\left(Z > \frac{90-70}{3}\right) = P(Z > 6{,}67) =$$

3º Hacer el complementario (La tabla da la probabilidad a izquierda (<))

$$= 1 - P(Z < 6{,}67)$$

4º Calcular la probabilidad

Vamos a la tabla y buscamos en la primera columna 6,60

3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997

En este caso sólo tenemos hasta el Z ≤3,39 con una probabilidad de p = 0,9997, pero estas tablas suelen llegar hasta Z ≤ 3,99 y tiene en ese punto una probabilidad de p = 0,9999. Entonces, para la probabilidad Z ≤ 6,60, la probabilidad ha de ser de p = 1,0000 porque cada vez se aproxima más hacia el 1,0000 y no puede pasar de este. En ese caso:

El número de estudiantes que pesará más de 90 kg. es cero.

c) X < 64

$$P\,(X < 64) =$$

1º Tipificamos la variable (Restar la media y dividir por la varianza)

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{64-\mu}{\sigma}\right) =$$

2º Sustituir y operar

$$= P\left(Z < \frac{64-70}{3}\right) = P(Z < -2) =$$

3º Hacemos el simétrico (No hay negativos en la tabla)

$$= P\,(Z > 2) =$$

4º Hacer el complementario (La tabla da la probabilidad a izquierda (<))

$$= 1 - P(Z \leq 2) =$$

5º Calcular la probabilidad

Vamos a la tabla y en la primera columna buscamos 2,00 y en la primera fila buscamos la centésima cero (0,00). La intersección de ambas, dará la probabilidad.

2,0	0,9773	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2,1	[illegible]	0,9826	0,9830	0,9934	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	[illegible]	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	[illegible]	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

$$= 1 - 0{,}9773 = \mathbf{0{,}0227} \;\rightarrow 0{,}0227 \cdot 500 = \mathbf{11{,}35}\ \boldsymbol{estudiantes}$$

Pesaran menos de 64 kg. es de 11 estudiantes

d) X = 64 → Dijimos que P (Z = h) = 0→ Entonces **Ningún estudiante pesa 64 kg.**

e) X ≥ 64 → Como ya calculamos X < 64, este es el complementario, es decir:

$$1 - 0{,}0227 = \mathbf{0{,}9773} \rightarrow 0{,}9773 \cdot 500 = \mathbf{488{,}65}\ \boldsymbol{estudiantes}$$

Entonces, **habrá 488 estudiantes que pesen más de 64 kg.**

Problema 12 → Probabilidad (Aproximación a la normal)

Un tirador acierta en el blanco el 70 % de sus tiros. Si el tirador participa en una competición y tira 20 veces, ¿cuál es la probabilidad de que acierte más de 10 tiros?

Proceso de resolución

1) ¿Qué nos piden?

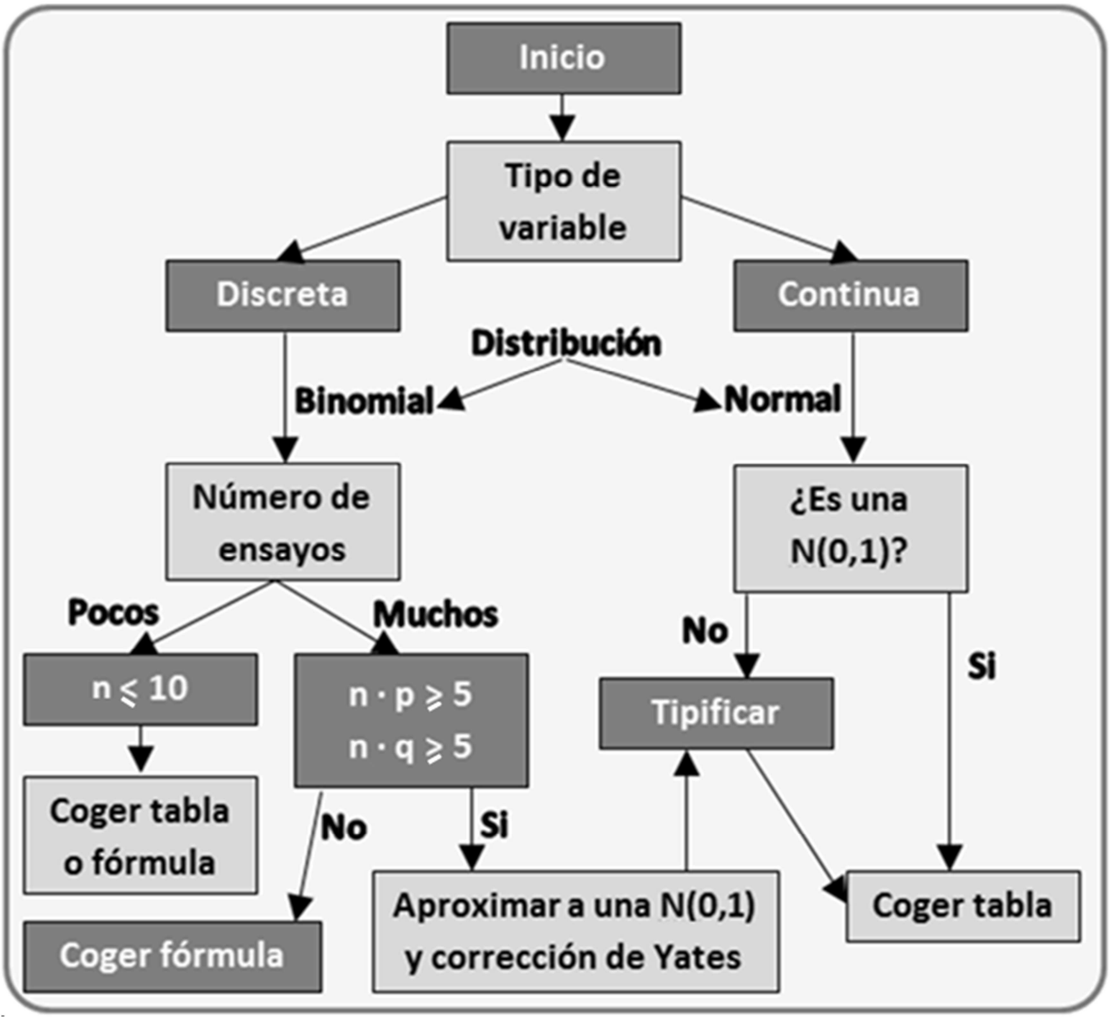
Analicemos el enunciado detenidamente

- Acierta el 70% de las veces (p = 0,70)
- Tira 20 veces

Y la pregunta del problema es "*¿cuál es la probabilidad de que acierte más de 10 tiros?*" por lo que nos pide que hallemos la probabilidad de que acierte más de 10 veces.

2) Conocimientos previos

Partimos de los conocimientos expuestos en el problema 10, aunque seguiremos lo fundamental. Cogemos el gráfico inicial para determinar la distribución y qué debemos hacer.



Vamos al "*Inicio*" y avanzamos a "*Tipo de variable*". Como no puede tomar valores intermedios estamos ante una **variable discreta** y por lo tanto, tenemos una **distribución binomial**. Seguimos la flecha y el siguiente cuadrado nos dice "*Número de ensayos*" que diferenciaba entre "*pocos*" o "*muchos*" en este caso son más de 10 por lo que consideramos que son **muchos** y nos indica que tenemos que hacer "*n · p*" y "*n · q*".

Veamos cuáles son "n", "p" y "q" en el problema.

- n → número de experimentos o ensayos, en este caso 20 tiradas. **n = 20**
- p → la probabilidad de éxito del experimento (en tanto por uno). En este caso 70% de acertar. **p = 0,70**
- q → es 1 – p, entonces q = 1 – 0,7 = **0,3 = q**

Realicemos la comprobación que nos indica el recuadro:

$$n \cdot p = 20 \cdot 0{,}70 = 14$$

$$n \cdot q = 20 \cdot 0{,}3 = 6$$

Cumple, por lo que seguimos por la flecha de "**SI**" y llegamos a un recuadro que nos dice "*Aproximar a una N (0,1) y Corrección de Yates*". Una vez hecho esto, tenemos que "tipificar" y "coger la tabla" cosas que ya hicimos y se explicaron en el problema 11. Pero lo primero es explicar eso de "*Aproximar a una N (0,1) y Corrección de Yates*"

Aproximar a una N (0, 1)

Se dijo anteriormente que una distribución normal estaba definida por su media "μ" y su desviación típica "σ" y se representaba como N (μ, σ), pues cuando "n" es grande, resulta que la binomial se puede aproximar a una normal (La demostración es bastante compleja), cuya media "μ" es igual a "n" por "p" (μ = n · p) y su desviación típica "σ" es igual a la raíz de "n" por "p" y por "q" ($\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$) y se define como B (n, p) ≈ N (*n · p*, $\sqrt{n \cdot p \cdot q}$)

Corrección de Yates

Hay que tener en cuenta que en esta aproximación pasamos de una distribución con variables discretas a una distribución con variables continua. En las variables continuas, un valor concreto tendrá una probabilidad igual a cero y es por eso que tendremos que corregir. Consiste en:

$$P(X = k) = P\ (k - 0{,}5\ \leq X\ \leq k + 0{,}5) =$$

$$= P\ (X\ \leq k + 0{,}5) - P(X\ \leq k - 0{,}5)$$

Con un ejemplo lo vemos mucho más claro. Si tiramos un dado, nos puede salir: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 y si tiramos muchas veces, lo que era una binomial se transforma en una normal. Si nos piden la probabilidad de que salga 5, tenemos:

$$P(X = 5) = P\ (5 - 0{,}5\ \leq X\ \leq 5 + 0{,}5) =$$

$$= P\ (X\ \leq\ 5{,}5) - P(X\ \leq\ 4{,}5)$$

3) ¿Cómo podemos resolverlo?

Del enunciado sabemos que:

- Es una binomial que tenemos que aproximar a una normal
- n = 20
- Tenemos que resolver a través de la tabla de la normal

Para resolverlo, primero tenemos que:

- **Definir la variable**
- **Definir la binomial y después la normal aproximada**
- **Definir la probabilidad que piden**

En el problema:

- Como nos dicen, "*…probabilidad de que acierte más de 10 tiros?*", definimos como variable "X = **Acertar en tiro**"
- Para definir la Binomial, tenemos que analizar el número de ensayos y la probabilidad de los mismos, porque la binomial se define así B (n, p). Sabemos que n = 20 porque se tiran esas veces y la probabilidad es de 0,70 y ahora ya podemos definirla **X ∼ B (20; 0,70)**. Para realizar la aproximación a la normal, tenemos que saber que la normal se define como N (μ, σ) y que con la aproximación, la normal tambien tiene una media (μ = n · p) y una desviación típica ($\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$) y que se define como B (n, p) ≈ N ($n \cdot p$, $\sqrt{n \cdot p \cdot q}$), entonces, sustituyendo los valores **B (20, 0,70)** ≈ N (*20 · 0,70*, $\sqrt{20 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}3}$) = **N (14, 2,05)**
- Al decir que hallemos la probabilidad de acertar más de 10 tiros, no incluimos el 10, si nos hubieran dicho "… acertar 10 o más tiros" entonces si lo incluiríamos. Tenemos que calcular **P (X > 10)**, pero antes tenemos que corregirla por Yates.

$$P\ (X > 10 + 0{,}5) = P\ (X > 10{,}5)$$

Como nos piden más de 10, no podemos restarle 0,5, solo tenemos que sumar para seguir dentro del intervalo que nos dice de mayor que 10.

$$P\ (X > 10{,}5) =$$

1º Tipificamos la variable
(Restar la media y dividir por la varianza)

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{10{,}5-\mu}{\sigma}\right) =$$

2º Sustituir y operar

$$= P\left(Z > \frac{10{,}5 - 14}{2{,}05}\right) = P(Z > -1{,}71) =$$

3º Hacemos el simétrico (No hay negativos en la tabla)

Para calcularlo, tendremos que ir a las tablas de la normal, vayamos pues:

Vamos a la tabla y en la primera columna buscamos 1,70 y en la primera fila buscamos la centésima uno (0,01). La intersección de ambas, dará la probabilidad.

1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	[illegible]	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	[illegible]	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	[illegible]	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9762	0,9767
2,0	0,9773	[illegible]	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

$$= P\ (Z < 1{,}71) = \mathbf{0{,}9564} \ \rightarrow 0{,}9564 \cdot 20 = \mathbf{19{,}128\ aciertos}$$

Acertará 19 de los 20 tiros que haga