

UNIVERSIDAD DE BURGOS

PROGRAMA INTERNACIONAL DE DOCTORADO

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS



UNIVERSIDAD DE BURGOS

TESIS DOCTORAL

“La Enseñanza de la Mecánica Cuántica en la Escuela Media”

MARIA DE LOS ÁNGELES FANARO

Burgos, Julio de 2009

**PROGRAMA INTERNACIONAL DE DOCTORADO
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS**

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS



UNIVERSIDAD DE BURGOS



**UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO
GRANDE DO SUL**

TESIS DOCTORAL

“La Enseñanza de la Mecánica Cuántica en la Escuela Media”

Tesis Doctoral realizada por **María de los Ángeles Fanaro** para optar por el título de Doctor por la Universidad de Burgos, bajo la dirección del **Dr. Marco Antonio Moreira**, y la Co-Dirección de la **Dra. Maria Rita Otero**.

Burgos, Julio de 2009

Agradecimientos

A la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, y a la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN, por la formación que allí recibí, y por haber colaborado en el subsidio de la realización del Doctorado.

A la Universidad de Burgos, y a los coordinadores del Programa de Doctorado, por la posibilidad brindada por y abrirnos generosamente sus puertas. En particular agradezco a Concesa, por su trabajo constante, su amabilidad y predisposición para resolver todos los problemas planteados.

A mis directores, Dr. Marco Antonio Moreira y Dra. María Rita Otero, por la posibilidad de realizar esta Tesis:

Al Profesor Marco, por confiar en mí, por darme la oportunidad de concretar el sueño de mi doctorado y por darme la posibilidad de realizar esta Tesis. Por animarme en la realización del proyecto, por señalarme senderos para recorrer, por compartir generosamente su conocimiento. Por transmitir su pasión por la enseñanza.

A la Profesora Maria Rita, le debo su constante apoyo en toda mi formación, la oportunidad que me brinda siempre para caminar hacia adelante. Agradezco sus enseñanzas, su confianza, sus conversaciones, sus incontables horas de lectura y corrección, su manera apasionada de compartir conocimiento. Por sus consejos, y su aliento, por su aceptación, por la paciencia ante mis frases “enroscadas” ¡gracias Rita!

Al Dr. Marcelo Arlego (“Pini”), por cederme generosamente su idea acerca de que la técnica de Caminos Múltiples se podía adoptar y adaptar para enseñar una física distinta a los estudiantes de la escuela. Por auxiliarme siempre que tuve dudas acerca de las cuestiones físicas, por tantas horas de conversación acerca de la Física, aún a miles de kilómetros de distancia, por sus correcciones y sus valiosas sugerencias.

A la Directora del Departamento de Formación Docente, la Profesora Inés Elichiribehety, por su constante ánimo, su apoyo, su confianza en todo lo que he comenzado. Por su dulzura y su comprensión en todo momento.

Al Colegio Sagrada Familia de Tandil, a los Directivos, quienes autorizaron la implementación de la propuesta, y a los estudiantes que la aceptaron y colaboraron generosamente con los registros.

A Mariana, quien colaboró en revisión minuciosa de la secuencia y en la recolección de los archivos de audio durante la implementación. Por animarse a replicar la secuencia en sus cursos de Física.

A Leo, a quien he recurrido más de una vez, para intentar solucionar los problemas de cálculo surgidos con las simulaciones.

A mi compañera de oficina y amiga Ana, por escucharme pacientemente (tanto en los momentos de reniegues como en los de alegría) y hacer sus valiosos aportes y sugerencias acerca de las cuestiones “estéticas” de esta presentación.

A mis compañeras y colegas Caro, Vero, Pato y Vicky, quienes comparten generosamente su amistad día a día con una sonrisa en nuestro ámbito laboral, siempre mate mediante, por su aliento constante.

A mis amigos “teclas” Euge y Seba, que siempre están dispuestos a auxiliarme en los problemas informáticos.

A mi hermano Fabio quien sembró en mí la semilla del amor por la ciencia, por el conocimiento.

A Dalia, por su hermosa amistad, por su sentido del humor, por las horas compartidas cuando cursamos juntas en Burgos....por su aliento en nuestras conversaciones “virtuales”.

A mi familia, en especial a madres y padres, naturales y políticos. A los que están aquí por su amor, su paciencia, y su apoyo. A los que sólo quedaron en mi corazón, por el legado de la idea del amor y el respeto por la vida. En especial, agradezco enormemente a mi madre, Dora, por su infinito amor, por el apoyo incondicional durante todo el tiempo. A todos ellos, por el ánimo, por el aguante y por el amor que me brindan.

A mi esposo y gran amigo Néstor por caminar siempre a mi lado, por escucharme y acompañarme pacientemente en cada momento, por ofrecerme una perspectiva alternativa a mis planteos, por dibujarme siempre una sonrisa, aun en momentos difíciles. A mi hija Milagros, que como un verdadero milagro de la vida, entre risas y sonrisas me enseña a cada momento, y con la grandeza que encierra en su pequeñez, que la vida es maravillosa.

*A quienes aman sin condición,
y no se rinden jamás*

ÍNDICE

Resumen.....	1
Abstract.....	3
Capítulo 1: Introducción y presentación del problema.....	5
Formulación del problema.....	5
La importancia de estudiar Mecánica Cuántica en la escuela.....	6
Objetivos	8
Preguntas.....	9
Revisión de la literatura.....	10
Capítulo 2: Marco teórico.....	17
Introducción.....	17
Fundamentos Cognitivos: La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud.....	18
Fundamentos Didácticos.....	22
Fundamentos Epistemológicos.....	31
Fundamentos Físicos: el enfoque de Feynman de la Mecánica Cuántica.....	32
El enfoque de “ <i>Caminos Múltiples</i> ” en la reconstrucción de la Estructura Conceptual de Referencia.....	39
Capítulo 3: Metodología.....	43
Introducción.....	43
Primera fase: Reconstrucción de la Estructura Conceptual de Referencia.....	44
Segunda fase: Diseño de la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar y análisis a priori.....	44
Tercera fase: Implementación de la secuencia en el aula y reconstrucción de la Estructura Conceptual Efectivamente Reconstruida.....	45
Síntesis de las fases de la Investigación.....	51
Capítulo 4: La Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar fundamentos de Mecánica Cuántica.....	53
Introducción.....	53
Diseño de la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar y análisis a priori.....	54
Etapa 1- Experiencia de la Doble Rendija (EDR) con bolillas y con electrones	54

Situación 1: “Imaginando la Experiencia de la Doble Rendija con bolillas”	54
Situación 2: “Simulación de la EDR con software”	59
Etapa 2- Análisis y aplicación de la técnica Sumar Todas las Alternativas (STA)	
para electrones libres	67
Situación 3: “Presentación de la técnica Sumar Todas las Alternativas”	67
Situación 4: “Análisis de la transición cuántica-clásica: del electrón a las partículas libres”	76
Etapa 3- Aplicación de la STA para reconstruir el diagrama de la EDR	
con electrones	79
Situación 5: “Reconstrucción del diagrama obtenido en la EDR”	79
Etapa 4- Análisis de la transición clásica-cuántica en la EDR	82
Situación 6: “Análisis de la transición cuántico-clásico”	82
Comentarios finales acerca del diseño y el análisis a priori.....	88
La secuencia de situaciones.....	89
Capítulo 5: La Estructura Conceptual Efectivamente Reconstruida	115
Introducción.....	115
Estudio 1: Análisis de la conceptualización	116
Análisis de las situaciones y los teoremas en acto.....	116
Síntesis acerca de los teoremas en acto en las situaciones.....	176
Análisis de la evaluación final.....	180
Conclusiones acerca de la conceptualización.....	196
Estudio 2: Descripción de los aspectos afectivos del Grupo de Clase	199
Descripción de los aspectos afectivos a partir de los protocolos durante el desarrollo de las situaciones.....	199
Descripción de los aspectos afectivos al finalizar la implementación.....	207
Conclusiones acerca de los aspectos afectivos	214
Acercas de las nuevas implementaciones	214
Capítulo 6: Reflexiones finales y perspectivas	221
Capítulo 7: Bibliografía	231
Anexo	239

Resumen

Esta Tesis aborda el problema de la enseñanza de conceptos fundamentales de Mecánica Cuántica en la escuela media. Se elabora una estructura conceptual de referencia relacionada con el enfoque de la Mecánica Cuántica de Feynman “Path Integrals” o “Caminos Múltiples”, que es alternativo y complementario al enfoque canónico. Su potencial reside en que permite prescindir del desarrollo estrictamente histórico y tradicional, que se adopta usualmente en la enseñanza. Se parte de la Física Clásica -cuyos conceptos son familiares a los estudiantes- y se analiza y fundamenta la transición entre la mecánica cuántica y la clásica. Así, se estudia como enseñar el concepto de sistema cuántico y los Principios de Superposición y de Correspondencia. La formulación matemática de la Integral de Camino se adapta al conocimiento matemático de los estudiantes empleando un marco geométrico-vectorial. La técnica se aplica para explicar los resultados que se obtienen en la Experiencia de la Doble Rendija (EDR). La elección de este ejemplar permite la emergencia de las ideas de los estudiantes - electrones como “pequeñísimas bolillas”- y muestra como el concepto de sistema cuántico asociado a la técnica de *Path Integrals* explica la distribución de probabilidad de los electrones, que no puede derivarse desde las ideas clásicas de los estudiantes. El estudio didáctico previo, conduce a la elección del caso del electrón libre como un ejemplar que reúne las características de los sistemas cuánticos, y permite aplicar la técnica a la disposición experimental de la EDR, de manera relativamente sencilla. Se logra modelizar la curva de probabilidades obtenida experimentalmente y explicar el patrón de interferencia. El diseño de la propuesta requiere la generación de situaciones que emplean software de simulación y la generación de nuevas simulaciones con *ModelusTM*. Se realiza un análisis didáctico *a priori* para anticipar la mayor cantidad de posibles acciones de los estudiantes y del profesor. Se adoptan los lineamientos didácticos propuestos en Otero (2006; 2007) que integran la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990), la Teoría del Aprendizaje Significativo (Ausubel, 1963, 1968; Novak, 1982; Gowin, 1981; Novak & Gowin, 1984); la Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico (Moreira, 2000) y las ideas sobre emociones, conocimiento y lenguaje de Maturana (1995). Uno de los resultados de este trabajo es la generación de un producto didáctico para enseñar nociones cuánticas fundamentales en la Escuela Media. El producto se implementó en un curso de Física del último año y se analizaron los resultados registrando la totalidad de las clases en formato de audio y recogiendo todas las producciones escritas de los estudiantes. Se estudió la conceptualización utilizando la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990). Se analizaron los aspectos afectivos, los estudiantes aceptaron la forma de trabajo propuesta –muy distinta a la habitual-, aceptaron las situaciones sin sentirse superados por ellas, enfrentaron los desafíos y fueron capaces de realizar el esfuerzo cognitivo y afectivo necesario. Un grupo amplio de estudiantes aceptó las explicaciones relativas al electrón como sistema cuántico, y los principios de superposición y de correspondencia entre la Mecánica Cuántica y la Mecánica Clásica. La secuencia fue nuevamente implementada y adaptada a contextos diferentes. Por todo lo expuesto se concluye que la secuencia es viable en el último año de la enseñanza media. Finalmente, se realizan algunas consideraciones acerca del tratamiento escolar de la mecánica clásica, que podría modificarse para colaborar con la introducción de conceptos cuánticos hacia el final de la escolaridad.

Palabras-clave: Propuesta didáctica- Enseñanza Media- Mecánica Cuántica- Caminos Múltiples de Feynman- Conceptualización- Viabilidad

Abstract

This Thesis approaches the problem of the teaching of fundamental concepts of Quantum Mechanics in high school. A conceptual structure of reference related to the viewpoint of the Quantum Mechanics of Feynman “Path Integrals” or “Multiple Path” is elaborated, that is alternative and complementary to the canonical method. Its potential resides in which it allows to avoid the strictly historical and traditional development that is usually adopted in education. Beginning from the Classic Physics - whose concepts are familiar to the students- the transition between the quantum mechanics and the classic one is analyzed and based. Thus, that is how it is studied the way of how to teach the concept of quantum system and the Principles of Superposition and Correspondence. The mathematical formulation of the Path Integral adapts to the mathematical knowledge of the students using a geometric-vector frame. The technique is applied to explain the results that are obtained in the Double Slit Experience (DSE). The election of this sample allows the emergence of the ideas of the students - electrons as “the smallest balls”. Moreover, it shows how the concept of quantum system associates to the technique of Path Integrals explains the probability distribution of electrons, that it cannot be derived from the classic ideas of the students. The previous didactic study leads to the election of the case of the free electron like a sample that reunites the characteristics of the quantum systems, and allows applying the technique to the experimental disposition of the DSE quite simply. It is managed to model the curve of probabilities experimentally obtained and to explain the interference pattern. The design of the proposal requires the creations of situations that use simulation software and the generation of new simulations with *ModelusTM*. The previous didactic analysis is realised to anticipate the most possible the actions of the students and the professor. The proposed didactic guidelines in Otero are adopted (2006; 2007) that integrates Fields Concepts Theory (Vergnaud, 1990), the Meaningful Learning (Ausubel, 1963, 1968; Novak, 1982; Gowin, 1981; Novak & Gowin, 1984); the Subversive Meaningful Learning Theory (Moreira, 2000) and the relationships between emotions, knowledge and language according to Maturana (1995). One of the results of this work is the generation of a didactic product to teach fundamental quantum concepts and principles in the high school. The didactic product was implemented in a course of Physics of the last year in the high school and the results were analyzed recording the totally of classes in format of audio and collecting all the written records of the students. The conceptualization was studied using the Theory of the Conceptual Fields of Vergnaud (1990). The affective aspects were analyzed, the students accepted the propose form of work - very different from the habitual one, they accepted the situations without feeling overwhelmed by them, they faced the challenges and they were able to do the necessary mental and affective effort. The majority of the students accepted the explanations regarding the electron like quantum system, and the superposition principle and correspondence principle between the Quantum mechanics and the Classic Mechanics. The sequence was implemented again and adapted to different contexts. Regarding the above one concludes that the sequence is viable in the last year of high school. Finally, some considerations are done about the scholastic treatment of the classic mechanics that could be modified to collaborate with the introduction of quantum concepts towards the end of the high school.

Keywords: didactic proposal; high school, quantum mechanics; Feynman's multiple paths; conceptualization; viability.

Capítulo 1: El problema y sus antecedentes

En este capítulo se delimita y justifica el problema de la Investigación. Se realiza la revisión de la literatura, y se plantean los objetivos de la investigación y las preguntas que la orientan.

Formulación del problema

Las investigaciones internacionales acerca de la enseñanza de la Física (Cuppari, Rinaudo, Robutti, y Violino, 1997; Fischler y Lichtfeldt, 1992; González, Fernández, y Solbes, 2000; Greca, Moreira y Herscovitz, 2001; Hanc y Tuleja, 2005; Jorge Cabral de Paulo y Moreira, 2004; Montenegro y Pessoa, 2002; Moreira y Greca, 2000; Müller y Wiesner, 2002; Niedderer, 1996; Olsen, 2002; Osterman y Moreira, 2000; Ostermann y Ricci, 2004; Pessoa, 1997; Pinto y Zanetic, 1999; Taylor, Vokos, O'Mearac y Thornberd, 1998; Taylor, 2003; Zollman, 1999) y los programas curriculares de muchos países, proponen el tratamiento escolar de los conceptos fundamentales de la teoría cuántica (Lobato y Greca, 2005). En Argentina, la propuesta curricular para la asignatura Física tiene entre otros objetivos, la comprensión y descripción de los conceptos fundamentales de Física Moderna y Contemporánea.

Sin embargo, el estudio de los conceptos cuánticos no forma parte de la cultura escolar acerca de la Física, y los alumnos interesados tienen que recurrir exclusivamente a fuentes extraescolares. ¿Por qué razón, los profesores desestiman las directivas curriculares y se resisten a enseñar Mecánica Cuántica en la escuela? Sin pretensión de exhaustividad, podrían mencionarse las siguientes razones:

- El desconocimiento de los conceptos cuánticos.

Suele considerarse que en comparación con los tópicos de la física clásica, los conceptos de la Mecánica Cuántica están demasiado alejados de las percepciones cotidianas. Es cierto que estos últimos desafían ciertas nociones que hemos naturalizado a partir de las observaciones cotidianas del mundo a escala macroscópica. Sin embargo, no hay razones para que el comportamiento del mundo atómico y subatómico deba seguir las mismas pautas que los objetos de la experiencia diaria, siendo este, un hecho que por sí solo justifica incluirlo en la enseñanza. Por otro lado, como ha sido mostrado en investigaciones que destacan las serias dificultades de los estudiantes con la física clásica – las leyes del movimiento de Newton- los calificativos “difícil y abstracto” también se aplican a los conceptos de la Física Clásica, además de a los conceptos cuánticos.

- La complejidad matemática involucrada.

Suele considerarse que la física en general y la contemporánea en particular, sólo puede ser formulada, comprendida y enseñada en términos de conceptos matemáticos. También se asume que su potencialidad explicativa sólo puede apreciarse a través de un buen manejo del formalismo. Por lo tanto, en las escasas propuestas que intentan introducir la física cuántica en la escuela, predomina el formalismo matemático que oculta los principios fundamentales en un pequeño conjunto de ecuaciones matemáticas “relativamente sencillas”. Como los estudiantes acaban por aprender dichas ecuaciones mecánicamente, se

producen fenómenos de pérdida de significado, que desalientan la incorporación de la física en general y de la física cuántica en particular.

- La formación del profesor

Según reporta la investigación de González, Fernandez y Solbes, (2000) los profesores declaran haber estudiado durante su formación, tópicos que se corresponden con los índices de los libros de introducción a la física moderna general. En orden cronológico, entre ellos se encuentran: la radiación de cuerpo negro, el átomo de Bohr, el efecto fotoeléctrico, la dualidad onda partícula, la ecuación de Schrödinger, etc. Es decir, los profesores reflejan un adecuado conocimiento “informativo” de los tópicos desarrollados en la etapa anterior a Bohr, pero lo que en ellos prevalecen son nombres y cuestiones fragmentadas e inconexas. Por lo tanto, estos investigadores consideran que *“los profesores tienen visiones reduccionistas, donde los conceptos cuánticos aparecen asociados con ideas clásicas y no del todo diferenciados de ellas”*. Esto señala una seria limitación en los procesos de enseñanza.

- La propuesta de los libros de texto

Los libros de texto son los medios a disposición de los profesores para reconstruir el saber y volverlo objeto de enseñanza. A raíz de que los libros, tanto los dirigidos a los estudiantes como los de consulta para el profesor, presentan los conceptos de una manera que refleja los aspectos mencionados previamente, tampoco resulta alentador el tratamiento escolar de la Mecánica Cuántica. En otras palabras, se trata de un saber que así planteado “no vive” en el ámbito escolar, mientras sí parecieran ser “ecológicamente viables” estructuras conceptuales relativas a física clásica.

La importancia de estudiar Mecánica Cuántica en la Escuela

¿Por qué es necesario estudiar nociones de Mecánica Cuántica en la escuela? Para responder a esta pregunta bastaría mencionar que toda la tecnología actual se basa directa o indirectamente en la Mecánica Cuántica. Por citar solo algunos ejemplos, la Física Cuántica fundamenta la electrónica basada en semiconductores, el láser y la tecnología nuclear. Además, la Mecánica Cuántica juega un rol central en el desarrollo de tecnologías actuales como la computación cuántica y la nanotecnología. Adoptar la importancia de la Mecánica Cuántica como conocimiento culturalmente valioso, constituye un criterio para introducir su estudio en la escuela media, pero además deben considerarse:

- Las implicaciones filosóficas y epistemológicas de la Mecánica Cuántica, que han modificado la concepción del proceso de medición y de predicción en Física. Incluso no existe una única interpretación de la Mecánica Cuántica que sea universalmente aceptada entre la comunidad de los físicos y filósofos de la ciencia.
- Desde el punto de vista del conocimiento básico, la Mecánica Cuántica, por un lado es la base de la química y por lo tanto es imprescindible para una comprensión de la estructura de la materia a escala macroscópica. Por ejemplo, sin la Mecánica Cuántica, no es posible comprender las propiedades de los metales. Por otro lado, la Mecánica Cuántica, junto con la teoría de la relatividad, provee el marco adecuado para describir las interacciones fundamentales a nivel sub-nuclear y a energías arbitrarias a través del modelo estándar. Incluso teorías aún especulativas acerca de la unificación de todas las interacciones (incluida la gravedad), como lo es la teoría de cuerdas, no contradicen los principios de la Mecánica Cuántica.

- El advenimiento de la Mecánica Cuántica constituye un hito en el desarrollo intelectual de la humanidad, y en consecuencia, la escuela es un ámbito apropiado para invitar a que los estudiantes la conozcan. El conocimiento básico de dicha revolución debería integrar el bagaje cultural de una población educada y desarrollada, al igual que la literatura, la matemática o la economía política. La Mecánica Cuántica incide en diversos campos de la actividad cognitiva y obliga a reformular explicaciones y conceptos muy arraigados en la experiencia cotidiana. La conceptualización de un sistema cuántico requiere ingresar en un nuevo dominio explicativo y aceptar categorías que desafían a las originadas en la experiencia macroscópica, acerca del comportamiento ondulatorio y corpuscular como mutuamente excluyentes.
- La idea de que el observador está involucrado en aquello que observa, es decir, que sus distinciones no aluden a un mundo pre-dado independiente de él, ha sido reconocida hace tiempo en la filosofía de las ciencias y supone la renuncia a fundamentos últimos para el conocimiento. El advenimiento de la Mecánica Cuántica, introduce limitaciones fundamentales acerca de la precisión con que pueden medirse ciertas magnitudes en un sistema cuántico. Este aspecto se formaliza en el principio de incerteza, el cual desafía los pre-conceptos formados sobre el rol del observador y el sistema analizado. Dicho principio, es una manifestación del abandono del carácter determinístico de la física clásica por una teoría que provee solo la probabilidad de un evento dado, considerando ciertos estados inicial y final. En física clásica naturalizamos la idea de que los sistemas físicos tienen ciertas propiedades, y que así, diseñamos y llevamos a cabo experimentos como si nos brindaran información de ese sistema físico pre-existente. En física cuántica, es la conjunción de un sistema cuántico y un mecanismo de medición lo que nos brinda un resultado definitivo. Ya que diferentes mediciones proporcionan resultados incompatibles con características del sistema que son pre-existentes, no podemos entonces definir ninguna clase de realidad física a menos que describamos el sistema físico que estamos investigando y el tipo de medición que estamos llevando a cabo sobre ese sistema. Esta conclusión puede resultar asombrosa a la intuición, ya que la cotidianidad y hasta la educación formal escolar se ha basado en la premisa de la existencia de una realidad externa, objetiva y definitiva, sin importar cuánto o cuán poco conociéramos de ella. Es muy contraintuitivo aceptar que la “realidad” de algo se materializa en el acto de medir-observar, y que hasta tanto eso no ocurre, no existe realidad.

Estudiar los conceptos y principios que rigen el comportamiento cuántico en la escuela media, es indispensable para conjurar el fracaso social -entendido como resignación del saber- que reduce la física escolar a contenidos de una física anterior a 1900. Pero ¿qué clase de aproximación al “mundo cuántico” se puede proporcionar a los estudiantes de la escuela media? En este trabajo sólo se propone estudiar ciertos conceptos fundamentales en la Mecánica Cuántica, razón por la cual se adopta, analiza y discute el “Método de Caminos Múltiples” de Feynman (1949). En base a este enfoque, se diseña una propuesta para enseñar los aspectos fundamentales de la Mecánica Cuántica en la escuela secundaria.

Esta propuesta permite prescindir de la adopción de un enfoque estrictamente histórico para la organización de los conceptos. Entendemos como estrictamente histórica, a la estructura tradicional que proponen buena parte de los textos y planes de estudio de la denominada “física moderna” –aunque ya tenga más de cien años-. La manera histórica habitual trabaja sobre los problemas que clásicamente no podían explicarse: el problema del cuerpo negro, el problema del efecto fotoeléctrico y el problema del tamaño de los átomos. Quizás, este seguimiento predominantemente histórico se relacione con el hecho de que cuando los textos que aún se usan fueron editados, la construcción de la teoría cuántica tenía apenas

veinte años. Cuando se trata de enseñar aspectos fundamentales de mecánica cuántica a estudiantes que no disponen de un sistema de conceptos previos sólidos en el cual anclar los nuevos conceptos, parece inadecuado reconstruir fielmente los vaivenes atravesados por la física hasta llegar al conocimiento compartido actualmente. Esta postura se basa en que las soluciones de Planck al problema de la radiación del cuerpo negro, las de Bohr y de Broglie a la estabilidad del átomo, y las de Einstein al efecto fotoeléctrico, solo insinúan la necesidad de plantear respuestas a problemas que no podían contemplarse desde la física conocida hasta el momento, pero sin tener una teoría coherente que respalde las hipótesis “ad hoc” que ellos propusieron. Cuando Planck postuló la cuantización de la energía radiada, no pensaba que había abierto las puertas de una nueva física. Por el contrario, él solo atribuyó a los cuantos el carácter de artilugio matemático, sin significación física genuina, y abrigó la esperanza de que estaba frente a un enigma –resoluble dentro de la física clásica- y no frente a una anomalía. En consecuencia, la reconstrucción estrictamente histórica, no resalta los aspectos fundamentales de la Mecánica Cuántica. Eso no implica excluir a la historia de la física para contextualizar el nuevo conocimiento y considerar dimensiones sociales, filosóficas, políticas, etc., que nos permiten reflexionar acerca de la ciencia, sus características, sus dificultades, su falibilidad.

Objetivos

• Objetivos Generales

1. Analizar y discutir el estado actual de la Enseñanza de la Mecánica cuántica en la escuela media.
2. Reconstruir una Estructura Conceptual de Referencia¹ para la Mecánica Cuántica.
3. Diseñar y analizar una Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar² los fundamentos de la Mecánica Cuántica en la escuela media, para sortear algunos de los obstáculos relativos a la enseñanza/aprendizaje reportados en las investigaciones del área de investigación.
4. Implementar la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar en un curso de Física de escuela media, y analizar su funcionamiento.
5. Realizar contribuciones al conocimiento acerca de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Mecánica Cuántica en la Escuela Media.

• Objetivos Específicos

- 1- Reconstruir la Estructura Conceptual de Referencia de la Mecánica Cuántica basada en el enfoque Caminos Múltiples de R. Feynman.

¹ Estructura Conceptual de Referencia (ECR) se define como “*un conjunto de conceptos, las relaciones entre ellos, los principios, las afirmaciones de conocimiento y las explicaciones relativas a un campo conceptual, aceptados por la comunidad científica de referencia*” Otero (2007; 2008)

² Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar (ECPE), se define como “*el conjunto de conceptos, relaciones entre ellos, afirmaciones de conocimiento, principios, y explicaciones relativos a un cierto campo conceptual, que debe ser reconstruido a partir de la ECR con el objeto de transformarla en reconstruible en un contexto y en una institución dada*” (Ibíd.) Ambos constructos se encuentran detallados en el Capítulo 2, dedicado al Marco Teórico

- 2- Diseñar y analizar³ una Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar (Otero 2006; 2007) los fundamentos de la Mecánica Cuántica en la escuela media.
- 3- Implementar la propuesta en un curso de Física del último año de la escuela media, y estudiar los procesos de conceptualización, a partir de la identificación de los Invariantes operatorios (Vergnaud, 1990).
- 4- Describir y analizar los aspectos afectivos de los estudiantes, durante y al finalizar la implementación.
- 5- Formular conclusiones acerca de las condiciones de posibilidad y reproducibilidad de la secuencia.

Preguntas

- **Cuestiones de interés generales**

- 1- ¿Qué Estructura Conceptual de Referencia se requiere reconstruir para enseñar aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica en la escuela media considerando los problemas conocidos en este campo?
- 2- ¿Qué decisiones y acciones didácticas se deben realizar para diseñar una Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica y analizarla a priori?
- 3- ¿Es posible describir, identificar y caracterizar los procesos de conceptualización en el grupo de clase donde se implementa la secuencia?
- 4- ¿Es posible describir, identificar y caracterizar los aspectos afectivos del grupo de clase?
- 5- ¿Qué condiciones de posibilidad y reproducibilidad tiene la propuesta diseñada e implementada?

- **Preguntas de la investigación**

- 1- ¿Qué Estructura Conceptual de Referencia es posible reconstruir para enseñar los aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica?
- 2- ¿Qué características debería tener una Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica a un grupo de estudiantes de escuela media, basada en la ECR reconstruida a partir del enfoque de Caminos Múltiples de Feynman?
- 3- ¿Cómo se caracteriza la conceptualización en el grupo de clase donde se implementa la secuencia?
- 4- ¿Es posible describir y caracterizar algunos aspectos afectivos del grupo de clase que pudieron incidir en el desarrollo de la secuencia?

³ Este análisis, es “a priori” ya que implica una selección y justificación de acciones, situaciones, preguntas y tareas junto con anticipaciones acerca de las posibles situaciones de lo que acontecerá en la clase de física.

5- ¿Resulta posible implementar la secuencia propuesta? ¿En qué condiciones sería reproducible?

Revisión de la literatura

La revisión de la literatura se realizó para sintetizar los antecedentes de investigación acerca de la enseñanza de la Mecánica Cuántica en la escuela media. Greca y Moreira (2001), realizaron una exhaustiva revisión de la literatura acerca de la enseñanza de la Física Cuántica y por su parte, Ostermann y Moreira (2000), y Pereira (2008), lo hicieron en un sentido más abarcativo, para la enseñanza de la Física Moderna y Contemporánea (FMC). En base a estas revisiones y las realizadas en este trabajo es posible sintetizar las investigaciones según los aspectos abordados en:

- Justificaciones acerca de la inserción de la Mecánica Cuántica en la escuela.
- Concepciones de los estudiantes y de los profesores respecto de los contenidos de tópicos de FMC y de Mecánica Cuántica.
- Críticas a los cursos introductorios de FMC y de Mecánica Cuántica.
- Propuestas de implementaciones didácticas para enseñar tópicos de FMC y de Mecánica Cuántica en el nivel medio y universitario, testeadas en aula.

Como la Tesis se ocupa de la enseñanza de la Mecánica Cuántica en la escuela media, la revisión bibliográfica se centró en los últimos dos aspectos. En el caso de las críticas de los cursos y las propuestas implementadas, las cuestiones señaladas se considerarán en el diseño de una nueva propuesta, para intentar superar los obstáculos reportados en las investigaciones. Tal es el caso de las investigaciones de Fischler y Lichtfeldt (1992) y de Strnad (1981), quienes destacan la importancia de evitar expresiones como “doble naturaleza” de los sistemas cuánticos y abandonar la terminología “onda-partícula”. Según Fischler y Lichtfeldt (1992), esto conduciría a que “los estudiantes se confundan al intentar aunar ambos conceptos, en vez de conceptualizar que se trata de sistemas cuánticos, con características propias”. Por su parte, Strnad (1981) destaca la necesidad de evitar frases confusas como “los electrones se comportan como ondas”.

Es unánime la crítica relativa a la forma en que son presentados los contenidos de Mecánica Cuántica, que generalmente se realiza en forma axiomática o cuasi-histórica (Kragh, 1992); esta forma resulta ineficiente en términos de aprendizaje de conceptos cuánticos fundamentales. Los estudiantes no consiguen comprender cuestiones centrales para la descripción del mundo microscópico (Greca, 2003: 33). Tradicionalmente, la enseñanza de la Mecánica Cuántica en los cursos introductorios de la universidad o en algunas escuelas medias, se caracteriza por el predominio de un enfoque que acompaña estrictamente la génesis histórica. Se comienza “por la vieja teoría cuántica, y algunos de los experimentos reveladores de la estructura cuántica de los sistemas microscópicos, en los cuales se hace uso (y abuso) de analogías y modelos clásicos” (Greca, 2004). De esta forma, se trata al inicio el problema de la radiación de cuerpo negro, pasando luego por los primeros modelos atómicos hasta el átomo de Bohr, y se presenta la ecuación de onda de Schrödinger. Según Greca (2004), aunque la intención de este tipo de abordajes es que los estudiantes adquieran familiaridad con los conceptos cuánticos, los resultados son insatisfactorios.

Por otro lado, en los materiales para enseñar y cursos introductorios, como los estudiantes poseen una formación matemática insuficiente, el formalismo no se presenta de forma integral, sino que solo se proponen algunas fórmulas aisladas, como la fórmula de Planck para la energía de los fotones, y la ecuación de Schrödinger. Como consecuencia de la

adopción del enfoque anteriormente descrito una de las mayores pérdidas de sentido que pueden mencionarse es que la constante de Planck se reduce a un factor de proporcionalidad en una fórmula que liga la energía con la frecuencia. No se analizan ni la magnitud de la constante, ni las consecuencias que tiene para los conceptos en los cuales está relacionada. Usualmente dichas propuestas otorgan un papel exclusivo a la ecuación de Schrödinger y a sus soluciones, “*oscureciendo la física con el álgebra, dejando a los estudiantes la impresión que la Mecánica Cuántica se logra comprender más a medida que más se dominan las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*” (Dowrick, 1997).

Aunque es notable la preocupación acerca de cómo mejorar la enseñanza de la Mecánica Cuántica, hasta ahora, las propuestas implementadas y testeadas en aula no son numerosas. El relevamiento de la producción académica reciente sobre la enseñanza de Física Moderna y Contemporánea entre los años 2001-2006 realizado por Pereira (2008) reporta que de un total de 108 artículos encontrados, solamente 20 presentaban propuestas de aula testeadas con resultados de aprendizaje.

De forma sintética, a partir de la revisión bibliográfica es posible agrupar las propuestas áulicas según su abordaje, que a veces resultan antagónicas. En todas las propuestas encontradas, es notable la ausencia de un marco teórico acerca de la enseñanza y el aprendizaje, y por lo tanto, resulta difícil evaluar su efectividad en términos didácticos. A continuación se presentan algunas investigaciones representativas de cada tipo de abordaje:

- El énfasis en la dimensión histórica y epistemológica de la física cuántica:

En España, Gil y Solbes (1993) implementaron una propuesta con 180 estudiantes de los últimos años de la escuela media, con estudiantes de 16-18 años, basada en la idea de que *el mejor camino para que los estudiantes logren percibir los cambios epistemológicos y culturales consecuentes con su surgimiento, es la introducción histórica*, destacando las diferencias con las formas de razonar de la Física Clásica. Según los autores, con el grupo experimental se logró que un tercio de los estudiantes presentase concepciones erradas al respecto de la dualidad onda-partícula y del Principio de Incerteza, mientras que en los grupos de control estos porcentajes variaron entre el 83 y el 93%. También Lühl (1992) propone la utilización del método histórico-genético para que los estudiantes perciban las complejas interacciones que subyacen al desarrollo científico. Como ejemplo propone acompañar los acontecimientos históricos y filosóficos de la teoría atómica, desde Tales de Mileto hasta la Mecánica Cuántica.

Desde otra perspectiva, Freire et al (1995), consideran esencial la introducción de conceptos clásicos y cuánticos en el nivel medio como *producto histórico de nuestra civilización y no como una disciplina que sólo tiene expresiones con significado matemático*, y agregan que esto se puede hacer en distintas partes del currículo, modificando las presentaciones de los conceptos de la Física Clásica. Por ejemplo, según los autores, al presentar las leyes de Newton, sería importante discutir su carácter determinista. Esto permitiría una comparación con la descripción cuántica, esencialmente probabilística, introduciendo el Principio de Incerteza. Los investigadores pusieron en práctica esta idea en un curso de enseñanza media de Bahía (Brasil), e indican que cuando los estudiantes percibían que el Principio de Incerteza era una característica fundamental de la realidad física descrita por la Mecánica Cuántica, en contraposición a su interpretación inicial -como limitación tecnológica- el inconformismo fue muy notable. Por su parte, según los autores, los estudiantes manifestaron su creencia de que una descripción no determinista de los átomos debería ser encontrada en un futuro próximo, y, en forma paradójica, una parte significativa de los

mismos incorporó la segunda ley de Newton como un gran descubrimiento científico justamente por el determinismo universal que implicaba.

A partir de un énfasis en la dimensión epistemológica, Pinto e Zanetic (1999) implementaron una propuesta en aulas de enseñanza media de la ciudad de Guarulhos, basada en los perfiles epistemológicos de Bachelard, sobre el concepto de luz. Durante 12 aulas fueron abordadas diversas formas del conocimiento científico, destacando a descripción histórica da luz (desde las formas pre-científicas hasta la descripción cuántica), el aspecto filosófico (los perfiles epistemológicos: animismo, realismo, racionalismo y ultraracionalismo), las actividades experimentales (efecto fotoeléctrico y utilización del interferómetro de Mach-Zehnder) y actividades lúdicas. Para los autores, este tipo de aulas aumentó el interés de los alumnos por la Física, aunque consideran que la mayoría de los alumnos aprendió poca Física Cuántica.

- El énfasis en el apoyo o no de conceptos clásicos auxiliares

Aquí se encuentran posiciones que resultan antagónicas, con posturas a favor y en contra de enseñar en base a las relaciones entre los conceptos clásicos y cuánticos.

Por un lado se encuentran trabajos en los cuales se considera que parte de la dificultad para la introducción de los conceptos cuánticos derivan del hecho que además que ellos son presentados tardíamente en la enseñanza, se tiende a enfatizar tanto las diferencias y los contrastes entre la física cuántica con la Física Clásica, que los estudiantes terminan ignorando los conceptos clásicos correspondientes. En esta línea se encuentra el trabajo de Cuppari, Rinaudo, Robutti e Violino (1997) en el cual proponen comenzar destacando aspectos comunes entre la Física Clásica y la Moderna. Proponen introducir algunos aspectos de la Mecánica Cuántica utilizando la idea de “granularidad” intrínseca en el espacio de fase, llegando a una acción elemental h . La idea es que los estudiantes puedan adquirir familiaridad con los límites de la Mecánica Clásica, pudiendo los gráficos del espacio de fase desarrollarse hasta incluir la idea del Principio de Incerteza. Ellos implementaron su propuesta en un curso de enseñanza media en Torino, Italia, y según los autores los estudiantes no presentaron dificultades para entender el movimiento en el espacio de fase y en aceptar, cualitativamente la idea de granularidad. También en esta línea se puede ubicar al trabajo de Jones (1991), quien además de no adherir a la idea del abordaje histórico, propone comenzar a partir de la teoría clásica ondulatoria y discutir los modos de oscilación de las ondas estacionarias, para introducir la noción de difracción de los electrones.

En cambio, investigaciones como las de Fischler y Litchfeldt (1992) y como la de Greca y Moreira (2000) explícitamente proponen evitar que los estudiantes interpreten fenómenos cuánticos a partir de conceptos clásicos, enfatizando los aspectos singulares de la descripción cuántica. Según Fischler & Lichtfeldt (1992 p. 183), “*es necesario evitar que los estudiantes interpreten los fenómenos cuánticos a partir de conceptos clásicos, quebrando explícitamente con ideas anteriores y enfatizando los aspectos singulares de la descripción cuántica*”. Para eso, los autores recomiendan:

- a) evitar referencias a la Física Clásica;
- b) comenzar la unidad con electrones (y no con fotones) cuando se presente el efecto fotoeléctrico;
- c) explicar los fenómenos observados a partir de la interpretación estadística y evitar las descripciones dualísticas;
- d) introducir el Principio de Incerteza cuanto antes posible, formulado para "paquetes" de objetos cuánticos;

e) evitar el modelo atómico de Bohr.

Los investigadores implementaron su propuesta en varios cursos (N=150) en Berlín, e indican que este tipo de abordaje favorece el surgimiento de conflictos cognitivos que llevarán a los estudiantes a revisar conscientemente sus posiciones anteriores y por lo tanto a reconstruir su conocimiento. Por el contrario, en los grupos control los resultados indican que se incorporaron las nuevas ideas a las antiguas concepciones mecanicistas.

También la propuesta de Niedderer & Deylitz (1999) se puede colocar entre aquellas que evitan relacionar conceptos cuánticos con clásicos. Ellos implementaron en una disciplina de física atómica nuclear del último año de una escuela secundaria alemana una propuesta basada en las siguientes ideas:

- a) Una representación moderna de la física atómica, utilizando la ecuación de Schrödinger como base teórica. El objetivo es lograr una comprensión conceptual y lograr una interpretación de la misma, sin una mayor discusión matemática, utilizando recursos computacionales para modelarla
- b) Establecimiento de relaciones entre el modelo cuántico estudiado y en una amplia variedad de fenómenos de la física atómica, del estado sólido y de la Química.

La propuesta fue evaluada mediante entrevistas y cuestionarios, suministrados antes y después de la instrucción, a 26 estudiantes de tres cursos diferentes. El contenido fue dividido, para los fines de la investigación, en 6 dominios de conocimiento (átomo, función de onda, noción de estado, ecuación de Schrödinger, transferencia de contenido teórico de la ecuación de Schrödinger para explicar resultados de mediciones, átomos superiores). Según los autores, solamente en una de las clases una parte importante de los estudiantes consiguió una buena comprensión de los tópicos tratados, siendo la comprensión matemática de la ecuación de Schrödinger el dominio en que los estudiantes salían peor. En las otras dos clases, los estudiantes solamente alcanzaron algunos de los objetivos pretendidos en las áreas del modelo atómico y de la comprensión de algunas relaciones entre el modelo teórico y sus aplicaciones. Los autores concluyeron que, aunque para la mayoría de los estudiantes no fue posible desarrollar una mejor comprensión de la descripción teórica propuesta, muchos de ellos conseguirían en promedio, un buen entendimiento de conceptos cuánticos fundamentales.

Paulo y Moreira (2004) implementaron una unidad didáctica sobre Física Cuántica en escuelas medias de Brasil, proponiendo el estudio de la óptica ondulatoria sobre la experiencia de la doble rendija antes de la implementación de la unidad didáctica de Física Cuántica. Según los autores, sus resultados indican que no hubo dificultades en aprender conceptos de la teoría cuántica que fueran mayores que las dificultades inherentes a la Física Clásica y que el conocimiento previo sobre ondulatoria clásica, no parece influenciar críticamente los resultados del aprendizaje.

- La conveniencia de la utilización de las experiencias como el recurso más importante para la enseñanza de las teorías cuánticas.

En estos artículos, no se discute acerca del enfoque histórico o de las relaciones con los conceptos clásicos, sino que se enfatiza fundamentalmente la importancia de las experiencias para el proceso de aprendizaje. En este sentido, Lawrence (1996, p. 278) propone usar dispositivos experimentales modernos como LEDs, y simulaciones computacionales para la introducción de los conceptos de cuantización, dualidad onda-partícula, no localización, y efecto túnel. Basados en la teoría de conflicto cognitivo de

Posner (1982), considera que la utilización de *"argumentos sustentados en experiencias de laboratorio, demostraciones, discusiones y el conocimiento previo de los estudiantes, permite conseguir que la visión cuántica del mundo se torne inteligible, posible y fructífera, incorporándose al bagaje cultural de los estudiantes"*. Según el autor, los estudiantes se integraron a las actividades con entusiasmo, aunque no se informa demasiado acerca de la comprensión de los conceptos cuánticos pretendidos.

Stefanel (1998) discute la necesidad de incorporar de forma no descriptiva los contenidos de Mecánica Cuántica, destacando la importancia de las actividades de laboratorio. Su propuesta utiliza la representación de las experiencias de difracción e interferencia de la luz como soporte fenomenológico de la discusión de los principios cuánticos; discusión de aspectos implícitos en la descripción de la Física Clásica, como causalidad y determinismo; profundización cuantitativa sobre efecto fotoeléctrico, efecto Compton, experiencia de Franck-Hertz y modelos atómicos; interpretación probabilística de la función de onda y del Principio de Superposición; y aplicaciones de estos conceptos para explicar propiedades de la materia como el átomo, el efecto túnel y las propiedades eléctricas de los sólidos (con experiencias sobre efecto Hall). Aunque esta propuesta no parece diferir mucho de las presentadas en cursos introductorios, el autor destaca como característica fundamental el "proceso espiralado" en el cual los conceptos fundamentales fueron tratados, provocando sucesivos refinamientos y profundizaciones de los mismos. La aplicación de esta propuesta, desarrollada en Udine, Italia, durante 3 años en cursos de la última serie del nivel medio italiano, exigió también una adecuación de los contenidos de Física en la disciplina anterior aquella en que esta propuesta fue implementada. La evaluación mostró que más de la mitad de los estudiantes consiguió incorporar de manera adecuada la interpretación probabilística y el Principio de Superposición, así como desarrollar problemas sencillos. Según los autores, cerca del 20% de los estudiantes manifestó un dominio más profundo de los conceptos claves de la Mecánica Cuántica.

Muller y Weisner (2002) implementaron un curso introductorio de Física Cuántica en el contexto de laboratorios virtuales en el cual el objetivo era mostrar desde el comienzo, a través del fenómeno de interferencia cuántica en la experiencia de la doble rendija y en el interferómetro de Mach-Zehnder cómo los fenómenos cuánticos difieren de nuestra experiencia clásica diaria. Según los autores, los resultados de la evaluación del curso, mostraron que la mayoría de los estudiantes adquirió concepciones apropiadas de física cuántica y que muchas de las concepciones alternativas que se encontraban en cursos tradicionales pudieron evitarse.

Una perspectiva distinta a las anteriores se viene desarrollando desde 1996 en Estados Unidos por Edwin F. Taylor (MIT, Massachusetts, US), quien elaboró el curso "Desmitificando la Mecánica Cuántica", basado en el conocido libro de Richard Feynman *"QED: The Strange theory of light and matter"*. Este conocido texto fue publicado hacia finales de la década de 1970 y estaba dirigido a un público no especializado en el tema. En él se expone su método *Paths Integrals* (Integral de camino) en un lenguaje no técnico y accesible. El curso de Taylor (2003) se basa en la modelización en computadora y software realizado en una plataforma independiente de lenguaje C#. Según Hanc y Tuleja (2005, p.4), *"aunque este software tiene un gran valor pedagógico, hoy día resulta rudimentario y no permite un control confortable para el usuario; además su lenguaje no es muy bien soportado"*.

En el Reino Unido, entre el 2003 y el 2004 John Ogborn (Institute of Education, University of London, UK), en el proyecto "Advancing Physics" propuso una nueva currícula de Física para los dos últimos años de la escuela secundaria con tópicos de física actual. El enfoque

de Feynman de la Mecánica Cuántica forma una parte importante del programa, y el curso adopta el libro de Feynman y de algunas partes del curso de Taylor. La propuesta *Advancing Physics* utiliza el software Modellus de Vitor Teodoro-Duarte de la Nueva Universidad de Lisboa en Portugal (<http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>) como parte de la modelización involucrada.

También en Estados Unidos en 1985, Dan F. Styer (Oberlin College, Ohio) abordó este enfoque y desarrolló un curso basado en la formulación de Feynman que comienza con sistemas cuánticos simples, pero a diferencia del curso de Taylor, no considera la evolución de la función de onda en el tiempo. En su propuesta trata paradojas como la de Einstein-Podolsky-Rosen y las aplicaciones modernas como la computación cuántica y la criptografía. Las lecciones del curso están condensadas en su libro "*The Strange World of Quantum*" se encuentran disponibles on-line (<http://www.oberlin.edu/physics/dstyer/StrangeQM/>)

Retomando las ideas de John Ogborn, en Eslovaquia, Hanc y Tuleja desde el año 2001 vienen desarrollando y testeando materiales para enseñar Mecánica Cuántica exclusivamente con la computadora. Su propuesta se basa en el libro de Feynman y en el curso de Taylor, en una versión más extensa que la de Ogborn. A diferencia de éstos, la propuesta también incluye el estudio en el nivel universitario. Si bien la propuesta original se programó en Delphi, actualmente los autores declaran estar revisando los programas y extendiéndolos a la forma de aplicaciones Java. La organización de contenidos puede encontrarse en Hanc y Tuleja (2005, p.7), y ellos expresan que su aproximación "*entusiasmo a los estudiantes y logran una comprensión más conceptual de las ideas cuánticas fundamentales*", aunque como no se explicita el marco teórico utilizado ni como fue testeado el material.

Las propuestas de enseñanza basadas en el enfoque de Feynman recién comentadas, utilizan la técnica de Caminos Múltiples, y se centran en el comportamiento de la luz, comenzando por el comportamiento de los fotones, y con un predominio del uso de herramientas computacionales. En cambio, esta Tesis también se basa en la técnica de Caminos Múltiples, pero lo hace en otro sentido, ya que se la utiliza como heurística para hacer emerger el comportamiento cuántico de los electrones, a partir del reconocimiento de su comportamiento corpuscular. Como eje vertebral de la propuesta, se presenta la Experiencia de la Doble Rendija, realizada con proyectiles cuya masa se propone hacer sucesivamente menor, hasta llegar a los electrones. Esta experiencia, permite trabajar los principios cuánticos de superposición, de incertidumbre, y de correspondencia, para mostrar que la Mecánica Cuántica predice los mismos resultados que la Mecánica Clásica, si los valores de acción (S) son del orden de la constante de Planck. Por lo tanto, este enfoque de la Mecánica Cuántica también presupone el conocimiento de la Física Clásica, y se utiliza para mostrar la conexión y la coherencia de ambas. La utilización del concepto de fotón con los estudiantes de la escuela media no sería una forma sencilla de introducir la Mecánica Cuántica, al menos en una primera etapa, debido a los problemas conceptuales que dicha noción implica. Por otro lado, no permite analizar la transición de la Mecánica Cuántica a la Clásica, que en esta Tesis se enfatiza, para mostrar la universalidad de las leyes cuánticas, e interpretar los resultados de las mediciones experimentales. En una futura investigación, se abordará el problema del tratamiento escolar de los fotones, que complementa al tratamiento de los electrones que se realiza aquí, y que también admite la utilización de la técnica de Caminos Múltiples.

La Tesis pretende contribuir al campo de la Investigación en Enseñanza de las Ciencias, desde un referencial que es didáctico-cognitivo, colocando el énfasis en una u otra

dimensión, dependiendo del nivel y del tiempo en que se quieran describir y comprender los procesos relacionados a la enseñanza y el aprendizaje de aspectos fundamentales de la Mecánica Cuántica en la escuela media.

A continuación, en el **Capítulo 2**, se propone el referencial teórico empleado en esta investigación, integrado por las perspectivas cognitiva, didáctica, y epistemológica. También se presentan los Fundamentos Físicos de la investigación, que son el resultado de la primera pregunta propuesta, relativa a la reconstrucción del saber de la comunidad científica de referencia.

En el **Capítulo 3** se presenta la Metodología empleada y la organización de la Investigación.

Para abordar la segunda pregunta de la investigación, en el **Capítulo 4** se diseña la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar los aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica y se realiza su análisis didáctico a priori.

En el **Capítulo 5** se describe la implementación en el aula y se presenta el análisis de los datos, abordando así las preguntas 3 y 4 planteadas. A partir de estos resultados, se formulan respuestas a la pregunta 5, acerca de la viabilidad de la propuesta.

En el **Capítulo 6** se presentan las Conclusiones, y finalmente en el **Capítulo 7** la Bibliografía.

En el **Anexo** se encuentran las dos secuencias de situaciones que se implementaron a modo de replicación y de adaptación, que se describen en el **Capítulo 5**.

Capítulo 2

Marco teórico

Introducción

Este trabajo de investigación estudia los procesos relacionados con la construcción de conocimientos relativos a la Mecánica Cuántica adoptando un referencial didáctico y cognitivo. Se trata de la selección y análisis del conjunto de conocimientos científicamente aceptados que harán de referencia y darán lugar al saber a enseñar. A partir de esta primera reconstrucción, se diseña y analiza una propuesta que luego se implementará en la escuela. Las fases de diseño y análisis privilegian una dimensión didáctica (Otero, 2006; 2007), y el estudio de la conceptualización una dimensión cognitiva.

El análisis didáctico, es *a priori*, y supone la mayor anticipación posible de lo que acontecerá en el aula: las preguntas planteadas, las acciones esperadas y necesarias, el lenguaje utilizado, las intervenciones de la profesora, los acuerdos, etc.

Luego de la implementación en aula, se analiza lo que efectivamente fue reconstruido por el grupo de clase. Este análisis cognitivo *a posteriori*, por un lado se estudia la conceptualización desde la perspectiva de Vergnaud (1990), y por otro lado, se analiza desde una mirada que considera los aspectos emocionales y afectivos del grupo de clase en el cual se implementa la propuesta (Otero, 2006; 2007).

A continuación se realiza una síntesis de los referenciales teóricos empleados, que comienza con la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990). Aunque esta teoría fue elaborada en primera instancia para explicar los procesos de conceptualización de las estructuras matemáticas como las estructuras aditivas, multiplicativas, del álgebra y relaciones número-espacio, ofrece un marco propicio para las investigaciones relacionadas con actividades cognitivas referidas a aprendizajes en Ciencias. (Moreira, 2002).

Luego, se exponen los lineamientos didácticos, para los cuales se toman las ideas y principios propuestos por Otero (2006; 2007), y que constituyen la base del diseño y el análisis *a priori* de la propuesta. Su propuesta constituye una aproximación didáctica que integra referenciales que buscan explicar el conocimiento desde una base biológica y emocional (Maturana, 1984, 1990, 1991, 1995, 2001; Damasio, 1994, 2005) y desde una epistemología constructivista (Piaget, 1955; García, 2000; Maturana, 1995; Vergnaud, 1990, 1994, 1996, 2005). Para entender el aprendizaje de conceptos este marco de referencia acepta explicaciones y constructos propios de dominios centrados en la esfera de lo mental (Piaget, 1955; Vergnaud, 1990, 1994, 1996, 2005; Ausubel, 1963, 1968; Moreira, 2000, 2005).

Por último, se sintetizan los conocimientos Físicos involucrados en la Tesis. Con relación al saber. Respecto a los fundamentos físicos que forman el sustrato de las distintas Estructuras Conceptuales, se considerará al enfoque de los Caminos Múltiples de Feynman (1949).

Fundamentos Cognitivos: La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud

La premisa de partida de Vergnaud es que el conocimiento está organizado en “*Campos Conceptuales*”. De una manera abarcativa, Vergnaud los define como “*un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectadas unos a otros y, probablemente entrelazados durante el proceso de adquisición*” Naturalmente, dada su complejidad, dominar un campo conceptual es un proceso que demanda un largo período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje.

Vergnaud también define un campo conceptual como *un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere, a su vez, del dominio de varios conceptos de naturaleza distinta*. (Moreira, 2002 p.5). Siguiendo esta idea de campo conceptual, los conceptos tienen especial relevancia en esta teoría. Sin embargo, como son las situaciones las que dan sentido a los conceptos, resulta natural que sean ellas y no los conceptos las que constituyan la principal entrada a un campo conceptual (Ibíd.)

Para estudiar el desarrollo y el uso de un concepto a lo largo de su aprendizaje o de su utilización, Vergnaud define a los conceptos a partir de tres conjuntos:

- El conjunto de situaciones (S) que le dan sentido al concepto. Un concepto se torna significativo a través de una variedad de situaciones. Este conjunto constituye el referente del concepto.
- El conjunto de invariantes (I) (objetos, propiedades y relaciones) sobre las cuales reposa la operacionalidad del concepto. Este conjunto se refiere al significado del concepto.
- El conjunto de representaciones simbólicas (R) (lenguaje natural, gráficos y diagramas, sentencias formales, etc.) que pueden ser usadas para indicar y representar estos invariantes, y consecuentemente, representar las situaciones y los procedimientos para lidiar con ellas. Este es el significante del concepto.

De esta forma, los conceptos quedan definidos como el triplete de los tres conjuntos

$$C = (S ; R ; I)$$

Según Vergnaud (1990, p.7) en general no hay correspondencia biunívoca entre significantes y significados, ni entre invariantes y situaciones, y por lo tanto no se puede reducir el significado ni a los significantes ni a las situaciones.

Las **situaciones** son entendidas en el sentido de tarea, y no como “situaciones didácticas”. Estas últimas constituirían un tipo especial de situaciones en las que las personas se involucran frecuentemente al concurrir a una institución educativa. Desde un punto de vista compartido por los psicólogos, los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones con las cuales es enfrentado. El sentido de las situaciones a su vez estaría dado, según Vergnaud por la variedad e historia, ya que en un cierto campo conceptual hay una gran variedad de situaciones y los conocimientos de los alumnos son moldeados por las situaciones que encuentran y progresivamente dominan. Particularmente son las primeras situaciones las susceptibles de dar sentido a los conceptos y procedimientos que se quieren enseñar (Vergnaud 1996, citado en Moreira, 2002)

Tres argumentos centrales llevaron a Vergnaud al concepto de campo conceptual (Moreira 2002, p.4):

1) un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones;

2) una situación no se analiza con un solo concepto;

3) la construcción y apropiación de todas las propiedades de un concepto o de todos los aspectos de una situación es un proceso de largo aliento que se extiende a lo largo de los años. A veces se requiere una decena de años, con analogías y confusiones entre situaciones, entre conceptos, entre procedimientos, entre significantes.

Para Vergnaud (1990) esta elaboración pragmática no prejuzga de ninguna manera la naturaleza de los problemas a los cuales un concepto nuevo aporta una respuesta, ya que los problemas pueden ser tanto teóricos como prácticos. *Esto tampoco prejuzga el análisis del papel del lenguaje y del simbolismo en la conceptualización; este papel es muy importante. Simplemente, si se quiere considerar correctamente la medida de la función adaptativa del conocimiento, se debe conceder un lugar central a las formas que toma en la acción del sujeto. El conocimiento racional es operatorio o no es tal conocimiento.*(Ibíd. p.2)

Vergnaud retoma el concepto de esquema de Piaget, y formula dos definiciones que considera complementarias (Vergnaud, 2008):

1- El esquema es una forma invariante de organización de la actividad y de la conducta para un tipo de situaciones determinadas.

2- Los esquemas son una totalidad dinámica funcional cuyas componentes son las metas, las reglas de acción, los invariantes operatorios, y las inferencias

De la primera definición, se tiene que:

- Es un universal eficiente para toda una gama de situaciones y puede generar diferentes secuencias de acción dependiendo de las características de cada situación particular. Dentro de esta idea de esquema, es posible distinguir esquemas perceptivos-gestuales como el de contar objetos, o de hacer un gráfico o un dibujo. También hay esquemas relacionados a lo verbal (por ejemplo para hacer un discurso para dirigirse a una persona o a un grupo), y esquemas relativos al comportamiento social. (Moreira, 2002)

- El esquema no es un estereotipo, sino por el contrario, permite adaptar la acción y la conducta a los valores que tomen las variables de la situación. Lo invariante es la organización, y no la actividad o la conducta. (Vergnaud, 2008, p.2)

- El esquema se refiere a un tipo de situaciones, que puede ser muy restringido o muy amplio. A lo largo del desarrollo cognitivo, un esquema primero tiene un alcance local que se irá ampliando. Ya que se refiere a un tipo de situaciones, aunque pequeña, el esquema es universal en el sentido que es posible formalizarlo con reglas y conceptos que contienen cuantificadores universales. (Ibíd.)

Los algoritmos son esquemas, sin embargo no todos los esquemas son algoritmos. Vergnaud añade que *“algunos algoritmos pierden, a lo largo del aprendizaje o de la experiencia, algunas de sus características, particularmente su propiedad de efectividad: se pueden ver privados de su propiedad de desembocar de manera segura por errores o*

atajos. De esa manera, la incertidumbre sigue siendo una propiedad de los esquemas” (Ibíd.)

De esta forma, el análisis de los esquemas pasa inevitablemente por el análisis de las conductas, pero el esquema no es una conducta sino un constituyente de la representación cuya función consiste en generar la acción y la conducta en situación.

Los esquemas necesariamente se refieren a situaciones, y Vergnaud enfatiza sobre la interacción esquema- situación, en lugar de sujeto-objeto como proponía Piaget. De ahí que se considere que el desarrollo cognitivo consiste sobre todo y principalmente en el desarrollo de un vasto repertorio de esquemas. En este sentido, *la educación debe contribuir a que el sujeto desarrolle un repertorio amplio y diversificado de esquemas procurando evitar que estos se conviertan en estereotipos esclerotizados.* (Vergnaud, 1996, citado en Moreira, 2002)

Vergnaud distingue dos tipos de situaciones, para las cuales el concepto de “esquema” funciona de forma distinta:

- Clases de situaciones para las cuales en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, el sujeto dispone en su repertorio las competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación. En este caso se va a observar para una misma clase de situaciones, conductas muy automatizadas, organizadas por un esquema único.
- Clases de situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas, tentativas fallidas, y le conduce eventualmente al éxito, o al fracaso. Por lo tanto, lo que se va a observar es la utilización tentativa y sucesiva de varios esquemas, que pueden entrar en competición y que, para llegar a la solución buscada, deben ser acomodados, separados y re combinados; este proceso se acompaña necesariamente de descubrimientos.

Aunque se acepte que el esquema es una totalidad dinámica funcional, si se quiere comprender cómo un esquema puede ser eficaz o no, se deben analizar los componentes del esquema. De esta forma, Vergnaud propone complementar la definición de esquema anterior con una segunda definición: *“Los esquemas son una totalidad dinámica funcional cuyas componentes son las metas, las reglas de acción, los invariantes operatorios, y las inferencias”* (Vergnaud, 2008.)

Los cuatro componentes de los esquemas se articulan de la siguiente forma:

Las metas

Representan la intención, el deseo, la motivación, la expectativa. Aunque la representación está compuesta por formas de organización de la acción, y no sólo de imágenes, palabras y conceptos, es esencial integrar objetivo, intención y deseo en el propio concepto de esquema.

De la misma manera que los esquemas se organizan jerárquicamente, el objetivo se divide en sub-objetivos y anticipaciones. Para la organización secuencial y simultánea de la acción, la toma de información y del control, se necesitan considerar las reglas de acción.

Las reglas de acción, recolección de información y control

Las reglas no sólo generan la acción, sino la actividad entera, tanto la toma de información y controles como las propias acciones materiales. Asimismo, las reglas no sólo generan la conducta observable, sino una actividad entera no directamente observable, como las inferencias y la búsqueda en la memoria. El concepto de invariante es el que permite ir más allá en el análisis, precisamente porque introduce la cuestión de conceptualización.

Los invariantes operatorios: concepto-en-acción y teorema-en-acción.

Los invariantes operatorios constituyen la parte epistémica del esquema: la base conceptual implícita o explícita. Su función consiste en identificar y reconocer objetos, sus propiedades, relaciones y transformaciones. La función principal es extraer y seleccionar la información pertinente e inferir las consecuencias útiles para la acción, el control y la toma de información subsiguiente. Se trata entonces de la función de conceptualización e inferencia.

Las inferencias van de lo verdadero a lo verdadero, más precisamente de lo que se considere verdadero a lo que es razonable considerar verdadero. *Una inferencia es mucho más que una asociación: el cálculo asociativo no permite por sí sólo dar cuenta del funcionamiento del pensamiento.* (2008, p. 4). Las funciones proposicionales no son susceptibles de verdad o falsedad, puesto que contienen variables libres. Sólo las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas. Por lo tanto, las proposiciones tienen que ser parte integrante del sistema de conocimientos evocados o evocables en situación, de manera que el sujeto comprometa en ello su actividad y sus razonamientos, aunque éstos fueran implícitos.

Por definición, un teorema en acto es una proposición considerada verdadera en la actividad. El estudio del desarrollo de competencias a lo largo del aprendizaje o a lo largo de la experiencia, muestra que un mismo concepto puede, según el estado de su elaboración, ser asociado a teoremas más o menos numerosos, más o menos ricos, e incluso eventualmente falso. La serie de teoremas en acto susceptible de ser asociada al mismo concepto es generalmente muy grande, particularmente en las disciplinas científicas y técnicas, de manera que, para Vergnaud, declarar que tal sujeto ha entendido el concepto, a menudo no tiene sentido. Haría falta precisar qué teoremas en acto se pueden utilizar en tal o cual situación. Las inferencias son relaciones entre proposiciones, y están sometidas a teoremas de orden superior, meta-teoremas.

La relación entre teoremas y conceptos es naturalmente dialéctica, en el sentido que no hay teorema sin concepto y no hay concepto sin teorema. Metafóricamente, Vergnaud (2008, p. 5) expresa *que los conceptos-en-acción son los ladrillos con los se fabrican los teoremas-en-acción, y que la única razón de existencia de los conceptos-en-acción es precisamente permitir la formación de teoremas-en-acción (proposiciones consideradas verdaderas), a partir de los que se hace posible la organización de la actividad y las inferencias.* De manera recíproca, los teoremas son constitutivos de los conceptos puesto que, sin proposiciones consideradas verdaderas, los conceptos no tendrían sentido. Sin embargo es importante reconocer que un concepto en acto siempre está constituido de varios teoremas en acto, cuya formación se puede escalonar sobre un largo período de tiempo a lo largo de la experiencia y del desarrollo.

Las inferencias

Este último componente del esquema es indispensable porque la actividad en situación nunca es automática, sino que, al contrario, está regulada por las adaptaciones locales, los controles, los ajustes progresivos. *Las inferencias están presentes en todas las acciones,*

porque una acción no puede ser provocada por una situación y luego desarrollarse de manera totalmente automática, es decir sin control y sin nueva búsqueda de información. Es posible en teoría, pero las observaciones muestran que sólo puede concernir a segmentos de actividad muy pequeños, cuya funcionalidad no viene de ellos solos sino de los esquemas de los que son parte integrante. (Ibid, p.6)

En general las inferencias y las reglas casi siempre son implícitas, e incluso a menudo inconscientes. Las reglas de acción, de búsqueda de información y de control son la traducción pragmática de los teoremas-en-acción: traducen principalmente el hecho de que las variables de situación pueden, en general, tomar distintos valores, y que los sujetos están preparados para adaptarse a estos distintos valores.

Para Vergnaud, los cuatro componentes del esquema (metas, reglas de acción, invariantes operatorios e inferencias) en conjunto permiten comprender la estructura de la actividad. También permiten comprender la doble característica propia de la acción: ser sistemática y a la vez contingente:

-sistemática porque, en muchas situaciones, la acción está sujeta a reglas unívocas. Es el caso, entre otros, de los algoritmos en matemáticas (las cuatro operaciones de la aritmética, la solución de algunas categorías de ecuaciones, etc), y para los procesos impuestos a los operadores en ciertos puestos de trabajo (por ejemplo el pilotaje de aviones, etc.).

-contingente porque las reglas engendran actividades y conductas diferentes según las situaciones en que se presentan. Esta contingencia de la acción es aún más notable para las situaciones nuevas, cuando el sujeto no dispone de esquemas en su repertorio, y debe improvisar para enfrentarlo. La contingencia se convierte en oportunismo, y el sujeto busca una solución en todos sus recursos cognitivos, es decir en los esquemas anteriormente formados, susceptibles de abrir un camino hacia la búsqueda la solución.

En la adaptación a nuevas situaciones y a la resolución de problemas, los invariantes operatorios cumplen una función esencial: o ya existen en los recursos del sujeto, y están descompuestos y recompuestos, o aún no existen, emergen en situación, y se van articulando con los invariantes anteriormente formados. Las situaciones propuestas para reconstruir conocimientos de Mecánica Cuántica son nuevas para los estudiantes, representan un salto con relación a la percepción y a la intuición, debido a las características propias de los sistemas cuánticos. La identificación de los teoremas en acto que pudieron ser utilizados por los estudiantes para resolver las cuestiones y problemas propuestos permite analizar la conceptualización, y comprender el funcionamiento de las situaciones en los estudiantes.

Fundamentos Didácticos

Para abordar los aspectos didácticos con los cuales serán analizados los datos se consideran las ideas propuestas por Otero (2006; 2007; 2008), donde la didáctica de la Física es definida como *“el estudio del proceso según el cual se reconstruye el conocimiento Físico en un grupo de clase de cualquier institución, con la orientación de uno o más profesores”*.

Esta aproximación didáctica recurre a referenciales que permiten entender los procesos de reconstrucción del conocimiento desde una base biológica y emocional (Maturana, 1984, 1990, 1991, 1995, 2001; Damasio, 1994, 2005) y desde una epistemología constructivista (Piaget, 1955; García, 2000; Maturana, 1995). Para entender el aprendizaje de conceptos se aceptan explicaciones y constructos propios de dominios centrados en la esfera de lo mental

(Piaget, 1955; Vergnaud, 1990, 1994, 1996, 2005; Ausubel, 1963, 1968; Moreira, 2000, 2005). Así, se distinguen los fenómenos didácticos y se construye un dominio para analizar, explicar y proponer acciones dirigidas a reconstruir el conocimiento físico que tendrán lugar en un cierto grupo de clase, dentro de una cierta institución.

El análisis didáctico de la reconstrucción del saber incluye el de sus condiciones de posibilidad y requiere distinguir al menos los siguientes componentes: alumno, profesor, conocimiento, e institución. Usualmente, profesor y alumnos constituirán el grupo de clase. Parcialmente, el funcionamiento de tal grupo esta sujeto a normas externas -institucionales, políticas, etc.- que de hecho, establecen un conjunto de condiciones de contorno para su desarrollo. Aunque se consideran condiciones externas al grupo de clase, este planteo se enfoca en la dinámica operacional del grupo y de sus miembros.

El diseño de la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar se basa en el siguiente conjunto de *Principios Didácticos* (Otero, 2008 p. 8-12):

D.1 Principio de la Institución Educativa como integrante del sistema de regulación vital

Las instituciones educativas son creaciones humanas para extender -al menos como deseo o intención- los mecanismos de regulación vital. Se trataría de mecanismos de regulación no automáticos, que al igual que los automáticos, tendrían que ser funcionales a nuestra supervivencia. En este sentido, la escuela puede ser entendida como una posibilidad de convivir armoniosamente con otros, en adaptación. La institución escolar tiene que proponerse como un ámbito propicio para nuestro bienestar y supervivencia.

D.2 Principio del Grupo de clase como ámbito de convivencia

Alumnos y profesor o profesores constituyen grupos que participarán en diversas redes cerradas de conversaciones o culturas con relación a un dominio de conocimiento específico. Tales grupos de clase (GC) tendrían que funcionar como espacios de máxima convivencia como condición de posibilidad del desarrollo de la identidad de cada uno de sus miembros en armonía y felicidad. Para construir y contribuir a la convivencia se requiere estar en aceptación del otro.

D.3 Principio de Aceptación del Otro

La constitución de un espacio relacional de convivencia requiere que cada uno de sus miembros acepte la legitimidad del otro como un legítimo otro en la convivencia (Maturana, 1995). Esta aceptación origina acciones contrarias a la negación del otro. Tal dinámica emocional es indispensable para reconstruir un dominio de conocimiento, cuya base es la aceptación de determinadas acciones como válidas. En esta dinámica de aceptación, todos los miembros del grupo necesitan "verse" mutuamente para que ninguno sea negado. Este principio didáctico, está muy relacionado con el de vigilancia de la certidumbre. En un grupo de clase, muchas de las acciones que se producen se realizan desde el hábito de la certidumbre:

Es interesante que aceptar al otro como legítimo otro en la convivencia no es tolerarlo. La tolerancia se realiza desde la certeza, así, toleramos a otro porque consideramos que está equivocado, absolutamente equivocado, mientras nosotros no lo estamos. Esta certidumbre tiene por detrás una base trascendente, y además no nos exige hacernos responsables de nuestro desacuerdo con el otro. El esta mal y yo estoy bien, entonces lo tolero, le permito estar equivocado. En cambio, si tomamos conciencia de que no tenemos acceso a la verdad ni a la realidad de manera

trascendente, el otro es tan legítimo como nosotros y su realidad es tan legítima como la nuestra, aún cuando no me guste o suponga que es peligroso. En ese caso, puedo negarlo, pero asumiré mi responsabilidad, es mi decisión y mi deseo, no es porque pueda decir o no, que está equivocado.

D.4 Principio de la acción del Profesor

Cuando aceptamos estos principios generales y didácticos, nuestra experiencia como profesores se reformula. Entendemos que la ciencia que queremos enseñar no trata con la verdad en un sentido trascendente, ni con la realidad. Simplemente, adherimos a un criterio de validación acerca de lo que se exige de una explicación científica y a un conjunto de afirmaciones científicas basadas en explicaciones científicas válidas. Así, tampoco poseemos ninguna certeza, ni somos dueños de ninguna verdad, pero operamos en un espacio de reflexión que nos permite responsabilizarnos por las consecuencias de nuestras acciones.

Alumnos y profesores somos componentes esenciales en el grupo de clase. El principio de convivencia y el principio de legitimidad del otro, destacan la importancia de estar en aceptación. Consecuentemente, tendremos que estar vigilantes respecto de la satisfacción de estos principios en el grupo de clase. Allí, nuestro "saber" está ligado a la aceptación de los alumnos, si ellos no aceptan nuestra invitación a ingresar en un nuevo dominio cognoscitivo, nada podremos hacer para enseñarles. Mientras la emoción que determina las acciones científicas es la curiosidad y la pasión por explicar, la emoción que especifica las acciones del profesor es la de comunicar.

D.5 Principio de la acción del Alumno

Aceptando los mismos principios, también podemos concebir cómo se modifica nuestra manera de entender a los alumnos. Ellos tienen la responsabilidad de aceptar o rechazar la invitación que se les realiza. Si la aceptan, serán responsables junto con el profesor y con los demás miembros del grupo. Los alumnos también tienen que comprometerse con la convivencia del grupo de clase. Esto exige vivir en una dinámica emocional que les permita aceptar al otro como legítimo otro en la convivencia.

Aceptar ingresar en un mundo de significados compartidos, pero que los estudiantes no conocen, supone participar y realizar un cierto tipo de acciones que son constitutivas del dominio cognoscitivo que se va a reconstruir. Esto es, el grupo de clase va a construir un dominio de conocimiento, en referencia a otro preexistente, pero estos dominios no serán estrictamente los mismos. Las acciones constitutivas del dominio que se va a reconstruir, a partir de las cuales emergerán los conceptos y las afirmaciones de conocimiento aceptadas como válidas -en arreglo a la satisfacción de cierto mecanismo explicativo- no serán estrictamente idénticas a las que operan en el dominio de referencia. Esto no implica que no conserven o no procuren conservar, cierta continuidad epistémica con las explicaciones científicas y los mecanismos para su generación en el dominio de origen. Así, mientras los científicos hacen ciencia movidos por la pasión de explicar, los estudiantes que intentan ingresar a ese mundo de significados compartidos, estarán al menos en principio, movidos por la pasión de comprender.

¿Qué emociones fundamentan las acciones de los alumnos con relación a la reconstrucción de un cierto dominio? La curiosidad de los estudiantes se pone en juego si el conocimiento se propone de manera problemática y desafiante. También la

emoción de la sorpresa tendría un papel relevante, sorpresa frente a resultados experimentales, sorpresa cuando lo que predice el sentido común no es lo que predicen los sistemas conceptuales construidos, sorpresa frente a la incertidumbre, tan irreductible en los sistemas físicos -cuánticos- como en cualquier mundo que *traigamos a la mano*. Las dos anteriores también están relacionadas con la emoción de la cautela, y con la emoción social de la humildad, ambas estrictamente relacionadas con actitudes científicas.

En términos generales esperaríamos que las acciones del alumno basadas en las emociones antes mencionadas, consistieran en acciones que de ser posible, nunca negaran al otro como legítimo otro en la convivencia. Las acciones aceptadas como válidas en el dominio de conocimiento que se va a construir deberán surgir del acuerdo, los conceptos emergerán de prácticas compartidas y lo mismo ocurrirá con las afirmaciones de conocimiento. Los alumnos preguntarán, responderán, conversarán, dudarán y expresarán lo que saben y los criterios que se aceptan para especificar que otro sabe. Al igual que el profesor, estarán vigilantes para no caer en la tentación de la certidumbre.

D.6 Principio de la Emoción como base de la Razón

La racionalidad, tiene un fundamento emocional. En general todos los sistemas racionales se basan en la aceptación "a priori" de las premisas que postulan. Es precisamente esta aceptación en la que interviene la emoción. Así, un argumento, una explicación será considerada racional en la medida en que satisface los criterios de racionalidad de quien la acepta. Por esto, rechazamos el dualismo emoción-razón, las emociones son la condición de posibilidad de la razón. Este principio es muy importante para que ofrezcamos una visión de ciencia, en la cual la razón es mucho más que la satisfacción de ciertos principios lógicos, que también son aceptados consensualmente por una cierta comunidad científica. En la escuela, actuamos como si las ideas fueran razonables en un sentido absoluto, como si no hubieran existido cambios importantes acerca de lo que en una cierta época se aceptó como razonable con relación a otra. Relativizar la noción de razón y racionalidad al sistema explicativo escogido, es también una manera de ejercer el principio de vigilancia ante la tentación de la certidumbre.

Otra forma de pensar la racionalidad es ligarla con nuestra supervivencia y con el conjunto de mecanismos automáticos y adquiridos, que nos ayudan a decidir, a razonar la mejor opción en una situación dada. A lo largo de la vida desarrollamos mecanismos que merced a nuestra capacidad mental de generar sentimientos y registros de las consecuencias positivas o negativas de nuestras acciones, nos permiten luego anticipar y tomar decisiones. Estos mecanismos, no hubiesen sido posibles sin la precedencia de las emociones. Existe pues una estrecha relación entre emociones, sentimientos y razones, en lugar del pretendido antagonismo que suele adjudicárseles.

En la mayoría de los sistemas educativos del mundo, los seres humanos viven al menos dieciséis años. Hemos dicho que tales sistemas tendrían que operar como ocasiones para desarrollar extensiones de nuestras funciones de autorregulación vital. Sin embargo, dentro de las escuelas se producen cada vez más acciones destructivas que atentan contra la supervivencia de los jóvenes -violencia, negación, malestar, deshumanización, adicción-. Pensamos que una didáctica que tome en cuenta las bases emocionales de la convivencia como fundamento de la supervivencia y de la

generación de conocimiento, podría contribuir al desarrollo de espacios más adecuados con nuestra impronta biológica de cooperación.

D.7 Principio del Error

La suspensión de la certidumbre, conduce a la instalación del error. ¿Cómo y cuándo nos damos cuenta de que estamos errando? Es imposible que reconozcamos un error cuando lo estamos cometiendo ¡obviamente, si así fuera no lo cometeríamos! Así, los errores *son siempre a posteriori*, lo cual nos exige siempre reflexionar acerca de las consecuencias de nuestras acciones, para detectar el error. Esta concepción modifica sustancialmente la manera en que nos sentimos cuando nos equivocamos, ya que sólo podemos detectarlo después que lo cometimos. La única forma de no errar, sería entonces no actuar, pero esto, en nuestra concepción acerca del conocer como vivir y como hacer, sería equivalente a morir.

Vivimos en una cultura escolar que no acepta los errores, y esto es así en muchos dominios de conocimiento, no solo en las ciencias. Nuestra ilusión de perfección y certeza, lleva a los estudiantes a sentimientos de minusvalía, desvalorización y desánimo. Ahora bien, si no podemos eliminar el error porque es constitutivo de nuestro modo de operar ¿cómo vamos a establecer que alguien sabe o no sabe?

D.8 Principio sobre como sabe que sabe, quién sabe

Aunque trataremos el problema de la evaluación en desarrollos posteriores, por ahora sólo enunciaremos sintéticamente este principio. En el grupo de clase diremos que alguien sabe, cuando sus acciones satisfacen los criterios de aceptación establecidos por el grupo para construir los conocimientos que se consideran aceptables. Tales criterios son producto del consenso y forman parte del conocimiento público -del grupo- según haya sido formulado en documentos escritos o en el flujo de las conversaciones que forman parte del vivir de dicho grupo.

D.9 Principio del bienestar, la creatividad y razonamiento

El bien-estar es parte de nuestro mecanismo de supervivencia. Las instituciones educativas son extensiones de nuestros mecanismos no automáticos de regulación para sobrevivir. El bienestar en el grupo de clase, se relaciona con la construcción de un espacio relacional de convivencia armoniosa basada en la aceptación del otro como legítimo otro. Este espacio relacional que acepta y promueve el desarrollo de la identidad de cada uno de sus miembros, es la condición de posibilidad del bienestar entendido como el esfuerzo por alejar las emociones negativas.

Aceptar que el error es inevitable en nuestro operar como conocedores implica reconocer que es siempre “a posteriori” (Maturana, 1995, 2001) y esto modifica nuestra manera de sentir frente a lo que denominamos error. En el aula, el error está ligado al sufrimiento porque conlleva negación. Estar en un espacio de aceptación, contrario a una dinámica emocional de negación, es la condición de posibilidad para decidir la mejor forma de actuar en una situación dada en un momento dado, es decir de razonar. Hay evidencia neurobiológica de incremento de la actividad cerebral en las regiones ligadas al razonamiento y la creatividad, en los estados emocionales de bienestar y lo contrario en los estados de tristeza. Un alumno que está habituado a no comprender, y a que esto se considere como un déficit que solo es atribuible a él, acaba sintiendo malestar y en ocasiones tristeza, en consecuencia, sus razonamientos disminuyen y su generación de ideas también, con lo cual su incomprensión aumenta. El grupo de clase como espacio de convivencia en aceptación y cooperación posee

los mecanismos para superar esto y para incrementar la convivencia en beneficio de todos.

Estos principios son compatibles con la idea de que *el grupo de clase es una comunidad que está aceptando la invitación a ingresar en un mundo de significados compartidos por otra comunidad* (Otero, 2006; 2007). Asumir esta perspectiva, lleva a la necesidad de definir una comunidad o institución llamada de referencia, en la cual se realiza un conocimiento que será "exportado" a otras culturas e instituciones. Este fenómeno consistente en la migración de un conocimiento que "vive" en una cierta institución hacia otra a la cual deberá adaptarse para continuar "vivo". Esto es lo que Chevallard (1992, 1997, 1999) define como *Transposición Didáctica*. Como consecuencia, la Mecánica Cuántica de los físicos profesionales resultará inevitablemente transformada cuando se intente enseñarla en la escuela.

La Mecánica Cuántica es un campo conceptual en el sentido de Vergnaud (1990), dentro del cual es posible distinguir al menos una estructura conceptual. En Física es posible reconocer diversos campos conceptuales dentro de los cuales es distinguible al menos una estructura conceptual de referencia. Cuando un profesor de física propone a sus estudiantes el estudio de un cierto Campo Conceptual, adopta de manera más o menos explícita una cierta Estructura Conceptual de Referencia (ECR). ***Una ECR es un conjunto de conceptos, las relaciones entre ellos, los principios, las afirmaciones de conocimiento y las explicaciones relativas a un campo conceptual, aceptados por la comunidad científica de referencia*** (Otero, M. R, 2006, 2007;2008). Parte de esta investigación se ocupa de reconstruir una ECR basada en el enfoque *Paths Integrals* de Feynman, distinguiendo, analizando, seleccionando y adoptando conceptos, explicaciones y principios, con el objetivo de transformarlos y volverlos objeto de enseñanza. Esta reconstrucción constituye los Fundamentos Físicos de la Tesis, desarrollados al final de este capítulo.

La ECR reconstruida será parcial o totalmente reconstruida por un grupo de clase, o por cualquiera que pretenda estudiarla -en la escuela media, en los cursos preuniversitarios, en los cursos de la universidad o en los cursos avanzados-. Este proceso de reconstrucción origina una estructura conceptual diferente a la primera, tanto por los componentes como por las relaciones entre ellos. De manera más o menos explícita, cada profesor de un cierto grupo de clase reconstruirá o seleccionará a partir de una existente, una estructura para ser enseñada, y en el mejor de los casos invitará a su grupo de clase a estudiarla (Otero, M. R, 2006, 2007;2008). Se denomina a esta otra estructura: Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar (ECPE), definida como ***“el conjunto de conceptos, relaciones entre ellos, afirmaciones de conocimiento, principios, y explicaciones relativos a un cierto campo conceptual, que debe ser reconstruido por los profesores a partir de una estructura conceptual de referencia (ECR) con el objeto de transformarla en reconstruible en un contexto y en una institución dada”*** (Otero, 2006, 2007).

Esta estructura se caracteriza por su relatividad institucional y personal, lo cual implica que podrían existir tantas estructuras conceptuales propuestas como profesores, grupos de clase e instituciones se consideren. Un punto importante para el análisis didáctico es que en ciertas instituciones existen estructuras características, referidas a diversos campos conceptuales que están vivas, adaptadas, aceptadas. Estas son *ecológicamente viables*, ya que de lo contrario no sobrevivirían al paso del tiempo, a las reformas educativas de diversa índole, etc. Por el contrario, otras estructuras son propuestas y casi nunca se adaptan. En este sentido, el aspecto esencialmente didáctico de esta investigación es la reconstrucción y análisis de una ECPE relativa a la Mecánica Cuántica, diseñada y analizada para un cierto

grupo de estudiantes de una institución, con ciertas características cognitivas, saberes previos, etc.

La reconstrucción de la ECPE origina un conjunto de situaciones que, en forma secuencial pretenden hacer emerger conceptos clave, explicaciones, etc. especialmente pensados para el grupo de clase al que se destina. La reconstrucción de esta estructura incluye el análisis de la conveniencia de utilización de distintos soportes como el informático; en este caso fue la selección y/o elaboración de software que pueda utilizarse con los estudiantes. También en esta reconstrucción se analizan cuáles decisiones y acciones didácticas resultarían adecuadas para favorecer una dinámica emocional contraria a cualquier tipo de negación. El proceso de reconstrucción de la ECPE que implica el análisis didáctico y el diseño de las situaciones, se presenta en el Capítulo 4.

En el análisis y el diseño se considera fundamentalmente la noción de *situación* en el sentido de Vergnaud (1990). Este concepto se vuelve más y más necesario cuanto más cercano se esté del nivel específico del grupo de clase. Al proponer una ECPE se incluye en su análisis didáctico al conjunto de situaciones que permitirán la emergencia y el funcionamiento de los conceptos clave, los principios clave de la ECPE correspondiente, las preguntas clave, las explicaciones y afirmaciones de conocimiento que se espera realizar, las emociones y acciones, los sentimientos, los mecanismos explicativos y el lenguaje en el que serán formuladas las explicaciones y las afirmaciones de conocimiento. (Otero, 2006; 2007; 2008). Estos constituyentes de la ECPE son definidos como:

Situaciones: se refiere a la noción de situación adoptada por Vergnaud (1990).

Conceptos Clave: son los conceptos centrales que se espera construir como emergentes de la situación propuesta y sin los cuales el problema formulado no podría resolverse.

Principios Clave: son afirmaciones de conocimiento que se aceptan sin deducirse de otras. Por ejemplo, el principio de Mínima Acción en mecánica clásica o el principio de Conservación de la Energía.

Preguntas Clave: las situaciones propuestas a los alumnos por el profesor tienen un carácter problemático, razón por la cual conllevan un conjunto de preguntas cuya respuesta da lugar a un conjunto de interacciones recurrentes entre los miembros del grupo de clase, conversaciones.

Emociones: las emociones son las disposiciones corporales que determinan nuestro dominio de acciones. No son controlables pero el organismo puede modularlas. Sin embargo, las conversaciones en las cuales participamos afectan nuestras emociones y estas afectan nuestro modo de vivir en una cierta cultura. La ECPE tiene que operar al nivel del alumno como una invitación a ingresar en un cierto dominio de conocimiento, que debe evitar cualquier atisbo de negación del otro. La ECPE tiene que contemplar la constitución de una dinámica emocional propicia para la construcción de conocimiento físico.

Acciones: Entendemos la acción en tres dimensiones: biológica, mental y actuativa. En el nivel de la ECPE privilegiamos la dimensión actuativa. Nos interesan las acciones de los miembros del grupo de clase relativas al conocimiento. Se trata de anticipar qué acciones son adecuadas en el dominio de conocimiento que está en construcción. Además, el significado de un objeto emerge del sistema de prácticas asociadas a él y dentro de cada dominio

Explicaciones: Las explicaciones son conjuntos sistémicos de afirmaciones de conocimiento que permiten predecir los eventos físicos o dar razón de ellos, mediante la atribución de relaciones causales a los objetos físicos construidos en un cierto dominio. Las explicaciones tienen el carácter de de tales para quienes las aceptan en el dominio de conocimiento al que pertenecen, en este caso, la física escolar.

Mecanismo explicativo: es el procedimiento o conjunto de acciones aceptadas en un dominio explicativo, como método para generar afirmaciones de conocimiento válidas. En el caso de la física, se tratará de la construcción de modelos físicos y matemáticos que generan objetos físicos, fenómenos nuevos a ser explicados, experimentos, predicciones y contrastaciones.

Lenguaje: en sentido amplio se refiere a los diversos modos semióticos que constituyen, especifican, y describen a los objetos propios de cada dominio de conocimiento.

En el esquema siguiente de la Figura 2.1 se muestran los elementos correspondientes a la ECPE y sus relaciones (Otero; 2007):

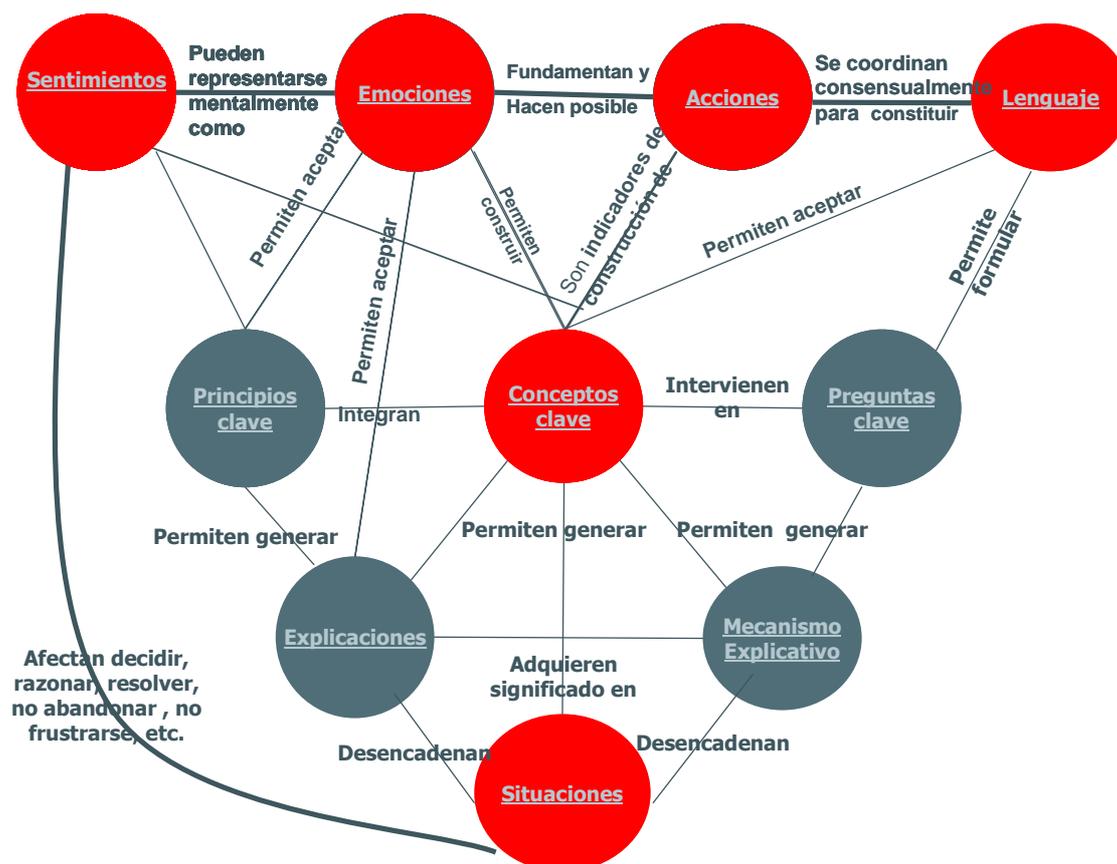


Figura 2.1: Los elementos que componen la ECPE y sus relaciones (Otero, 2008)

Cuando el profesor y su grupo de clase reconstruyen efectivamente la ECPE en la institución específica, tiene lugar otra estructura, la **Estructura Conceptual Efectivamente Reconstruida (ECER)**, definida como: “*el conjunto de conceptos, relaciones entre ellos, principios, afirmaciones de conocimiento y explicaciones relativos a un cierto campo conceptual que efectivamente resulta reconstruido por un grupo de clase, a partir de las coordinaciones consensuales de acciones que tienen lugar en las conversaciones de las cuales participan el profesor y los alumnos en dinámicas emocionales adecuadas.* (Otero, 2007, p.21)

Los conceptos y los significados que se distinguen en esta estructura, emergen del conjunto de acciones que se ponen en juego en las diversas situaciones que se proponen. Los significados se entienden en una doble dimensión cognitiva: personal y grupal. Así cada miembro del grupo de clase construirá una estructura conceptual personal y una red de significados única -en el sentido de propia- y privada. A la vez, las conversaciones del grupo de clase generan una historia de interacciones recurrentes que resultan en la

construcción de una red de significados compartidos y públicos, comunes, que son un producto consensual, lo que se ha denominado "negociación de significados" (Gowin, 1981; Novak & Gowin, 1984; Moreira, 2000, 2005). Este proceso de negociación puede ser más o menos explícito y más o menos consciente, dependiendo de la profesionalidad del profesor y de la distancia entre la estructura de referencia, la estructura propuesta y la efectivamente enseñada. El estudio de toda esta transformación del conocimiento y de las condiciones para su ocurrencia, se realizaría tanto a priori como a posteriori y constituye la unidad de análisis didáctico.

El esquema mostrado en la Figura 2.2 ubica en un gradiente de transposición, y de proximidad al aula, las distintas estructuras que es posible reconstruir para el campo conceptual de la Mecánica Cuántica, siendo éste uno de los posibles campos conceptuales que es posible distinguir en Física:

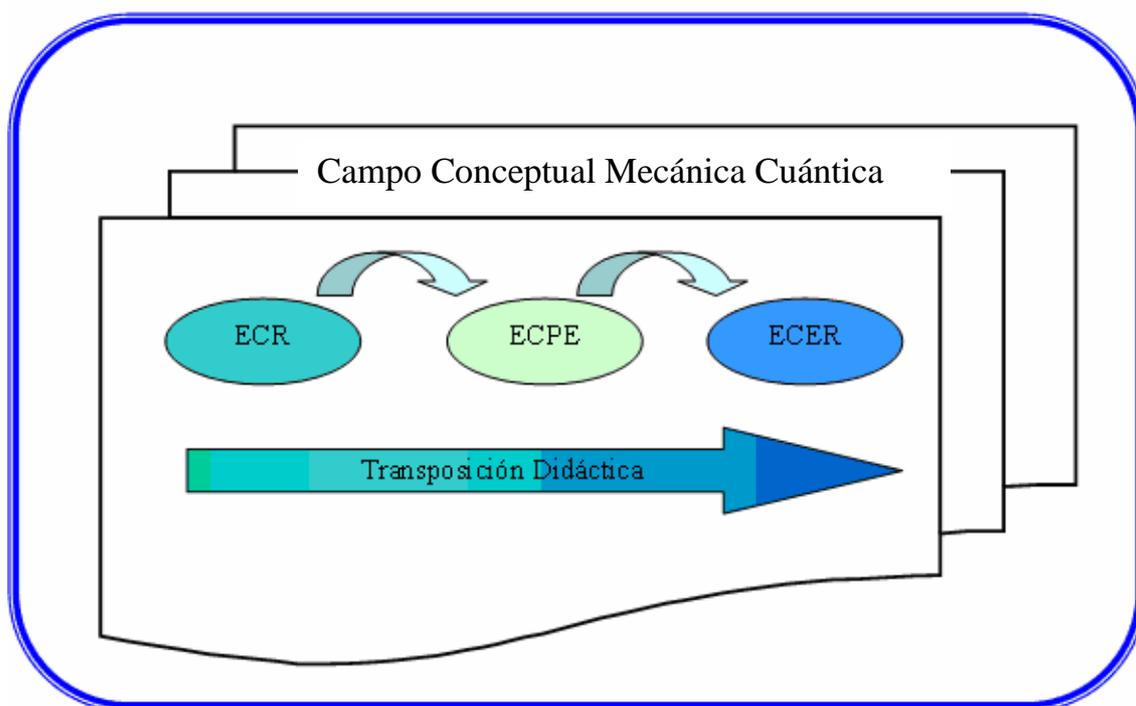


Figura 2.2: En Física una vez que se establece un Campo Conceptual es posible distinguir y seleccionar una ECR para reconstruir a partir de ella una ECPE, y cuando se implemente la secuencia de situaciones en el aula, se reconstruye otra estructura, la ECER

Las nociones ECR y ECPE se relacionan en parte con la idea de estructura cognitiva en el sentido de Ausubel y Novak y con la noción de campo conceptual y de concepto de Vergnaud. (Otero 2008, p. 13) Las estructuras son sistemas (componentes + organización) que incluyen tanto a los conceptos relevantes, como a las relaciones: principios fundamentales, explicaciones y mecanismos explicativos que los vinculan.

Por su parte, la noción de concepto de Vergnaud, como se dijo, incluye al lenguaje, a los significantes y a los invariantes operatorios, que suponen la conservación de las formas de organización de la acción. Esta noción de concepto ligado a la acción en todas sus variantes, permite tender un puente a las emociones subyacentes y a los sentimientos, también incluidos en la estructura. Las estructuras conceptuales son indisociables del conjunto de problemas y situaciones que les dan sentido. Las situaciones que se diseñan como parte de una ECPE, llaman a su vez a ciertos esquemas (en el sentido de Vergnaud), lo cual permite analizar el fenómeno de la puesta en acto de una ECPE, esto es la ECER, también desde un

punto de vista cognitivo. Por esto, en la Tesis se plantea un análisis didáctico *a posteriori*, enfatizando en los aspectos cognitivos y emocionales-afectivos. Este análisis se desarrolla en el Capítulo 5.

Fundamentos epistemológicos

En esta sección se describen los fundamentos epistemológicos que subyacen a la investigación, basada en la síntesis de Otero (2006; 2007) acerca de la concepción epistemológica de Maturana.

Maturana (1984, 1991, 1995, 2001) propone que conocer es un proceso que se inicia en la acción de cualquier organismo vivo en interacción con su medio. Cuando un ser vivo se encuentra en una historia de cambios estructurales recurrentes con conservación de su organización, se dice que "*sabe vivir*" y esto es así hasta que muere, porque contrariamente ya "*no sabe vivir*". Todo ser vivo conoce en el ámbito de su propio vivir donde sea que el organismo se desarrolle. Por ejemplo, si alguien quiere estudiar Física o Matemática, se inscribe en una Universidad o en una institución donde se estudien dichas disciplinas, de esta manera ingresa en una historia de interacciones que durará mientras este ser no se desintegre como estudiante (Maturana, 1995: 198, citado por Otero, 2007, p. 2). Esto es aplicable a cualquier dominio de conocimiento, incluso el conocimiento en sí mismo, el lenguaje o la didáctica. Todos emergen como modos del convivir humano en ciertas condiciones de interacciones recurrentes.

Como observadores, se admite que otro organismo tiene conocimiento en un cierto dominio, cuando aceptamos que realiza acciones adecuadas, efectivas, en ese dominio. Así "*el conocimiento es un regalo que nos hacen los otros*" cuando aceptan como efectivas y adecuadas las acciones de otras personas, en un dominio que ellos especifican. Esto hace posibles tantos dominios de conocimiento, como criterios puedan ser aceptados por un observador para juzgar adecuadas las acciones de otro organismo -sea o no humano-. En cualquier grupo de clase, se dirá que un alumno o un profesor saben física, si realizan las acciones que en dicho grupo, se aceptan como válidas para el dominio de conocimiento físico. El conocer humano se realiza en comunidades de conocimiento, que resultan definidas según el criterio de aceptabilidad de lo que para sus miembros son acciones aceptables. Los dominios de conocimiento son consensuales y operatorios pues especifican un sistema de prácticas compartidas.

Según cómo se considere el papel del observador hay dos maneras de enfocar el problema del conocimiento. Estas dos posiciones son: "*objetividad entre paréntesis*" y "*objetividad sin paréntesis*" (Maturana, 1995). En el dominio de la objetividad sin paréntesis se asume que el observador tiene acceso a un mundo independiente. Los objetos pueden ser físicos, matemáticos, biológicos, míticos, etc. Por el contrario, al colocar la objetividad entre paréntesis, se reconoce que cada uno de esos objetos constituye un dominio de realidad particular, pero también que ninguno de ellos es una referencia a una realidad independiente de aquella que cada uno crea en el lenguaje, en su condición de observador.

La objetividad entre paréntesis invita a aceptar que como resultado de nuestra interacción con el ambiente, estamos irreductiblemente involucrados con el mundo que "*traemos a la mano*". En otros dominios como el de la Física Cuántica, se ha propuesto un principio similar para los objetos que emergen en dicho campo de conocimiento. En este contexto de tantos dominios de conocimiento posibles como acciones sean aceptadas, las afirmaciones de conocimiento realizadas en un cierto dominio operan como invitaciones para ingresar al mismo dominio de realidad de quien las propone. Si la invitación es aceptada, ocurre una

interacción consensual recurrente que permite emocionar y lenguajear constructivamente, en una mutua aceptación en la convivencia. Esto no significa que siempre se va a estar de acuerdo. Desde la objetividad entre paréntesis, los desacuerdos cognitivos no conllevan la negación del otro: “*tu estás equivocado, yo tengo la razón*”. Los desacuerdos se interpretan como operaciones legítimas en dominios de conocimiento diferentes, que pueden dar lugar a un nuevo dominio de realidad que sea compartido por las partes.

Maturana (1991) propone que la decisión de estar, o no, en un cierto dominio cognoscitivo es el producto de nuestra emoción y no de lo que habitualmente se denomina razón. La coexistencia cognoscitiva supone una dinámica emocional que pasa por la seducción y no por la obediencia. Contrariamente, en la línea de la objetividad sin paréntesis las afirmaciones de conocimiento se realizan como si obedecieran un criterio de validación independiente de quien las formula, y en consecuencia, conllevan una exigencia de obediencia. Por ejemplo, cuando explícita o implícitamente en un contexto de enseñanza, se presentan los enunciados científicos como verdaderos e incuestionables o las cuasiproposiciones lógico-matemáticas como verdades eternas y absolutas, a los estudiantes se les está pidiendo obediencia. Obsérvese que esto sucede frecuentemente, aun cuando la petición la realice un profesor sonriente y paternal, o mediante ornamentados y bellos, pero transparentes e incuestionables textos escolares. Si no hay lugar para plantear y resolver una confrontación, espacio para que el alumno participe en un proceso argumentativo, si no se reconoce al alumno como un legítimo otro en la convivencia, se está requiriendo obediencia y se está asumiendo implícitamente que se posee acceso independiente a "la verdad".

Al reflexionar y decidir tomar el lado de la objetividad entre paréntesis, la posición acerca del conocimiento que se quiere enseñar resulta radicalmente afectada. Se debe aceptar que a lo sumo, se está en condiciones de formular a los estudiantes una invitación, cuya aceptación descansa sobre bases emocionales. Pero ¿es esto tan diferente de la proposición que afirma: para que se produzca aprendizaje significativo, el estudiante tiene que querer aprender? *Frecuentemente, ni profesores ni alumnos tienen conciencia de estar en una dinámica emocional de negación, y como sabemos los resultados de aprendizaje no son satisfactorios.* (Otero, 2006, p.5).

Fundamentos Físicos: el enfoque de Feynman de la Mecánica Cuántica

A continuación se presentan los fundamentos físicos de esta Investigación. Se presentan los conceptos fundamentales de la formulación de Caminos Múltiples o Integrales de Camino formulada por Richard Feynman en 1949⁴. Esta formulación es equivalente al enfoque tradicional de la Mecánica Cuántica, el formalismo Hamiltoniano canónico, desarrollado previamente por E. Schrödinger, W. Heisenberg y P. Dirac entre 1925 y 1926. La utilización de uno u otro formalismo es cuestión de conveniencia y a menudo resultan complementarios⁵.

De acuerdo a la mecánica clásica, dada una partícula en un estado inicial $I = \mathbf{r}_i (t=0)$ y un estado final $F = \mathbf{r}_f (t=T)$, donde $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición en función del tiempo t , existe una *única* trayectoria o función posición-tiempo: $\mathbf{r}_c(t)$, que conecta ambos estados, la cual está dada por la solución de la *segunda ley de Newton*. Como es sabido, las leyes de la Física Clásica no son válidas en el dominio atómico. En dicho caso la descripción adecuada es a través de las leyes de la Mecánica Cuántica. Estas leyes describen correctamente el comportamiento a escala atómica e incluyen a la mecánica clásica como caso particular cuando las masas se vuelven macroscópicas. El principal cambio en la Mecánica Cuántica,

⁴ Parte de la síntesis que aquí se presenta se basa en el trabajo de Arlego (2008)

⁵ Para un enfoque tradicional a este nivel pueden consultarse Müllr, R; Wiesner, H. (2002) y Olsen, R. (2002).

respecto de la Clásica, es que dadas ciertas condiciones iniciales y finales, en la Mecánica Cuántica ya no se considera una *única* trayectoria $r_{cl}(t)$, describiendo la evolución del sistema desde un estado inicial I hasta un estado final F , sino la *probabilidad* P de arribar a F partiendo de I , lo cual denotamos con $P[I \rightarrow F]$. Ésta, a su vez, se obtiene evaluando el módulo cuadrado de la *amplitud de probabilidad total* $A[I \rightarrow F]$, es decir:

$$P[I \rightarrow F] = |A[I \rightarrow F]|^2, \quad (1)$$

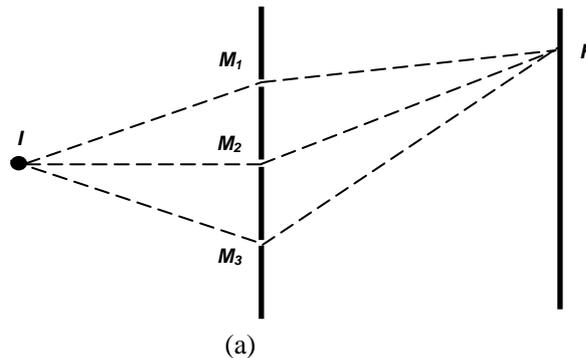
Se puede derivar una expresión para el cálculo de la amplitud de probabilidad $A[I \rightarrow F]$ como integral de camino, considerando como *primer postulado* de la Mecánica Cuántica el *principio de superposición*. (Arlego, 2008)

Se considera un experimento como se esquematiza en la Figura 2.3a, en el que una fuente I emite electrones en $t=0$. La llegada de los electrones en un tiempo T , a diferentes puntos F de una pantalla ubicada a cierta distancia de I es registrada mediante detectores montados sobre ésta. Se busca evaluar $A[I \rightarrow F]$ en $t=T$. Si se supone que entre medio de I y F insertamos otra pantalla M con varios orificios, que son los únicos lugares por donde los electrones pueden atravesarla, como se muestra en la Figura 2.3. En este caso, el principio de superposición postula que:

$$A_M(I \rightarrow F) = \sum_i A(I \rightarrow M_i \rightarrow F). \quad (2)$$

Es decir, la amplitud total es la suma (superposición) de las amplitudes de ir de I a F en $t=T$, a través de cada uno de los orificios de M . Por supuesto ahora se está calculando la amplitud de propagación A_M con M entre medio de I y F , no la amplitud A original, pero esto es sólo un artificio para el cálculo.

Si ahora se agrega una segunda pantalla N con otra cantidad arbitraria de orificios, como se representa en la Figura 2.3b siguiente:



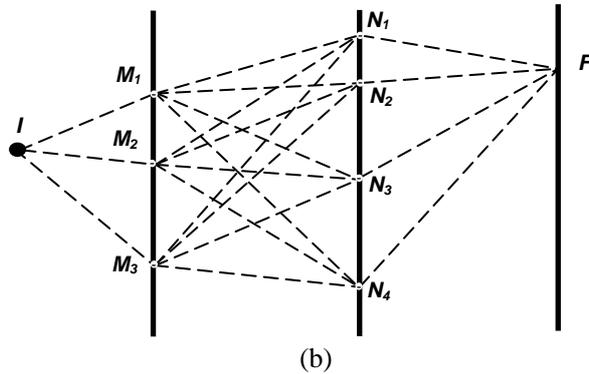


Figura 2.3: Esquema de una experiencia hipotética para calcular la probabilidad de I a F

Aplicando nuevamente el principio de superposición obtenemos:

$$A_{M,N}(I \rightarrow F) = \sum_{i,j} A(I \rightarrow M_i \rightarrow M_j \rightarrow F).$$

¿Qué ocurriría si se colocaran “infinitas pantallas con infinitos orificios”? Siguiendo el razonamiento anterior, si se agrega un gran número de pantallas intermedias con cantidad arbitraria de orificios en cada una, y se hace tender el número de orificios en cada pantalla a infinito, entonces cada pantalla tiende a desaparecer. Por lo tanto la amplitud resultante tiende a la de la propagación original en el vacío $A [I \rightarrow F]$ en $t=T$, sin pantallas intermedias, es decir

$$A(I \rightarrow F) = \sum_{\text{todos los caminos } r(t)} A_{\text{cada } r(t)}(I \rightarrow F). \quad (3)$$

La Ec.(3) es la expresión para obtener la amplitud de probabilidad $A [I \rightarrow F]$ de un electrón que es emitido por la fuente en $t=0$ y arriba a un punto F de la pantalla en $t=T$, atravesando el espacio vacío intermedio. Como puede observarse, consiste en sumar todas las amplitudes correspondientes a cada camino posible $r(t)$ que conecte I con F . El resultado se muestra esquemáticamente en la Figura 2.4:

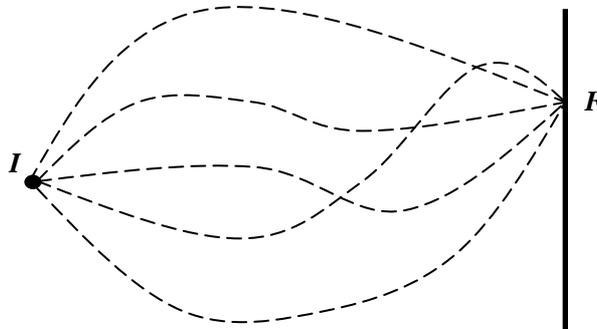


Figura 2.4: La amplitud de probabilidad de ir desde I a F a través del vacío es la suma de las amplitudes asociadas a todos los caminos posibles que conectan I con F (aquí se muestran sólo algunos).

Sin embargo, todavía se debe determinar la forma de calcular la amplitud para cada camino en la Ec. (3). Este será el *segundo postulado*, que se enuncia a través de las siguientes reglas:

Primero, para cada trayectoria posible, $\mathbf{r}(t)$, que une el estado inicial $I = \mathbf{r}_i (t=0)$ con el estado final $F = \mathbf{r}_f (t=T)$, se calcula la acción correspondiente $S [\mathbf{r}(t)]$, donde:

$$S[\mathbf{r}(t)] = \int_0^T L[\mathbf{r}(t)] dt, \quad (4)$$

siendo $L[\mathbf{r}(t)]$ el *Lagrangiano* del sistema, en este caso: $L = \frac{1}{2} m v^2$ es decir, la energía cinética (la energía potencial es cero aquí).⁶

Segundo, la amplitud asociada a esa trayectoria viene dada por:

$$A_{\text{cada } \mathbf{r}(t)}(I \rightarrow F) = \exp[iS[\mathbf{r}(t)] / \hbar], \quad (5)$$

donde $\hbar = h / 2 \pi$, siendo $h = 6.625 \times 10^{-34} \text{ J.s}$, la *constante de Planck*.

La expresión (5) se interpreta del siguiente modo: cada “camino”, o trayectoria, o función $\mathbf{r}(t)$, que conecta I con F contribuye a la amplitud de probabilidad con un número complejo de módulo 1 y una fase dada por $S [\mathbf{r}(t)] / \hbar$, que será diferente para cada camino.

En resumen, las ecuaciones (1), (3), (4) y (5) son la base de la formulación de integrales de camino de la Mecánica Cuántica. La amplitud de probabilidad resultante -ecuación (3)- se obtiene al sumar cada una de las amplitudes asociadas a cada camino posible – ecuaciones (4) y (5). Luego se eleva al cuadrado el módulo de la amplitud de probabilidad resultante $A[I \rightarrow F]$, para obtener la probabilidad de arribar a F partiendo de I , que es la ecuación (1).

La suma sobre todos los caminos se formaliza mediante un procedimiento de discretización y pasaje al límite, que es una generalización del método habitual para evaluar integrales ordinarias, de allí el nombre *integrales de camino*. En la práctica, la integral de camino sólo puede evaluarse en algunos casos sencillos como el de la partícula libre o el oscilador armónico. En estos se puede obtener una expresión analítica exacta. En los otros casos se tiene que recurrir a métodos aproximados, como teoría de perturbaciones o soluciones numéricas.

Un desarrollo matemático formal del razonamiento de las “infinitas pantallas con infinitos orificios”, la equivalencia entre la formulación de integrales de camino y el método canónico de operadores se muestra en muchos libros de texto de Mecánica Cuántica (por ej. Shankar, R. (1980)).

El papel de la constante de Planck en la Transición Mecánica Cuántica-Mecánica Clásica (Principio de Correspondencia):

La Mecánica Cuántica predice los mismos resultados que la Mecánica Clásica cuando las magnitudes de las masas de los objetos considerados son macroscópicas. Más precisamente, es la relación entre la magnitud de la acción S y la constante de Planck (o \hbar), quien define

⁶ El *principio de mínima acción* establece que de todas las trayectorias posibles, $\mathbf{r}(t)$, la trayectoria clásica $\mathbf{r}_{cl}(t)$, es la que minimiza a la acción, es decir: $S[\mathbf{r}_{cl}(t)]$ es mínimo. La equivalencia entre el principio de mínima acción y la segunda ley de Newton se muestra, por ejemplo, en Goldstein, H. (1966).

el comportamiento de un sistema. Cuando $S \approx \hbar$ el sistema se considera cuántico, mientras que cuando $S \gg \hbar$ el comportamiento es clásico. Esto se debe al valor extremadamente pequeño de la constante de Planck, en un contexto macroscópico.

Una ventaja conceptual importante del enfoque de Caminos Múltiples, es que permite explicar la transición entre el comportamiento microscópico y macroscópico de una forma simple, sin el formalismo matemático. A partir de la Figura 2.5 es posible visualizar la amplitud resultante a partir de la gráfica de la suma de las amplitudes asociadas a las diferentes trayectorias. Esto es una suma de números complejos en el plano Real-Imaginario, donde cada uno tiene módulo unidad y una fase dada por S / \hbar , según la ecuación (5). Se puede observar que los caminos cercanos a la trayectoria clásica contribuyen en fase (línea recta central), mientras los otros se cancelan unos con otros y por lo tanto no aportan a la amplitud de probabilidad (extremos).

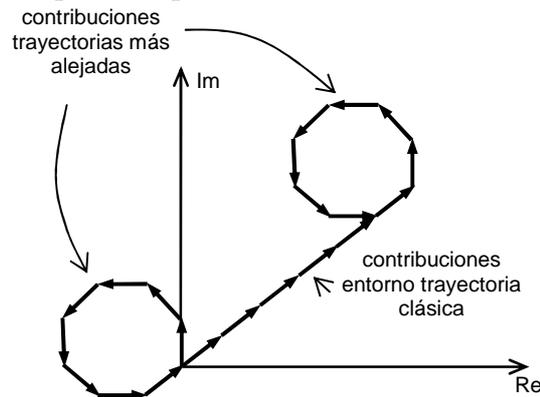


Figura 2.5: Representación esquemática de la suma de amplitudes de probabilidad. Cada amplitud es representada por un número complejo de módulo unidad y ángulo de fase S / \hbar . El caso mostrado puede representar un objeto macroscópico en que sólo los caminos extremadamente cercanos a la trayectoria clásica aportan a la suma (línea recta central). Otros caminos tienden a anularse mutuamente (extremos).

En el texto de Shankar (1980) se encuentra la siguiente forma de expresar la idea anterior de la siguiente forma: Se deben sumar las contribuciones de cada función $x(t)$; como cada una de las funciones tiene una acción S diferente, contribuye con diferente fase, y las contribuciones de las funciones esencialmente se cancelan unas con otras, hasta que se consideran las funciones cercanas a la función clásica. Como S es estacionaria allí, las funciones cercanas a ella se suman constructivamente y producen una gran suma. Ni bien se consideren las funciones alejadas de $x_{clas}(t)$ la interferencia destructiva comienza otra vez. Por lo tanto, la probabilidad está dominada por los caminos cercanos a $x_{clas}(t)$. Entonces, la función clásica es importante, no sólo por su gran contribución a la suma, sino porque en su vecindad las funciones contribuyen coherentemente. ¿Cuándo comienzan a cancelarse los vectores? O ¿Cuánto es posible alejarse de la función clásica para que la coherencia se destruya y los vectores dejen de aportar constructivamente? Hasta que la fase difiera de la fase de la amplitud clásica en π , de ahí en adelante los vectores se cancelarán. Esto equivale a decir que la acción S para las funciones debe estar dentro de $\hbar \pi$ de S_{clas} . Por ejemplo, para una partícula macroscópica esto significa un conjunto extremadamente limitado a la función clásica, y que su $S_{clas} \text{ 1erg.seg} \sim 10^{27} \hbar$, mientras que para un electrón esto cambia notablemente.

Por ejemplo, en el caso de una partícula o electrón libre que parte del estado inicial con $t=0$ en $x=0$ y termina en el estado $t=1$ cm. en 1s, la función clásica es $x = t$; otra función que conecta el estado inicial con el final podría ser $x = t^2$. Esta situación se representa en la Figura 2.6 siguiente:

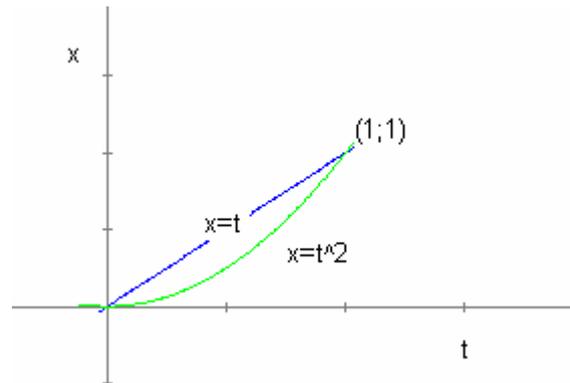


Figura 2.6: Dos posibles funciones conectando el estado inicial (0;0) con el final (1;1)

Estas funciones tienen un valor de acción:

$$S[x = t] = \frac{m}{2} \quad \text{y} \quad S[x = t^2] = \frac{2m}{3}$$

Si se trata de una partícula clásica, por ejemplo de 1g., el cambio en la acción es:

$$\Delta S \sim 1.6 \times 10^{26} \hbar$$

Por lo tanto, el cambio de fase es de 1.6×10^{26} rad, y entonces se puede ignorar completamente la contribución de la función $x = t^2$.

Si en cambio se trata de un electrón, de masa 10^{-27} g.

$$\Delta S \sim \hbar / 6$$

Por lo tanto el cambio de fase es de un sexto de radián, con lo cual entra en el rango de coherencia $\Delta S < \hbar \pi$

Por lo tanto, no es posible considerar que el movimiento de la partícula se describe con una sola y bien definida función $x_{\text{clás}}(t)$

En síntesis, mientras que en el dominio atómico, en general, se deberán considerar todos los “camino o trayectorias alternativas”, en un contexto macroscópico la situación es diferente. En este caso, $S \gg \hbar$ y el cambio de fase al pasar de una trayectoria a la otra es extremadamente grande. Por lo tanto, en promedio, al sumar los aportes correspondientes a trayectorias arbitrarias habrá una tendencia a anularse y no aportarán a la suma. Sin embargo esto no sucederá para *todas* las trayectorias ¿Que ocurre con la trayectoria clásica, que sigue la partícula macroscópica? Como se sabe, la acción es mínima en ese caso. Esto implica que al menos en un entorno extremadamente reducido alrededor de la trayectoria clásica, todos los caminos aportan con aproximadamente la misma fase. Es decir la trayectoria clásica es la *única* que prácticamente aporta a la suma. Por lo tanto, para una masa macroscópica, la probabilidad para la trayectoria de mínima acción tiende a uno y así obtenemos, a partir de la Mecánica Cuántica, vía la formulación de integrales de camino, los mismos resultados de la Mecánica Clásica.

Es importante notar que en el caso de un sistema libre (potencial nulo, $V=0$), incluso en el dominio atómico la trayectoria clásica y su entorno mantienen un rol especial. Sólo que ahora el entorno puede ser una región más extendida alrededor de la trayectoria clásica. De hecho, la amplitud de probabilidad dado por la ecuación (3), para el caso de una masa arbitraria (incluso a nivel atómico) y libre, y considerando una sola dimensión, puede

expresarse en una forma factorizada exacta, incluyendo sólo el aporte de la acción clásica: $S[x_{cl}]$ en el exponencial y multiplicado por un factor C que tiene en cuenta las contribuciones en fase de los caminos en la vecindad de la trayectoria clásica, es decir:

$$A(I \rightarrow F) = C \exp(i S_{cl} / \hbar) \quad (V=0, \text{ masa } m, \text{ arbitraria}). \quad (6)$$

La demostración de la ecuación (6) se encuentra desarrollada en la literatura correspondiente (Shankar, R. (1980)).

Aplicación de la técnica de Caminos Múltiples para la Experiencia de la Doble Rendija con electrones

Se considera una fuente que emite electrones con una velocidad media y se supone que en las pantallas el electrón está sujeto a una barrera de potencial impenetrable $V=\infty$, excepto en los orificios de las mismas y en el resto del espacio, donde el electrón es libre, y por lo tanto es válida la Ec(6). Si no se considera la difracción de los electrones en cada rendija y se supone que cada rendija es una nueva fuente radial de electrones con rapidez media v , la técnica de Caminos Múltiples permite responder a la pregunta ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón arribe a un punto a una distancia x del centro de la pantalla en la pantalla partiendo de la fuente? Para ello, sean:

$$A(O_1 \rightarrow x) = C \exp(i S_{cl} [O_1 \rightarrow x] / \hbar) \quad \text{y} \quad A(O_2 \rightarrow x) = C \exp(i S_{cl} [O_2 \rightarrow x] / \hbar)$$

las amplitudes de arribar a x pasando por uno de los dos orificios O_1 o el otro orificio O_2 , respectivamente. De acuerdo a la STA, la amplitud total de arribar a x , que denotaremos con $A(x)$, es la suma de arribar a x pasando por uno u otro orificio, es decir:

$$A(x) = A(O_1 \rightarrow x) + A(O_2 \rightarrow x)$$

$$A(x) = C (\exp(i S_{cl} [O_1 \rightarrow x] / \hbar) + \exp(i S_{cl} [O_2 \rightarrow x] / \hbar)).$$

Ahora bien, la acción clásica es $S_{cl} [O_{1,2} \rightarrow x] = \frac{1}{2} m v^2 T_{1,2} = \frac{1}{2} m v R_{1,2}$, siendo $T_{1,2}$ el tiempo transcurrido para llegar a x desde cada orificio con una velocidad media v y $R_{1,2}$ las distancias de los orificios $O_{1,2}$ a x (ver Figura 2.7). La probabilidad de arribar a x , estará dada por:

$$P(x) = |A(x)|^2 = |C (\exp i \alpha R_1 + \exp i \alpha R_2)|^2 ; \quad \text{siendo } \alpha = m v / (2 \hbar) \quad (7)$$

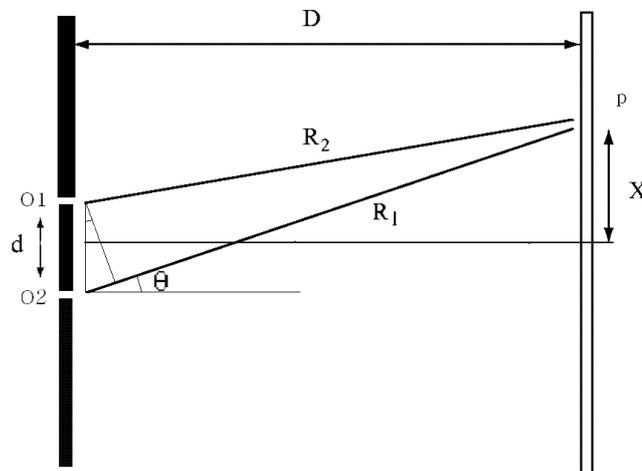


Figura 2.7: Ilustración esquemática de la experiencia de la doble rendija con electrones

Desarrollando la Ec. (7) se obtiene:

$$P(x) = 2 C^2 (1 + \text{Cos}[\alpha (R_1 - R_2)]) = 4 C \text{Cos}^2[\alpha (R_1 - R_2)/2] \quad (8)$$

Considerando que la pantalla está muy alejada de las rendijas, puede observarse a partir de la Figura 2.7 que se cumple: $R_1 - R_2 \sim d \text{sen } \theta \sim d \text{tg } \theta = d x / R$, donde d es la separación de las rendijas.

Reemplazando esto en la Ec. 8 se obtiene:

$$P(x) = c' \text{cos}^2 [(p / \hbar) (d x / (4 R))], \quad (9)$$

donde $p = mv$ es la cantidad de movimiento y $c' = 4 C^2$ es un factor irrelevante para nuestros propósitos. La utilidad de obtener esta expresión radica en que los alumnos pueden reconocer a partir de ella que el patrón de interferencia que resulta en la experiencia con electrones –la distribución de probabilidades relativa– está modelado con una función coseno cuadrado. La distribución de máximos y mínimos en la pantalla resulta depender de dos conjuntos de parámetros. Uno de ellos depende de geometría de la disposición experimental: $d x / (4 R)$. El otro de las características cuánticas intrínsecas del electrón: p / \hbar .

La Ec. (9) una expresión equivalente a la obtenida para el patrón de interferencia en el experimento de la doble rendija con ondas electromagnéticas clásicas o mecánicas de longitud de onda λ . Análogamente con estos fenómenos se obtiene que

$$\lambda = h / p \quad (10)$$

que representa el carácter ondulatorio del electrón (y de la materia en general).

Desde un punto de vista estrictamente matemático, el método STA presenta problemas formales, principalmente en relación a la definición y la convergencia de la suma. En la práctica, la suma sobre todos los caminos puede evaluarse en algunos casos sencillos como el de la partícula libre o el oscilador armónico. En casos más complejos se recurre a tratamientos aproximados en forma de desarrollos en serie alrededor de casos con solución exacta (teoría de perturbaciones) o a la evaluación estadística de las sumas (métodos de Monte Carlo). Una ventaja de la formulación de la STA es que permite obtener una serie de resultados formales (no perturbativos) a los que es difícil de arribar mediante el formalismo canónico. Por otro lado, el tratamiento de la STA es generalizable a sistemas de partículas y campos, incluso en el dominio relativista, empleando el Lagrangiano correspondiente. Por su parte, la equivalencia de la técnica STA con el formalismo canónico de operadores se muestra en muchos libros de texto de Mecánica Cuántica (véase Shankar, 1980)

El enfoque de Caminos Múltiples en la reconstrucción de la Estructura Conceptual de Referencia

La selección de conceptos y principios que componen la Estructura Conceptual de Referencia basada en la técnica de Caminos Múltiples de Feynman se realizó considerando los aspectos siguientes:

- Permite evitar el desarrollo estrictamente histórico en el que tradicionalmente se presenta la Mecánica Cuántica. Esto constituye una ventaja debido a que los problemas

surgidos en la comunidad científica de referencia en la época en la cual se gestó la física cuántica carecen de sentido para los estudiantes, y finalmente los conceptos y principios cuánticos se imponen a los estudiantes sin pasar por una construcción de su mecanismo explicativo, y sin abordar los aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica, como la descripción probabilística del movimiento del electrón, el Principio de superposición, y el Principio de correspondencia. Sólo requiere que los estudiantes actualicen sus conocimientos básicos de Mecánica Clásica. Por lo tanto, una de las ventajas de este enfoque es que permite enseñar aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica (sistema cuántico, Principio de Superposición y Principio de Correspondencia) a estudiantes que no disponen de gran cantidad de conceptos físicos ni matemáticos, más allá de los de Mecánica Clásica.

- La técnica es aplicada al sistema más simple, como el caso del electrón libre, porque éste constituye un ejemplar que reúne las características de los sistemas cuánticos, y de esa forma permite analizar y caracterizar los sistemas cuánticos utilizando un nivel matemático basado en operaciones elementales con vectores (suma y módulo) y enfatizando principalmente la idea probabilística de la Mecánica Cuántica. (Arlego, 2008). De esta forma, permite introducir el Principio de Superposición.
- Una ventaja importante del enfoque de Caminos Múltiples, es que su formulación permite explicar la transición entre el comportamiento microscópico y macroscópico, centrando el análisis en el cociente entre la acción S y la constante de Planck. Según el Principio de correspondencia, la descripción física de los eventos en la escala cuántica se debe extender al mundo macroscópico en el límite de grandes energías con respecto a \hbar . Es decir, la Mecánica Cuántica debe predecir los mismos resultados que la mecánica clásica para objetos macroscópicos, donde en la práctica puede considerarse \hbar tan pequeño en relación con las dimensiones macroscópicas, que \hbar tienda a cero.
- Otra ventaja es que a pesar del nivel matemático complejo que implica su implementación técnica, la comprensión de la idea principal y los resultados de aplicar la técnica de Caminos Múltiples, se pueden visualizar mediante el uso de herramientas informáticas de simulación del cálculo, especialmente diseñadas para ello. En particular estas herramientas reemplazan el lenguaje analítico por el geométrico, utilizando un marco de operaciones básicas con vectores. El lenguaje geométrico permitiría a los alumnos visualizar el proceso de suma y reafirmar la idea que es la fase del vector y no el módulo quien varía de una trayectoria a otra.

En la reconstrucción de la ECR utilizando la técnica de Caminos Múltiples se decidió que los **conceptos y principios clave** que se enseñarán son los que se presentan en el mapa conceptual de la Figura 2.8. Se busca representar la característica vertebral de la experiencia de la doble rendija, ya que con ella se comienza y se finaliza la propuesta. En el Capítulo 4 se presenta el diseño didáctico para enseñar estos **conceptos y principios clave**, y el análisis didáctico a priori de las situaciones que los definen.

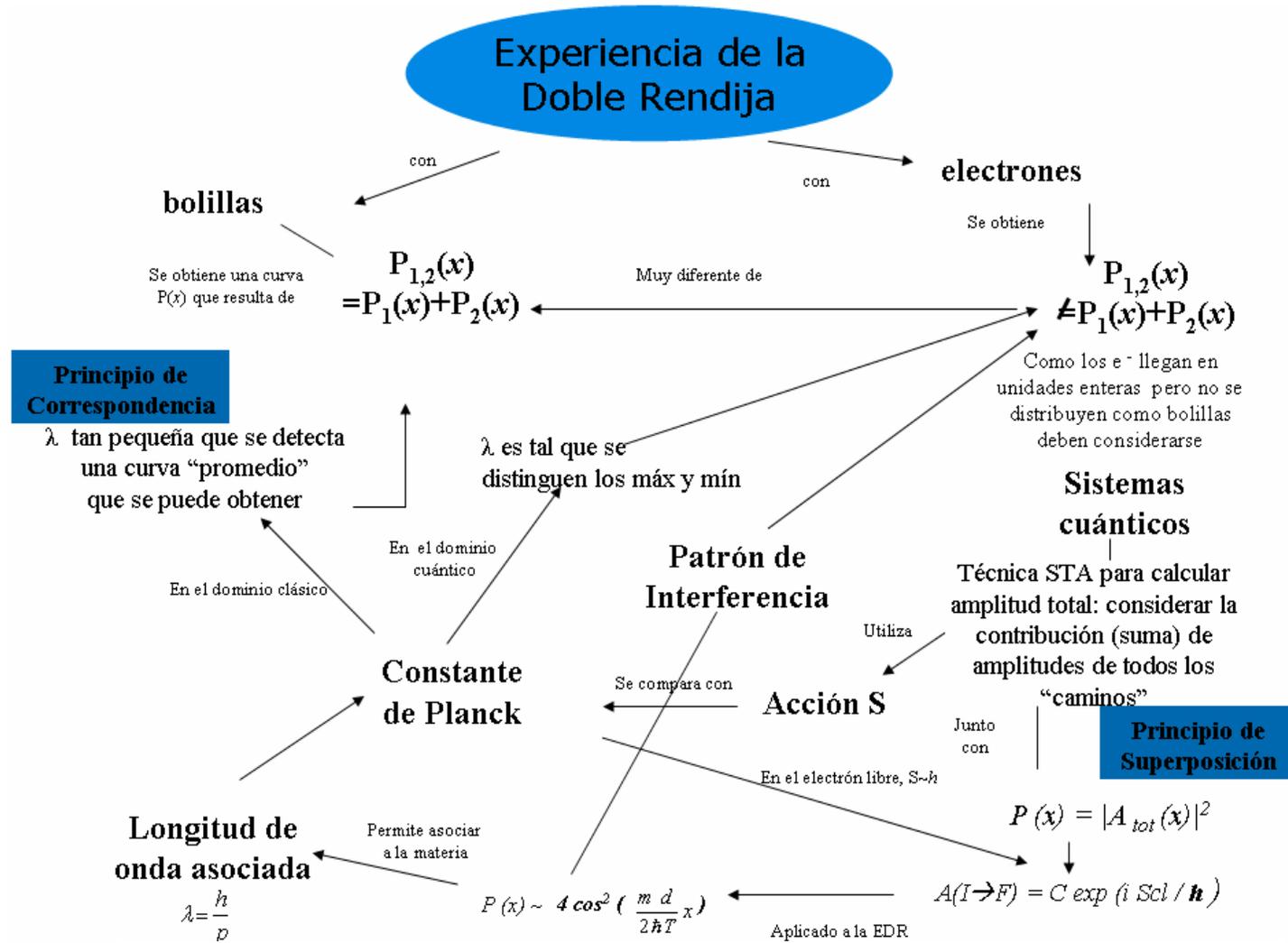


Figura 2.8: Conceptos y principios clave que se esperan reconstruir, y sus relaciones

Capítulo 3

Metodología

Introducción

La Tesis busca describir y comprender:

- 1- Las transformaciones del saber para volverlo enseñable. Se comienza por la reconstrucción del saber desde el punto de vista de la investigadora y se propone para enseñar Mecánica Cuántica. Esto es la reconstrucción de la Estructura Conceptual de Referencia.

Luego se realiza el diseño didáctico para enseñar en la escuela media, los aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica: se reconstruye la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar. Se realiza un análisis didáctico a priori que se ocupa especialmente de los conceptos, sus relaciones, las situaciones que los definen y la manera de favorecer un ámbito propicio para su aprendizaje.

- 2- Como opera el conocimiento en el interior del sujeto al implementar las situaciones en el aula, en sus representaciones internas, y en su afectividad.

La Tesis es de naturaleza cualitativa, no se pretende corroborar teorías y ni realizar generalizaciones. Por el contrario se busca interpretar, asignar significado a las acciones de un grupo de estudiantes y su profesora en un curso de Física de una escuela de enseñanza media. Para la recolección de datos se utilizaron técnicas de observación participante y se confeccionaron cuestionarios.

La investigadora fue quien:

- Seleccionó, realizó recortes conceptuales y metodológicos, y jerarquizó las componentes de la ECR, decidió los conceptos y los principios que se enseñarán.
- Diseñó las situaciones, contextualizó las simulaciones, creando las necesarias, seleccionó y controlando los parámetros que los estudiantes debían variar.
- Formuló las preguntas y los problemas, y anticipó las respuestas de los estudiantes. También anticipó las preguntas para devolver la responsabilidad a los estudiantes, cuando ellos preguntaran.
- Implementó la secuencia en un curso de Física en el cual ella es profesora del curso todo el año
- Recolectó los registros de la investigación contando con la presencia de un observador no participante, y posteriormente realizó el análisis. La permanencia de la investigadora en el campo durante todo el año, ofrece elementos que colaboran en la interpretación de las acciones de los estudiantes.
- Confeccionó los cuestionarios.

- Realizó el análisis cognitivo.
 - Dirigió, supervisó y coordinó las dos implementaciones siguientes a la original.
- La investigación tiene “fases” o etapas que responden a cada tipo de transformación del saber que se busca, con su propia metodología de análisis:

- **Primera Fase:** Reconstrucción de la **Estructura Conceptual de Referencia**;
- **Segunda Fase:** Diseño de la **Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar** y análisis a priori;
- **Tercera fase:** Implementación de la secuencia en el aula y reconstrucción de la **Estructura Conceptual Efectivamente Reconstruida**. Replicación y/o adaptación de la secuencia de situaciones.

Estas fases están concatenadas, y organizan la realización de la investigación global en interacción permanente. A continuación se describe cada una de estas fases, con los estudios que implican, y los instrumentos de recolección de datos, y la metodología empleada en cada uno.

Primera Fase: *Reconstrucción de la Estructura Conceptual de Referencia*

Enseñar un saber científico en la escuela requiere realizar transformaciones para volverlo enseñable. Es necesario primero, profundizar en el saber de la comunidad científica, lo cual permite tomar las decisiones didácticas acerca de qué será enseñado y la forma en que se hará. Luego, se estudian las transformaciones que llevan del saber científico al saber escolar.

Para la reconstrucción de la Estructura Conceptual de Referencia se decidió adoptar el enfoque Caminos Múltiples de Feynman. Esto permitió distinguir, seleccionar y adoptar de los conceptos, explicaciones y principios que serían enseñados.

Se recurrió los textos de Richard Feynman donde junto a Hibbs expone y desarrolla su propuesta (Feynman y Hibbs, 1965). Este texto sólo es utilizado en la formación de posgrado en Física. También se consultaron textos que comúnmente se utilizan en la formación de grado en la Licenciatura en Física, aunque en general este enfoque constituye sólo uno de los capítulos de los libros de texto de Mecánica Cuántica, por ejemplo Shankar (1994). En los textos de Mecánica Cuántica que comúnmente se utilizan en la formación de grado, (Landau y Lifshitz, 1978; Merzbacher, 1970; Messiah, 1973; Greiner, 1994; Cohen-Tanoudji, 1977) este enfoque no es presentado. También se realizó una lectura y análisis del libro de texto que Feynman escribió con espíritu de divulgar sus ideas acerca del mundo cuántico. Los resultados de esta fase de investigación ya fueron presentados en el Capítulo 2, y constituyen los fundamentos físicos de la Tesis.

Segunda Fase: *Diseño de la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar y análisis a priori (ECPE)*

Una vez establecida la ECR basada en el enfoque de Feynman, la siguiente etapa de la investigación, corresponde al estudio de las transformaciones del saber hasta volverlo enseñable a un grupo de estudiantes del último año de la escuela secundaria. Se diseña así la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar.

El diseño de las situaciones implica un análisis didáctico “a priori” donde se realizan todas las anticipaciones posibles acerca de las acciones de la profesora y de los estudiantes al abordar las situaciones propuestas.

Este proceso de diseño y análisis requirió un año de trabajo, cuyo producto fue la secuencia lista para implementar. Durante el análisis “a priori” se decidieron y anticiparon las **acciones** de los estudiantes y de la profesora, dirigidas a reconstruir conocimiento físico de Mecánica Cuántica. (Otero, 2006, 2007). Se diseñó el conjunto de las **situaciones** que permitirán la emergencia y el funcionamiento de los **conceptos clave** junto con las **preguntas clave**. Se plantearon los **principios clave** a reconstruir y consensuar, las **explicaciones** y afirmaciones de conocimiento, los **mecanismos explicativos** y el **lenguaje** en el que serán formuladas las explicaciones y las afirmaciones de conocimiento.

Una parte importante del diseño dedicó a la búsqueda, selección y/o creación de dos tipos de software que se considera necesario utilizar con los estudiantes:

- Un software que simula la Experiencia de la Doble Rendija (EDR) con bolillas y con electrones, que permita a los estudiantes analizar la incidencia de los parámetros de la experiencia (distancia entre rendijas, ancho, energía, etc.), visualizar y comparar resultados. Como esta experiencia es crucial en Física, se ha encontrado software que resulta sencillo de utilizar y cumple con los requisitos necesarios para que pueda ser utilizado por los estudiantes. En el capítulo siguiente se describe su funcionamiento, la configuración de los parámetros, y las actividades que se propusieron para utilizarlo.
- En cambio, como el enfoque de Feynman no es utilizado en la enseñanza de Mecánica Cuántica, no se han encontrado simulaciones específicas para su aplicación. Fue necesario elaborar simulaciones que permitan visualizar su aplicación, y evitar los cálculos numéricos sucesivos y repetitivos, que se considera que no aportan a la conceptualización que se pretende.

Los resultados relativos a la elaboración y utilización de las simulaciones han sido publicados⁷.

En el **Capítulo 4** se presenta el análisis didáctico *a priori* de la reconstrucción de la ECPE. Resultados parciales de esta fase de Investigación, han sido publicados⁸. A continuación se describe la **tercera Fase de Investigación**, realizada para abordar los objetivos tres y cuatro: Implementar la propuesta en un curso de Física y analizar su viabilidad.

Tercera fase: Implementación de la secuencia en el aula y análisis de la Estructura Conceptual Efectivamente Reconstruida (ECER)

Antes de la implementación se realizó un estudio piloto con profesores en ejercicio y con potenciales profesores (alumnos avanzados en su formación), para establecer la forma final de la secuencia que sería propuesta a los estudiantes. El grupo del estudio piloto estaba

⁷ Se encuentran publicados en: FANARO, M; OTERO, M R y ARLEGO, M. “Software de simulación y reconstrucción de fundamentos de la Mecánica Cuántica en la escuela” Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología (TE&ET) Universidad Nacional de La Plata N° 2, pp. 4-12

⁸ Parte de este análisis se encuentra publicado en: FANARO, M; OTERO, M y ARLEGO, M. “El método de caminos múltiples de Feynman para enseñar los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica en la escuela secundaria” Caderno Catarinense de Ensino de Física. BRASIL Vol 24 (2) pp. 233-260

conformado por estudiantes universitarios que se encontraban cursando la materia “Tópicos de Física Contemporánea” correspondiente al último año de la carrera Profesorado de Física, en el cual la investigadora es profesora de la cátedra. Algunos de ellos ya estaban ejerciendo su profesión docente en cursos de escuelas secundarias. Inicialmente se planteó la enseñanza de la mecánica cuántica en la escuela media, introduciendo a los estudiantes en esta problemática, analizando su inserción a partir de los documentos ministeriales de Argentina y de otros países. Los estudiantes reconocieron las dificultades de enseñar mecánica cuántica de la forma tradicional en la escuela, argumentando la abstracción de sus conceptos, y la complejidad matemática involucrada, reconociendo además su propia dificultad para comprender sus conceptos y principios fundamentales al estudiarla por primera vez, en su carrera universitaria. Luego, se propuso el estudio del método de Path Integrals de Feynman como un abordaje alternativo de la mecánica cuántica. Se sabía que el enfoque de Feynman no era conocido por los estudiantes, debido a que hasta ese momento no formaba parte del currículo de la formación de profesores. Para estudiar los aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica desde esta nueva perspectiva, se ofreció la siguiente bibliografía de referencia:

- Feynman, R *Física Vol III*, capítulos 1, 2 y 3
- Shankar, R (1980) *Quantum Mechanics*, capítulo 8 (traducción realizada al español por la investigadora)
- Feynman, R y Hibbs A (1965) *Quantum Mechanics and Path Integrals*, capítulos 1, 2 y 3 (traducción al español realizada por la investigadora)
- Material de síntesis elaborado por la profesora.

Las lecturas se organizaron de forma tal que los conceptos fueran construidos de la siguiente forma:

- La Acción clásica (S) y la amplitud mecánico-cuántica
- La Suma sobre todos los caminos
- Cálculo de la suma para una partícula libre
- El límite clásico
- Equivalencia con la ecuación de Schrödinger

En los sucesivos encuentros se conversó acerca de los conceptos y principios del nuevo enfoque. Como el enfoque de Feynman resultaba nuevo, al principio los estudiantes mostraron algunas dificultades para su comprensión, principalmente en relación a las herramientas matemáticas involucradas (integrales de camino sucesivas, aproximaciones numéricas, etc.) y se notó cierta reserva en relación a la validez de la técnica. Luego de conversar acerca de las ideas y los conceptos involucrados, se logró consensuar acerca de la validez y legitimidad de la técnica para describir los aspectos fundamentales de mecánica cuántica. Un mayor consenso se logró cuando se analizó la equivalencia entre este enfoque y el formal, al obtener el mismo resultado para la partícula libre desde ambos enfoques. Luego se les solicitó tomar postura acerca de la posibilidad de transformar ese saber para volverlo enseñable a estudiantes de la escuela media. Estos futuros profesores inicialmente se mostraron resistentes a la idea, argumentando la imposibilidad de transformar el lenguaje matemático y adecuarlo a los conocimientos matemáticos de los estudiantes de la escuela secundaria. Esta percepción de dificultad, les impedía apreciar la potencialidad del enfoque para estudiar aspectos fundamentales de mecánica cuántica en la escuela. Sin embargo, cuando se les presentó la secuencia de situaciones elaborada por la investigadora, ellos admitieron el trabajo que había requerido la transformación, y lograron resolver las actividades planteadas, reconociendo así la posibilidad de implementar la secuencia en un curso de Física de la escuela media. Ellos formularon sugerencias para mejorar la notación

de las consignas, algunos de los valores predeterminados para el software, etc. y de esta forma se formuló la versión definitiva que finalmente fue implementada en la escuela.

Luego se implementó la secuencia en un curso de Física de treinta (30) estudiantes con una edad promedio de 17 años, en una escuela media de la ciudad de Tandil, en el cual la profesora es la investigadora. El plan de estudios de este curso establece dos encuentros semanales de una hora para la asignatura Física. Como la institución tiene una única aula de informática, para trabajar con el software se asistió fuera del horario de clases. La investigadora que llevó a cabo la propuesta, fue la profesora de estos estudiantes durante todo el año lectivo. Admitiendo que los estudiantes de la escuela sólo conocen conceptos de Física Clásica, el diseño analizó y consideró la selección de conceptos previos que actuarían como base para aprender los aspectos fundamentales de la Mecánica Cuántica, sin bloquear su aprendizaje. Los conocimientos previos (físicos y matemáticos) requeridos habían sido estudiados en años anteriores -nociones básicas de Mecánica clásica (relaciones posición-tiempo $x(t)$ para distintos movimientos, energía cinética y potencial); vectores y funciones trigonométricas.

La investigadora permaneció todo el año en el campo. La secuencia se desarrolló en quince encuentros áulicos incluyendo las instancias de síntesis y evaluación, durante tres meses. El tiempo de implementación de la secuencia resultó afectado por ciertas restricciones institucionales, como por ejemplo la necesidad de consensuar encuentros fuera del aula habitual de clases en horarios especiales, para el uso de los ordenadores.

Los estudiantes formaron seis grupos, que se mantuvieron fijos durante toda la secuencia y el año lectivo. En los quince encuentros áulicos se planteó la siguiente forma de trabajo:

- El material de estudio impreso se entregaba a los estudiantes clase a clase, para regular apropiadamente la introducción de novedades y problemas. Al finalizar el encuentro áulico los estudiantes entregaban sus formulaciones a la profesora, y a la clase siguiente se realizaba la devolución.
- El material impreso consistía en preguntas y problemas, para los cuales los estudiantes debían conversar con los integrantes de su grupo, consensuar y formular respuestas escritas en el lugar destinado para ello en el material. Cuando era necesario, se ofrecían síntesis escritas, para que los estudiantes leyeran y conversaran.
- Los momentos de síntesis y consenso se planteaban con todos los grupos en forma simultánea procurando la formulación por parte de los estudiantes.
- Las preguntas de los estudiantes se respondían con preguntas, para devolver la responsabilidad al alumno.
- Se acordaron fechas para la entrega de síntesis escritas, y de evaluación final.

Durante el desarrollo de las situaciones propuestas, se registraron en audio las conversaciones de cada grupo en cada encuentro, previo consentimiento de los estudiantes. También se recogió todo el material completo que se les había ido entregando clase a clase, lo que constituyó su carpeta de estudio; las evaluaciones, los cuestionarios realizados y las notas de la profesora.

Un observador no participante registró lo que ocurría clase a clase. Luego de las seis situaciones, se dedicaron dos encuentros a realizar actividades de síntesis y consenso, y se realizó una evaluación escrita. Finalmente los estudiantes respondieron a un cuestionario personal en el cual se buscó recoger información acerca de sus sentimientos, al término de la implementación.

El esquema presentado en la Figura 3.1 muestra la evolución temporal de la implementación de la secuencia. Se representa el desarrollo de las situaciones en los sucesivos encuentros con los estudiantes, durante la implementación.

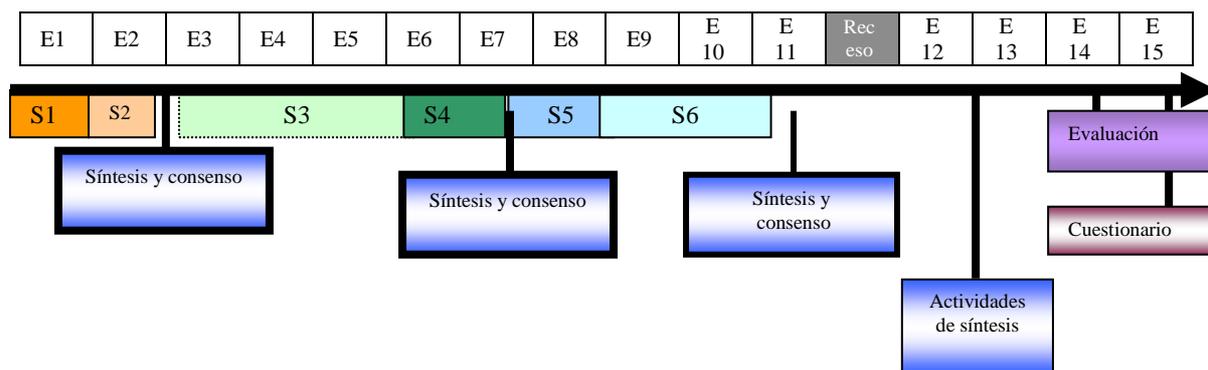


Figura 3.1 Desarrollo temporal de la implementación de la secuencia

Como se ha explicitado en el Capítulo 2 correspondiente al marco teórico, el resultado de la implementación en el aula es la reconstrucción de una nueva estructura, la Estructura Conceptual Efectivamente Reconstruida (ECER). Cada miembro del grupo de clase construye una estructura conceptual personal y una red de significados propia, privada. A la vez, las conversaciones del grupo de clase resultan en la construcción de una red de significados compartidos y públicos, comunes, que son un producto consensual, lo que se ha denominado "negociación de significados". Entonces, en esta fase se analiza la Estructura Conceptual Efectivamente Reconstruida (ECER) por el Grupo de Clase, a partir del estudio de la Conceptualización, y de la descripción de los aspectos afectivos de los estudiantes.

Estudio 1: Análisis de la conceptualización

Se describe y analiza la conceptualización, a partir de las acciones de los estudiantes y de la profesora durante la implementación. La **acción** es entendida en el sentido de la Epistemología Genética como Piaget, Vergnaud y Maturana. Vergnaud (1990; 2006, 2007) se refiere a las acciones como aquellas actividades cognitivas como pensar, decidir, etc. y a las actuativas: dialogar, actuar, elegir, etc. El estudio de la conceptualización se realizó utilizando dos instrumentos:

1- Los protocolos del desarrollo de la secuencia

Las conversaciones de los estudiantes durante los once encuentros en los cuales se desarrollaron las seis situaciones, fueron registradas en audio, para cada uno de los seis grupos. Esto generó 57 archivos de audio que transcritos forman el conjunto de protocolos a analizar. En cada uno de ellos se identificó el turno de habla de cada estudiante, enumerándolos de forma secuencial. De esta forma, se obtuvo para cada grupo un conjunto

de protocolos⁹ que tiene la siguiente cantidad de turnos de habla (t/h), como se muestra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Cantidad de turnos de habla correspondientes a cada uno de los seis subgrupos del GC durante los once encuentros de las situaciones

	G1	G2	G3		G4	G5	G6
Encuentro 1 (sala de clases)	--	217	340		--	291	452
Encuentro 2 (aula de informática)	--	244	211	169	--	248	299
Encuentro 3 (sala de clases)	137	192	36		42	--	293
Encuentro 4 (sala de clases)	--	149	226		125	250	218
Encuentro 5 (aula de informática)	178	77	277		165	--	467
Encuentro 6 (aula de informática)	122	144	96		44	40	323
Encuentro 7 (sala de clases)	18	141	47		80	104	206
Encuentro 8 (sala de clases)	71	--	41		187	115	229
Encuentro 9 (sala de clases)	210	242	135		157	129	531
Encuentro 10 (sala de clases)	127	67	18		66	--	267
Encuentro 11 (aula de informática)	66	196	51		145	155	367

Analizando las transcripciones y utilizando la teoría de Vergnaud (1990), se realizaron inferencias acerca de los procesos de conceptualización. Se identificaron los invariantes operatorios que posiblemente hayan sido “llamados” en la interacción con cada situación. También se identificaron cuáles fueron los posibles obstáculos en el proceso de conceptualización, y se propusieron sugerencias para evitarlos.

2- La evaluación final

Al finalizar la implementación, se realizó una evaluación escrita. La evaluación no es considerada como un acto final de comprobación y constatación de saberes, sino un conjunto de situaciones que permiten transferir el conocimiento construido previamente.

Uno de los principios didácticos que orientan el análisis de la evaluación es “*Alguien sabe, cuando sus acciones satisfacen los criterios de aceptación establecidos por el grupo para construir los conocimientos que se consideran aceptables. Tales criterios son producto del consenso y forman parte del conocimiento público -del grupo- según haya sido formulado en documentos escritos o en el flujo de las conversaciones que forman parte del vivir de dicho grupo.*” Otero (2006; p.22). El análisis de las acciones de los estudiantes en esta instancia, contribuye a interpretar y comprender la conceptualización. En esta situación, las

⁹ Este trabajo ha generado setecientas (700) hojas que contienen las transcripciones de la totalidad de las conversaciones de los estudiantes al abordar cada una de las situaciones. Por cuestiones económicas, no se presentan en el cuerpo de la Tesis.

acciones requeridas no resultan nuevas a los estudiantes, ya que es posterior a la negociación de significados realizada en las instancias de síntesis¹⁰.

Estudio 2: Los aspectos afectivos de los estudiantes

Según el marco teórico asumido, la viabilidad de la propuesta se ve afectada por los aspectos conceptuales y por los aspectos emocionales/afectivos de los del grupo de clase. Como se busca conocer las condiciones de posibilidad de la implementación, se describe la dinámica emocional del grupo, destacando la importancia de estar en aceptación. La aceptación de los estudiantes es el factor clave de la viabilidad. Según Maturana (1991) la decisión de estar, o no, en un cierto dominio cognoscitivo es el producto de las emociones, y no de la razón. La descripción de la dinámica emocional de los estudiantes, complementa al estudio de la conceptualización, y ambos permiten construir un indicador de la viabilidad de la ECPE.

El diseño de la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar fundamentos de Mecánica Cuántica, se realizó tomando en cuenta los “Principios Didácticos” (Otero, 2006; 2007; 2008) evitando la negación de los estudiantes e intentando generar una dinámica emocional favorable. La secuencia se propuso como una invitación para ingresar al dominio de la Mecánica Cuántica, ofreciendo a los estudiantes un espacio para plantear y resolver problemas y preguntas, corroborar y contrastar ideas, intercambiando ideas y conceptos.

Se parte del supuesto que los alumnos preguntarán y se preguntarán, responderán, conversarán, dudarán y expresarán lo que saben y aceptarán los criterios para especificar que otro sabe. La curiosidad de los estudiantes se pone en juego al proponer el conocimiento de manera problemática y desafiante. También la emoción de la sorpresa se espera que tenga un papel relevante: sorpresa frente a resultados experimentales, sorpresa cuando lo que predice el sentido común no es lo que predicen los sistemas conceptuales construidos. Sorpresa frente a la incertidumbre, tan irreductible en los sistemas cuánticos como en cualquier mundo que *traigamos a la mano*. (Otero, 2008).

Este estudio también se realizó a partir del análisis de dos instrumentos:

1) Los protocolos del desarrollo de la secuencia

Se ensayó una técnica para explorar la dinámica emocional del grupo de clase durante el desarrollo de la implementación, mediante la construcción de un instrumento de análisis que se ha denominado “espectro de acciones”. Este es un diagrama que representa las acciones de los estudiantes de cada grupo, en un eje temporal. Esto permite una mirada global de la forma en que los estudiantes abordaron la situación planteada en relación a la aceptación.

2) El cuestionario personal al finalizar la implementación

Luego de la evaluación, los estudiantes respondieron un cuestionario diseñado para este grupo, con veintisiete preguntas cerradas, más una abierta. Esto permitió analizar las opiniones de los estudiantes acerca de sus sentimientos respecto a:

¹⁰ Los resultados del análisis de la evaluación se encuentran publicados como: FANARO, M; OTERO, M R; ARLEGO, M. “Teaching the foundations of quantum mechanics in secondary school: a proposed conceptual structure” *Investigações em ensino de ciencias*. V14(1), pp. 37-64- Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, BRASIL

- La naturaleza de los conceptos cuánticos estudiados

En pruebas piloto exploratorias previas a la implementación, fue notable el desconcierto producido por la incertidumbre del mundo cuántico, y hasta cierto malestar. Quizás porque tradicionalmente la física escolar favorece posiciones realistas ingenuas y deterministas. También la abstracción de los conceptos cuánticos, la imposibilidad de imaginarlos y las implicaciones epistemológicas que conllevan, podrían afectar a los estudiantes.

- La forma de trabajo propuesta

Las situaciones, que por definición son problemas y preguntas, debían ser resueltas en forma grupal e implicaban trabajo de discusión, perturbación, acuerdo, y formulación de las conclusiones consensuadas. Cada clase suponía el encuentro con conceptos y problemas nuevos y demandaba esfuerzo a los estudiantes.

- Las simulaciones utilizadas en la secuencia.

Desde cierta “pedagogía de sentido común” suele asumirse que los estudiantes sienten agrado por el solo hecho de trabajar con simulaciones y herramientas visuales. En esta secuencia, las simulaciones no tuvieron fines decorativos, ni buscaron motivar a los estudiantes. Son herramientas para visualizar los resultados de ciertos cálculos, evitando que los estudiantes deban realizarlos. Aquí el trabajo con el software exige atención voluntaria y esfuerzo.

Los resultados de la descripción de los aspectos afectivos relativos a los aspectos mencionados han sido publicados¹¹.

Los resultados de los dos estudios de la Tercera Fase de la Investigación, se presentan en el **Capítulo 5**.

Síntesis de las Fases de la Investigación

La Figura 3.2 representa un esquema de las Fases de la Investigación, la realización de los estudios respectivos para abordar cada uno de los objetivos de la Investigación:

¹¹ Resultados de este Estudio han sido publicados en:

FANARO, M; OTERO, M “Basics Quantum Mechanics teaching in Secondary School: One Conceptual Structure based on Paths Integrals Method” *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 2, No.2, May 2008* Disponible en <http://journal.lapen.org.mx/may08/LAJPE%20149F-Fanaro%20Otero.pdf>

¿Cómo enseñar aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica en la escuela secundaria?

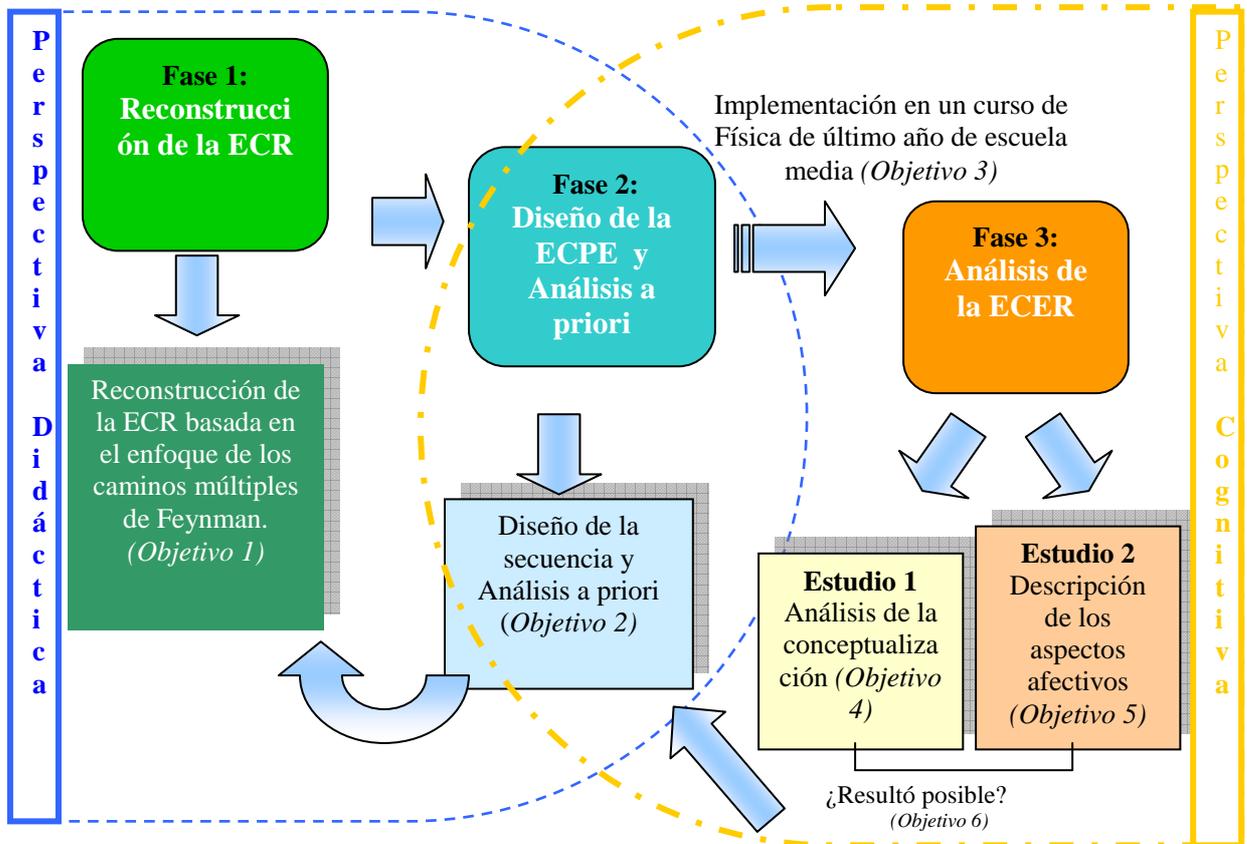


Figura 3.2 Esquema de la Investigación

En el **Capítulo 4** se presenta la **Segunda Fase de Investigación**, referida al diseño de la ECPE, y su análisis a priori, y en el **Capítulo 5** se presenta la **Tercera Fase**, referida a la implementación de la secuencia y el análisis de la ECER.

Capítulo 4

La Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar fundamentos de Mecánica Cuántica

Introducción

En la reconstrucción de la Estructura Conceptual de Referencia se decidió que los conceptos y principios clave para ser enseñados serían:

1. Forma de la distribución de probabilidad $P(x)$ para bolillas y para electrones en la Experiencia de la Doble Rendija
2. Electrón como sistema cuántico
3. Acción (S), construcción del vector Amplitud de probabilidad y construcción de la suma (técnica STA)
4. Consideración de funciones “alrededor“ de la función clásica ($x_{clás}(t)$) en cálculo la probabilidad total en casos cuánticos y en casos clásicos (Principio de Superposición)
5. Asociación de propiedades ondulatorias a la materia: longitud de onda asociada, formación y detección del patrón de interferencia
6. Transición entre la Mecánica Cuántica y la Mecánica Clásica (Principio de correspondencia)

En este capítulo se aborda la segunda pregunta de la Tesis: *¿Qué características debe tener una Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica a un grupo de estudiantes de escuela media, con referencia a la ECR reconstruida a partir del enfoque de Caminos Múltiples de Feynman?*

En esta fase se diseña la secuencia de situaciones para un grupo de estudiantes de Física del último año de la escuela secundaria, realizando la máxima anticipación posible de las acciones que tendrán lugar cuando se implemente, y constituye una primera forma de comunicación entre la profesora y sus estudiantes. El análisis didáctico determina un diseño que contempla las acciones de los estudiantes y de la profesora. Esta fase de investigación, concluye con la secuencia de situaciones tal cual se presenta a los estudiantes, que se presenta al final de este capítulo.

Diseño de la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar (ECPE) los fundamentos de Mecánica Cuántica en la escuela y análisis a priori

El diseño de la ECPE se realizó considerando los *Principios Didácticos* (Otero, 2008) desarrollados en el Capítulo 2, como una forma de invitar a los estudiantes a conocer los aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica. Por su parte, el análisis didáctico a priori se realizó en base a los componentes de la ECPE.

A continuación, se presentan las situaciones que forman la secuencia. Las preguntas y problemas propuestos a los estudiantes¹², se van intercalando con las anticipaciones que se realizaron, como parte del análisis didáctico a priori. Al final de cada situación se presenta una tabla que sintetiza el análisis realizado.

Etapa 1- Experiencia de la Doble Rendija (EDR) con bolillas y con electrones

En esta etapa se proponen dos situaciones consecutivas: *Situación 1: “Imaginando la experiencia de la doble rendija con bolillas”* y *Situación 2: “Simulación la EDR con software”*.

Situación 1: “Imaginando la experiencia de la doble rendija con bolillas”

Se presenta al Grupo de Clase (GC) la Experiencia de la Doble Rendija (EDR). Los estudiantes deben imaginar y anticipar los resultados de esta experiencia utilizando bolillas como proyectiles.

Se trata de predecir la distribución de las bolillas en la pared colectora de madera y la distribución de frecuencias en función de la distancia al centro. Las imágenes que se ofrecen (disposición experimental, pantallas colectoras con eje de abscisas, etc.) se obtuvieron “congelando” la simulación que será utilizada en la situación siguiente, con el propósito de familiarizar a los estudiantes con las imágenes del software.

La Experiencia de la Doble Rendija (EDR)

Imaginemos una experiencia como la que muestra esquemáticamente la siguiente figura.

¹² Con letra cursiva y en un recuadro se indicarán las preguntas y los problemas tal y como serían propuestas a los estudiantes.

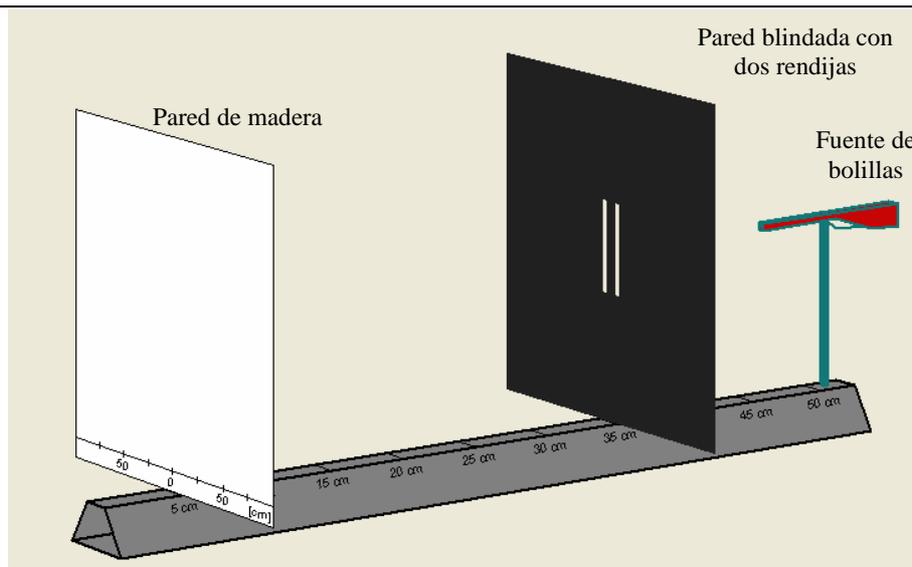


Figura 1: Esquema de la disposición experimental de la doble rendija con bolillas

En la derecha, está representada una fuente disparadora de un chorro de bolillas, que salen disparadas al azar dentro de un ángulo bastante grande porque, supongamos, la fuente disparadora no está bien sujeta, y se mueve al azar, en todas las direcciones. Por cuestiones de simplicidad vamos a hacer dos consideraciones muy importantes:

- 1- Las bolillas que salen de la fuente son indestructibles, y entonces llegan en unidades enteras a la pared de madera.
- 2- Salen disparadas de a una, a iguales intervalos de tiempo, y con la misma rapidez.

A 15 cm. de la fuente, se encuentra una pared blindada con dos ranuras de tamaño tal que las bolillas pasan sin que quede trabada ninguna en la rendija. Supongamos que las rendijas tienen un ancho de 10 mm., y ambas rendijas se encuentran separadas a 10 mm. también una de la otra. A la izquierda de la Figura 1 (ver la escala de la regleta gris), se representa una pared de madera en la cual quedan incrustadas las bolillas que impacten en ella. Esta pared de madera tiene en su base una escala perpendicular a la regleta gris, en la cual el 0 representa el centro de la pantalla, en esa dirección.

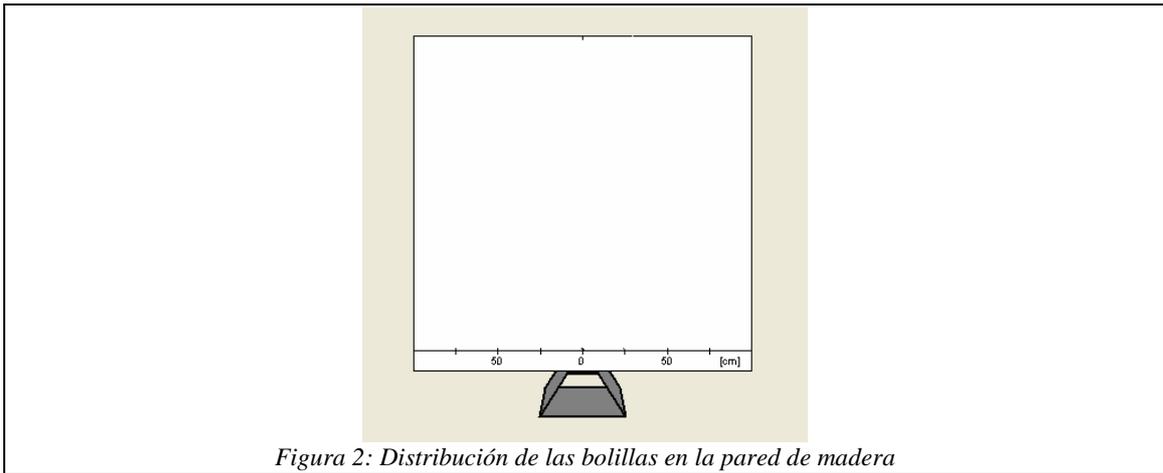
La cuestión clave es:

¿Cómo se distribuirán en la pared de madera las bolillas que impactaron en ella?

Se plantean las siguientes preguntas:

1- a) *¿Cómo se distribuirán las bolillas que logren pasar por las rendijas y lleguen a la pared de madera? ¿Habrá más en algún lugar? ¿Por qué?*

b) *Realiza un bosquejo de lo que consideres que tendrá la pared de madera, al cabo de ese tiempo en la siguiente figura:*



Un problema importante es ¿cómo ingresar las ideas probabilísticas? Se introducen a partir de la consideración del cociente:

$$f = \frac{\text{N}^\circ \text{ de bolillas que impactan a una distancia "x" del centro de la pared}}{N}$$

Y se propone a los estudiantes considerar que en el límite la frecuencia tiende a la probabilidad, y se establece la denominación de “curva de probabilidad” a la curva que se obtiene al representar gráficamente cada probabilidad en función de su distancia al centro de la pared colectora. Se solicita a los estudiantes que realicen una gráfica de P(x):

2- Ahora pensemos en una curva de probabilidad de llegada a la pared según la distancia al centro de las rendijas x . Si a cierta distancia x del centro 0 (sin que nos importe la dirección vertical en la que se encuentre) se encuentran incrustadas muchas bolillas, la probabilidad en esa x allí será alta. Por el contrario, si hay pocas bolillas, diremos que en esa x la probabilidad es baja.

a) ¿Podrías dibujar aquí de forma aproximada la curva que se obtendría?

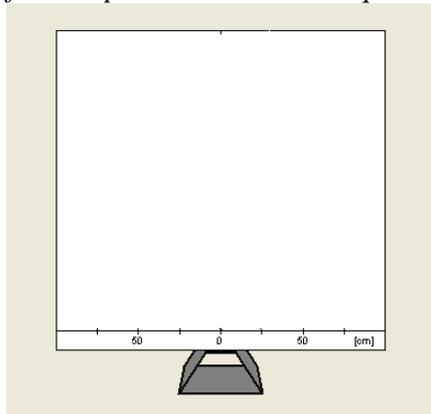


Figura 3: Curva de la probabilidad en función de x (teórica)

b) Describe aquí la forma de la curva que dibujaste en la figura 3

Para que los estudiantes construyan el concepto de suma de probabilidades, se propone analizar qué cambia en la distribución y en la curva de $P(x)$ cuando hay una o las dos rendijas abiertas:

3- Ahora imaginemos que en la experiencia anterior tapamos una de las rendijas y realizamos la experiencia. Luego, tapamos esa rendija y abrimos la otra. ¿Podrías dibujar en la parte izquierda de las figuras siguientes, cómo se distribuirán las bolillas en la pared de madera y en la parte derecha, cómo será la curva de probabilidad?

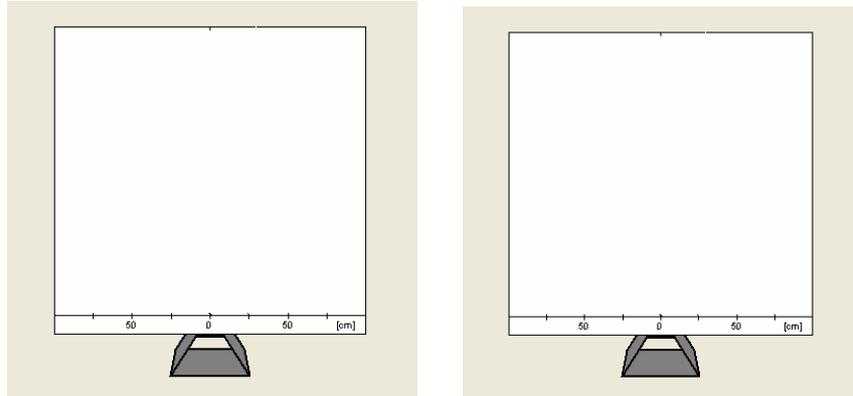


Figura 4: Bloqueando R_1 . Izquierda: Distribución de las bolillas que llegaron a la pantalla. Derecha: Curva de probabilidad según x cuando se bloquea R_2

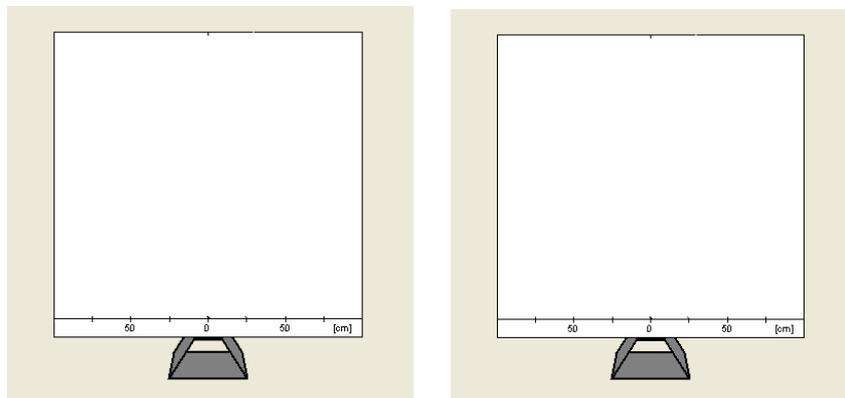


Figura 5: Bloqueando R_2 . Izquierda: Distribución de las bolillas que llegaron a la pantalla. Derecha: Curva de probabilidad según x cuando se bloquea R_2

4- ¿Podrías explicar el resultado de la experiencia con ambas rendijas abiertas, con relación a lo obtenido en cada una de las situaciones en donde se tapa una de las rendijas? Escribe tu respuesta aquí.

La Tabla 1 sintetiza el análisis didáctico a priori, a partir de los componentes fundamentales de la ECPE para la *Situación 1: “Imaginando la experiencia de la doble rendija con bolillas”*

Tabla 1: Análisis a priori de la Situación 1

Preguntas clave	Acciones	Conceptos clave	Explicaciones	Mecanismo Explicativo	Principios
<p>¿Cómo es la distribución de las bolillas en la pared de madera?</p> <p>¿Cómo se relaciona esta distribución con la distribución obtenida al cerrar de a una rendija por vez?</p>	<p>Imaginar la experiencia para anticipar resultados.</p> <p>Dibujar los impactos de las bolillas en la pared.</p> <p>Graficar la curva de probabilidad en función del centro de la pared.</p> <p>Comparar las curvas dibujadas cuando se abre una rendija por vez, y en simultáneo.</p>	<p>Distribución de impactos.</p> <p>Curva de probabilidad.</p> <p>Máximos de la curva $P(x)$.</p>	<p>Aunque se disparan al azar, hay una zona donde es más probable encontrar bolillas, correspondiente a la proyección de las rendijas en la pared</p>	<p>Representar externamente los resultados de la experiencia imaginada, considerando los parámetros que podrían influir.</p> <p>En el límite, la fracción $f = (\text{N}^\circ \text{ de bolillas que impactan a una distancia "x" del centro de la pared}) / N$ representa la probabilidad</p>	<p>Las rendijas representan un obstáculo que afecta a la distribución uniforme de bolillas en la pared.</p> <p>Al haber mayor cantidad de impactos en determinado lugar que en otro, la probabilidad de impacto es mayor allí.</p>

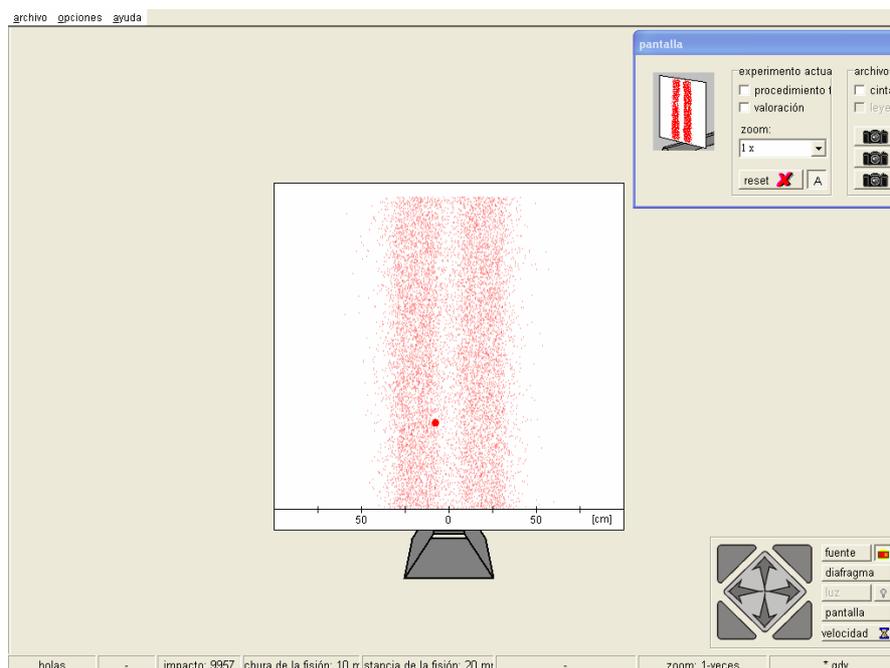
Situación 2: “Simulación la EDR con software”

Los problemas planteados en la Situación 2 requieren las siguientes acciones, claves para el desarrollo de la secuencia:

- Contrastar las predicciones realizadas en la *Situación 1* con relación a la forma de la curva para bolillas con ambas rendijas abiertas, y analizar la relación con las curvas individuales obtenidas al cerrar de a una las rendijas;
- Predecir el comportamiento de los electrones en esta experiencia y luego simularla para analizar su distribución en la pantalla colectora y la curva de $P(x)$;
- Comparar las curvas $P(x)$ de bolillas y de electrones para resaltar las diferencias entre ambas.

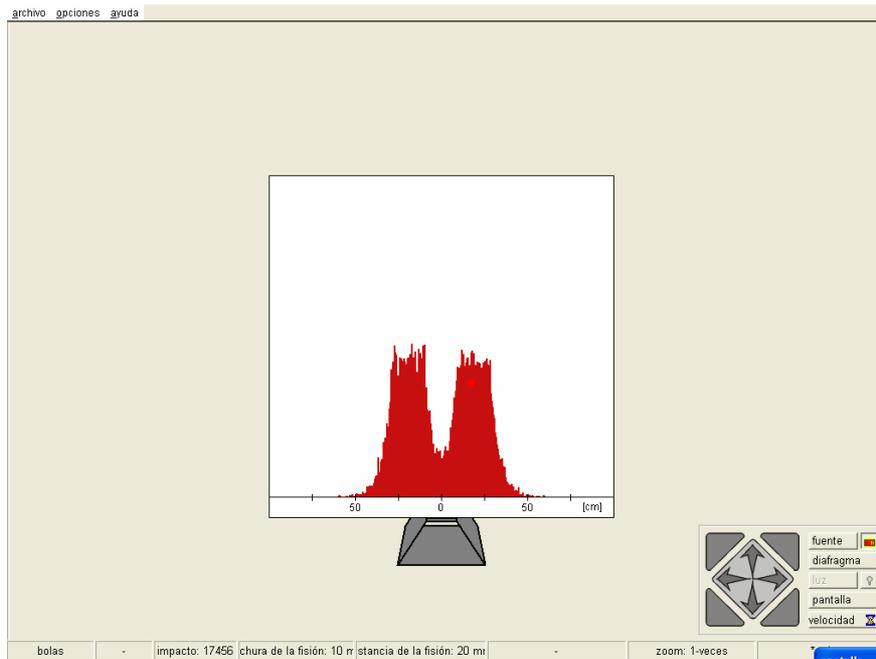
Se propone emplear el software “Doppelspalt”¹³ para simular la Experiencia de la Doble Rendija. Esta herramienta permite apreciar: los impactos individuales de los “proyectiles” en la pantalla y su evolución en el tiempo, la generación del histograma de frecuencias, y el aspecto de la curva de distribución de frecuencias teórica obtenida $P(x)$ “*curva de probabilidad*”.

En la Figura 4.1 se representan las pantallas de salida del software, donde se muestran (a) los impactos de las bolillas en la pared, (b) la distribución de frecuencias según la dirección horizontal x , y (c) la curva $P(x)$:

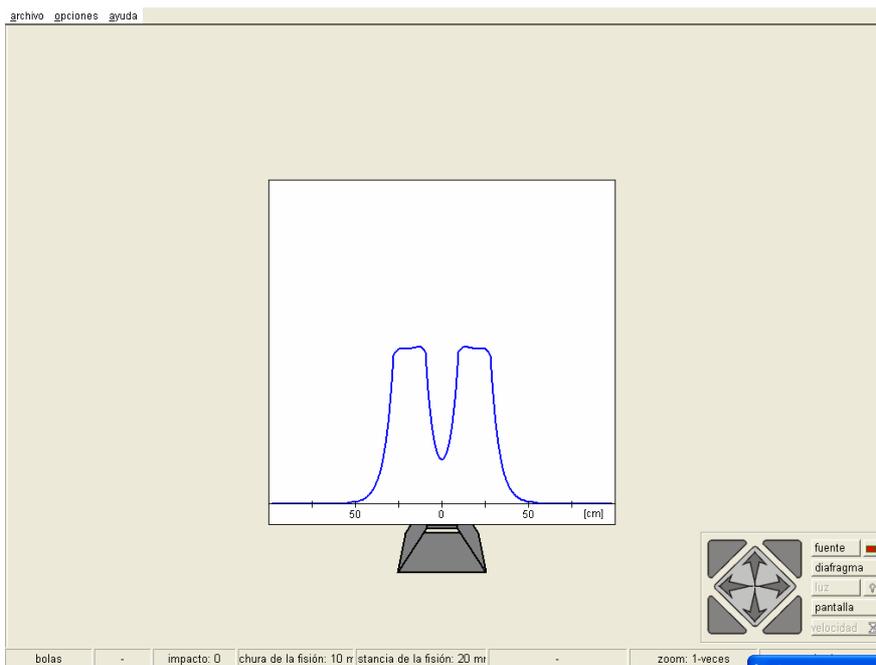


(a)

¹³ “Experimento de la doble fisión en Mecánica Cuántica” (2003). Creado por Muthsam, K (Versión 3.3 traducido al español por Wolfamann y Brickmann) Physics Education Research Group of the University of Munich. Obtenido en Internet de <http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/Downloads/doppelspalt/dslit.html>



(b)



(c)

Figura 4.1 Las pantallas de salida del software, según se seleccione en el parámetro Pantalla el modo de visualización: (a) “impactos individuales”, (b) “histograma” o (c) “curva teórica”

A medida que disminuye la “separación de las rendijas” el software muestra un máximo central, como muestra la Figura 4.2:

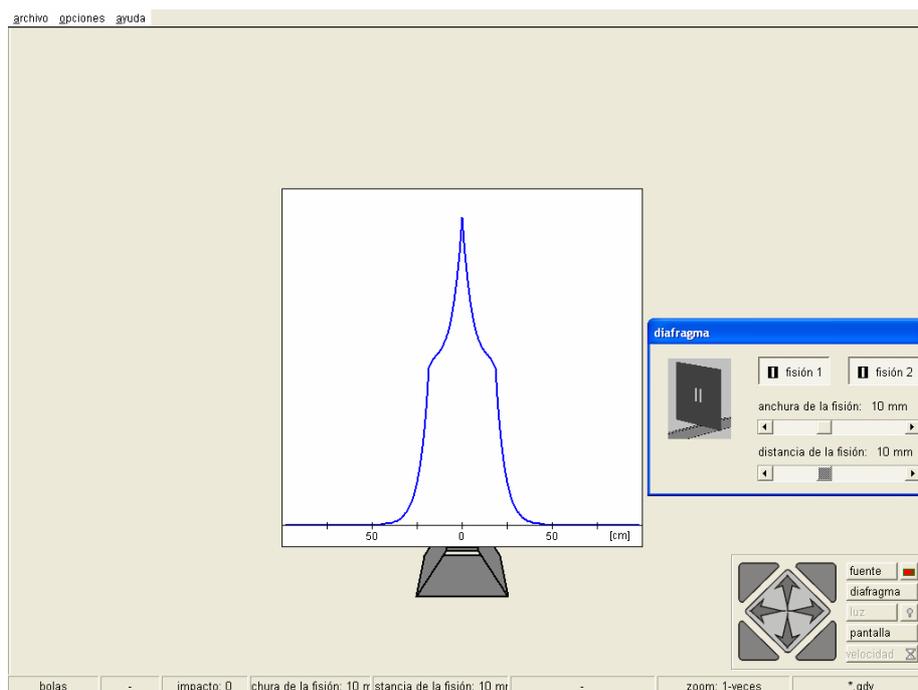


Figura 4.2: Curva obtenida con el software al configurar el ancho y la separación de rendijas en 10mm

El programa permite disminuir la separación de las rendijas, hasta que el ancho sea igual a su separación. No permite disminuir más la distancia entre ambas, para evitar simular la experiencia con una sola rendija. Se plantea a los estudiantes el problema de explicar ¿porqué es máximo el valor en el centro de las rendijas, cuando por allí no pasan las bolillas?. De esta forma se busca iniciar la construcción de la idea de suma o superposición de curvas.

Se plantea la siguiente pregunta clave:

¿Cómo se puede explicar la forma de la curva de Probabilidad según x ?

Se propone a los estudiantes utilizar el software de la doble rendija con ciertas condiciones experimentales, y responder las siguientes preguntas:

- a) *¿Cómo fueron tus predicciones con respecto a los resultados mostrados en la simulación en relación a la distribución de bolillas en la pared? Describe si coincidieron o no con lo mostrado en el software.*
- b) *Obtén la curva de probabilidad, y dibújala aquí.*

Si en la situación anterior, los estudiantes imaginaron la experiencia con una separación suficientemente grande, la curva de probabilidad que dibujaron sería corroborada con el software. En cambio, si los estudiantes previamente habían imaginado la experiencia con las rendijas muy juntas, el gráfico que dibujaron sería contrastado por el que muestra el software. En este caso, se los estudiantes deberán reflexionar el motivo de las diferencias.

Para analizar como cambia la curva de probabilidad al variar el ancho de las rendijas y/o su separación, se propone a los estudiantes que fijen el ancho de las rendijas, y disminuyan

gradualmente su separación. Estas preguntas también permiten explicar las diferencias entre los gráficos que los estudiantes habían dibujado con los que muestra el software.

Las preguntas para los estudiantes son las siguientes. La última pregunta (d) se propone para que los estudiantes dirijan su atención al centro de la pantalla, donde es más perceptible la suma de las funciones.

- a) *Describe lo que muestra la simulación en cuanto a los impactos en la pantalla*
- b) *Describe la forma de la curva de probabilidad en este caso*
- c) *¿Cómo interpretas la forma de la curva?*
- d) *¿Podrías explicar a que se debe la forma de la curva en el centro ($x = 0$)?*

Para que los estudiantes encuentren la relación entre la curva que se obtiene cuando ambas están abiertas con cada curva individual, se propone que cierren una de las rendijas por vez y simulen la experiencia. De esta forma, se espera que los estudiantes noten que la curva con ambas rendijas abiertas, es la superposición (suma) de las curvas individuales. Se plantean las siguientes preguntas:

- a) *Dibuja aquí cada una de las curvas de probabilidad cuando se cierra cada rendija por separado*
- b) *¿Cómo podrían relacionarse la curva de probabilidad cuando están ambas rendijas abiertas con cada una de las curvas por separado?*

Como es común que los estudiantes tengan a los electrones como “pequeñas bolillas cargadas eléctricamente”, antes de proponerles simular la experiencia con electrones, se formulan las siguientes preguntas, para que ellos expliciten sus ideas acerca de los electrones y anticipen los resultados que luego serán contrastados con el software:

4- Los electrones ¿son pequeñísimas bolillas con carga eléctrica? ¿Se comportarán de la misma forma que ellos?

Así se busca confrontar las ideas acerca del comportamiento de los electrones con el software, planteando la siguiente cuestión clave:

¿Qué se obtiene en la EDR si se realiza con electrones?

Se propone simular la Experiencia de la Doble Rendija (EDR) escogiendo electrones en lugar de bolillas. En la propuesta inicial de ECPE (Fanaro, Otero y Moreira, 2006) la EDR tenía el siguiente orden: primero con bolillas, luego con ondas de agua y por último con electrones. Se cambió la secuencia para generar un conflicto cognitivo en los estudiantes, de forma tal que se ponga en evidencia que los electrones – habitualmente representados y en consecuencia, entendidos como pequeñísimas bolillas- tienen un comportamiento inexplicable, aceptando los resultados obtenidos con la simulación. La discordancia entre la predicción y la salida del software debería provocar la necesidad de buscar una explicación para el comportamiento inesperado de los electrones, ya que en su distribución no manifestarían un comportamiento corpuscular.

La Figura 4.3, representa la salida de la simulación con el software, para el caso de los electrones:

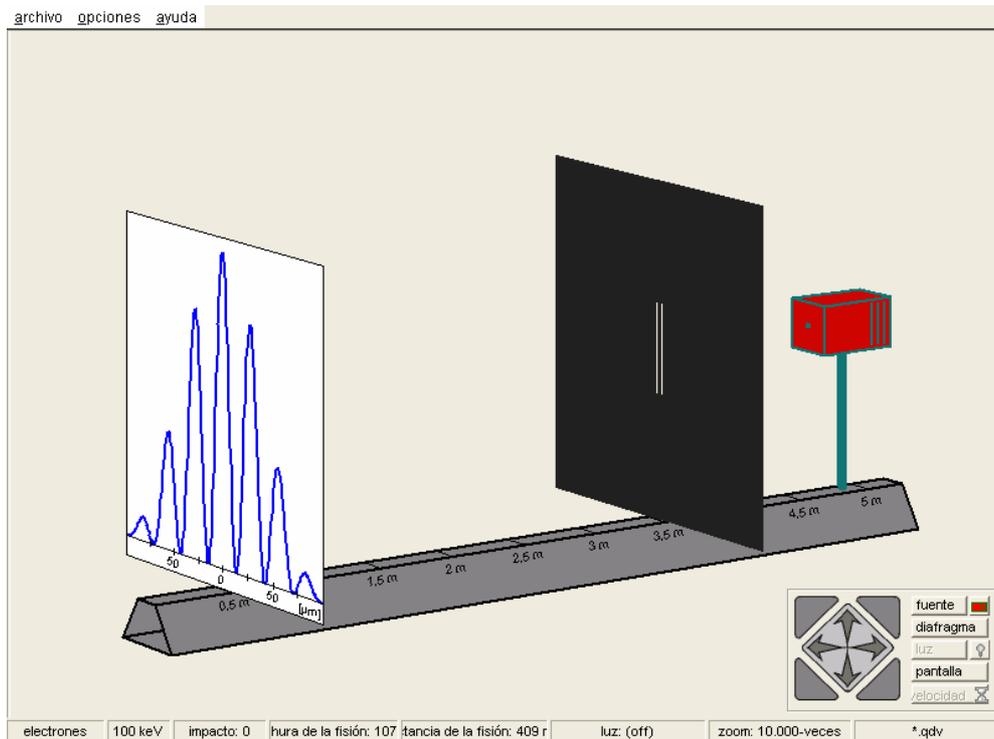


Figura 4.3: Curva que muestra el software al utilizar electrones con ambas rendijas abiertas

Se propone a los estudiantes simular la experiencia seleccionando electrones con energía previamente establecida (100 KeV.) y ancho y separación, también fijos (ancho de 100nm y separación de 300nm). Estos valores fueron seleccionados intencionalmente para favorecer la visualización de los máximos y mínimos de la curva de probabilidad, en evidente diferencia con la curva de bolillas. Se plantean las siguientes preguntas:

- a) *Describe cómo resultó la distribución de los electrones en la pantalla colectora*
- b) *Reproduce aquí de manera aproximada como resulta la gráfica de la curva de probabilidad, y describe su forma.*
- c) *¿Cómo interpretas esta gráfica?*

Si se simula esta experiencia con los parámetros señalados el software muestra una gráfica con efectos de difracción y de interferencia como se muestra en la Figura 4.4:

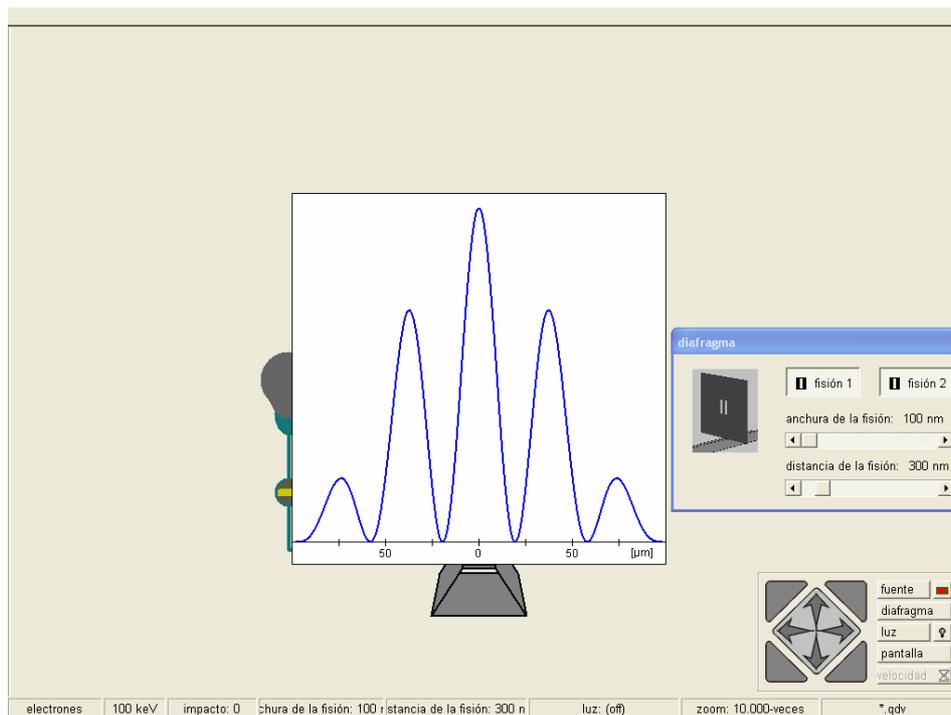


Figura 4. 4: Curva de $P(x)$ cuando se utilizan electrones

Como se puede observar en la figura anterior, el software actualiza las dimensiones en relación al cambio de unidades del eje x -en bolillas estaba en centímetros y ahora en micrómetros, como se muestra en el cuadro de “diafragma” en la figura anterior- pero no se muestra el cambio en las dimensiones de las rendijas, naturalmente para que éstas sigan siendo visibles al usuario. Los valores prefijados se buscaron de tal forma que se los estudiantes perciban la diferencia entre el gráfico para electrones y para bolillas, interpretando los máximos y mínimos como aquellos lugares donde habrá máxima concentración o no habrá ninguna, respectivamente. Sería deseable que el software obviara los efectos de la difracción, pues así resultaría más notable el contraste entre ambos gráficos, ya que de esta forma el valor máximo sigue siendo en el centro, y esto puede constituir un obstáculo para la interpretación de los estudiantes.

El software permite colocar en la simulación una fuente luminosa, variando el color (frecuencia) y la intensidad lumínica. Si bien es posible analizar el efecto de la luz e introducir de esta forma el Principio de incerteza, esta situación no utiliza la fuente de luz para no apartarse de la cuestión central: ¿cómo se puede describir el comportamiento de los electrones? y de allí, introducir la noción de sistema cuántico.

Si los estudiantes previamente estudiaron los fenómenos ondulatorios (interferencia y difracción) la curva $P(x)$ podría ser fácilmente reconocible. Esto les generaría el problema de estar realizando la experiencia con supuestas “partículas” y obtener resultados propios de “ondas”, como usualmente suelen polarizarse en la escuela ambos sistemas físicos. En cambio, si ellos asocian la curva, con la curva típica de interferencia el problema también puede plantearse, preguntando acerca de la gran concentración de electrones en ciertos lugares de la pantalla colectora, y la ausencia total en otros.

Para que los estudiantes contrasten de otra forma los resultados de la experiencia con bolillas y con electrones, se propone que simulen la experiencia tapando de a una las rendijas. Así, se plantea el problema de la “desaparición” de la curva con máximos y mínimos, cuando se cierra una de las rendijas, que en este caso se parece más a la

distribución de bolillas. Para minimizar los efectos de la difracción cuando se tiene una sola rendija y focalizar en la interferencia, se eligieron ciertos valores de ancho y separación, para que cuando se cierre cada rendija, los gráficos de $P(x)$ resultaran similares a los obtenidos con bolillas.

- a) *Describe cómo se distribuyen los electrones en la pantalla en cada caso*
- b) *¿Cómo son las curvas de probabilidad en cada caso? Dibuja las dos.*
- c) *¿Tienen estas curvas alguna relación respecto a las curvas obtenidas con las bolillas?*
- d) *Con los electrones, ¿se cumple que la curva de probabilidad cuando ambas rendijas están abiertas es la **suma** de cada una de las curvas de probabilidad por separado?*

Aunque hasta ahora la expresión “suma de curvas” no se había presentado en las situaciones, en este momento se considera necesario, para que los estudiantes puedan formular que con las bolillas la curva total se obtiene **sumando** las dos curvas individuales y en el caso de los electrones, no. Esto es un punto clave para entender la forma característica de la curva $P(x)$ y la distribución de los electrones.

Esta primer etapa, con las Situaciones 1 y 2, se busca que el grupo acepte y establezca uno de los principios clave de la secuencia: **a pesar de que los electrones llegan en unidades enteras, la curva resultante no es la suma de las curvas individuales que resultan de abrir las rendijas de a una por vez.** Por lo tanto, al resultar inadecuado considerar a los electrones como partículas, permitiría introducir la noción de “sistema cuántico” y fundamentar la necesidad de una formulación probabilística para predecir el diagrama obtenido en la EDR con electrones -partiendo del hecho experimental de éstos llegar a la pantalla en unidades discretas.

La Tabla 2 sintetiza el análisis a priori para la *Situación 2: “Simulación la EDR con software”*

Tabla 2: Análisis a priori de la Situación 2

Preguntas Clave	Acciones	Conceptos clave	Explicaciones	Mecanismo Explicativo	Principios
<p>¿Cómo afectan a las curvas el ancho y la separación de las rendijas?</p> <p>¿Qué relación hay entre las curvas individuales y la curva que se genera cuando se abren ambas rendijas?</p> <p>¿Qué se obtiene en la EDR si se realiza con electrones?</p>	<p>Contrastar las predicciones con la simulación.</p> <p>Variar y controlar los parámetros ancho y separación de las rendijas.</p> <p>Cerrar de a una rendija por vez y analizar lo que ocurre.</p> <p>Describir las curvas obtenidas con electrones.</p> <p>Diferenciar las curvas obtenidas con electrones y las obtenidas con bolillas .</p>	<p>Histograma de frecuencias</p> <p>Curva de probabilidad</p> <p>Suma de curvas</p> <p>Máximos y Mínimos de $P(x)$</p>	<p>Los electrones manifiestan un comportamiento distinto de las bolillas, puesto que cuando se hace la EDR con electrones y ambas rendijas abiertas, se obtiene una curva muy diferente a la obtenida con bolillas</p>	<p>Simular la experiencia controlando las variables ancho, separación y cantidad de rendijas para ambos casos (con bolillas y con electrones) y comparar la forma de las curvas</p>	<p>La curva de probabilidad es la suma de las curvas individuales para bolillas, y no lo es cuando se realiza con electrones.</p>

Etapa 2- Análisis y aplicación de la técnica Sumar Todas las Alternativas (STA) para electrones libres y para partículas de masa mayor

Al aceptar que los electrones llegan a la pantalla en unidades enteras pero se distribuyen de manera distinta a las bolillas (formando la curva de probabilidad con varios máximos y mínimos) tiene sentido para los estudiantes categorizarlos como “sistemas cuánticos” como forma de diferenciarlo de las partículas clásicas.

Para evitar problemas conceptuales y de nomenclatura, en toda la secuencia se utilizó la expresión “sistemas cuánticos” para los componentes del universo microscópico (atómico y subatómico). Se propone evitar utilizar el término *partícula cuántica*, porque se considera que tiende a confundir más que a clarificar conceptos, ya que sigue enfatizando la idea de partícula. Se hará énfasis en que los sistemas cuánticos exhiben bajo ciertas circunstancias un comportamiento que asociamos con el *concepto macroscópico de partícula* y en otras con el *concepto macroscópico de onda*. Pero finalmente se acepta que los sistemas cuánticos exhiben su propio *comportamiento cuántico* caracterizado por esta imposibilidad de contar con una única función que describa su movimiento, y de allí su carácter peculiar. Se hará énfasis en la diferencia del comportamiento entre éstos y los objetos macroscópicos con los que tenemos experiencia directa.

Se plantea estudiar el comportamiento particular de un solo electrón libre, y para ello se propone la técnica de “Sumar Todas las Alternativas” o STA. Se eligió utilizar este nombre y evitar las traducciones literales del inglés “Sum All Paths” que sería “Sumar todas las trayectorias” o “Sumar sobre todos los caminos” para no utilizar las expresiones “camino” ni “trayectoria”. Ambos términos podrían originar asociaciones con los conceptos clásicos de trayectoria en el espacio real, y no es éste el sentido que se asigna aquí. Con el término “alternativa” se hace referencia a las funciones $x(t)$ que conectan el estado inicial con el final.

En esta fase se proponen dos situaciones: **Situación 3: “Presentación de la técnica STA”** y **Situación 4: “Análisis del funcionamiento de STA para electrones libres y partículas libres”**

Situación 3: “Presentación de la técnica Sumar Todas las Alternativas”

El “Método de caminos múltiples de Feynman para la Mecánica Cuántica” o técnica de “integral de camino” se adaptó para que los estudiantes pudieran comprenderla con los conocimientos matemáticos que ellos disponen, reemplazando la notación de los números complejos por la representación vectorial. Aunque la técnica es aplicable a cualquier sistema físico, aplicar la técnica al caso del electrón libre es una decisión didáctica clave porque se aprovecha la potencialidad que éste tiene para reunir propiedades más generales de los sistemas cuánticos (Arlego, 2008). Además, como los electrones se pueden considerar libres desde el momento que salen de la fuente hasta que llegan a la pantalla -suponiendo que ellos son disparados a intervalos de tiempo suficientemente alejados, como para que no interactúen entre sí- la transferencia de los resultados encontrados para el electrón libre permite modelizar los resultados experimentales de la EDR.

La descripción del movimiento unidimensional de un sistema cuántico o una partícula que se presentará a los estudiantes mediante en la siguiente técnica, aunque con un lenguaje adaptado para los estudiantes, como se muestra a continuación. Los cuatro “pasos” básicos que integran la técnica se resumen en:

- 1- Considerar la posibilidad de infinitas formas de conectar el estado inicial I con el final F en el plano $x-t$.

Para cada $x(t)$ que une el estado inicial $I = x_i(0)$ con el final $F = x_f(T)$, se calcula acción

$$\text{correspondiente } S[x(t)] = S[r(t)] = \int_0^T L[r(t)] dt,$$

- 2- A esta acción, $S[x(t)]$, se asocia un número complejo unitario: $\exp(i S[x(t)] / \hbar)$, siendo $\hbar = h / 2 \pi$, donde $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J.s se denomina *constante de Planck*.
- 3- La probabilidad de arribar a F partiendo de I es:

$$P[I \rightarrow F] = (A[I \rightarrow F])^2,$$

donde la *amplitud de probabilidad* $A[I \rightarrow F]$ se obtiene mediante:

$$A[I \rightarrow F] = C \sum_{\substack{\text{todas} \\ \text{las } x(t) \\ \text{alternativas}}} \exp\left(\frac{i S[x(t)]}{\hbar}\right) \text{ siendo } C \text{ es una constante de proporcionalidad.}$$

- 4- Se eleva al cuadrado el módulo de la resultante, y se obtiene la probabilidad de arribar a F partiendo de I .

Las modificaciones y adaptaciones en el lenguaje realizadas fueron:

- La definición de acción S implica el cálculo de la integral para obtener el Lagrangiano:

$$S[r(t)] = \int_0^T L[r(t)] dt,$$

Como los estudiantes no conocen los procedimientos de integración, se puede presentar a la acción S como un valor numérico relacionado la energía cinética promedio y la energía potencial promedio (de la posición respecto de otros cuerpos con los que interactúa) con la expresión:

$$S = (\langle E_{\text{cinética}} \rangle - \langle E_{\text{potencial}} \rangle) \cdot t$$

Como en toda la secuencia se trata de sistemas -sean partículas o sistemas cuánticos- que no están bajo la influencia de fuerzas, la expresión se reduce a

$$S = E_{\text{cinética}} \cdot t$$

$$S = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \cdot t$$

Esta expresión resulta conocida a los estudiantes, ya que la energía cinética interviene en gran parte de los problemas que se proponen en el estudio de la Mecánica Clásica.

- Debido a la falta de familiaridad de los estudiantes con la notación exponencial y los números complejos, se representa al número complejo amplitud de probabilidad, como un vector en dos dimensiones escrito en coordenadas cartesianas, que es la forma más común de notación empleada en la escuela. También se simplificaron las dimensiones del vector posición $r(t)$ considerando una sola dimensión, considerando que la posición se determina por la función $x(t)$. Así, se reemplazó la notación

$$A_{\text{cada } r(t)}(I \rightarrow F) = \exp[i S[r(t)] / \hbar]$$

por la expresión $\text{Vector Amplitud asociado a cada } x(t) = (\cos S / \hbar ; \sin S / \hbar)$

La técnica STA se presenta a los estudiantes de la siguiente forma:

Calculando la probabilidad

Con los resultados de las simulaciones hemos llegado a la siguiente conclusión:

Los electrones llegan a la pantalla en unidades **enteras, como si fueran partículas**, pero la probabilidad de que lleguen a determinado lugar de la pantalla se distribuye de manera muy diferente a las bolillas. Es más, los electrones se comportan de una forma propia y característica.

Debido a este particular comportamiento, deberemos dejar de considerarlos como “pequeñas bolillas”, porque no se comportan como tales. Tampoco se comportan como nada que conozcamos de nuestro entorno familiar y macroscópico. Por su particular comportamiento los físicos han acordado en llamar a los electrones “**sistemas cuánticos**”, para que el nombre mismo nos recuerde que ya no podemos seguir considerándolos como partículas (como pequeñísimas bolillas).

Nuestra pregunta clave es:

¿Cómo se obtiene la curva de probabilidad de la EDR con electrones?

Para abordar esa cuestión, dejemos por un momento la experiencia de la doble rendija y consideremos una partícula de masa m libre de fuerzas, moviéndose a cierta velocidad en una sola dirección, para simplificar las cosas.

Tratemos de contestar una cuestión más básica que nuestra pregunta clave:

¿Cual es la probabilidad P de que arribe al estado final F habiendo partido del estado inicial I ?

$$P [(t_i ; x_i) \rightarrow (t_f ; x_f)]$$

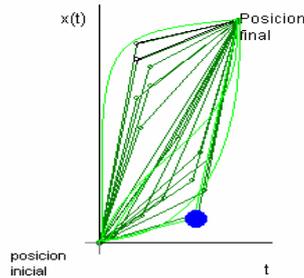
Cada “estado” queda descrito con la posición y el tiempo de la partícula. El estado inicial I está caracterizado por un **tiempo inicial**, $t_i = 0$ en una determinada **posición inicial** $x = x_i$ y el estado final F caracterizado por un **tiempo final** $t = T$ y una **posición final** $x = x_f$. Para simplificar, podemos considerar que sea en el instante $t = 0$ s. la posición $x = 0m$, lo que expresado como un par cuya primer componente es el tiempo y segunda componente es la posición, es $(0 ; 0)$.

Los físicos han desarrollado un método para explicar los resultados encontrados, proponiendo un modelo matemático que describe el comportamiento tanto de bolillas como de electrones que pasen por la doble rendija.

Este método es **universal**, en el sentido que permite describir con el mismo modelo matemático el comportamiento de objetos macroscópicos, como microscópicos, como de sistemas cuánticos (electrones). ¡Y esto funciona para cualquier dimensión o valor de masa!

La técnica o método para calcular la probabilidad de la que estamos hablando es conocida como **Sumar Todas las Alternativas** (de ahí el nombre abreviado **STA**) y consiste los siguientes cuatro “pasos”:

1- Considerar que no hay una única, sino múltiples formas de conectar el estado inicial I con el final F, -con diversas $x(t)$ – todas igualmente posibles .



Luego, cada $x(t)$ posible, tiene asociado un valor numérico llamado acción, representado por “S”, relacionado con la energía cinética promedio (de movimiento) y potencial promedio (de la posición respecto de otros cuerpos con los que interactúa)

$$S = (E_{cin} - E_{pot}) \cdot T$$

Si la partícula está “libre” es decir no está en presencia de fuerzas, consideramos que tiene energía potencial nula. Entonces, directamente la acción en este caso es:

$$S = E_c \cdot T$$

$$S = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \cdot T$$

2- Con dicha acción S se construye un vector en el plano llamado “Amplitud de probabilidad” que tiene módulo uno y ángulo de medida S / \hbar (con respecto al eje x positivo). El denominador de este cociente es el valor de $\hbar = h / 2 \pi$, donde $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J.s. se denomina constante de Planck, constante fundamental para la física.

Es decir:

Cada $x(t)$ tiene un valor de S; con esta S se construye un vector:

$$\text{Vector Amplitud asociado a cada } x(t) = (\cos S / \hbar ; \text{sen } S / \hbar)$$

3- Se suman todos los vectores asociados a las diferentes funciones que conectan ambos estados inicial y final. Llamamos a este vector suma “Amplitud de probabilidad total”

$$\text{Amplitud de probabilidad total} = \underbrace{\text{Suma de todos los vectores asociados}}_{(\cos S / \hbar ; \text{sen } S / \hbar)}$$

4- Se calcula el MÓDULO de la amplitud de probabilidad total (o sea el vector resultante de la suma) y se eleva al cuadrado. De esta forma, el resultado es la probabilidad de arribar al estado final F, habiendo partido del estado inicial I

Para que los estudiantes pudieran aplicar la técnica STA al electrón libre y visualizar los resultados, fue necesario desarrollar una simulación con ¹⁴ModellusTM, e incluirla en las actividades propuestas. Esta simulación requiere que los estudiantes entiendan que a

¹⁴ MODELLUSTM versión 2.5 Creado por Victor Duarte Teodoro, Joao Paulo Duque Viera; Filipe Costa Clérigo Faculty of Sciences and Technology Nova University, Lisbon, Portugal. Obtenido de Internet en Diciembre de 2006 de <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus>

diferencia de la simulación anterior, aquí no se simula una experiencia de laboratorio, sino una parte del modelo matemático de la STA.

La simulación se configuró de tal forma que el estado inicial está caracterizado por $x = 0\text{m}$ en $t = 0\text{s}$ y el estado final está caracterizado por 0.02m en el tiempo 2s . Estos valores fueron seleccionados de manera de favorecer la visualización del vector amplitud de probabilidad asociado, y los cálculos requeridos en la situación. En la figura 4.5 se presenta la pantalla inicial de la Simulación 1. En la parte izquierda muestra un sistema cartesiano $x-t$ las condiciones iniciales y finales, y la recta que los une, la función clásica. En la parte derecha, se muestra el ángulo del vector asociado a la función clásica $x_{\text{clas}}(t)$, que para las condiciones iniciales y finales configuradas en la simulación, resulta de 49° .

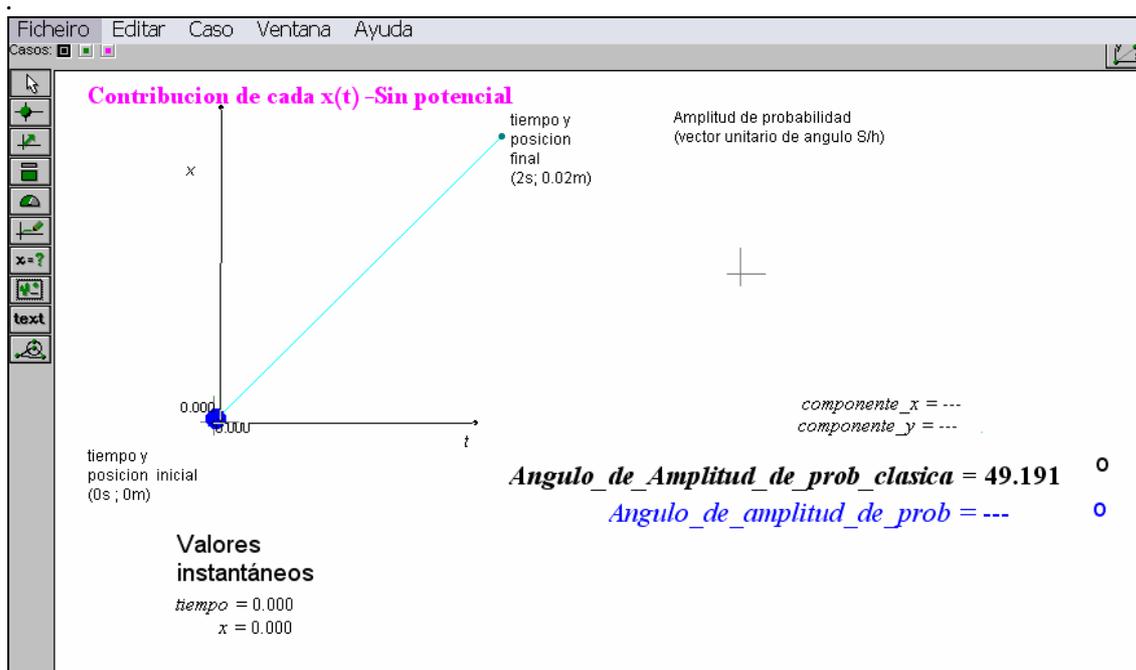


Figura 4.5: Pantalla de salida inicial de la Simulación 1

Para familiarizar a los estudiantes con el software, y favorecer la interpretación de lo que el software muestra inicialmente, se plantean las siguientes cuestiones antes de ejecutar la simulación:

- a) ¿Qué significa que la función que conecta el estado inicial con el final sea una línea recta en términos del tipo de movimiento que realiza la partícula?
- b) El programa muestra el ángulo del vector amplitud de probabilidad asociado a $x_{\text{clas}}(t)$. ¿Cómo se obtiene este valor? Realiza el cálculo aquí. (Recuerda que primero debes hallar el valor de la acción $S = \frac{1}{2} m v^2 \cdot t$, donde v es la rapidez, o sea distancia sobre el tiempo. La masa del electrón es $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Luego, no olvides dividir por la constante de Planck \hbar)

Para los cálculos requeridos en los problemas anteriores es necesario tener el valor del ángulo expresado en radianes, pero como los estudiantes no están familiarizados con este sistema, se decidió que el software mostrara el ángulo en el sistema sexagesimal, para no obstaculizar la visualización de los resultados. También se muestran las coordenadas del vector en el sistema cartesiano.

La Figura 4.6 representa lo que muestra el software cuando se seleccionan algunas funciones $x(t)$ alternativas que conectan los estados iniciales y finales, para el caso del electrón.

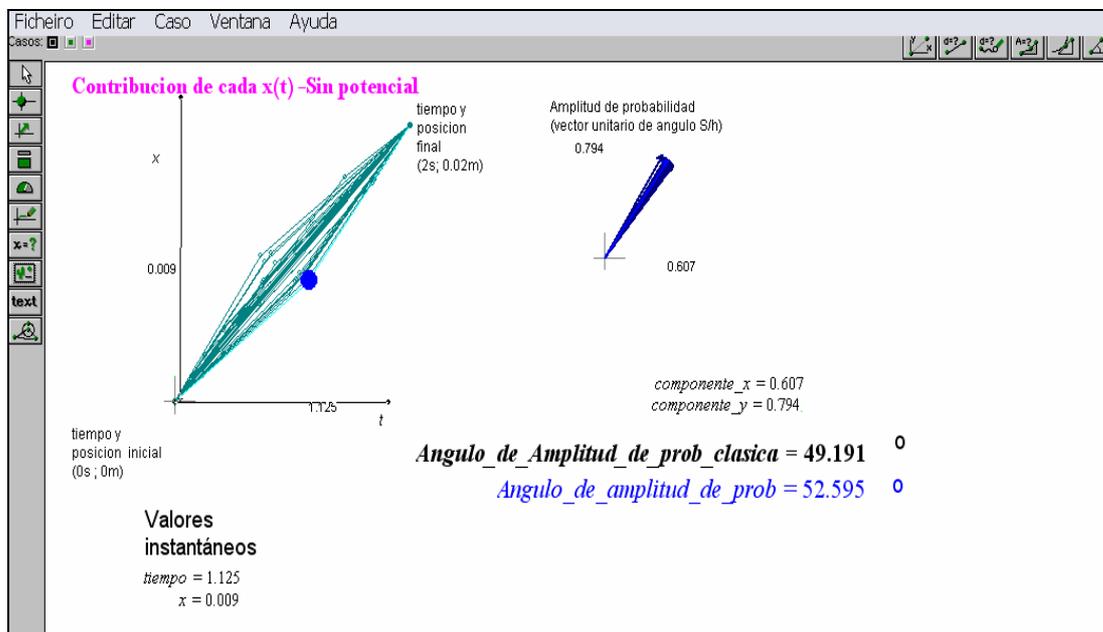


Figura 4.6: Pantalla de la simulación con Modellus. Cuando se seleccionan las distintas funciones $x(t)$ que conectan los estados iniciales y finales, la simulación muestra los ángulos correspondientes en un plano cartesiano y el valor del ángulo de dicho vector en grados sexagesimales.

La simulación sólo permite construir funciones en dos tramos lineales. En la parte derecha de la Figura 4.6, la simulación “dibuja” los vectores asociados a cada función elegida, y simultáneamente muestra el valor numérico del ángulo del vector dibujado. Algunas de las funciones seleccionadas quedan dibujadas, con sus respectivos vectores asociados.

Las preguntas que se proponen para utilizar la Simulación 1:

2- Abre el archivo “Simulación 1” y activa el control del tiempo. Mueve el círculo azul para elegir distintas funciones $x(t)$ posibles que ligen al estado inicial con el final (son funciones compuestas por dos trozos de funciones lineales)

a) Compara el valor de la acción de cada una de las distintas $x(t)$ que el programa te va mostrando, con respecto a la acción de $x_{clas}(t)$ que calculaste en la actividad anterior (1-b). ¿Qué puedes concluir?

b) ¿Cómo son las direcciones de los vectores asociados a cada $x(t)$ cercanas a la $x_{clas}(t)$ respecto a la dirección del vector asociado a $x_{clas}(t)$? ¿Y las direcciones de los vectores asociados a aquellas funciones alejadas de $x_{clas}(t)$?

Los estudiantes deben seleccionar distintas funciones y comparar el valor de acción S de cada una de ellas respecto a la acción correspondiente a $x_{clas}(t)$. La simulación no muestra los valores de acción S sino del ángulo de amplitud asociado para cada función seleccionada, pero como previamente se estableció que el ángulo y la acción son proporcionales (ángulo =

S/\hbar) cuando los estudiantes comparen los valores de ángulo podrán obtener los valores de acción.

De esta forma, se pretende que los estudiantes puedan concluir que la acción para cualquier función, $S(x(t))$ siempre es mayor que la acción de la función clásica $S(x_{\text{clas}}(t))$.

La última pregunta (2b) se propone para que los estudiantes seleccionen funciones $x(t)$ “cercanas” a la $x_{\text{clas}}(t)$ y observen que las direcciones de los vectores asociados son similares a la dirección del vector asociado a la función clásica. La otra pregunta, busca que los estudiantes concluyan que aquellas $x(t)$ “alejadas” de $(x_{\text{clas}}(t))$ tienen vectores con direcciones muy diferentes entre ellas.

La Figura 4.7 representa lo que muestra la simulación al seleccionar funciones “cercanas” a la función clásica:

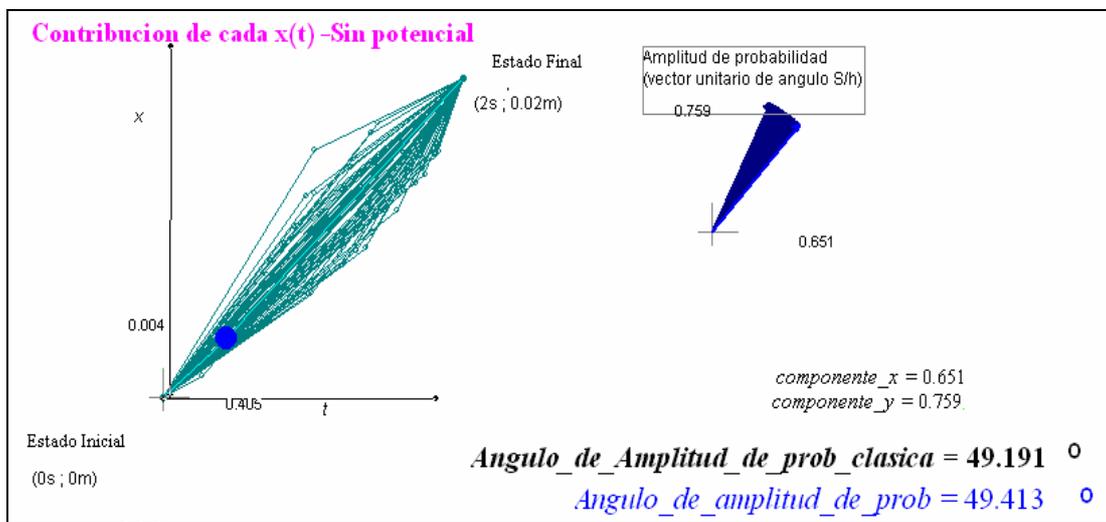


Figura 4.7: Simulando la aplicación de la técnica STA para un electrón libre, al seleccionar $x(t)$ “cercanas” a la $x_{\text{clas}}(t)$. Notar en la parte derecha, que los vectores asociados no cambian demasiado la dirección respecto del vector asociado $x_{\text{clas}}(t)$.

La Figura 4.8 representa lo que muestra la simulación al seleccionar funciones “apartadas” de la función clásica:

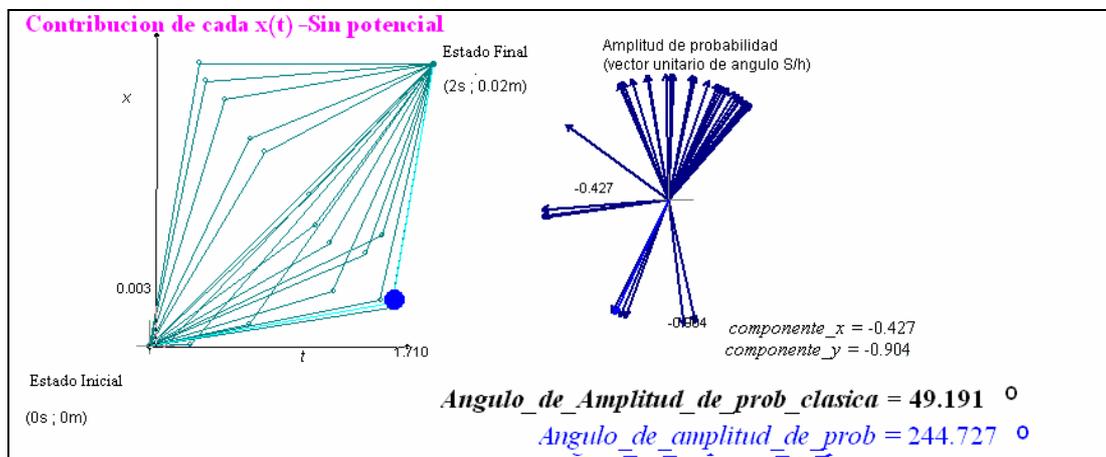


Figura 4.8: Simulando la aplicación de la técnica STA para un electrón libre, al seleccionar $x(t)$ “alejadas” a la $x_{\text{clas}}(t)$. Notar en la parte derecha, el gran cambio en la dirección de los vectores asociados respecto del vector asociado $x_{\text{clas}}(t)$.

Para continuar con la técnica STA para calcular probabilidades, se deben sumar los vectores asociados a cada una de las funciones alternativas. La técnica enfatiza que “todas” las alternativas de conectar el estado inicial con el final contribuyen al cálculo de probabilidad. Se plantea entonces la pregunta clave:

¿Cómo es posible considerar “todas” las $x(t)$?

Para que los estudiantes puedan concluir que la suma se reduce finalmente a un conjunto de vectores, que son los asociados a las funciones cercanas a la función clásica, se presentan dieciséis pares ordenados $(t ; x)$ que fueron extraídos al ejecutar la simulación, con el ángulo del vector amplitud correspondiente para que los estudiantes realicen la suma geoméricamente.

Los vectores fueron seleccionados de forma que sea notable la cancelación de los vectores correspondientes a las funciones alejadas, y la contribución a la suma de los vectores asociados a funciones cercanas sean los que contribuyan a la suma:

<i>Tiempo (s.)</i>	<i>$x(t)$ (m)</i>	<i>Ángulo del vector amplitud de probabilidad asociado (en grados)</i>
0.38	0.011	90
0.243	0.011	140
0.279	0.019	230
0.303	0.018	270
0.018	0.015	320
0.126	0.02	50
0.486	0.03	51
1.296	0.01	53
1	0.01	49.5° (corresponde a $x(t)$ clásica)
0.882	0.011	52
1.775	0.002	320
1.746	0.003	270
1.854	0.006	230
1.422	0.002	140
1.03	0.001	90

Se solicita a los estudiantes que grafiquen los vectores, colocándolos uno a continuación del otro para obtener la suma de forma geométrica. Luego, se plantea la cuestión:

¿Qué puedes concluir acerca de lo que sucede con la contribución a la suma de los vectores correspondientes a las $x(t)$ alejadas de la $x_{clas}(t)$?

Se espera que los estudiantes concluyan que los vectores asociados a las funciones “alejadas” de la función clásica se cancelen entre sí, mientras los que corresponden a funciones “cercanas” a la función clásica, tienen direcciones similares, y contribuyen a la formación del vector suma.

La Tabla 3 sintetiza los componentes fundamentales de la ECPE relativos a la **Situación 3: “Aplicación de la STA con el software de simulación Modellus”**

Tabla 3: Componentes fundamentales de la ECPE para la Situación 3

Preguntas clave	Acciones	Conceptos clave	Explicaciones	Mecanismo Explicativo	Lenguaje	Principios
¿Cómo se calcula la probabilidad P de que un electrón libre pase de un estado inicial I al F?	<p>Interpretar la técnica STA relacionando los conceptos estudiados en mecánica clásica (movimientos con velocidad constante, etc)</p> <p>Simular seleccionando algunas funciones alternativas $x(t)$</p> <p>Dibujar los vectores de forma geométrica</p> <p>Analizar la contribución de los vectores cercanos y los lejanos a la clásica</p>	<p>Sistema cuántico</p> <p>Electrón</p> <p>Estado inicial y final</p> <p>Funciones $x(t)$ cercanas a la función clásica.</p> <p>Funciones $x(t)$ lejanas a la función clásica.</p> <p>Proporcionalidad entre proximidad de las funciones $x(t)$ y semejanza de los ángulos de los vectores asociados.</p>	<p>Los “<i>sistemas cuánticos</i>”, necesitan una técnica nueva que permita calcular la probabilidad.</p> <p>Los vectores asociados a funciones cercanas contribuyen a la suma, los lejanos se cancelan entre si, y no aportan a la suma. Por lo tanto, el cálculo de la probabilidad para un electrón libre se construye con un conjunto de vectores asociados a funciones cercanas a la clásica.</p>	<p>Aplicar la técnica STA para sistemas libres</p> <p>Simulación y análisis de la contribución de cada función alternativa a la suma.</p>	<p>Algebraico Geométrico: Amplitud total $(I \rightarrow F) = N.(\cos(S_{cl}/\hbar); \sin(S_{cl}/\hbar))$</p>	<p>La técnica STA permite calcular la probabilidad P de que un electrón o una partícula arribe al estado final F habiendo partido del estado inicial I, reduciendo la suma de todos los vectores asociados a un conjunto finito, correspondientes a las funciones cercanas a la clásica. (Principio de Superposición)</p>

Situación 4: “Análisis de la transición cuántica-clásica: del electrón a las partículas libres”

Una vez que se establece que en el cálculo de probabilidad se deben considerar solo las funciones alternativas “cercanas” a la función clásica, se propone el análisis de la aplicación de la técnica STA para casos de masa mayor a la del electrón.

Se propone utilizar la simulación anterior e ir seleccionando valores de masa cada vez mayor. Esto se obtiene con la selección de “casos”. El “caso 1” -que era el caso que habían simulado en la situación anterior- corresponde a la masa del electrón, el “caso 2” a una masa de mil veces la masa del electrón, y el “caso 3”, a un aumento de un millón de veces su masa.

Se propone a los estudiantes las siguientes preguntas:

- a) *¿Qué sucede con la dirección de los vectores cuando las $x(t)$ se alejan de la $x_{clas}(t)$?*
- b) *¿Qué ocurrirá entonces con la suma de los vectores?*
- c) *¿De que forma afecta esto el cálculo de $P(x)$?*
- d) *Escribe alguna conclusión acerca de los resultados que predice la STA para valores de masa muy grandes (partículas u objetos de dimensiones mucho mayores a las del electrón)*

En la Figura 4.9 se representa lo que el programa muestra para el “caso 2”, que corresponde a una masa cuyo valor es mil veces la masa del electrón. Es notable que seleccionando funciones próximas de $x_{clas}(t)$, los vectores asociados tienen direcciones muy distintas entre sí y al vector asociado a la función clásica:

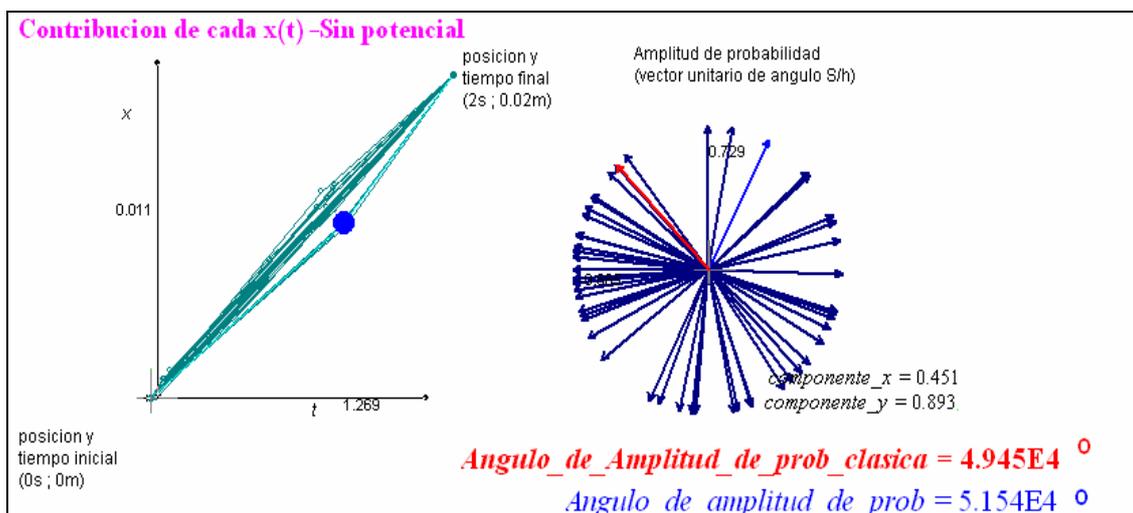


Figura 4.9: Seleccionando el caso de una partícula de mil veces la masa del electrón.

Con la selección del “caso 3”, se obtiene lo que muestra la Figura 4.10

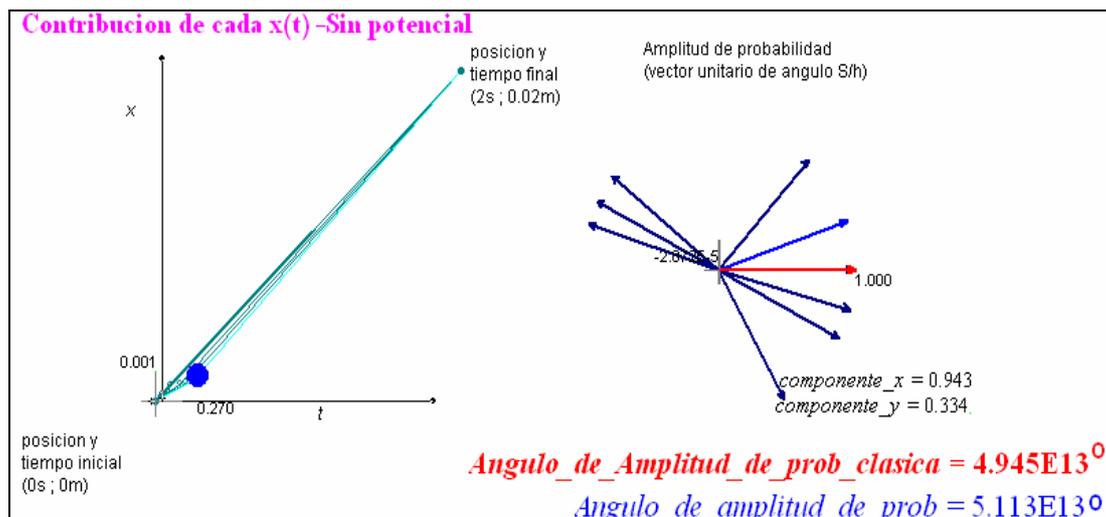


Figura 4.10: Seleccionando el caso de una partícula de un millón de veces la masa del electrón.

Se espera que los estudiantes contrasten lo que concluyeron para el caso del electrón -las funciones cercanas a la función clásica tienen vectores asociados parecidos al vector asociado a la función clásica- con lo que sucede cuando se aumenta la masa.

Una vez aceptado esto, se propone a los estudiantes a inferir cómo influye esto en el cálculo de probabilidades, al preguntarles:

c) ¿De que forma afecta esto el cálculo de $P(x)$?

De esta forma, los estudiantes podrían formular como conclusión que al aumentar la masa, los vectores asociados son muy diferentes del vector clásico –tienen ángulos muy distintos-, aún cuando se seleccione una función muy cercana a la función clásica y como consecuencia se anulan al sumarse. Como caso extremo, que sería el caso macroscópico, todos los vectores se cancelarán en la suma, excepto el asociado a la función clásica, coincidiendo de esta forma los resultados con los que predice la Mecánica Clásica: un movimiento rectilíneo en una dimensión se describe con una expresión $x(t)$ cuya representación gráfica es una recta que une el estado inicial con el final.

Se prevé que la profesora dedique un tiempo a conversar y consensuar con los estudiantes acerca de la magnitud del "alrededor" de la función clásica que debe considerarse según se esté en el caso de sistema cuántico o clásico (macroscópico). Se debe establecer el acuerdo acerca de que para un objeto macroscópico, "alrededor" es tan cerca de la función clásica que es ella misma, y a medida que la masa considerada tiene dimensiones cada vez menores, llegando al electrón, "alrededor" va significando regiones cada vez mas alejadas de la $x(t)$ clásica.

La Tabla 4 sintetiza los componentes fundamentales de la Situación 4:

Tabla 4: Componentes fundamentales de la ECPE para la Situación 4

Preguntas clave	Acciones	Conceptos clave	Explicaciones	Mecanismo Explicativo	Lenguaje	Principios
¿Qué resultado se obtiene al aplicar la técnica a sistemas de masa mayor a la del electrón?	<p>Ejecutar la simulación, con masas sucesivamente mayores.</p> <p>Analizar qué sucede con la dirección de los vectores cuando las $x(t)$ se alejan de la $x_{clas}(t)$.</p> <p>Analizar que consecuencia tiene que el sistema tenga mayor masa en la suma de los vectores y en el cálculo de $P(x)$.</p>	<p>Contribución a la suma y cancelación de vectores.</p> <p>Funciones $x(t)$ “cercanas” y “lejanas” a la clásica.</p> <p>Acción clásica.</p> <p>Acción mínima.</p>	<p>El valor de S depende directamente del valor de la masa. Entonces, al aumentar el valor de masa, S es mayor.</p> <p>Como \hbar es muy pequeño, un pequeño cambio en la función, genera un gran cambio en el cociente S/\hbar. Esto hace que los vectores asociados a cada función tengan ángulos muy diferentes. Esto lleva a que se cancelen en la suma, y no haya que considerarlos</p>	<p>Visualización de los resultados de la simulación</p> <p>Análisis del cociente de valores grandes y pequeños.</p> <p>Construcción geométrica de la suma de vectores de ángulos muy distintos, y consecuencias de esto en el cálculo de $P(x)$</p>	<p>Gráfico: funciones $x(t)$ conectando estados inicial y final</p> <p>Geométrico: vectores en el plano cartesiano</p> <p>Natural: expresar la transición de forma coloquial.</p> <p>Algebraico: Amplitud total $(I \rightarrow F) = N \cdot (\cos(S_{cl}/\hbar) + \text{sen}(S_{cl}/\hbar))$</p>	<p>Principio de mínima acción: para el caso clásico, todas las funciones se anulan, y no contribuyen al cálculo de probabilidades, excepto la función clásica, que corresponde al caso de movimiento de partícula libre a velocidad constante.</p>

En esta segunda etapa, se espera que los estudiantes concluyan que:

- La acción S es mínima para la relación funcional $x(t)$ clásica -una recta-comparándola con otras $x(t)$ arbitrarias.
- Los ángulos de los vectores amplitud asociados a aquellas $x(t)$ o caminos cercanos al camino clásico $x_{clas}(t)$ son similares. En cambio, los ángulos de los vectores asociados a las $x(t)$ que se encuentran alejadas del camino clásico, difieren mucho entre sí. Esto implica que sólo un conjunto de funciones “alrededor” del camino clásico pueden aportar a la suma. Los caminos que están demasiado alejados del clásico, tienen asociados vectores que debido a su diferencia de direcciones se anulan entre sí al sumarlos.
- Cuanto mayor es la masa de la partícula hay menos vectores que considerar en la suma, porque hasta los caminos cercanos se anulan. Para una partícula macroscópica, que es el caso límite, la única que contribuye a la suma es la $x_{clas}(t)$. La relación entre el valor de la acción –determinada por la masa- y el valor de la constante de Planck permite interpretar la transición cuántico-clásico.

Etapa 3- Aplicación de la STA para reconstruir el diagrama de la EDR con electrones

Retomando el problema inicial y vertebrador de toda la secuencia, que es la explicación de los máximos y mínimos en la curva obtenida en la EDR con electrones, se propone aplicar los resultados obtenidos con la técnica STA con electrones, argumentando que los electrones son libres, desde la salida de la fuente hasta la pantalla colectora.

Situación 5: “Reconstrucción del diagrama obtenido en la EDR”

Adoptando un marco geométrico-vectorial, y con operaciones algebraicas accesibles a los conocimientos matemáticos de los estudiantes, se ofrece a los estudiantes los procedimientos de cálculo para obtener la suma de vectores aplicando algunas propiedades trigonométricas, obteniéndose finalmente la expresión que permite a los estudiantes dar cuenta de forma aproximada (puesto que no se consideran los efectos de la difracción): $P(x) \sim \cos^2 [(md/ht)x]$. Las características de esta expresión funcional son las que permiten explicar la formación de máximos y mínimos de la distribución de los electrones en la pantalla. Los estudiantes deberán conversar con los miembros de su grupo, para analizar los procesos utilizados y la forma funcional de la expresión obtenida.

Las cuestiones que se plantean en la *Situación 5* son:

- 1- a) *¿Qué tipo de función matemática se obtiene? ¿Puede ésta tomar valores negativos? ¿Por qué?*
- b) *¿Qué característica de esta función permite explicar el diagrama de máximos y mínimos que se obtiene en la EDR con electrones?*
- c) *¿Qué valores dependen del diseño experimental?*
- d) *Entonces, dejando fijos los parámetros relacionados con el diseño experimental, de qué depende la probabilidad?*

Luego, a partir de la expresión funcional, se propone a los estudiantes realizar una representación gráfica aproximada de $P(x)$. Se fijan las características experimentales

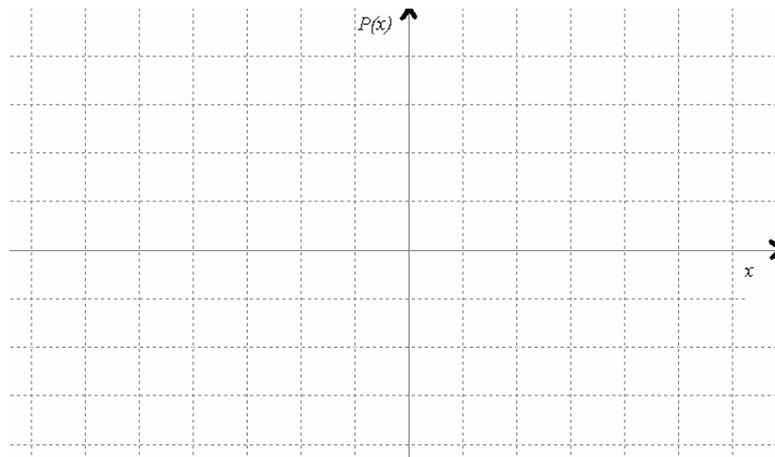
(distancia de separación, tiempo empleado, etc.) para no obstaculizar la construcción de la gráfica. Los valores de la variable independiente también son sugeridos para que se aprecien los máximos y mínimos de la curva. Sin esta orientación, la reconstrucción de la gráfica posiblemente dificulte en ese momento abordar el objetivo principal: reconocer que la expresión obtenida modeliza los resultados experimentales simulados.

Se propone a los estudiantes resolver:

2- a) ¿Cómo es la expresión de $P(x)$ si se consideran como parámetros experimentales $d = 10^{-7} \text{ m}$, masa del electrón $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, y un intervalo de tiempo $T = 5 \times 10^{-9} \text{ seg.}$?
 b) Evalúa la expresión recién hallada para cada una de las siguientes distancias al centro de la pantalla, para obtener los diferentes valores de encontrar al electrón en cada una de ellas:

$x \text{ [m]}$	-0.0052	-0.0041	-0.0031	-0.0020	-0.0010	0	0.0010	0.0020	0.0031	0.0041	0.0052
$P(x)$											

c) De acuerdo a los valores recién calculados, y considerando que la expresión de $P(x)$ es la expresión matemática de una función periódica, dibuja aquí un diagrama aproximado de la curva de $P(x)$.



Por último, se propone la siguiente cuestión clave, cuya respuesta remite a la cuestión generatriz de la secuencia: ¿cómo explicar los máximos y mínimos de la curva de $P(x)$?:

d) ¿Qué puedes concluir acerca de lo obtenido aplicando la STA de la Mecánica Cuántica respecto de lo que obtuvimos cuando simulamos la EDR con electrones en el software Dopplespalt?

Tabla 5: Componentes fundamentales de la ECPE para la Situación 5

Preguntas clave	Acciones	Conceptos clave	Explicaciones	Mecanismo Explicativo	Lenguaje	Principios
¿Qué curva $P(x)$ se obtiene al aplicar la STA en la EDR?	<p>Reconstruir la curva a partir de la aplicación de la técnica.</p> <p>Reconocer las características de la expresión funcional obtenida.</p> <p>Relacionar la forma de la expresión de $P(x)$ obtenida con el resultado visualizado con el software</p> <p>Evaluar la función para un conjunto dado de posiciones</p> <p>Graficar en forma aproximada la función $P(x)$</p>	<p>EDR</p> <p>Electrón libre</p> <p>Amplitud de probabilidad</p> <p>Vector amplitud asociado</p> <p>Función matemática armónica</p> <p>Máximos y mínimos de la curva de probabilidad.</p>	<p>La expresión de la probabilidad de que un electrón impacte a una distancia x del centro de la pantalla colectora permite describir los resultados obtenidos en la EDR con bolillas.</p> <p>La curva obtenida modeliza los resultados obtenidos en la simulación porque al ser periódica representa los máximos y mínimos.</p>	<p>Aplicar la STA en la EDR y considerar a los electrones libres desde la salida de la fuente hasta la pantalla colectora, para encontrar una expresión de $P(x)$</p>	<p>Pictórico: esquema de la experiencia vista lateralmente</p> <p>Algebraico: procedimientos matemáticos hasta llegar a la expresión de $P(x)$</p> <p>Numérico-funcional Gráfica de $P(x)$ a partir de un cierto conjunto de pares ordenados.</p>	<p>La STA modeliza los resultados de la EDR con electrones.</p> <p>El gráfico de $P(x)$ se describe con un modelo matemático similar al modelo de ondas.</p>

Etapa 4- Análisis de la transición clásica-cuántica en la EDR

En esta última etapa se propone analizar que predice la Mecánica cuántica para la EDR si se realiza con proyectiles que no sean electrones, sino con sistemas de masa mayor. La idea es aumentar el valor de masa gradualmente, hasta llegar a valores de masa macroscópicos como bolillas. Se propone la **Situación 6: “Análisis de la transición cuántico-clásico”** para construir el concepto de longitud de onda asociado, y analizar su relación con la formación y detección del patrón de interferencia.

Situación 6: “Análisis de la transición cuántico-clásico”

La pregunta clave que se plantea es:

Si la técnica STA de la Mecánica Cuántica es aplicable a todos los sistemas, sean microscópicos (como el electrón) o macroscópicos (como las bolillas) ¿Por qué cuando simulamos la EDR con bolillas la curva de probabilidad $P(x)$ no presentaba máximos y mínimos?

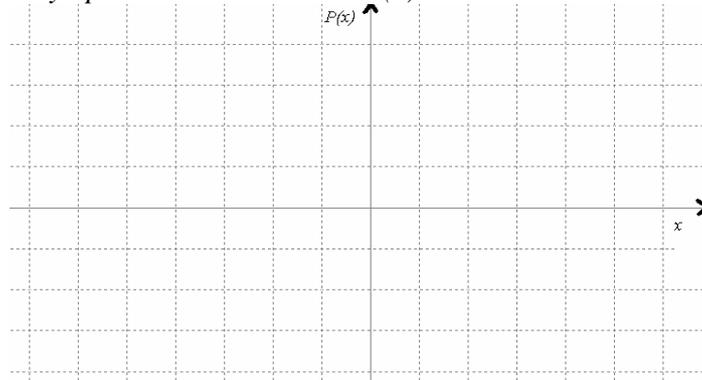
Se solicita a los estudiantes que, partiendo de la función $P(x)$ que predice la Mecánica Cuántica, -obtenida y analizada en la Situación anterior- anticipen la forma de $P(x)$ si se aumenta dos mil veces el valor de masa, que correspondería al caso de realizar la EDR con protones. Se espera que ellos puedan concluir que en este caso los máximos y los mínimos se encuentran más cercanos que el gráfico para electrones.

Se proponen los siguientes problemas:

3- Para estudiar de que forma influye el aumento de la masa en el cálculo de la probabilidad en función de x , debemos analizar el cociente que se encuentra en el argumento de la función $P(x)$ hallada en el ítem 2 a).

a) Hagamos que m tome el valor de 2000 veces la masa de un electrón (esto es aproximadamente la masa de un protón) y evalúa la función $P(x)$ obtenida en 1) ¿Cómo es la expresión de $P(x)$ ahora?

b) ¿Cuál será el efecto en la gráfica de $P(x)$ si dejamos la misma escala que antes? Intenta graficar de forma muy aproximada a la nueva $P(x)$



c) Como consecuencia de la forma de la curva de $P(x)$ ¿Cómo se distribuirán estas partículas -cuya masa es mayor que la de los electrones- en la pantalla colectora de la EDR?

Para contribuir a la comprensión y explicación de que es la relación entre la masa y la constante de Planck la que determina la formación del patrón de interferencia, se construyó otra simulación con la misma herramienta de simulación *Modellus*, la **Simulación 2**. La pantalla inicial que muestra se representa en la Figura 4.11.

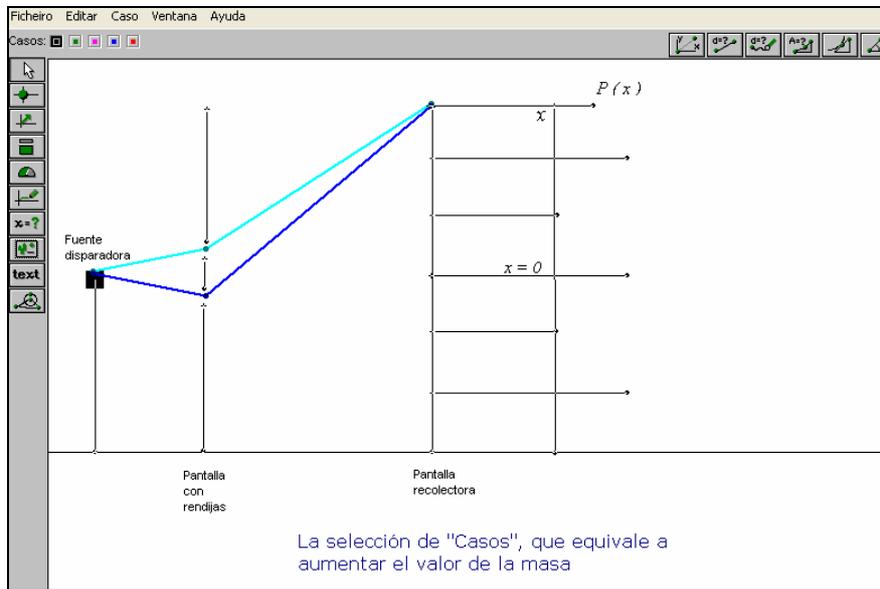


Figura 4.11: Pantalla inicial de la Simulación 2, antes de ejecutarla

En la parte izquierda se representa la EDR de forma esquemática, y las dos formas alternativas de que el electrón atraviese las rendijas.

Cuando se ejecuta la simulación seleccionando el caso 1 –electrones–, el software muestra cada uno de los vectores asociados a cada alternativa, y el vector suma. En correspondencia al módulo del vector suma que resulta para cada “x”, se va dibujando la función $P(x)$. La Figura 4.12 es una instantánea de la ejecución de la simulación.

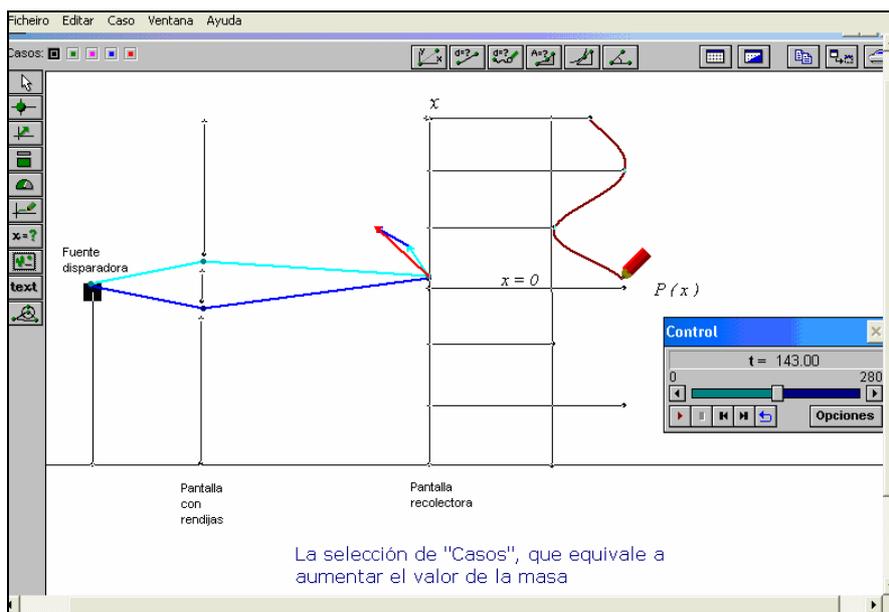


Figura 4.12: Pantalla obtenida de la Simulación 2, utilizando electrones como proyectiles. La longitud del vector suma (en rojo) es proporcional a la ordenada de la función $P(x)$

Al seleccionar distintos “casos”, la simulación cambia el valor de la masa, haciéndola progresivamente mayor, en relación a la del electrón. Así, a medida que aumenta la masa, la función que grafica el software, va teniendo los máximos cada vez más cercanos, como se muestra en las Figuras 4.13, a) y b) correspondientes a la selección del segundo y tercer caso respectivamente:

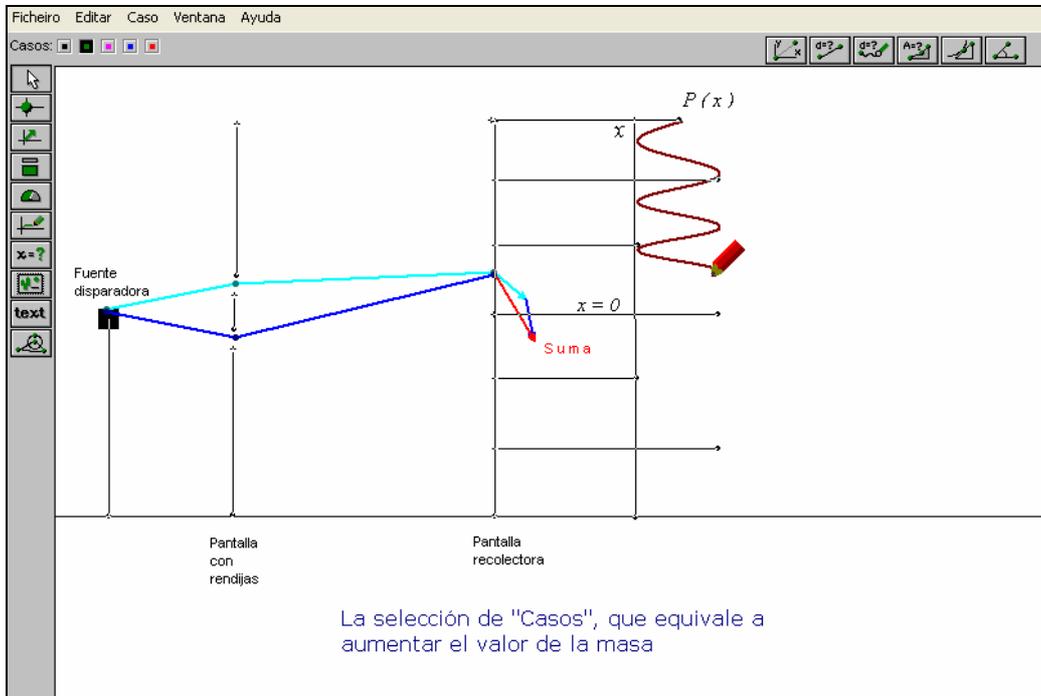


Figura 4.13 (a) Seleccionando el segundo caso. $P(x)$ tiene los máximos y mínimos más juntos que en el caso del electrón.

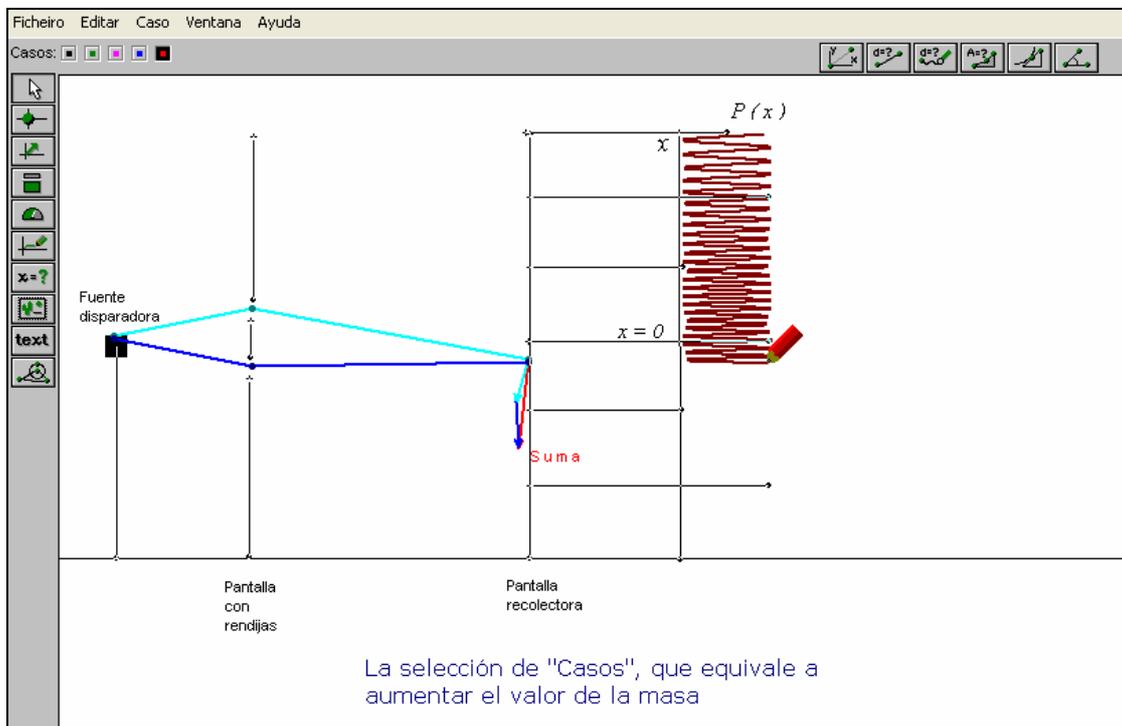


Figura 4.13 (b) La selección del último caso correspondería a una masa macroscópica. De la forma de $P(x)$ se puede inferir la desaparición del patrón de interferencia

En la programación de estas simulaciones, se contempló que las gráficas de $P(x)$ sean similares a las gráficas que ellos habían dibujado previamente, que corresponden a la modelización obtenida al aplicar la técnica STA en la EDR. Es decir, estos gráficos tampoco consideran los efectos de la difracción, y por lo tanto, los máximos tienen el mismo valor de ordenada.

Se plantean las siguientes preguntas, que requieren la utilización de la **Simulación 2**:

4- a) Ejecuta la **Simulación 2**, con el software Modellus, y transcribe el esquema de la Experiencia

b) ¿Qué relación tiene la curva que se va dibujando con el vector suma (rojo)?

c) Ejecuta la simulación para todos los “casos”. Transcribe las distintas curvas obtenidas.

e) ¿Cómo son los resultados respecto de lo que concluíste en el ítem 3 c)?

Luego se propone a los estudiantes considerar la serie de fotografías¹⁵ de la Figura 4.14, que corresponden a la realización de la experiencia en laboratorio. En ellas se notan los impactos individuales de los electrones y la formación del patrón de interferencia.

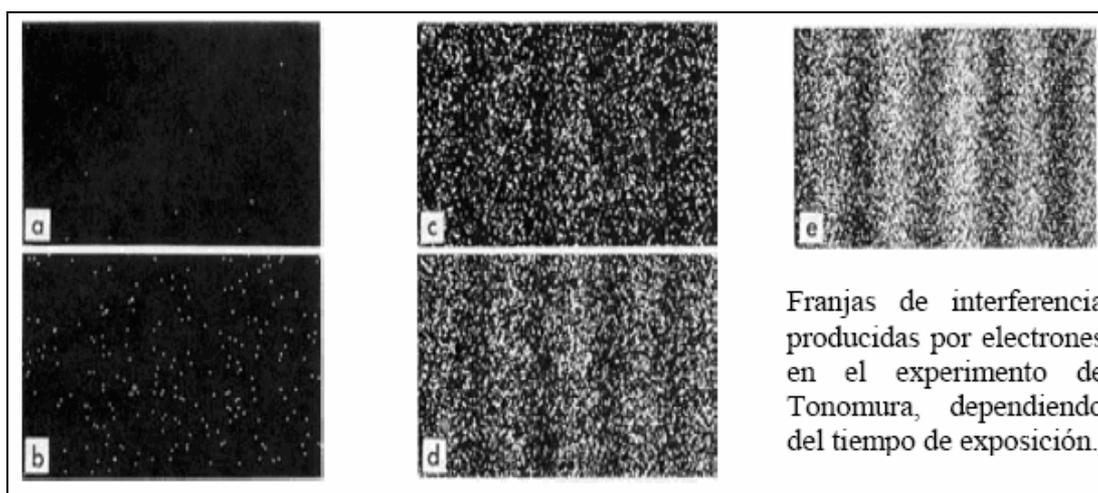


Figura 4.14: Fotografías de la realización de la EDR en distintos tiempos de exposición.

Esta instancia permite reconocer y aceptar el comportamiento ondulatorio de los electrones, referido a la distribución de $P(x)$, lo cual permite definir y justificar el concepto de “longitud de onda asociada” como $\lambda \propto h / (m \cdot v)$ donde m es la masa del electrón, y v su velocidad.

Luego, partiendo de la validez de las leyes de la Mecánica Cuántica, establecida en la presentación de la STA como técnica para calcular probabilidades, se propone aceptar el comportamiento ondulatorio de toda la materia.

Se formula la siguiente cuestión clave que permite reflexionar acerca de la relación entre la curva que predice la STA, y la curva obtenida experimentalmente:

¹⁵Obtenido de Internet de la siguiente dirección : http://en.wikipedia.org/wiki/Double-slit_experiment

¿Por qué se detecta un patrón de interferencia con electrones, y no con las bolillas?

Para poder abordar esta cuestión, se presenta la Figura 4.15, que muestra dos curvas la obtenida de acuerdo a la Mecánica Cuántica y la curva obtenida experimentalmente:

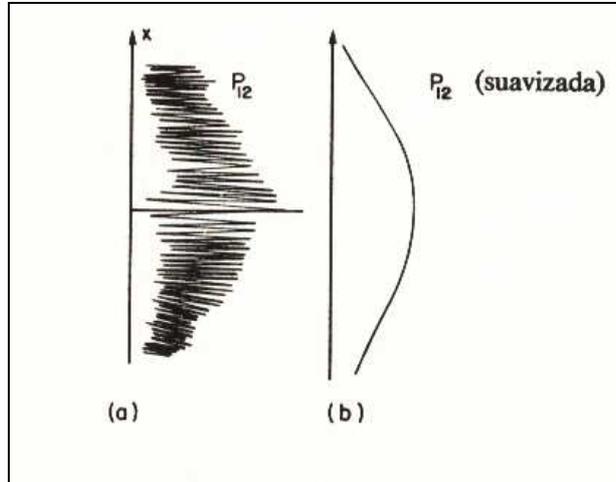


Figura 4.15: Representación de la curva que predice la Mecánica Cuántica para la EDR (a) y curva que se obtiene experimentalmente

La profesora deberá invitar a los estudiantes a analizar el cociente entre la constante de Planck h (extremadamente pequeño) y la masa (de valor macroscópico). Como la longitud de onda asociada resulta demasiado pequeña, los máximos y mínimos de la curva $P(x)$ resultarán indistinguibles. Al realizar la experiencia con bolillas, el detector no registrará los máximos y mínimos, y se obtiene una curva promedio, que es la curva clásica.

De este modo, se podría concluir que la constante de Planck decide la detección o no del comportamiento cuántico. Así, la secuencia revaloriza el papel de la constante de Planck como constante fundamental en la naturaleza. Esto constituye uno de los aspectos claves a ser enseñados a los estudiantes de la escuela media.

Al finalizar la implementación y antes de la evaluación se propondrá a los estudiantes la elaboración de una síntesis personal de los conceptos y principios estudiados.

La Tabla 6 sintetiza los conceptos fundamentales de la ECPE, para la Situación 6.

Tabla 6: Componentes fundamentales de la ECPE para la Situación 6

Preguntas clave	Acciones	Conceptos clave	Explicaciones	Mecanismo Explicativo	Lenguaje	Principios
¿Por qué cuando se simula la EDR con bolillas la curva de probabilidad $P(x)$ no presenta máximos y mínimos como lo predice la STA en la EDR?	<p>Evaluar la expresión $P(x)$ para masas mayores.</p> <p>Predecir la forma de la curva.</p> <p>Dibujar $P(x)$ en forma aproximada.</p> <p>Interpretar en términos probabilísticos la curva dibujada.</p> <p>Conversar y acordar acerca de la síntesis escrita</p>	<p>Longitud de onda asociada</p> <p>Comportamiento ondulatorio de la distribución de frecuencias.</p> <p>Constante de Planck</p>	<p>Analizando el cociente que se encuentra en el argumento de la función $P(x)$ se obtiene una función de mayor frecuencia, por lo tanto al aumentar la masa se hacen indistinguibles los máximos y mínimos de $P(x)$: al aumentar la masa no se detecta interferencia.</p> <p>La longitud de onda asociada a las bolillas es muy pequeña, por lo tanto no se detectan los máximos y mínimos.</p>	<p>Evaluación de la expresión de $P(x)$ y análisis de su forma funcional.</p> <p>Definición de longitud de onda asociada a los sistemas cuánticos y electrones y su relación con la frecuencia espacial de la curva de $P(x)$</p>	<p>Numérico</p> <p>Gráfico</p> <p>Funcional</p>	<p>Asociación de propiedades ondulatorias a la distribución de sistemas clásicos y cuánticos en la EDR: asignación de longitud de onda.</p>

Comentarios finales acerca del diseño y el análisis a priori

El diseño de las situaciones ha sido un proceso complejo, debido a la multiplicidad de decisiones que se debieron tomar, respecto a qué conceptos y principios se pueden estudiar en la escuela con el grupo de clase, qué preguntas y problemas resultarían más adecuadas para colaborar con la conceptualización, que mecanismo explicativo se propondría, que lenguaje se evitaría, qué acciones serían posibles y cuáles fundamentales. En esta fase se procuró anticipar la mayor cantidad posible de respuestas de los estudiantes, de devoluciones de la profesora a sus preguntas, y de las acciones de ambos componentes del Grupo de Clase.

Un obstáculo importante en el diseño que tuvo que ser resuelto en esta fase de la investigación, fue la necesidad de dos tipos de simulaciones: una simulación de la Experiencia de la Doble Rendija que permitiera el control de variables como tipos de proyectiles, dimensiones de las rendijas, etc. Y otro para la aplicación de la técnica STA que permitiera la visualización de los resultados del modelo matemático que permite calcular probabilidades, la técnica STA.

La simulación de la Experiencia de la Doble Rendija es muy conocida por su importancia en la Física, por lo tanto estaba disponible. Sin embargo, fue necesario analizar y decidir que variables controlar y que valores serían adoptados para colaborar a la conceptualización, que no obstaculice la comprensión. Por ejemplo, se buscó minimizar los efectos de la difracción porque no era clave en lo que se buscaba conceptualizar, o se analizó como lograr que el software muestre resultados que resalten los aspectos que se querían contrastar o corroborar.

Por otro lado, las simulaciones para visualizar los resultados de la técnica STA tuvieron que ser programadas. Se diseñó la interfaz gráfica que la simulación muestra cuando se ejecuta, y se decidió que valores favorecerían el reconocimiento de los resultados (por ejemplo, que el ángulo asociado a la función clásica resulte en el primer cuadrante, y esté expresado en el sistema sexagesimal, etc.).

Aunque el software *Modellus* funciona de forma óptima para el estudio de procesos físicos temporales, en este caso se adaptó para la simulación del modelo STA, con ciertas restricciones, y resultó una herramienta útil para los objetivos que se pretendían.

Como resultado de esta fase de diseño y análisis se obtuvo la secuencia de situaciones que se presenta en la sección siguiente. No se trata de un producto final, sino de un punto de partida sobre el cual físicos, investigadores en enseñanza de la física y profesores puedan conversar, discutir y proponer modificaciones.

La implementación en un curso de Física con características similares a las consideradas, requiere de la actuación de un(a) profesor(a) cuya formación le permita conocer y comprender los aspectos epistemológicos involucrados, y los principios didácticos sobre los cuales fueron diseñadas las situaciones.

La secuencia de situaciones para presentar a los estudiantes

Situación 1

“Los fundamentos de la mecánica cuántica: estudiando el mundo microscópico”

1) La Experiencia de la Doble Rendija (EDR)

1- Imaginemos una experiencia como la que muestra esquemáticamente la siguiente figura.

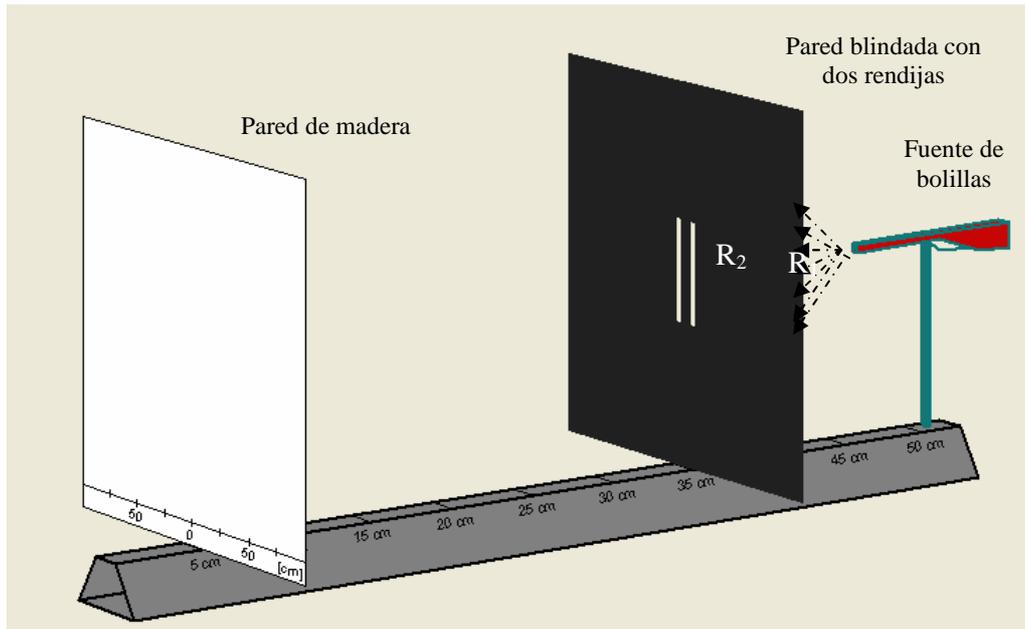


Figura 1: Esquema de la disposición experimental de la doble rendija con bolillas

En la derecha, está representada una fuente disparadora de un chorro de bolillas, que salen disparadas al azar dentro de un ángulo bastante grande porque, supongamos, la fuente disparadora no está bien sujeta, y se mueve al azar, en todas las direcciones. Por cuestiones de simplicidad vamos a hacer dos consideraciones muy importantes:

- 1- Las bolillas que salen de la fuente son indestructibles, y entonces llegan en unidades enteras a la pared de madera.
- 2- Salen disparadas de a una, a iguales intervalos de tiempo, y con la misma rapidez.

A 15 cm de la fuente, se encuentra una pared blindada con dos ranuras de tamaño tal que las bolillas pasan sin que quede trabada ninguna en la rendija. Supongamos que las rendijas tienen un ancho de 10 mm, y ambas rendijas se encuentran separadas a 10 mm también una de la otra. A la izquierda de la Figura 1 (ver la escala de la regla gris), se representa una pared de madera en la cual quedan incrustadas las bolillas que impacten en ella. Esta pared de madera tiene en su base una escala perpendicular a la regla gris, en la cual el 0 representa el centro de la pantalla, en esa dirección.

Se pone en funcionamiento la fuente disparadora durante medio minuto aproximadamente. Nuestra cuestión central es:

¿Cómo se distribuirán en la pared de madera las bolillas que impactaron en ella?

Conversa con tus compañeros acerca de las siguientes cuestiones. Escribe las respuestas a continuación de cada pregunta, en el espacio que te dejamos para eso.

1- a) ¿Cómo se distribuirán las bolillas que logren pasar por las rendijas y lleguen a la pared de madera? ¿Habrá más en algún lugar? ¿Por qué?

b) Realiza un bosquejo de lo que consideres que tendrá la pared de madera, al cabo de ese tiempo en la siguiente figura:

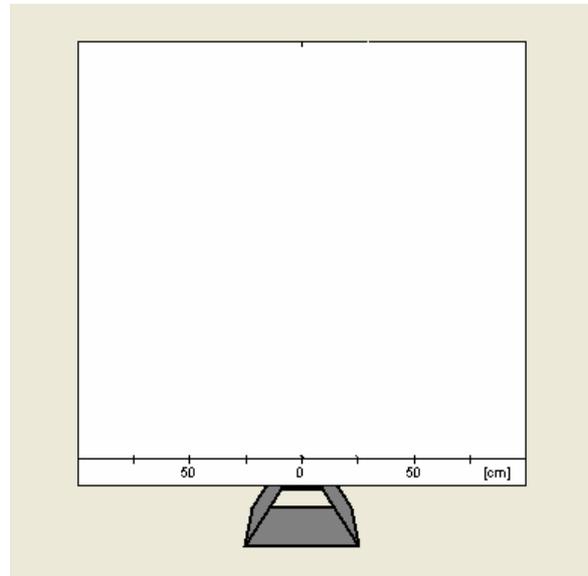


Figura 2: Distribución de las bolillas en la pared de madera

Supongamos que en ese tiempo fijo, contamos cuántas bolillas en total impactaron en la pared de madera, y llamamos a este número N . Consideremos la fracción

$$f = \frac{\text{Nº de bolillas que impactan a una distancia "x" del centro de la pared}}{N}$$

No podemos decir exactamente en que lugar de la pared incidirá una bolilla determinada: una bolilla que se dirige hacia una de las rendijas puede rebotar en el borde, y terminar en cualquier lugar.

De esta forma, al realizar la experiencia tomando distintos números de bolillas disparadas, iremos obteniendo gráficos de frecuencias relativas, según x (estos gráficos se llaman histogramas) Si disparamos muchísimas bolillas, (es decir hacemos a N infinitamente grande), en el límite esta fracción representa la "probabilidad" que una bolilla caiga a cierta distancia

del centro de la pantalla. En este caso, la gráfica tiende a una curva, que llamaremos "curva de probabilidad".

2- Ahora pensemos en una curva de probabilidad de llegada a la pared según la distancia al centro de las rendijas x . Si a cierta distancia x del centro 0 (sin que nos importe la dirección vertical en la que se encuentre) se encuentran incrustadas muchas bolillas, la probabilidad en esa x allí será alta. Por el contrario, si hay pocas bolillas, diremos que en esa x la probabilidad es baja.

a) ¿Podrías dibujar aquí de forma aproximada la curva que se obtendría?

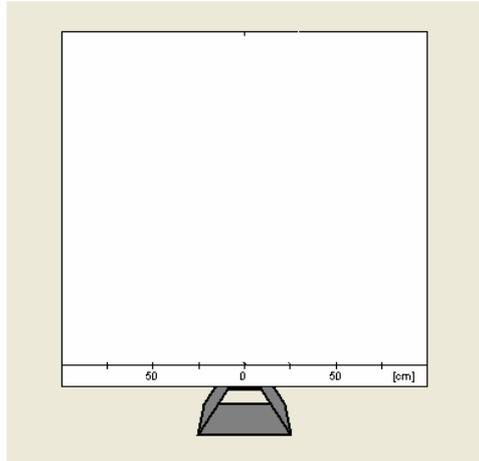


Figura 3: Curva de la probabilidad en función de x (teórica)

b) Describe aquí la forma de la curva que dibujaste en la Figura 3

3- Ahora imaginemos que en la experiencia anterior tapamos una de las rendijas y realizamos la experiencia. Luego, tapamos esa rendija y abrimos la otra. ¿Podrías dibujar en la parte izquierda de las figuras siguientes, cómo se distribuirán las bolillas en la pared de madera y en la parte derecha, cómo será la curva de probabilidad?

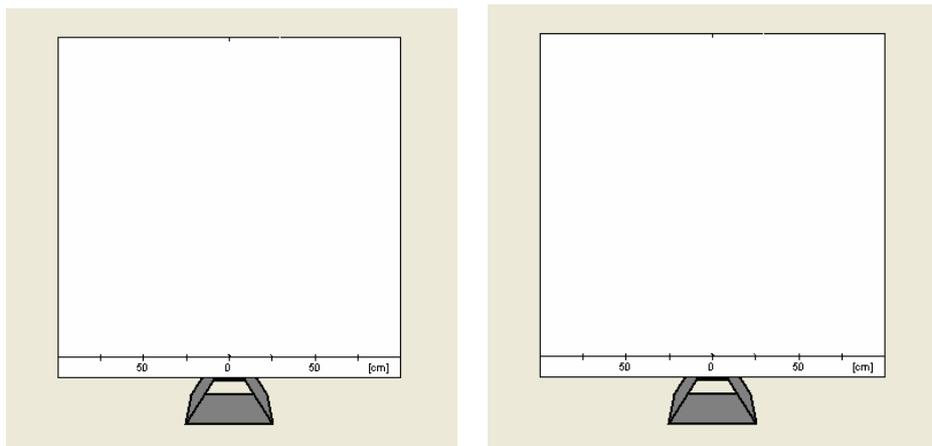


Figura 4: Bloqueando R_1 . Izquierda: Distribución de las bolillas que llegaron a la pantalla.
Derecha: Curva de probabilidad según x cuando se bloquea R_1

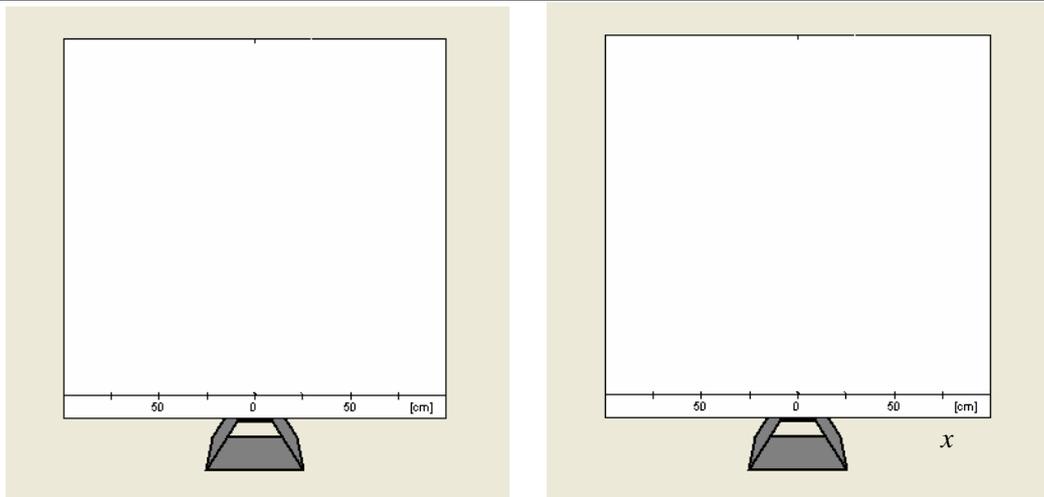


Figura 5: Bloqueando R_2 . Izquierda: Distribución de las bolillas que llegaron a la pantalla
 Derecha: Curva de probabilidad según x

4- ¿Podrías explicar el resultado de la experiencia con ambas rendijas abiertas, con relación a lo obtenido en cada una de las situaciones en donde se tapa una de las rendijas? Escribe tu respuesta aquí

Situación 2

Simulación de la EDR con software

Como es muy complicado realizar la experiencia que antes imaginamos en nuestro laboratorio, te proponemos que la simulemos con un software denominado “Doppelspaltversuch”. Aquí te explicamos lo básico para que lo puedas utilizar: Cuando lo abras, aparecerá una pantalla como la que se muestra en la siguiente figura, donde se representan importantes físicos que contribuyeron a la construcción de una teoría capaz de explicar los sucesos microscópicos. Seguramente conoces algunos.

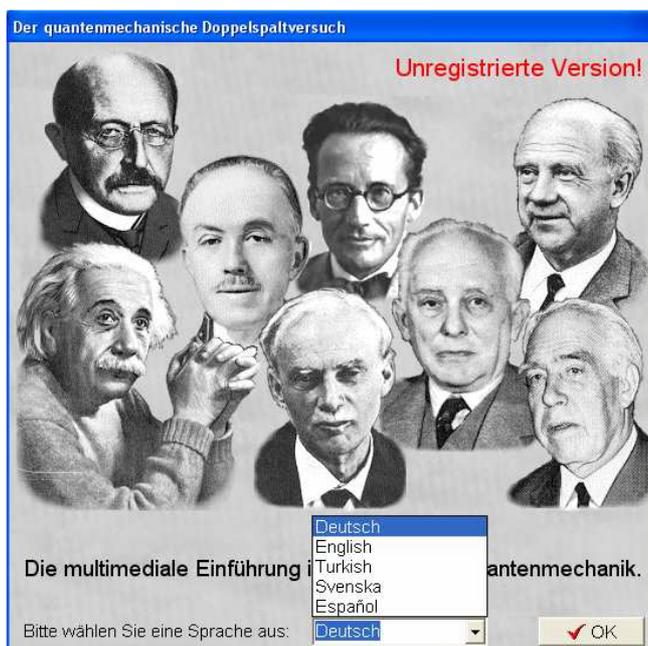


Figura 6: Pantalla de inicio del software Doppelspaltversuch

Selecciona el Idioma Español. Luego observa la botonera de la esquina derecha inferior de la pantalla que te muestra.

CONFIGURACIÓN DE LAS SIMULACIONES

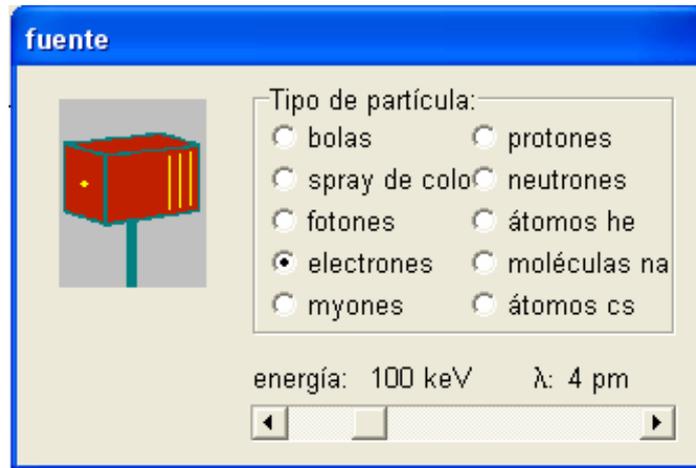
- Selección de “**DIRECCION DE VISTA**” (cuatro flechas en cruz adentro del rombo) Permite elegir desde que ángulo será mostrada la experiencia, moviendo libremente las cuatro flechas mostradas. Además, los cuatro triángulos externos del cuadrado, permiten obtener una vista desde arriba, atrás y adelante.



- Selección de “**FUENTE**”. Utilizaremos:
“**bolas**”: son las bolillas, que son siempre del mismo tamaño y salen a la misma velocidad de la fuente disparadora, en todas las direcciones.

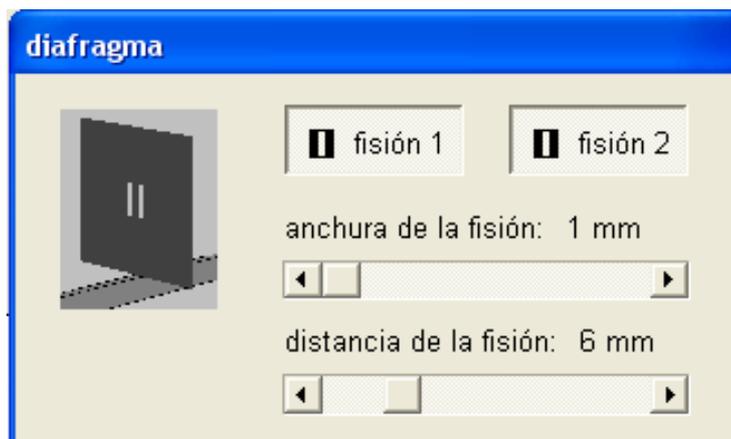
“**spray de color**”: salen disparadas en todas las direcciones, pequeñas gotitas del Aerosol

“electrones”: salen los electrones disparados de la fuente, todos con la misma velocidad. Es posible seleccionar su energía, con la barra de desplazamiento horizontal (medida en keV (kilo electrón-volts). La unidad usual para la energía que hasta ahora has estudiado es el Joule, pero en el caso del electrón, se utiliza como unidad de energía al electrón-volt (eV) ya que es una unidad más adecuada. Un e-volt equivale a 1.6×10^{-19} J.



- **Selección de “DIAFRAGMA”**

Permite seleccionar el ancho de cada rendija y con ello, la separación entre ambas rendijas:



“Fisión 1” y “Fisión 2”

Estos botones indican cuál de las rendijas se encuentra abierta. Presionando con el mouse sobre cada uno de ellos, se des-selecciona, y desaparece la rendija correspondiente.

“Anchura de la fisión”

La barra de desplazamiento horizontal permite seleccionar el ancho de las rendijas.

“Distancia de la fisión”

Mide la distancia que hay desde el centro de una rendija al centro de la otra.

Selección de **“PANTALLA”**



Aunque ninguna casilla esté seleccionada, mientras la fuente esté encendida, se muestra en la pared de madera los impactos tal cual ocurren conforme pasa el tiempo. En el centro de este cuadro, el software nos da la opción de lo que nos va a mostrar en la pantalla:

Sólo Procedimiento: muestra los impactos en la pantalla de madera, suponiendo que la experiencia se realiza con un número muy grande de impactos (35668 impactos en total es lo máximo que permite el programa)

Sólo Valoración: el software va construyendo un “histograma” a medida que llegan las bolillas a la pared. Es decir, muestra la cantidad de impactos que se van produciendo para cada distancia al centro de la pared.

Procedimiento y Valoración seleccionados simultáneamente Muestra la curva de probabilidad en función de x . Esta es la curva que modeliza la situación para el caso en el que el número de impactos en la pared sea muy grande.

Observación: mientras se corre la simulación, en el borde inferior de la pantalla se muestran los parámetros configurados para la simulación que se está ejecutando: fuente, energía, cantidad de impactos, anchura de la rendija, distancia entre las rendijas, etc.

Nuestra pregunta central es:

¿Cómo se puede explicar la forma de la curva de Probabilidad según x ?

1. Simula la experiencia seleccionando bolillas, y ambas rendijas a la vez, con un ancho de 10mm y una separación de 20mm (Esto significa que las rendijas tienen un ancho de 10mm y están separadas a 10mm una de la otra). Enciende la fuente.

a) ¿Como fueron tus predicciones con respecto a los resultados mostrados en la simulación en relación a la distribución de bolillas en la pared? Describe si coincidieron o no con lo mostrado en el software.

b) Obtén la curva de probabilidad. Para ello, debes parar la simulación, resetear desde la opción PANTALLA, y activar las casillas de procedimiento y valoración. Dibuja la curva que resulta.

2- Ahora mantén fijo el ancho de las rendijas en $a = 10\text{mm}$, pero comienza a disminuir gradualmente la distancia de separación.

- a. Describe lo que muestra la simulación en cuanto a los impactos en la pantalla
- b. Describe la forma de la curva de probabilidad en este caso
- c. ¿Cómo interpretas la forma de la curva?
- d. ¿Podrías explicar a que se debe la forma de la curva en el centro ($x = 0$)?

3- Cierra de a una las rendijas dejando los demás parámetros constantes y corre la simulación.

a) Dibuja aquí cada una de las curvas de probabilidad cuando se cierra cada rendija por separado

b) ¿Cómo podrían relacionarse la curva de probabilidad cuando están ambas rendijas abiertas con cada una de las curvas por separado?

4- ¿Los electrones son pequeñísimas bolillas de carga eléctrica? ¿Se comportarán de la misma forma que ellos?

Nuestra pregunta clave es:

¿Qué se obtiene en la EDR si se realiza con electrones?

5- Simula la experiencia de la doble rendija con electrones de 100 KeV, con un ancho de rendijas de 100nm, y una distancia entre los puntos medios de las rendijas de 300nm.

a) Describe cómo resultó la distribución de los electrones en la pantalla colectora

b) Reproduce aquí de manera aproximada como resulta la gráfica de la curva de probabilidad, y describe su forma.

c) ¿Cómo interpretas esta gráfica?

6- Abre una de las rendijas por vez, y enciende la fuente disparadora de electrones, dejando todos los anteriores parámetros iguales. (ancho 100nm, distancia 300nm, energía 100Kev)

a) Describe cómo se distribuyen los electrones en la pantalla en cada caso

b) ¿Cómo son las curvas de probabilidad en cada caso? Dibuja las dos.

c) ¿Tienen estas curvas alguna relación respecto a las curvas obtenidas con las bolillas?

d) Con los electrones, ¿se cumple que la curva de probabilidad cuando ambas rendijas están abiertas es la **suma** de cada una de las curvas de probabilidad por separado?

Situación 3

Calculando la probabilidad

Con los resultados de las simulaciones hemos llegado a la siguiente conclusión:

Los electrones llegan a la pantalla en unidades **enteras, como si fueran partículas**, pero la probabilidad de que lleguen a determinado lugar de la pantalla se distribuye de manera muy diferente a las bolillas. Es más, los electrones se comportan de una forma propia y característica.

Debido a este particular comportamiento, deberemos dejar de considerarlos como “pequeñas bolillas”, porque no se comportan como tales. Tampoco se comportan como nada que conozcamos de nuestro entorno familiar y macroscópico. Por su particular comportamiento los físicos han acordado en llamar a los electrones “**sistemas cuánticos**”, para que el nombre mismo nos recuerde que ya no podemos seguir considerándolos como partículas (como pequeñísimas bolillas).

Nuestra pregunta clave es:

¿Cómo se obtiene la curva de probabilidad de la EDR con electrones?

Para abordar esa cuestión, dejemos por un momento la experiencia de la doble rendija y consideremos una partícula de masa m libre de fuerzas, moviéndose a cierta velocidad en una sola dirección, para simplificar las cosas.

Tratemos de contestar una cuestión más básica que nuestra pregunta clave:

¿Cual es la probabilidad P de que arribe al estado final F habiendo partido del estado inicial I ?

$$P [(t_i ; x_i) \rightarrow (t_f ; x_f)]$$

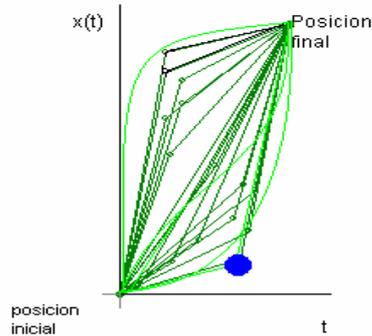
Cada “estado” queda descrito con la posición y el tiempo de la partícula. El estado inicial I está caracterizado por un **tiempo inicial**, $t_i = 0$ en una determinada **posición inicial** $x = x_i$ y el estado final F caracterizado por un **tiempo final** $t = T$ y una **posición final** $x = x_f$. Para simplificar, podemos considerar que sea en el instante $t = 0$ seg la posición $x = 0m$, lo que expresado como un par cuya primer componente es el tiempo y segunda componente es la posición, es $(0 ; 0)$.

Los físicos han desarrollado un método para explicar los resultados encontrados, proponiendo un modelo matemático que describe el comportamiento tanto de bolillas como de electrones que pasen por la doble rendija. Este método es universal, en el sentido que permite describir con el mismo modelo matemático el comportamiento de objetos macroscópicos, como microscópicos, como de sistemas cuánticos (electrones). ¡Y esto funciona para cualquier dimensión o valor de masa!

La técnica o método para calcular la probabilidad de la que estamos hablando es conocida como **Sumar Todas las Alternativas** (de ahí el nombre abreviado **STA**) y consiste los siguientes cuatro “pasos”:

Técnica STA para calcular probabilidades

1- Considerar que no hay una única, sino múltiples formas de conectar el estado inicial I con el final F, -con diversas $x(t)$ – todas igualmente posibles



Luego, cada $x(t)$ posible, tiene asociado un valor numérico llamado acción, representado por “S”, relacionado con la energía cinética promedio (de movimiento) y potencial promedio (de la posición respecto de otros cuerpos con los que interactúa).

$$S = (EC - EP) * tiempo$$

Si la partícula está “libre” es decir no está en presencia de fuerzas, consideramos que tiene energía potencial nula. Entonces, directamente la acción en este caso es:

$$S = Ec * t$$

$$S = \frac{1}{2} m * v^2 * t$$

2- Con dicha acción S se construye un **vector** en el plano llamado “**Amplitud de probabilidad**” que tiene **módulo uno** y **ángulo** de medida S / \hbar (con respecto al eje x positivo). El denominador de este cociente es el valor de $\hbar = h / 2 \pi$, donde $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J.s se denomina constante de Planck, constante **fundamental** para la física

Es decir:

Cada $x(t)$ tiene un valor de S

 con esta S se construye un vector

Vector Amplitud asociado a cada $x(t) = (\cos S / \hbar ; \sen S / \hbar)$:

3- Se suman **todos** los vectores asociados a las diferentes funciones que conectan ambos estados inicial y final. Llamamos a este vector suma “Amplitud de probabilidad total”

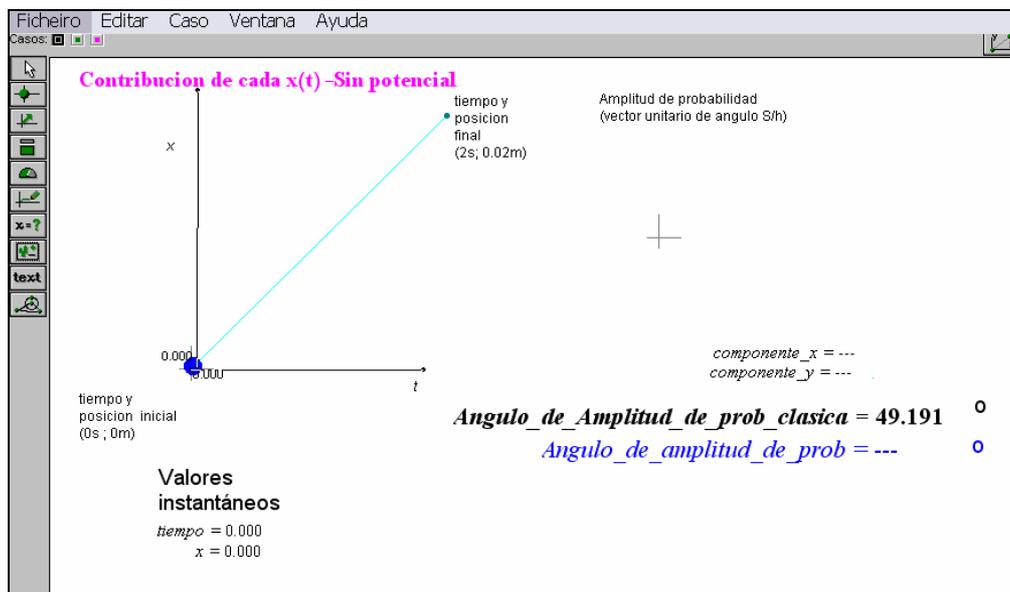
$$\text{Amplitud de probabilidad total} = \underbrace{\text{Suma de todos los vectores asociados}}_{(\cos S / \hbar ; \sen S / \hbar)}$$

4- Se calcula el **MÓDULO** de la amplitud de probabilidad total (o sea el vector resultante de la suma) y se eleva al cuadrado. De esta forma, el resultado es la probabilidad de arribar al estado final F, habiendo partido del estado inicial I

Utilización del software de simulación “Modellus™”

Modellus™ es un software que permite simular un fenómeno físico a partir de su modelo matemático. Las simulaciones que creamos para este trabajo, se desarrollan en un entorno atemporal, ya que no tienen como variable independiente al tiempo, sino que lo que el software mostrará dependerá de las decisiones que tomemos, las cuales modifican los resultados mostrados. Esto significa que la simulación no es mostrada conforme pasa el tiempo en el cual el evento ocurre, sino muestra la evolución del evento para un tiempo fijo.

Abre el archivo “**Simulación 1**”. Aparecerá una pantalla como la que se muestra en la siguiente figura:



Acerca de la simulación:

- El círculo azul puede representar un electrón o una partícula de masa mayor que él (según elijamos) que se encuentra libre. Una vez que actives el control, (presionando el botón ► del cuadro de Control), cuando pases el cursor por arriba del pequeño círculo azul, te habilitará para que lo puedas deslizar en cualquier dirección, y de esta forma podrás visualizar como cambia la función posición- tiempo. También el programa deja el dibujo de algunas de las funciones seleccionadas.
- El programa viene configurado de tal forma que el estado inicial está caracterizado por $t = 0$ en $x = 0$ y el estado final es 0.02 m en el tiempo 2 seg . (o sea una partícula que recorre 2 cm . en 2 segundos).
- La función $x(t)$ que está dibujada al inicio conectando el estado inicial con el final, es una línea recta. Ella correspondería al movimiento del electrón si éste **tuviera** un comportamiento macroscópico, como si fuera una bolilla. En física comúnmente se llama a esta función “clásica” y se representa por $x_{clas}(t)$.

En la parte de la derecha el software muestra cada vector amplitud de probabilidad (vector unitario de ángulo S/\hbar) correspondiente a la función $x(t)$ que se elija.

1- Antes de correr la simulación contesta las siguientes preguntas:

a- ¿Qué significa que la función que conecta el estado inicial con el final sea una línea recta en términos del tipo de movimiento que realiza la partícula?

b- El programa muestra el ángulo del vector amplitud de probabilidad asociado a $x_{clas}(t)$. ¿Cómo se obtiene este valor? Realiza el cálculo aquí. (Recuerda que primero debes hallar el valor de la acción $S = \frac{1}{2} m v^2 * t$, donde v es la rapidez, o sea distancia sobre el tiempo. La masa del electrón es $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Luego, no olvides dividir por la constante de Planck \hbar)

2- Abre el archivo “Simulación 1” y activa el control del tiempo. Mueve el círculo azul para elegir distintas funciones $x(t)$ posibles que ligen al estado inicial con el final (son funciones compuestas por dos trozos de funciones lineales)

a) Compara el valor de la acción de cada una de las distintas $x(t)$ que el programa te va mostrando, con respecto a la acción de $x_{clas}(t)$ que calculaste en la actividad anterior (1-b). ¿Qué puedes concluir?

b) ¿Cómo son las direcciones de los vectores asociados a cada $x(t)$ cercanas a la $x_{clas}(t)$ respecto a la dirección del vector asociado a $x_{clas}(t)$? ¿Y las direcciones de los vectores asociados a aquellas funciones alejadas de $x_{clas}(t)$?

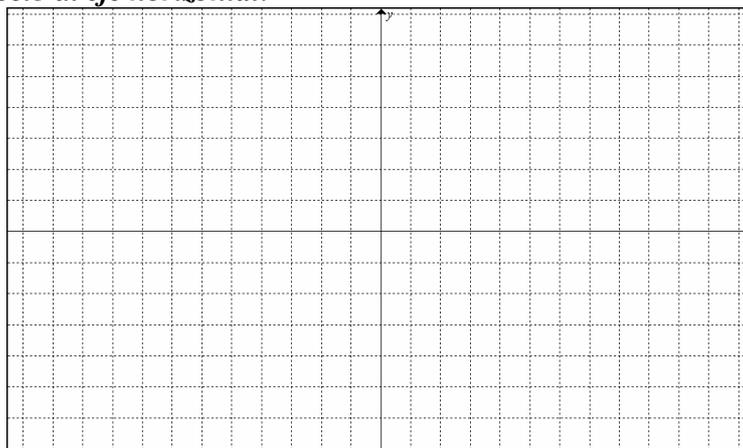
3- Este software nos permite ejecutar la técnica STA hasta el paso 3, donde nos encontramos con el problema de tener que sumar TODOS los vectores de amplitud según nos indica la técnica STA. Pero ¿Cómo es posible considerar TODAS las $x(t)$?

Para poder pensar sobre esto, a continuación te presentamos una tabla que refleja valores surgidos durante la simulación. En ella se muestran los valores de t , y de $x(t)$ correspondientes a la posición del círculo azul.

También se muestra el vector **amplitud asociado a cada una**, y en la última columna se muestra **el ángulo** de dicho vector (recuerda que éste corresponde al valor S/\hbar). Este ángulo es respecto del eje x .

Tiempo (s.)	$x(t)$ (m)	Ángulo del vector amplitud de probabilidad asociado (en grados)
0.38	0.011	90
0.243	0.011	140
0.279	0.019	230
0.303	0.018	270
0.018	0.015	320
0.126	0.02	50
0.486	0.03	51
1.296	0.01	53
1	0.01	49.5° (corresponde a $x(t)$ clásica)
0.882	0.011	52
1.775	0.002	320
1.746	0.003	270
1.854	0.006	230
1.422	0.002	140
1.03	0.001	90

a) Dibuja de forma aproximada los vectores en el siguiente plano como usualmente lo haces en matemática, colocando uno a continuación del otro. Considera que el módulo (longitud) debe ser uno, en la escala que elijas, y que el ángulo de la última columna es el ángulo del vector con respecto al eje horizontal.



b) ¿Qué puedes concluir acerca de lo que sucede con la contribución a la suma de los vectores correspondientes a las $x(t)$ alejadas de la $x_{clas}(t)$?

4- Analicemos ahora el efecto del aumento de la masa en los cálculos de la probabilidad. Selecciona el segundo “caso” en la simulación, que corresponde al caso de una partícula de masa **mil veces mayor** que la del electrón. Corre la simulación y observa las direcciones de $x(t)$ cercanas y lejanas de $x(t)$. Luego, selecciona el tercer “caso”, que corresponde a una partícula de masa **diez mil veces mayor** que el electrón.

a) ¿Qué sucede con la dirección de los vectores cuando las $x(t)$ se alejan de la $x_{clas}(t)$?

b) ¿Qué ocurrirá entonces con la suma de los vectores?

c) ¿De que forma afecta esto el cálculo de $P(x)$?

d) Escribe alguna conclusión acerca de los resultados que predice la STA para valores de masa muy grandes (partículas u objetos de dimensiones mucho mayores a las del electrón)

Síntesis: El Principio fundamental de la mecánica cuántica

Estudiamos que la técnica o método para calcular la probabilidad de pasar de un estado inicial I a uno final F , sean sistemas cuánticos o partículas de masa mayor consiste en:

Considerar **todas** las **alternativas** en que eso puede suceder. A cada una de ellas, hay que asociarle un **vector** llamado “**Amplitud de probabilidad**”. Luego se deben **sumar todos** los vectores, y la probabilidad es el resultado de **eleva al cuadrado el módulo** de este vector suma.

Algunas aplicaciones de este principio fundamental a casos “particulares”

A) **PARTÍCULA MACROSCÓPICA LIBRE** como bolillas o cualquier objeto macroscópico que sigamos considerando “libre” (lejos de otros objetos que le ejerzan fuerzas)

Aplicando la técnica STA, al considerar los caminos levemente alejados del “camino clásico” $x_{clas}(t)$, los vectores amplitud asociados tendrán valores de acción muy distintos, y por lo tanto ángulos muy diferentes entre sí. Como consecuencia, se cancelarán al sumarlos. Solamente el vector amplitud asociado a $x_{clas}(t)$ contribuirá a la suma.

Entonces la suma de todos los vectores asociados se reduce a un UNICO vector, el correspondiente a aquella $x(t)$ cuyo valor de acción S es **Mínimo**, que hemos llamado $x_{clas}(t)$.

Interpretamos esto de la siguiente forma: el movimiento de una partícula de **masa macroscópica libre** que pasa de un estado inicial $(t_i; x_i)$ a otro final $(t_f; x_f)$ queda descrito por un movimiento rectilíneo uniforme. Por lo tanto, conociendo la función $x(t)$ que describe un movimiento, si queremos saber en que lugar se encuentra una partícula en determinado tiempo, simplemente evaluamos la función. Por ejemplo, en nuestra simulación, la función es $x(t) = 0.02 t$. Así, en el tiempo $t = 1$ s, una partícula libre sabremos que estará en la posición $x = 0.02$ m.

No es de extrañar que obtengamos esto con la técnica STA, después de todo coincide con lo que ya sabemos de la física de años anteriores: “Si no se ejercen fuerzas sobre un cuerpo su velocidad se mantiene constante” (Primera Ley de Newton). Es decir, **para objetos macroscópicos las leyes de la física cuántica dan los mismos resultados que los de la física clásica**

La Física que habíamos estudiado hasta ahora es la mecánica de Newton, que pasó a llamarse Física Clásica, para poder diferenciarla de esta nueva física, que rige el comportamiento del mundo microscópico, la Física cuántica.

¿Qué sucede a medida que nos vamos adentrando en el mundo microscópico a nivel atómico, donde el valor de la masa es muy pequeño?

B) **SISTEMAS CUÁNTICOS LIBRES** como el electrón aislado

Aplicando la técnica STA, como en el caso anterior, los vectores asociados a las $x(t)$ que estén lejos de la $x_{clas}(t)$ tienen ángulos muy distintos entre sí y entonces se anulan (y por lo

tanto no cuentan en la suma). Pero, a diferencia de las partículas macroscópicas, hay un conjunto de caminos $x(t)$ alrededor del camino clásico $x_{clas}(t)$ cuyos valores de acción (y por lo tanto de ángulos del vector asociado a cada una) no son muy diferentes que el vector del camino clásico, y entonces, estos sí aportan a la suma, y por lo tanto deben considerarse.

El vector resultante de la suma entonces, es un número de veces –llamémoslo N - la amplitud correspondiente a $x_{clas}(t)$:

$$\text{Amplitud total } (\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{F}) = N \cdot (\cos (S_{cl}/\hbar) ; \text{sen } (S_{cl}/\hbar))$$

El valor de N “contabiliza” ese conjunto de caminos que hay que considerar cercanas al camino clásico.

Recordemos que S_{cl} es el valor de la acción para la $x_{clas}(t)$:

$$S = E_{C_{media}} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot m_e v^2 \cdot t$$

Entonces la expresión de la amplitud de probabilidad total queda:

$$\text{Amplitud total } (\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{F}) = N \cdot (\cos (\frac{1}{2} \cdot \frac{m_e v^2 t}{\hbar}) ; \text{sen } (\frac{1}{2} \cdot \frac{m_e v^2 t}{\hbar}))$$

Es decir, en el cálculo de la amplitud de probabilidad total hay que considerar no sólo el camino clásico sino todo un conjunto de caminos cercanos alrededor de él. Como en el dominio atómico como no hay una función $x(t)$ definida que describa el movimiento del electrón, no podremos preguntarnos dónde estará en determinado tiempo, deberemos contentarnos con conocer la probabilidad de encontrarlo en ese lugar.

¿Percibes qué diferente se comporta un electrón respecto de los objetos de nuestro mundo macroscópico?

Resumiendo:

En general los caminos muy alejados se cancelan entre sí.

"Alrededor" del camino clásico el cambio de fase es mínimo y ahí no hay cancelación, sino por el contrario aportan aproximadamente con el mismo ángulo.

Cuánto **"alrededor"** es el aporte a la suma lo dicta la masa de la partícula o sistema del que se trate. Para un objeto macroscópico **"alrededor"** es tan cerca del camino clásico que es prácticamente indistinguible de él. A medida que la masa se va haciendo más pequeña **"alrededor"** va significando regiones cada vez más alejadas del camino clásico.

C) SISTEMAS CUÁNTICOS NO LIBRES como por ejemplo, el caso de un electrón en un átomo, que sienta la fuerza que ejercen los protones del núcleo atómico y los demás electrones.

Aplicando la técnica STA en general todos los caminos deben considerarse en la suma. En este caso, el cálculo es muy complicado y los físicos recurren a métodos complejos que no podemos estudiar ahora.

Situación 4

Reconstruyendo el diagrama de la EDR con electrones

Ahora volvamos a nuestra experiencia de las rendijas con electrones. Recordemos cómo era la curva de probabilidad que obtuvimos cuando utilizamos electrones:

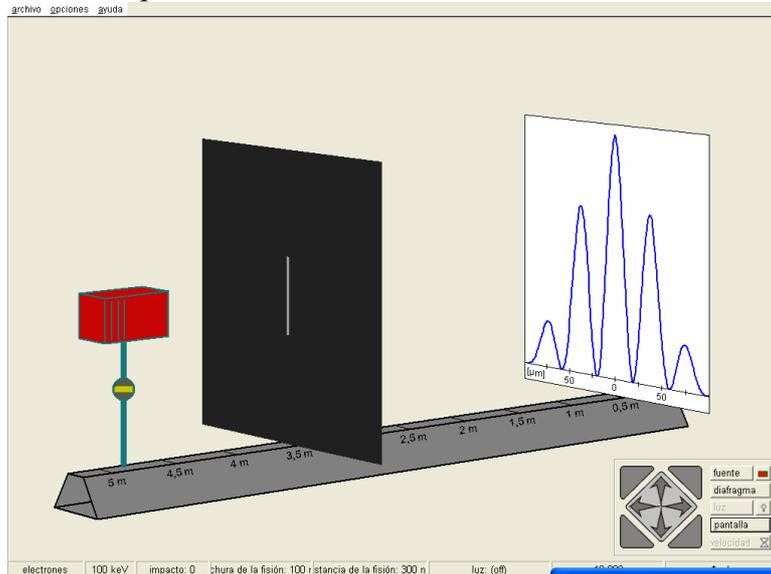


Figura 1: Resultado experimental de la EDR con electrones

Ahora apliquemos la STA que antes estudiamos para el caso de un electrón libre, moviéndose en una sola dirección, con el software Modellus. Ahora nuestro objetivo es reconstruir el diagrama obtenido en la pantalla, y la curva de probabilidad $P(x)$. Este es un esquema de la experiencia, vista lateralmente:

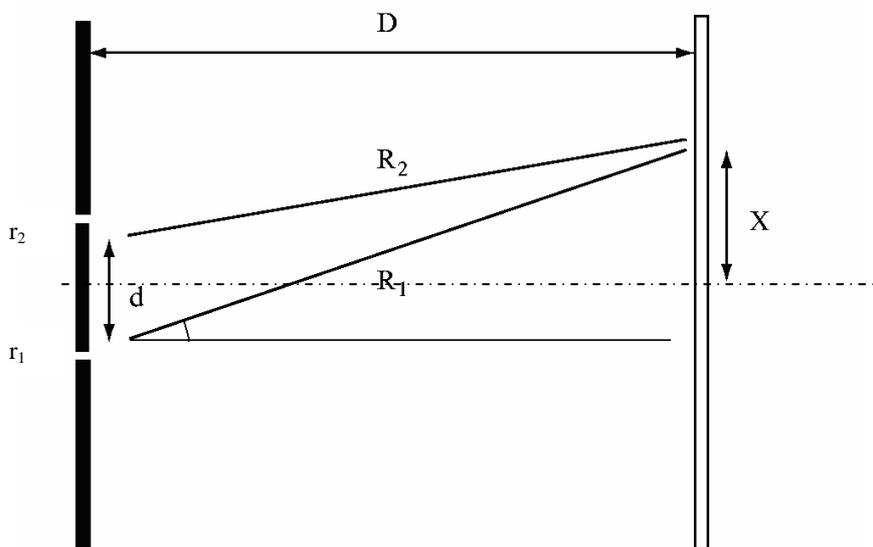


Figura 2: Ilustración esquemática de la EDR

Con r_1 y r_2 representamos las rendijas inferior y superior respectivamente. Aquí el instante y la posición inicial serán cuando los electrones están aún en la fuente disparadora, y el tiempo y la posición final serán cuando el electrón llega a la pared colectora.

Nuestra pregunta clave aquí es:

¿Cual es la probabilidad que el electrón arribe a cierta distancia x del centro de la pantalla?

Hasta que el electrón que llega al punto x puede considerarse “libre” en el sentido que su energía potencial es cero. Por lo tanto lo único que contribuye al valor de acción es su energía cinética. Esto hace posible que podamos aplicar los resultados que encontramos antes. Por lo tanto, el vector asociado a cada una de las trayectorias R_1 y R_2 que pudo haber seguido el electrón para llegar a la pantalla a cierta distancia x tiene componentes:

$$\vec{\text{Amplitud}}(r_1 \rightarrow x) = (N \cos (S_{cl}[r_1 \rightarrow x] / \hbar) ; N \sen (S_{cl}[r_1 \rightarrow x] / \hbar))$$

Análogamente para la otra rendija:

$$\vec{\text{Amplitud}}(r_2 \rightarrow x) = (N \cos (S_{cl}[r_2 \rightarrow x] / \hbar) ; N \sen (S_{cl}[r_2 \rightarrow x] / \hbar))$$

De acuerdo a los principios de la mecánica cuántica, la Amplitud total de arribar a la pantalla a cierta distancia x del centro de la pantalla, que notaremos con $A_{total}(x)$, es la suma de arribar a esa x pasando por una u otra rendija, es decir

$$\begin{aligned} \vec{A}_{total}(x) &\sim \vec{\text{Amplitud}}(r_1 \rightarrow x) + \vec{\text{Amplitud}}(r_2 \rightarrow x) \\ &\sim (N \cos (S_{cl}[r_1 \rightarrow x] / \hbar) ; N \sen (S_{cl}[r_1 \rightarrow x] / \hbar)) \\ &\quad + \\ &\quad (N \cos (S_{cl}[r_2 \rightarrow x] / \hbar) ; N \sen (S_{cl}[r_2 \rightarrow x] / \hbar)) \end{aligned}$$

Ahora bien, la acción clásica es $S = EC_{media} * T$. Aquí T es el tiempo empleado para el viaje de los electrones, entre ambas pantallas. En este caso,

$$S_{cl}[r_1 \rightarrow x] = \frac{1}{2} m \frac{(R_1)^2}{(T)}, \text{ y según el esquema de la figura 2, } (R_1)^2 = (x + d/2)^2 + D^2$$

$$S_{cl}[r_2 \rightarrow x] = \frac{1}{2} m \frac{(R_2)^2}{(T)}, \text{ y según el esquema de la figura 2, } (R_2)^2 = (x - d/2)^2 + D^2$$

Sigamos el procedimiento de STA para encontrar una expresión para la probabilidad (recordemos que eran cuatro “pasos” hasta llegar a la probabilidad)

I) Sumemos ambos vectores, (uno para cada amplitud) componente a componente:

$$\vec{A}_{total}(x) \sim [N \cos(\frac{S_{clas}[r_1 \rightarrow x]}{\hbar}) + N \cos(\frac{S_{clas}[r_2 \rightarrow x]}{\hbar}) ; N \sen(\frac{S_{clas}[r_1 \rightarrow x]}{\hbar}) + N \sen(\frac{S_{clas}[r_2 \rightarrow x]}{\hbar})]$$

Reemplazando $S_{cl}[r_1 \rightarrow x] = \frac{1}{2} m \frac{(R_1)^2}{(T)}$ y $S_{cl}[r_2 \rightarrow x] = \frac{1}{2} m \frac{(R_2)^2}{(T)}$, y sacando N de factor común, la expresión anterior queda

$$\longrightarrow A_{total}(x) \sim N \left(\underbrace{\cos \left[\frac{mR_1^2}{2\hbar T} \right]} + \underbrace{\cos \left[\frac{mR_2^2}{2\hbar T} \right]} ; \underbrace{\sin \left[\frac{mR_1^2}{2\hbar T} \right]} + \underbrace{\sin \left[\frac{mR_2^2}{2\hbar T} \right]} \right)$$

Por cuestiones de simplicidad, por ahora llamemos a los argumentos de las funciones trigonométricas:

$$a = \frac{mR_1^2}{2\hbar T} \quad \text{y} \quad b = \frac{mR_2^2}{2\hbar T} \quad (*)$$

Es decir, tenemos que la expresión de la amplitud total es

$$\longrightarrow A_{total}(x) \sim N \left(\cos [a] + \cos [b] ; \sin [a] + \sin [b] \right)$$

Esta expresión puede resolverse utilizando las relaciones trigonométricas:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) * \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) * \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

Entonces queda

$$\longrightarrow A_{total}(x) \sim N \left(2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) * \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) ; 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) * \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) \right)$$

II) La técnica indica que ahora calculemos el módulo del vector resultante y luego elevemos al cuadrado. Matemáticamente esto equivale a la suma de los cuadrados de los componentes, directamente:

$$\longrightarrow |A_{total}(x)|^2 \sim 4 \cos^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) * \cos^2 \left(\frac{a-b}{2} \right) + 4 \sin^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) * \cos^2 \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

Si sacamos factor común $4 \cos^2 \left(\frac{a-b}{2} \right) :$

$$\underbrace{|A_{total}(x)|^2}_{\sim} \sim 4 \cos^2 \left(\frac{a-b}{2} \right) \cdot \underbrace{\left[\cos^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) \right]}_{= 1 \text{ (identidad trigonométrica)}}$$

Como $P(x) \sim |A_{total}(x)|^2$ llegamos a que $P(x) \sim 4 \cos^2 \left(\frac{a-b}{2} \right)$

Y volviendo a los valores de a y b que habíamos reemplazado (*) para facilitar los cálculos:

$$P(x) \sim 4 \cos^2 \left[\frac{mR_1^2}{2\hbar T} - \frac{mR_2^2}{2\hbar T} \right] \quad \text{ó} \quad P(x) \sim 4 \cos^2 \left(\frac{m(R_1^2 - R_2^2)}{4\hbar T} \right)$$

Por último, de la disposición experimental habíamos dicho en la página 20 que:

$$(R_1)^2 = (x + d/2)^2 + D^2 \quad \text{y} \quad (R_2)^2 = (x - d/2)^2 + D^2$$

Restando ambos, se obtiene que $(R_1^2 - R_2^2) = 2 dx$

Así llegamos a la expresión de la probabilidad de que un electrón impacte a una distancia x del centro de la pantalla colectora:

$$P(x) \sim 4 \cos^2 \left(\frac{m 2 d}{4 \hbar T} x \right) \sim 4 \cos^2 \left(\frac{m d}{2 \hbar T} x \right)$$

1- a) ¿Qué tipo de función matemática se obtiene? ¿Puede ésta tomar valores negativos? ¿Por qué?

b) ¿Qué característica de esta función permite explicar el diagrama de máximos y mínimos que se obtiene en la EDR con electrones?

c) ¿Qué valores dependen del diseño experimental?

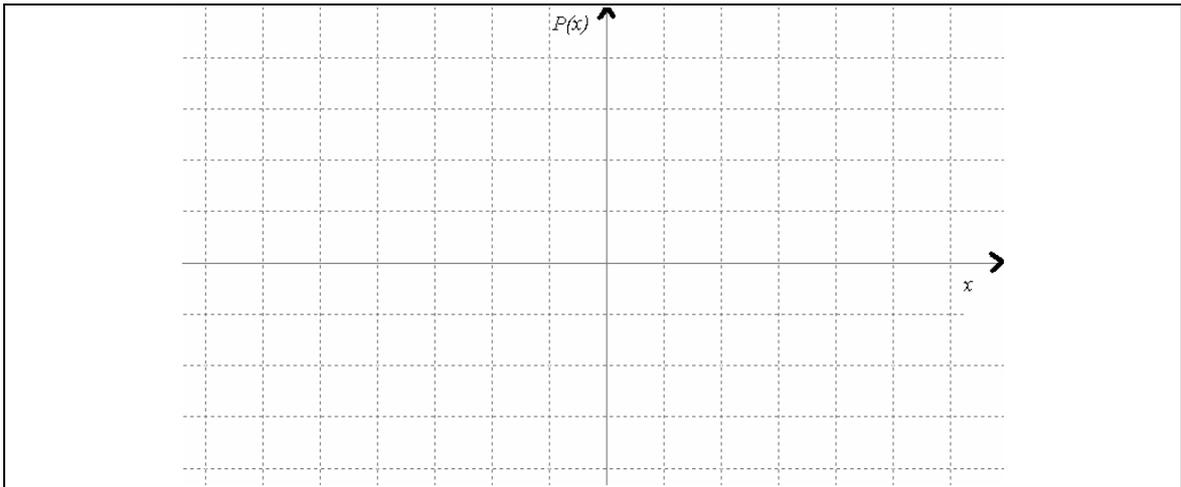
d) Entonces, dejando fijos los parámetros relacionados con el diseño experimental, de qué depende la probabilidad?

2- a) ¿Cómo es la expresión de $P(x)$ si se consideran como parámetros experimentales $d = 10^{-7} \text{ m}$, masa del electrón $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, y un intervalo de tiempo $T = 5 \times 10^{-9} \text{ seg.}$?

b) Evalúa la expresión recién hallada para cada una de las siguientes distancias al centro de la pantalla, para obtener los diferentes valores de encontrar al electrón en cada una de ellas:

$x \text{ [m]}$	-0.0052	-0.0041	-0.0031	-0.0020	-0.0010	0	0.0010	0.0020	0.0031	0.0041	0.0052
$P(x)$											

c) De acuerdo a los valores recién calculados, y considerando que la expresión de $P(x)$ es la expresión matemática de una función periódica, dibuja aquí un diagrama aproximado de la curva de $P(x)$.



d) *¿Qué puedes concluir acerca de lo obtenido aplicando la STA de la Mecánica Cuántica respecto de lo que obtuvimos cuando simulamos la EDR con electrones en el software Dopplespalt?*

Situación 5

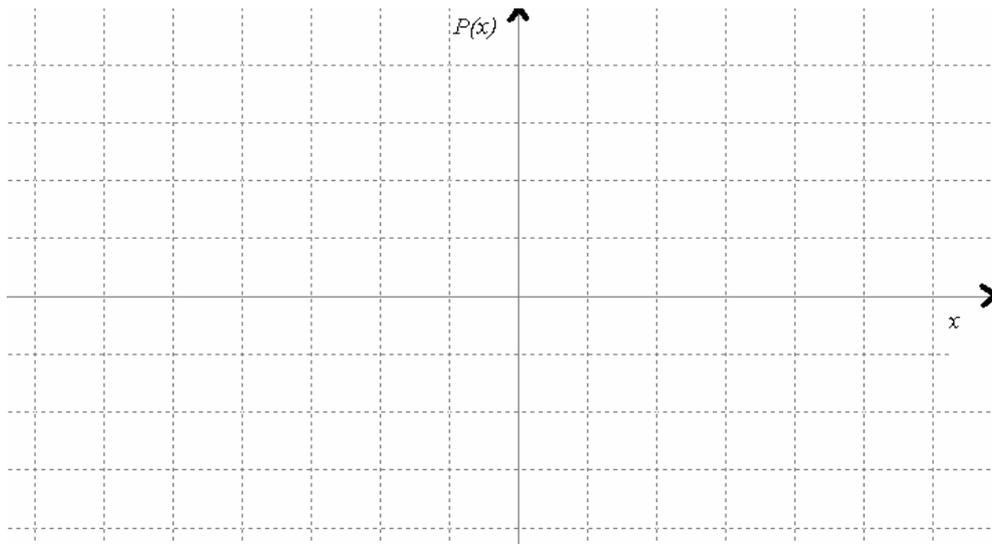
Queda ahora una cuestión muy importante por resolver:

Si la técnica STA de la Mecánica Cuántica es aplicable a todos los sistemas, sean microscópicos (como el electrón) o macroscópicos (como las bolillas) ¿Por qué cuando simulamos la EDR con bolillas la curva de probabilidad $P(x)$ no presentaba máximos y mínimos?

3- Para estudiar de que forma influye el aumento de la masa en el cálculo de la probabilidad en función de x , debemos analizar el cociente que se encuentra en el argumento de la función $P(x)$ hallada en el ítem 2 a).

a) Hagamos que m tome el valor de 2000 veces la masa de un electrón (esto es aproximadamente la masa de un protón) y evalúa la función $P(x)$ obtenida en 1) ¿Cómo es la expresión de $P(x)$ ahora?

b) ¿Cuál será el efecto en la gráfica de $P(x)$ si dejamos la misma escala que antes? Intenta graficar de forma muy aproximada a la nueva $P(x)$



c) Como consecuencia de la forma de la curva de $P(x)$ ¿Cómo se distribuirán estas partículas -cuya masa es mayor que la de los electrones- en la pantalla colectora de la EDR?

Síntesis: El comportamiento de los electrones en la Experiencia de la doble rendija

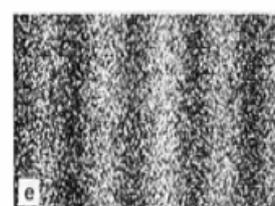
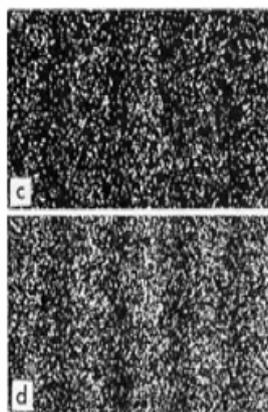
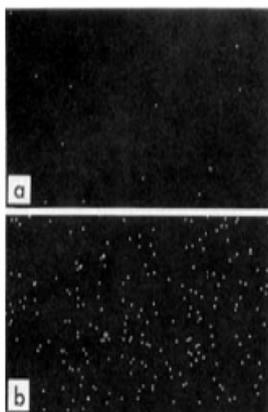
Hemos llegado a nuestro problema original: explicar cómo es posible que si los electrones llegan de a uno a la pantalla, (como si fueran “pequeñísimas” bolillas), se forma una distribución en la cual en ciertos lugares hay muchos y en otro ninguno.

Las dos rendijas hacen que cada electrón tenga dos formas o caminos alternativos de llegar a la pantalla. Según el Principio Fundamental de la Mecánica Cuántica, cada uno de estas alternativas contribuye con una cierta “**amplitud a la probabilidad**”, representada por un **vector**.

Para obtener la probabilidad de encontrar al electrón a determinada distancia del centro de la pantalla, se deben **sumar** las dos amplitudes, esto es sumar los dos vectores. Como se trata de sumar vectores puede ocurrir que en ciertos lugares la suma sea nula, y en otros sea máxima. Esto es, puede ocurrir que las amplitudes se cancelen o se refuercen, dando de esta forma una probabilidad cero o una probabilidad máxima.

Luego de haber obtenido la suma de amplitudes, siguiendo la técnica STA, se debe tomar el cuadrado del módulo del vector amplitud total (la suma de los vectores), para obtener la curva de probabilidad. En este caso se encontró una función periódica (coseno) que tiene máximos y mínimos. Eligiendo una posición cualquiera del centro de la pantalla, -un determinado x - esta expresión da la probabilidad de que allí impacte un electrón. Esto explica que la simulación de la experiencia muestre en la pantalla colectora ciertos lugares que no tiene ningún electrón, porque allí la probabilidad es nula, mientras que en otros lugares de la pantalla había muchísimos, donde la probabilidad es máxima. Llamamos a esta sucesión de máximos y mínimos en la pantalla colectora, “**patrón de interferencia**”.

Aquí se presenta una serie de fotografías que muestran cómo se va formando el patrón de Interferencia de los electrones, a medida que van llegando a la pantalla, conforme transcurre el tiempo. Esta experiencia que se simuló en este estudio, se hizo por primera vez en un laboratorio real hace apenas 33 años.



Franjas de interferencia producidas por electrones en el experimento de Tonomura, dependiendo del tiempo de exposición.

Situación 6

4- a) Ejecuta la **Simulación 2**, con el software Modellus, y transcribe el esquema de la experiencia

a) ¿Qué relación tiene la curva que se va dibujando con el vector suma (rojo)?

b) Ejecuta la simulación para todos los “casos”. Transcribe las distintas curvas obtenidas. ¿Cómo son los resultados respecto de lo que concluiste en el ítem 3 c)?

El hecho que los electrones llegaran de a uno a la pantalla pero que vayan armando un patrón de interferencia, causó un gran desconcierto entre los físicos que estaban gestando la Mecánica cuántica a comienzos del siglo pasado. No era lógico que los electrones - considerados como pequeñísimas partículas materiales- mostraran un comportamiento que era típico de las ondas, como la interferencia. En el Anexo (página 29) te ofrecemos una pequeña síntesis para repasar el comportamiento de las ondas.

*Se tuvo que aceptar que **para describir** el comportamiento de los electrones se los debía considerar “**como si**” fueran **ONDAS**, y asignarles una longitud de onda λ .*

Llamaron “Longitud de onda asociada al electrón” al cociente

$$\lambda = \frac{h}{\text{masa} \cdot \text{rapidez}}$$

1- ¿Cuál es la longitud de onda para un electrón que tenga una rapidez de 10^{-7} m/seg.?

De esta forma, se llegó a una importante conclusión, que cambió la forma de explicar los resultados obtenidos en las experiencias: no sólo los sistemas cuánticos (electrones por ejemplo) sino todas las partículas tenían asociada una longitud de onda que dependía de su masa y de su velocidad.

2- Si ahora se trata de una partícula de masa de 5 g ($5 \cdot 10^{-3}$ kg) con la misma rapidez que en el inciso 1) ¿cuál es la longitud de onda asociada?

Síntesis final

Toda la materia tiene un comportamiento ondulatorio

Si se trata de electrones, los resultados corroboran la conclusión, porque se vio en la simulación como se forma el patrón de interferencia, pero...

¿Por qué con las bolillas no se observa interferencia?

Para contestar esta pregunta, tendremos que relacionar la longitud de onda asociada λ con la forma de la curva de $P(x)$:

Para los electrones, debido a la **pequeñez de la masa del electrón y la pequeñez de la constante de Planck**, la longitud de onda que se obtiene al hacer el cociente resulta suficientemente grande como para que se forme un patrón de interferencia, y se puedan diferenciar los máximos y los mínimos de la curva de $P(x)$. Es decir, se pueden detectar lugares donde hay muchos electrones y otras zonas de la pantalla que no habrá ninguno.

En cambio, para partículas de **masa mayor**, como las bolillas, **el cociente entre la masa y la constante de Planck es extremadamente pequeño, debido a la pequeñez de h** . Por lo tanto la longitud de onda asociada es demasiado pequeña, y la curva $P(x)$ tiene los máximos y mínimos demasiado “apretados”, al punto de no poder distinguirlos: lo que se observa en la pantalla es una curva promedio, que es la curva clásica, que “copia” la forma de la rendija. Tiene un máximo central y luego decrece suavemente hacia los costados.

Para ayudarte a entender esto, te presentamos en la figura siguiente, esquemáticamente lo que sucede con los objetos en gran escala.

La parte (a) muestra la curva $P(x)$ que se obtendría en teoría para las bolillas. Las oscilaciones tan rápidas de la curva se deben a la longitud de onda extremadamente pequeña que tienen asociadas las partículas de masa grande.

Experimentalmente, como cualquier detector físico abarca varias oscilaciones de la curva de probabilidad, las medidas nos dan la curva suave dibujada en la parte (b) de la figura siguiente. Es la curva que nos mostraba la simulación con bolillas.

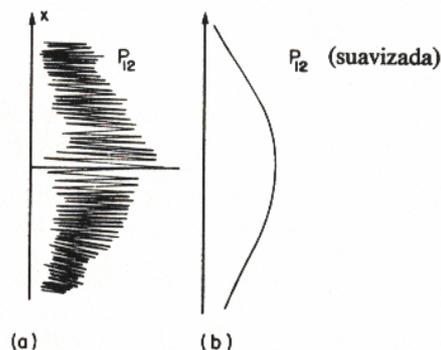


Diagrama de interferencia con bolillas, realizando la EDR.

(a) Esquema de $P(x)$ predicho por la mecánica cuántica (b) Diagrama observado experimentalmente

Conclusión final

Si bien con la Mecánica Clásica, que dominó la Física hasta el siglo XX, se logró una muy buena descripción de la naturaleza a gran escala como por ejemplo el movimiento de los

planetas, con las leyes de la mecánica cuántica recién se pudo describir lo que ocurre en el dominio atómico, y lo que se obtuvo es que en el micromundo las cosas ocurren de forma **muy diferente** de como ocurren con las cosas del mundo macroscópico, es decir con objetos grandes.

¿Grande o pequeño respecto a qué? La constante fundamental en la naturaleza que **fija el tamaño en el que el comportamiento cuántico se hace evidente en las experiencias físicas, es la CONSTANTE DE PLANCK, $h = 6.625 \times 10^{-34} \text{ J.s}$**

Cuando el valor de masa es cercana al valor de h los efectos cuánticos se hacen notar, (y por eso obtuvimos el patrón de interferencia en la EDR con electrones) y cuando el valor de la masa es muy grande respecto a esta constante, no notamos ninguna diferencia con respecto de lo que esperaríamos encontrar en el comportamiento de los objetos macroscópicos (y por eso se obtiene la curva continua de la figura anterior).

Capítulo 5

La Estructura Conceptual Efectivamente Reconstruida

Introducción

La Tercera Fase de la Investigación se refiere a la implementación de la ECPE en un curso de Física del último año de la escuela secundaria.

Durante la implementación, la profesora y su grupo de clase reconstruyen una nueva estructura: la **Estructura Conceptual Efectivamente Reconstruida (ECER)** que está relacionada con las estructuras anteriores, pero tiene sus características propias, y depende fundamentalmente del grupo de clase –profesora y estudiantes-, y del entorno escolar.

En este capítulo se abordan las preguntas 3 y 4 planteadas en el Capítulo 1:

3- ¿Cómo se caracteriza la conceptualización en el grupo de clase donde se implementa la secuencia?

4- ¿Es posible describir y caracterizar algunos aspectos afectivos del grupo de clase que pudieron incidir en el desarrollo de la secuencia?

Para responder a estas preguntas se realizaron los siguientes estudios:

- **Estudio 1: Análisis de la conceptualización**
- **Estudio 2: Descripción de los aspectos afectivos de los estudiantes**

Ambos estudios, permiten analizar si la secuencia fue posible. La viabilidad es entendida desde la posibilidad de desarrollo y continuidad de la secuencia en el grupo de clase considerado: que se acepten las situaciones propuestas sin ser superados por ellas, que se enfrenten los desafíos realizando el esfuerzo cognitivo y afectivo necesario, venciendo la tentación de abandonar, que se logre compartir significados, que se acepte la forma de trabajo propuesta, que se acepten las explicaciones, y los mecanismos explicativos. Un estudio más completo de la viabilidad de la secuencia se logra realizando sucesivas repeticiones y adaptaciones, y analizando si sobrevive al paso del tiempo, a las reformas educativas, y logra formar parte del currículum de la escuela secundaria. Ya se han realizado dos nuevas implementaciones de la secuencia en distintas condiciones, que se describen al final de este capítulo, y es posible anticipar que resultaron viables en cada ocasión.

A continuación, se presenta el análisis y los resultados de cada uno de los Estudios realizados en la Tercera Fase de la Investigación.

Estudio 1: Análisis de la conceptualización

La conceptualización se analiza a partir de dos instrumentos: por un lado, utilizando la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, se identificaron los invariantes operatorios a partir de los protocolos de los grupos durante el desarrollo de las situaciones. Por otro lado, se analizaron las respuestas de los estudiantes a las preguntas de la evaluación realizada al final de la implementación.

Análisis de las situaciones y los teoremas en acto

Se analizan las **acciones** relativas a las situaciones que se abordan, ya que el significado de los conceptos que se pretenden construir emergerá de las situaciones, y será producto de las acciones que realicen los estudiantes dentro del dominio de la Mecánica Cuántica, de las explicaciones y de los mecanismos explicativos que ellos acepten.

Se busca identificar qué teoremas en acto utilizaron los estudiantes para abordar las situaciones propuestas. Se analiza cómo funcionaron, las inferencias que los estudiantes realizaron a partir de ellos, y si los teoremas en acto permitieron u obstaculizaron la reconstrucción del conocimiento científico pretendido.

Para identificar algunos de los posibles teoremas en acto ligados a cada situación, se dispone de los registros de las conversaciones de cada subgrupo del Grupo de Clase y sus respuestas escritas a cada pregunta de la secuencia.

Situación 1: “Imaginando la Experiencia de la Doble Rendija con bolillas”

La acción principal que requería la Situación 1, era imaginar la Experiencia de la Doble Rendija para predecir la forma de los impactos en la pared, antes de realizar la experiencia o simularla con software. En la Situación 1 se identifican teoremas relacionados por un lado, con el problema de predecir en qué lugar de la pared se detectarían impactos y por el otro, con la forma de la curva de probabilidad.

- Respecto a los impactos en la pared (Teorema de los impactos T_i)
Frente al problema de predecir donde impactan las bolillas en la Experiencia de la Doble Rendija los estudiantes utilizaron los teoremas en acto:

T_{i1} : “Si las bolillas son disparadas al azar, la distribución es uniforme”

T_{i2} : “Las rendijas imponen la forma en la distribución”

T_{i1} puede identificarse en la conversación de casi todos los grupos de estudiantes. Mientras en los grupos Grupo 3, Grupo 5 y Grupo 6, se usa T_{i1} solo inicialmente, en Grupo 2 reaparece aún después de haber utilizado T_{i2} consistentemente, para predecir la forma distribución de los impactos en la pantalla. Es importante que los estudiantes abandonen T_{i1} , porque es clave en la secuencia que ellos entiendan que las rendijas evitan una distribución uniforme de los impactos en la pared, que se produciría solo si se la quitara. Además, esta ley de distribución de probabilidad resulta radicalmente distinta cuando se utilizan electrones. Luego de esta primer instancia de predicción para las bolillas, se define el cociente: *Nº de bolillas que impactan a una distancia “x” del centro de la pared / Nº bolillas disparadas en total*, para interpretar la ley de probabilidad que rige este fenómeno.

A continuación, se transcribe parte del protocolo del Grupo 2, mostrando que desde el inicio los estudiantes consideraron que las bolillas se concentrarían en ciertas regiones de

la pared y no en toda la pantalla (Ti₂). Uno de los estudiantes (A₆) anunció en varios momentos de la conversación que la distribución no era uniforme, sino que las bolillas harían una especie de “proyección” de las rendijas:

(E1; 35 ¹⁶)	A ₆ ¹⁷ : <i>Bueno yo creo que quedarían así... Dos líneas un poquito más largas que las rendijas porque van para arriba y para abajo...</i>
(E1; 42)	A ₆ : <i>Hay más...o sea, en ancho la misma rendija en realidad en alto cambiarían</i>
(E1; 48)	A ₆ : <i>No, pero va a haber más en el medio...No! Porque al haber dos rendijas va a haber más en el medio, porque tiene que ...tiene que subir y ...subir y bajar, en cambio.... por el medio pasa mas veces que por arriba y por abajo.</i>
(E1; 81)	A ₆ : <i>Claro, por el ángulo! Porque cuando más cerca de la rendija esté el disparador, más grande va a ser el ángulo</i>
(E1; 85)	A ₇ : <i>En la zona media....Ya que para que las bolillas lleguen a la parte superior desde la inferior deben pasar por el medio y viceversa</i>

Utilizando Ti₂ ellos consideraron además, la influencia de configuraciones experimentales como la distancia entre la fuente y las rendijas, y el tamaño de las bolillas respecto del tamaño de las rendijas:

(E1; 98)	A ₇ : <i>Y acá va a tener más concentración y ...</i> A ₆ : <i>Igual depende de la distancia que esté la rendija de la pared</i> A ₈ : <i>Depende de la distancia...</i> A ₆ : <i>O sea, si está pegada va a ir en toda la pared pero si está más alejada va a ir solamente en ... creo</i>
----------	--

Aunque parecía haberse logrado consenso respecto al efecto de las dos rendijas en los resultados, hacia el final de la conversación el estudiante A₈ del Grupo 2 planteó dudas acerca esto y vuelve a utilizar el teorema en acto (Ti₁) que afirma la distribución uniforme. Sin embargo, cuando tuvieron que dibujar la curva de probabilidad, utilizaron Ti₂:

Estos teoremas en acto se utilizarían alternativamente según la inicialización del esquema que se usa para enfrentarse a la situación, si prevalece el concepto de azar, se llama a Ti₁, si se privilegian las rendijas, se llama a Ti₂.

(E1;137)	A ₈ : <i>Igual les digo chicos, esto no va a quedar así entre las rendijas porque si una cosa, la rendija o lo que sea, se proyecta en la pared de madera con una línea así pero una bolita puede ir así y va a otro lugar porque dice en distintas direcciones(...) el disparador dijo que era para cualquier lado(...)Acá te dice, una bolilla que se dirige hacia una de las rendijas puede rebotar en el borde y terminar en cualquier lugar, o sea, rebota y se va para cualquier lugar</i>
(E1;145)	A ₆ : <i>Rebota en el bordecito de la rendija y sale para cualquier lugar (...)</i> A ₈ : <i>Esta es la pared rebota en un bordecito acá y la hace desviar, pasa y la hace desviar...</i>

Las conversaciones del Grupo 3 que se colocan a continuación son interesantes porque también muestran cómo algunos estudiantes usan Ti₁ y otros Ti₂. La expresión “azar”

¹⁶ La forma de par ordenado designa al número de encuentro (primer componente) y turno de habla de la conversación en el cual comienza el diálogo mostrado (segunda componente).

¹⁷ Los estudiantes serán identificados con esta notación, preservando su identidad.

presente en la situación, llama a Ti_1 en varias ocasiones, tal como se aprecia en el protocolo, donde se ignora el efecto de las rendijas sobre la probabilidad de impacto:

- A₁₁: Al azar, al azar!!! Si tira al azar, llegan al azar!!*
A₁₅: ¿al zar?
A₁₁: y... con la misma dirección de las rendijas, con la dirección que tira el coso
(E1;19) *A₁₄: Sí, para mí va a haber más acá, ehm....en la parte de la pared de madera que...en realidad, que llegue a las rendijas...*
A₁₃: Para mí van a llegar a la misma dirección que en la cual llegan, si salen....
A₁₁: Va a llegar en la misma dirección de la cual salen, la misma dirección!!! Claro! La misma dirección de la cual sale, el mismo ángulo!
A₁₃: No, sí pero el ángulo no puede cambiar!
A₁₅: Sí, Para mí con el mismo ángulo, pero más separadas!

Es interesante mostrar la conversación de este grupo donde hay alternancia entre ambos teoremas en acto. Podría interpretarse que inicialmente utilizaron Ti_1 porque no entendieron la pregunta referida a las bolillas que finalmente quedan incrustadas en la pared, pero enseguida llaman a Ti_2 pensando en la concentración en determinados lugares. Consideran que los proyectiles que finalmente llegan a la pared, han logrado pasar sin el obstáculo de las rendijas, como si se hubieran “proyectado” por ellas, y por eso consideraron que en la pared las *bandas de concentración* quedan más separadas que la separación entre las rendijas:

- A₁₃: Bueno, pero las que llegan! Cómo llegan esas bolillas a la pared ? Porque llegan a la pared dice!!! Las que llegan...*
A₁₅: Está bien...claro
(E1;36) *A₁₃: No, un poco más corto porque si vos lo tirás así cuando llegue más lejos va a quedar así. Va haber más acá en la parte de la pared de madera paralela a las rendijas...Va a llegar en la misma dirección de las rendijas. Entonces pongamos: Las bolillas...que atraviesan...Las rendijas que atraviesan las rendijas, llegarán a la pared de madera...Sí...Sí...con igual dirección... y ángulo?*
A₁₄: No, pará a mi me quedó: Con el mismo ángulo pero más separadas entre sí

Uno de los estudiantes del Grupo 3, (A_{13}) insistió en que la distribución es uniforme (Ti_1) mientras su compañero (A_{14}) sostiene que la presencia de las rendijas hace que sea más probable encontrar bolillas en las regiones paralelas a ellas (Ti_2):

- A₁₃: No! van a caer todas en cualquier lugar, o sea...si te está diciendo que se disparan al azar...*
A₁₄: Pará, pará!!!no ves? hay dos rendijas!!, dos rejillas, dos rendijas...Una y otra! como son dos, va a haber pelotitas... Va a haber más.? por eso va a haber más acá y acá que acá...ponele, que están en las rendijas!!!
(E1;54) *A₁₃: Y...no sé porque si consideramos que es este triángulo, y después dijimos que llegan con el mismo ángulo...Y considero a toda la pared, y llegan con ese mismo ángulo*
A₁₄: Sí, pero, a vos te parece que esta que pasa por acá y se choca la rendija, ¿va a llegar a la pared de madera?
A₁₁: En el centro!!! En el centro!!! En el centro de la pared, las que pasan

por las rendijas!

A₁₄: No, en el lugar...sería en el lugar paralelo a las rendijas!

A₁₃ O sea, va haber más lugar en...

A₁₁: En las rendijas, a donde están las rendijas!

A₁₄: Va a haber más concentración de pelotillas... En la zona paralela a las rendijas

A₁₅: No sé, para mi no son paralelas

(E1;102) *A₁₁: Sí son paralelas*

A₁₃: Bueno, es una forma de decir...

A₁₅: Bueno, o sea...en el mismo rango... En la misma zona!

Cuando considera que también impactan aquellas bolillas que colisionaron en el borde de la rendija e igualmente se dirigieron hacia la pared, (A₁₃) usó nuevamente Ti₁. Finalmente, el grupo se decide por una formulación compatible con Ti₂:

A₁₃: Para mí,... en toda la pared de madera

A₁₁: No, pero puede ser que reboten también

A₁₅: En una franja...empecemos poniendo, en una franja...

A₁₁: En la misma posición que las rendijas! Nada más que en la pared de madera!

A₁₃: Pero si rebota no es paralelo!

(E1;109) *A₁₄: Pero si acá está la pared, como se ve acá? si acá está esto, ponele, y acá rebotan la mayor cantidad de pelotas...*

A₁₈: Y si ponemos se proyectan las rendijas?

A₁₄: Ah listo, pero...en la zona de las rendijas digamos, para arriba y para abajo...Por qué?

A₁₃: y...porque la pared blindada no deja pasar para el otro lado... Claro porque el único lado que tienen...que pueden pasar las bolillas es `por donde están las rendijas...

Al encontrar la definición de frecuencia y de curva de probabilidad, dos integrantes del Grupo 3 (A₁₁) y (A₁₃) continúan utilizando Ti₁ mientras (A₁₄) intenta convencerlos:

A₁₁: Entonces en cualquier lado caen!!!

A₁₃: Para mí es como...si para el centro las que van así...y después tipo, las que rebotan, que es como si pasaran...

A₁₄: Sí, hay como mas concentración en el medio, y después, algunas se desvían...

A₁₁: Bueno, tenemos que hacer como que pasan por el medio...

A₁₃: Ey la pared de madera tiene el mismo...? ¿es igual que la pared de acá?

Entonces, si rebotan, no...no van a la pared! van así, para afuera...

(E1;172) *A₁₁: No, no...vos tenés...el rebote es en el borde de cada rendija...*

A₁₄: Tocan en el borde y pasan

A₁₃: Ahhhhhh en la rendija así decis..pero...para arriba no

A₁₄: y... ¡pero que haya dos rendijas no quiere decir que las pelotas vayan así! Y esto te va a quedar en blanco...

A₁₃: Sí, es verdad!!! no te van a quedar igualitos...

A₁₅: ¿entonces como lo hacemos?

A₁₃: y...en el medio

A₁₁: Tiene un pico!

A₁₃: Claro, esto es lo que decía A₁₄, lo que no sé si te van a quedar así, o sea porque rebotan, entendés? No te va a quedar perfecta la curva

El uso alternado de ambos teoremas en acto, por parte de los mismos estudiantes, muestra como los invariantes están ligados a los aspectos de la situación que se estén inicializando. Estos episodios permiten apreciar la importancia de tres acciones didácticas: primero, hacer “emerger” las ideas de los estudiantes a partir de “buenas” preguntas; segundo, permitir la discusión entre ellos “exigiendo un acuerdo”, lo cual implica otorgar a los estudiantes la posibilidad de conversar; y tercero, solicitar la conclusión por escrito antes de la puesta en común con el resto de los grupos y con la profesora. Es decir, ayuda a la conceptualización dentro de la clase, produciendo instancias de verbalización oral y escrita.

Los integrantes del Grupo 6 también utilizaron inicialmente Ti_1 . Pero consideraron que debían dar una respuesta numérica, y realizaron cálculos basados en consideraciones geométricas de la experiencia, tratando de delimitar la zona de impactos de las bolillas, como si se tratara de una proyección. Dedicaron casi todo el tiempo del primer encuentro (E1) a buscar valores que acoten los laterales de la distribución –uniforme- de las bolillas en la pared de madera. Aunque A_{27} utiliza Ti_2 y advierte a sus compañeros sobre el cambio en la distribución de las bolillas que producen las rendijas, prevalece Ti_1 llamado por el concepto de azar.

A₂₇: Bueno, ehm...si pasan en todas las direcciones decía, no?

A₂₈: Sí...Pero en todas no van a pasar porque están las...las cosas...las rendijas...

A₂₇: Claro, pero según cuánto tengan de alto, porque...si esto tiene un alto, como van a pasar...van a pasar así, van a pasar así...

A₂₇: Ah claro pero van a pasar en una línea, o sea...

A₂₈: Claro, en una línea sí, pero en distintos ángulos!

A₂₇: No! ¿Y si esto se mueve así?

A₂₈: Varía

A₂₇: Sí, pero esto se mueve más así, y pasas una así? Ahhh! Hay que preguntar si esto se mueve sólo para arriba y para abajo

(E1;34)

A₂₈: Y..dice en todas direcciones eh!

A₂₇: Pero...o sea, si se mueve para allá... Pistola así, entra acá, y va a salir más acá....Si la pistola hace así, sale acá y va a entrar más acá....

A₂₈: Por qué? Va seguir en la dirección que está...

A₂₇: Sí, pero si está así, es una cosa, si está así es otra!

A₂₈: Ahhh sí si, está, ya entendí...Pero lo más probable es que vaya por el centro, porque...Es como que en cada corte van a cambiar de dirección, también...Ponele que éste choque con éste y entre...

A₂₇: Sí..

A₂₈: Y bueno! Entonces va a haber en todos lados, no hay una sola parte....a no ser que choque, porque entonces cambia la dirección de ésta... Claro! Porque dice en todas las direcciones! Y...pongamos ehmmmm las bolitas salen en todas las direcciones y...habrá en todos los lugares!!!

A partir de aquí y hasta el final de la Situación 1, continuaron intentando encontrar una respuesta numérica, que posibilite delimitar la zona donde se encontrarán las bolillas, utilizando relaciones trigonométricas de triángulos que construyen sobre el esquema de la experiencia:

(E1;102)

A₂₈: Yo le voy a poner en la primera, que caen en todas las direcciones..O sea, que llegan a todos los lugares...y que....deben de haber límites, si que....

A₂₇: Si, habría que definir los límites...la que tiene más contra acá va a ser la que va a ir más lejos...

A₂₈: Sí...habría que ver hasta donde llega esta...

A₂₇: Y la que pega acá, es la que va a ir más lejos...

A₂₈: Pero hay que ver si pasó por la de este lado o la de éste, porque esta también va a rebotar cuando se choca con ésta! (...)

A₂₈: Una vez que sepamos el ángulo, la distancia....

A₂₇: No, pero no tenemos la distancia!

A₂₈: Se puede sacar así, mirá...Esto tiene 15 cm, esto de ancho ya sería 5 asique lo que nos queda sacar es el ángulo

Finalmente, como el valor numérico obtenido no se ajustó a sus predicciones decidieron abandonar los cálculos, y nuevamente usaron Ti₁. Sólo cuando abordan la segunda parte de la pregunta 1 -¿Habrá más bolillas en algún lugar? ¿Por qué?- empiezan a usar Ti₂:

A₂₇: Entonces ponemos, se distribuirán en toda la pared...Se distribuirán en toda la pared, dependiendo con el ángulo con que sean disparadas

A₂₈: Bueno, y habrá más en algún lugar? No, depende...O sea, depende de lo que quieras, que salga en alguna dirección, pero para mí, no (...)

A₂₇: Ah... No, pero...como tiran tantas, pueden ir para acá como para acá...digamos, por azar, este...tiene más chances...

A₂₈: Tiene más probabilidades, claro, en el ángulo...del centro!!! no...yo creo que va a ser el centro de la fuente...o sea, así vana caer...

A₂₉: Y va a tener la forma de la rendija...No importa el ángulo que se encuentre, digamos...

A₂₈: Es que...estamos pensando que si rebota en un borde, pica y la manda para allá...más allá de lo que manda la hendija... A no ser que lo mande para la rendija, pero para la otra rendija

(E1;169) A₂₇: Claro, pero es la misma probabilidad que pegue en el borde, que pase justito por el medio, que pase un poquito más corrido...No sé...para mí entran muchas bolitas así a lo ancho de la rendija, no es que entra una.

Para mí entran muchas, entonces tendría que habernos dado o la ubicación

A₂₈: ¿Tendría que habernos dado o la dimensión, una imagen de la bolita...!

A₂₇: ¿Si le ponemos algo de que...puede que haya más en...en los lugares en que...O le ponemos: hay más probabilidad de que haya más en... los lugares donde..., donde pueden pasar las bolitas tanto por la rendija uno como por la dos...

A₂₈: Sí, está bien, habrá más posibilidad...

A₂₇: ¿Si le ponemos algo de que...puede que haya más en...en los lugares en que...O le ponemos: hay más probabilidad de que haya más en... los lugares donde..., donde pueden pasar las bolitas tanto por la rendija uno como por la dos...

El único grupo que permaneció “atrapado” en el concepto de azar y la consecuente distribución uniforme, fue el Grupo 5. Ellos insistieron en la distribución uniforme (Ti₁) aún después de encontrarse con las definiciones de probabilidad y de curva de probabilidad:

(E1;37) A₂₃: -Claro....por todas partes....por toda la madera!

A₂₅: ¿Cómo se distribuyen las bolitas que logren pasar? Y... se distribuyen

por todos lados!!!

A₂₃: Se desvían!!!! No, porque mirá, vos tenés así: iiiiiuuuuuuuu por ahí esta sale para acá, y si se desvía, sale para acá! Y siguen...Las estoy viendo, sí...no pasan!!!!

A₂₂: En todas direcciones....dice...en todas direcciones

A₂₃: O sea, se distribuyen en toda la madera.. O sea es respuesta, dos puntos...

A₂₅: Entonces en todas, en todos lados...en cualquier lado...

A₂₂: O sea, es, a lo ancho también?

A₂₃: En todas direcciones dice, se mueve al azar dice... sisisisi, porque el que se desvía para acá, pasa para allá...

A₂₃: Y bueno...una que pegue por acá puede pasar para allá...

A₂₃: Y...no sé, para mí...por toda la madera se distribuyen...Por todos lados...porque...

(E1;74) *A₂₅: Para mí que en todas direcciones! No en....*

A₂₃ :Para mí van a estar en toda la madera! No? ...Ella lo dijo, que el disparador se mueve en todas las dirección es!

(E1;90) *A₂₃: En todas direcciones!*

A₂₅: Y por qué va a haber más en algún lugar, si dice en todas direcciones!!

- Acerca de la curva de probabilidad

Un segundo momento importante de la Situación es predecir la forma de la curva de probabilidad $P(x)$. Luego de solicitar a los estudiantes una anticipación sobre la distribución de los impactos en la pared, se propuso en la secuencia el concepto de probabilidad como límite de la fracción (*Nº de bolillas que impactan a una distancia "x" del centro de la pared*) / (*Nº de bolillas que impactan en total en la pared*). Una vez que los estudiantes aceptan que las rendijas imponen una distribución de probabilidad no uniforme, ya no pueden usar Ti_1 -azar y uniformidad de los resultados-

Cuando los estudiantes trazaron la curva solicitada, en general, no fueron consecuentes con sus predicciones iniciales sino con las definiciones dadas. Esto indicaría que las definiciones de probabilidad modificaron la forma en que se estaban interpretando los resultados de la experiencia, es decir produjeron una reformulación de la experiencia. La introducción del concepto de frecuencia relativa y de probabilidad produjo dos formas de representar $P(x)$:

- 1) con dos máximos relacionados con las rendijas,
- 2) con un máximo central

El trazado de curvas estaría dirigido por teoremas en acto acerca de las curvas (Teorema de la forma de la curva Tc):

Tc₁: Proporcionalidad entre nº de rendijas y máximos, y

Tc₂: Superposición de efectos individuales en el centro

Para utilizar cualquiera de ellos (Tc_1 y Tc_2) se requiere suspender Ti_1 y adoptar definitivamente Ti_2 , para predecir los impactos en la pared, porque ambos presuponen una distribución no uniforme.

Tc₁: Proporcionalidad entre nº de rendijas y máximos

A continuación se presentan evidencias de la utilización de este teorema en acto en el Grupo 2 y en las gráficas realizadas por Grupo 1 y Grupo 4. Este teorema lleva a la inferencia “*como hay dos rendijas, las bolillas copian la forma en la pared de madera y forman dos columnas de concentración*”. En el Grupo 2 el consenso acerca de la distribución de las bolillas, surgió cuando necesitaron dibujar la curva:

A₇: *No, en el cero baja de golpe...*

A₆: *No, no, pará, no bajaría tanto baja un poquito pero no tanto. bajaría un poquito en el cero, haría como un piquito, pero no bajaría tanto... no, tanto no*

(E1;169) A₈: *Hay algo que no me cuadra, no me cierra.*

A₇: *¿Por qué está mal?*

A₈: *Porque el cero del centro...*

A₁₀: *Porque en el cero en el centro no va a haber tantas como ahí.*

A₆: *No, casi no hay. Enfrente de las dos rendijas no pasa ninguna por el cero.*

A₈: *Porque nos dimos cuenta acá que en esta zona es menos probable que haya bolillas*

A₆: *O sea, mucho menos probable que en el medio*

A₈: *...acá se va acercando a la zona más probable*

(E1;188) A₇: *(..) la curva es como la que hicimos antes porque va menos, menos, mas, mas, es gradual pero como son dos rendijas va a ser nada, nada, un poco, algo y en el borde como hay pared una cosa rara (...)*

A₆: *De esta forma la curva va muy baja porque la probabilidad es mínima.*

A₇: *En la curva se manifiesta que en la pared habrá más probabilidad de impacto en las líneas de las rendijas mientras que en el centímetro que dista entre línea y línea ... pared la probabilidad de impacto es nula*

Los gráficos realizados en el Grupo 2 presentados en la Figura 5.1 son coherentes con la conversación:

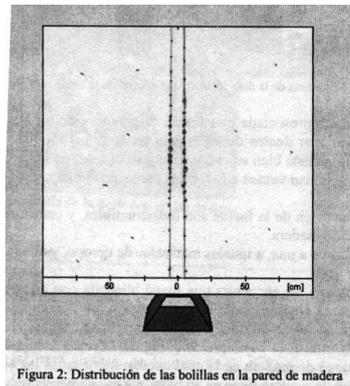


Figura 2: Distribución de las bolillas en la pared de madera

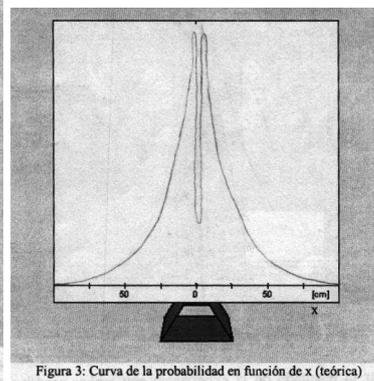


Figura 3: Curva de la probabilidad en función de x (teórica)

Figura 5. 1 Izquierda: Distribución de las bolillas en la pared de madera realizados por el Grupo 2
Derecha: curva de probabilidad en función de x realizados por el Grupo 2

Los gráficos de la Figura 5.2, realizados por estudiantes del Grupo 1, evidencian el uso de T_{i2} , y de T_{c1}

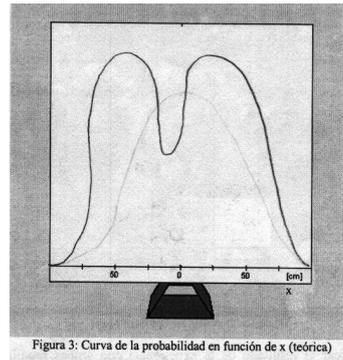
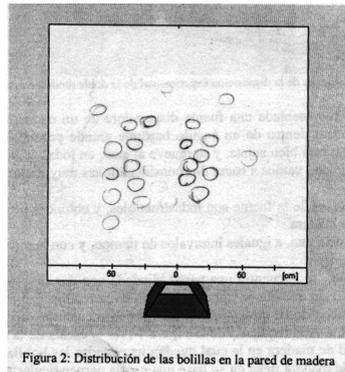


Figura 5. 2 Izquierda: Distribución de las bolillas en la pared de madera realizados por el Grupo 1
Derecha: curva de probabilidad en función de x realizados por el Grupo 1

En la parte izquierda de la Figura 5.2 se aprecian los impactos concentrados en dos regiones de la pared correspondientes a las rendijas, mientras hay muy pocos impactos en el resto. A la derecha, se puede notar la superposición de imágenes: primero dibujaron una curva con un solo máximo central, y luego, otra curva con dos máximos. Esta última, relacionada con la distribución de impactos en la pared, con dos picos muy pronunciados, y en el medio y hacia los costados, la ordenada decrece gradualmente. Aunque no dibujaron impactos entre las dos rendijas, en la curva, el mínimo es poco pronunciado.

En la Figura 5.3 se presentan los gráficos realizados por los estudiantes del Grupo 4, que son similares a los del Grupo 1, pues ubican los dos máximos de $P(x)$ en la proyección de las rendijas en la pared. Sin embargo, aquí representaron bolillas en el resto de la pared, que serían las que colisionando con los bordes de las rendijas igual lograron pasar. Esta idea se aprecia tanto en la distribución de impactos como en la curva: alta concentración de impactos en los lugares que proyectan las rendijas y también varios esparcidos por el resto de la pared, con altos valores de ordenadas a medida que aumenta la distancia al centro de la pantalla. Esto podría indicar que usaron Ti_2 y Tc_1 .

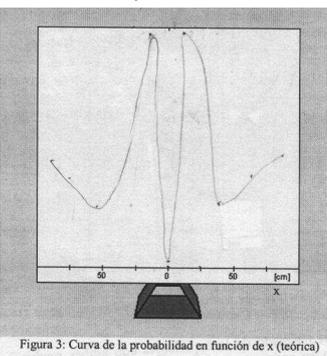
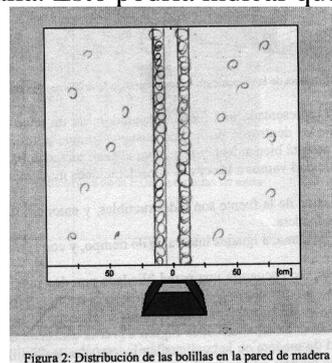


Figura 5. 3 Izquierda: Distribución de las bolillas en la pared de madera realizados por el Grupo 4
Derecha: curva de probabilidad en función de x realizados por el Grupo 4

Tc₂: Superposición de efectos individuales en el centro

Parecería que sólo los estudiantes del Grupo 3 utilizaron este teorema en acto, concluyendo que **“aunque hay dos rendijas, en el centro hay un máximo”** Implícitamente están aceptando que allí tiene el efecto de ambas. En la conversación, ellos habían acordado que la forma de la concentración sería en dos “bandas” relacionadas con la presencia de las rendijas. Sin embargo, cuando dibujaron los impactos, los concentraron en una sola región. En la curva de probabilidad, dibujaron un único máximo

central indicando que la probabilidad es máxima en el lugar correspondiente al medio de las rendijas.

- (E1; 226)
- A_{14} : ...que...el máximo..que tenés, que supuestamente es el centro ...
- A_{16} : ..indica máxima probabilidad
- A_{14} : El máximo...coma.. que se encuentra en el centro indicado por la curva..... una mayor concentración de bolillas en el centro de la pared.
- A_{15} : muestra que habrá una mayor concentración... de bolillas en el centro de la pared!
- A_{14} : sí, a medida que nos alejemos del centro de las rendijas
- A_{13} : Mientras que...la probabilidad disminuirá... a medida que nos alejemos del centro de las rendijas

Ellos realizaron los siguientes gráficos, acordes a lo que previamente habían conversado:

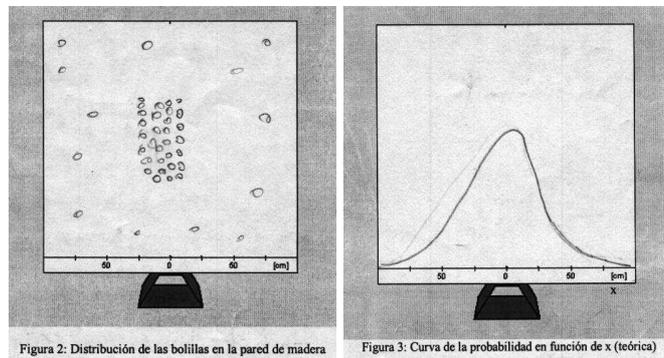


Figura 5. 4 Izquierda: Distribución de las bolillas en la pared de madera realizados por el Grupo 3
Derecha: curva de probabilidad en función de x realizados por el Grupo 3

Síntesis de lo analizado en la Situación 1:

- Cuando los estudiantes tuvieron que anticipar los resultados de la EDR utilizaron inicialmente el teorema en acto en acto de la distribución uniforme Ti_1 . Se infiere a partir de las conversaciones de los estudiantes, que posiblemente la utilización de Ti_1 esté “disparada” por la referencia explícita al azar, que se presenta dos veces en Situación 1. Luego, como logran reconocer la presencia de las rendijas y su influencia en la distribución de impactos, utilizan Ti_2 (“**Las rendijas imponen la forma en la distribución**”)
- Después de introducir la definición de probabilidad, cuando los estudiantes tienen que representar gráficamente la curva de distribución de probabilidad, la evidencia de la que disponemos indica que solo utilizarían Ti_2 . Es decir, parecería que los estudiantes atribuyen la forma de la curva de probabilidad a la presencia de las rendijas, bien colocando uno, o dos máximos, esto es utilizando Tc_1 ó Tc_2 . Es importante destacar que los estudiantes llegan a esta conclusión a partir del análisis cualitativo de la experiencia, antes de realizar la simulación. Por otro lado, los protocolos muestran que los teoremas en acto Ti_1 , Ti_2 , Tc_1 , Tc_2 , son inestables y que la necesidad de dar una respuesta escrita común, genera un consenso que también es inestable. Sin embargo, desde un punto de vista didáctico las conclusiones de los estudiantes satisfacen las anticipaciones realizadas en el diseño de la secuencia.

Situación 2: “Simulación de la EDR con software”

Esta situación proponía a los estudiantes como tarea inicial, simular la Experiencia de la Doble Rendija con el software “Doppelspalt”¹⁸ seleccionando bolillas como proyectiles, y contrastar las predicciones que habían formulado en la Situación 1.

Antes de realizar la simulación de la experiencia con electrones, los estudiantes tenían que anticipar si éstos se distribuirían igual que las bolillas. Como ellos sólo disponen del concepto de electrón como “pequeñas bolillas” para lo cual se esperaba que responderían afirmativamente.

• Acerca de la superposición de las curvas con bolillas

Era fundamental que los estudiantes concluyeran que para las bolillas, la curva obtenida con ambas rendijas abiertas es la suma o superposición de las curvas individuales. Este teorema había sido utilizado por el Grupo 3 en la etapa de predicción de resultados, aunque de forma implícita. Luego de la simulación, casi todos los grupos aceptaron que la curva total resulta de la superposición de las dos curvas individuales. Este resultado sería contrastado posteriormente para falsar la hipótesis de un comportamiento similar para bolillas y electrones. Se infiere la presencia del teorema en acto (Teorema de superposición de curvas *Tsc*):

Tsc: “Superposición de curvas”

Una posible explicación de la forma de $P(x)$ que mostraba el software fue usando *Tsc*, formulada en el Grupo 2. Ellos atribuyen el máximo a la distancia a la que se encuentran las ranuras a partir de modificarla manteniendo fijo el ancho:

(E2; 37) *A₈: Porque ahí las ranuras tienen muy poca distancia entre sí y entonces parece una sola área... Nosotros dibujamos las ranuras muy separadas y entonces ahí... Cuanto más... distancia le ponés entre las... ranuras, o como se llamen! Más se hace... el... la abertura...!*

A₁₀: El pico, esto! !

(E2;89) *A₁₀: Cuánto mayor sea la razón, ranura con distancia entre rendijas. A₉: No, cuanto menor es ponele... la ranura... el ancho de las ranuras.. Bueno, el ancho de las ranuras y la distancia entre ellas más ancha es la curva... Por eso, la curva es así ahora cuanto mayor es la razón entre esas dos se hace ese piquito...*

El Grupo 3 sólo por este encuentro, se dividió y trabajó con dos computadoras. Una parte, conversó extensamente para poder consensuar acerca de la relación entre los parámetros, y la curva de $P(x)$. Al igual que el Grupo 2, advirtieron que el efecto de tener las dos rendijas muy juntas es similar al efecto producido por una sola rendija:

(E2; 74) *A₁₅- La separación hace que... A₁₃- ...las bolillas estén más separadas en la pared, ya que la separación entre rendija y rendija... A menor separación entre rendija y rendija es mayor la concentración de bolillas en el medio de la pared*

¹⁸ “Experimento de la doble fisión en Mecánica Cuántica” (2003). Creado por Muthsam, K (Versión 3.3 traducido al español por Wolfamann y Brickmann) Physics Education Research Group of the University of Munich. Obtenido en Internet de <http://www.physik.unimuenchen.de/didaktik/Downloads/doppelspalt/dslit.html>

A₁₅- O sea la forma de explicarlo es que en realidad que cada vez que estén más juntas cada vez pegan más cantidad de bolillas

A₁₃- A medida que disminuye la separación entre rendija y rendija aumenta la cantidad de bolillas que impactan en la pared de madera

A₁₅- A medida que disminuye la separación hay que decir más larga, más picuda, eso a medida que disminuye la separación la curva se hace más larga..

A₁₃- ¿Más larga? O ¿Más pronunciada?

A₁₅- Más “picuda”

A₁₃- Más picuda en el centro

A₁₅- No, más picuda, su valor máximo es en el cero, o sea, en el centro. No es que va a ser más picuda

A₁₃: si sería más picuda porque aumenta la cantidad de bolillas en el centro

A₁₅- No, porque no tienen nada que ver, porque podría ser más picuda y que además no esté en el medio, no es que es más picuda porque está en el centro....Bueno, pero es una razón por la cual es más picuda

A₁₃- ¿por que si no fuesen tantas bolillas no sería tan picuda?

A₁₅- No tiene nada que ver la “picudación” con el cero, A₁₃!

A₁₃- ni con el máximo, A₁₅, porque mientras más cantidad de bolillas tenés significa que impactan más y por lo tanto la curva va a ser más pronunciada porque aumenta

(E2; 93)

A₁₅- Si, pero no tiene nada que ver que la curva sea más picuda con que su valor máximo sea en el cero!

A₁₃-Si porque su valor máximo va a ser donde más impactan y impactan más en el cero que está en el medio...al aumentar la cantidad de bolillas que impactan la pared la curva crece...La curva va hacia arriba...es más alta, también producirá aumento

A₁₂- no es lo que vos dijiste, que la ranura es como una sola, que cuando la separación es muy chiquita es como si fuera una sola ranura!

A₁₃- bueno, al disminuir la separación la curva muestra como las bolillas se superponen en el centro...la curva tiene esta forma tal que, al ser más pequeña...

A₁₅- la separación entre las rendijas...se hace casi imperceptible, haciendo que las bolillas peguen en el centro de la pared

A₁₂- la región del cero en la parte vertical es la región donde más se concentran las bolitas...?

A₁₅- ...porque en el cero es donde aumenta la concentración de bolitas, porque en el cero es donde se concentra la cantidad de impactos.

A₁₅- Cuando están las dos rendijas abiertas se concentran en el medio en el cero y cuando está una abierta se concentran para el lado de donde está abierta, si está abierta la derecha se concentra en la derecha y si no en la izquierda...Bueno por eso, cuando están las dos rendijas abiertas se concentran en el medio, en el cero como cuando dijimos hoy pero cuando se abre una sola por ejemplo la derecha se concentran en la parte derecha por eso la curva se corre y el cero no es más el máximo sino que pasa a ser como 25 que se yo...

(E2; 151)

Los estudiantes de la otra parte del Grupo 3, se refieren la superposición de curvas cuando simulan la experiencia:

(E2;133) *A₁₆- ¿Cómo podrían relacionarse la curva de probabilidad cuando están ambas rendijas abiertas, claro, porque esta es mitad y mitad cuando estas*

dos coinciden..., o sea la zona que queda es al superponerlo.

A₁₆- Lo superpuesto no se ve...

A₁₆- Por eso, lo que se superpone entonces es lo que queda....Para mi cuando lo superpones te queda!.

En el tercer encuentro (E3) cuando la profesora preguntó a los integrantes de este grupo acerca del máximo central, ellos no consiguieron formular una explicación, aunque implícitamente estén utilizando Tsc. Posiblemente, porque este teorema en acto es incompleto si el significado de superposición no incluye la suma de las ordenadas de las funciones:

A₁₁ Nosotros pusimos porque dejando juntas las rendijas la zona de más impacto se da en el centro de la pared.

Profesora: Claro, pero ¿por qué?

A₁₃: Te ponemos que sólo pueden pasar por las rendijas.

(E3 ;18) **Profesora:** *Porque ... piensen que hay una separación entre las rendijas.... ¿por qué justo en el medio hay más, si ahí no pasan?...¿se unen los dos efectos? ¿qué pasa justo ahí?*

A₁₁: Se unen...claro. Pero... la única forma que pegue en el centro es que rebote en el borde, porque no puede pasar así.

El Grupo 6 también usó Tsc analizando el efecto de la separación de las rendijas en la curva. Además las estudiantes de este grupo analizaron como afecta el aumento del ancho de las rendijas:

(E2; 82) *A₂₇- Ehh claro, al disminuir...se van..como lo escribimos? Se van juntando las dos elevaciones, los picos se van juntando... No, pongámosle que al disminuir la separación, los picos estos se van juntando y...el ancho de concentración disminuye*

(E2; 87) *A₂₈- Que..al disminuir la separación los dos picos se van juntando*

A₂₈- Sí, yo le pondría algo como que en el cero, al estar más cerca, hay más probabilidad de que en los bordes...y hay una baja, porque justo ahí hay una pared...adelante...

(E2; 105) *A₂₇- Bueno, ehmmm...ponemos que al disminuir la distancia entre erre uno y erre dos hay mayor probabilidad....de que...las bolitas reboten en equis igual cero....Le ponemos porque...*

A₂₈- Porque....la separación es menor!

A₂₇- O le ponemos que la baja se debe a la pared que se quita...O sea, que igualmente, igualmente impactan menos bolitas...

(E2; 131) *A₂₇- Ahhh ya caí ya caí!!, acá la concentración siempre es igual, lo que pasa es que este con esto aumenta, también para acá...O sea, la concentración de bolillas en la superficie...es igual, claro!*

A₂₈- Pero cambia a lo ancho

A₂₇- Cambia la concentración de las bolitas en cuanto al ..Al aumentar la anchura de la fisión.....la distancia del centro aumenta

(E2; 150) *A₂₇- Bueno, como era entonces...? Al aumentar la anchura de las rendijas, aumenta la probabilidad de que impacte en la pared..La probabilidad de impacto en la pared, ehhh podemos poner que permanece igual que..como es.... Aumenta la distancia al centro, que mantiene esta probabilidad*

Para analizar la relación entre las curvas con una o ambas rendijas abiertas, las estudiantes del Grupo 6 utilizan Tsc:

- (E2; 179)
- A₂₇ ...*Pero es obvio lo que te pide... Uno cuando están las dos, y hay dos, juntas cuando están las dos... hay dos, juntas*
 A₂₈- *Cuando hay una, hay una sola!*
 A₂₇...*Claro...le ponemos, que R₁ abierta, y R₂ cerrada*
 A₂₈: *Pero con que ancho lo hacés? Debe dar lo mismo...*
 A₂₇: *Ehmmm Mirá, pasa al cero, va hasta el cero pero aumenta un poquito, pero una igual, no crece mucho para el otro lado*
 A₂₈- *No debe tener rebotes para ese lado...*
 A₂₇- *Sí, no? Para mí el rebote no lo tiene...*
 A₂₈- *Si no no cumple la función!!*
 A₂₇- *No, igual, un poquito sí...Ah no, Salvo que esté muy inclinado...No..ahí creo que sí lo tomó eh...Pasa que debe ser una en un montón de probabilidades de que rebote...Pero ves que un poquito sí! Y la otra es así...*

• **Acerca de los electrones distribuidos en la pantalla colectora**

Para describir y explicar el comportamiento de los electrones, comparado con el de las bolillas, los estudiantes utilizaron dos teoremas en acto. (Teoremas de electrones *Te*):

Te₁ “Los electrones tienen una cualidad especial: atravesar paredes”
Te₂: “Los electrones son bolillitas muy pequeñas”

Ambos teoremas en acto están relacionados con el concepto en acto de electrón como partícula extremadamente diminuta: en el primer teorema en acto, esto permite que el electrón pueda “atravesar” la pared blindada, y el segundo caso, la pequeñez del electrón, relativa a las dimensiones de la experiencia, tiene como consecuencia que éstos no se vean afectados por la presencia de las rendijas, ya que los estudiantes las imaginan muy alejadas de ellos. A continuación se analiza el uso del primero de ellos:

Te₁ “Los electrones tienen una cualidad especial: atravesar paredes”

Los integrantes del Grupo 2 consideran que los electrones pueden atravesar las paredes blindadas, y entonces, predicen que la pantalla colectora mostrará una distribución uniforme de electrones. Por una razón enteramente diferente a la esgrimida para las bolillas, los estudiantes insisten en la distribución uniforme de los impactos, también para los electrones. Ellos argumentaron que la distribución uniforme se debe a una propiedad de los electrones: atravesar paredes blindadas, como se aprecia a continuación.

- (E2; 164)
- A₆- *Los electrones pueden pasar la placa...!*
 A₁₀- *Es blindada A₆!!!*
 A₆- *Pero, por una placa blindada los electrones pueden pasar!*

En el protocolo siguiente que corresponde al tercer encuentro (E3), mientras los estudiantes de este grupo leen los comentarios de la profesora con respecto a sus conclusiones del encuentro anterior, y mencionan que el origen de su conocimiento sobre las propiedades de los electrones proviene de las clases de química.

- (E3;82)
- A₁₀- *Los electrones son pequeñísimas bolillas de carga eléctrica, ¿se comportan de la misma forma que estos? No, ya que poseen diferentes propiedades y podrán penetrar lugares que las bolillas no pueden. Nos puso...¿Por qué? Contar cómo sucede esto. Y...los electrones pueden atravesar distintos materiales...*

A₆- Una vez, una Profesora... de química me dijo que los electrones pueden atravesar distintos materiales...

A₁₀- ¿Qué, le cuento la historia de cómo aprendí que los electrones pueden atravesar? Tenemos que pensar cómo sabemos que los electrones atraviesan esto.

A₆- ¿Le hacemos el cuento de cómo nos dijo que los electrones podían atravesar diferentes materiales?

(E3; 98)	<i>A₆- Casi en todos lados pero más acá, si está en todos lados...</i>
(E3; 108)	<i>A₇- Los electrones atraviesan...</i> <i>A₆- ...Pueden pasar la pared</i>
(E3;169)	<i>A₇- Se distribuyen en toda la pared de madera coma aunque con más concentración...en la zona central a 50 cm...en el centro</i> <i>A₈- ¿Cómo interpretas la gráfica?</i> <i>A₇- Los electrones pueden impactar en cualquier zona de la pared de madera pero en la zona que tienen mayor probabilidad...a medida que se acercan a...al medio de la pared ...</i>

Cuando se encuentran con el resultado del software, que presenta cinco bandas de concentración de impactos, su explicación está restringida por Te_1 . Estas ideas bien podrían proceder de ciertas representaciones pictóricas, que muestran a los electrones como bolillas de radio considerable, atravesando barreras representadas por montañas y de otras representaciones verbales tales como “*el cuerpo puede atravesar una valla, con cierta probabilidad*”.

Una parte del Grupo 3 (Grupo 3b), describió los impactos de los electrones, considerando que se distribuían uniformemente en toda la pantalla. Al igual que el Grupo 2, describieron a los impactos sin notar la concentración de electrones en determinados lugares, excepto en el centro. Esto constituye un obstáculo para la formulación Cuántica que sigue, que busca explicar la distribución de electrones, inexplicable si se los considera como pequeñas partículas pasando solo por las rendijas:

(E2; 150)	<i>A₁₁- No, los electrones no se comportan de la misma manera ya que se dispersan más en la pared... Se distribuyen más en la pared, el impacto se distribuye más en la superficie... Resultó con mucha concentración de impactos en casi toda la superficie.</i> <i>A₁₆- Podemos poner que resultó con mucha probabilidad pero a medida que se alejaba del centro iba disminuyendo</i>
(E2; 164)	<i>A₁₁-Interpretamos que los electrones que impactan...?</i> <i>A₁₇- Se siguen concentrando en el centro pero...?</i> <i>A₁₆- Pero a diferencia de los otros hay mas concentración en ...</i> <i>A₁₇- O hay más probabilidad en otros...Al igual que las bolillas</i> <i>A₁₁- La concentración...en el centro...Aumenta la probabilidad de impacto en otras partes.</i>

Los restantes estudiantes del Grupo 3 también consideran a los electrones como pequeñas bolillas de materia cuando tienen que predecir lo que sucederá:

(E2; 166)	<i>A₁₅- ¿los electrones son pequeñísimas bolillas...?</i> <i>A₁₂- Se comportaría todo igual</i> <i>A₁₃: Si, los electrones se comportarían igual porque los electrones poseen forma circular como las bolillas. Simulá la experiencia...</i>
-----------	---

Al simular la experiencia y observar los resultados, destacaron que la distribución presenta zonas más y menos probables. Sin embargo, como según expresan, “las rayas paralelas están en toda la pared”, posiblemente, reaparece Ti_1 -distribución uniforme en la pared y azar-, para aceptar que los electrones han “atravesado” por cualquier lado y no por las rendijas! Además, como el software también presenta los efectos de difracción, los estudiantes se enfocan en el máximo central. Esto también constituye un obstáculo para instalar la diferencia de los electrones con las bolillas.

A₁₃- La distribución de electrones se ve en toda la pared! La distribución de electrones se ve en toda la pared pero se concentran...

A₁₅- No pero, se hace una...una hace una separación, ...acá, acá

A₁₃- Bueno, por eso que la concentración se da en toda la pared pero con una leve concentración en rayas paralelas a las rendijas en toda la pared no solamente las dos primeras

A₁₅- paralelas?

A₁₃: Y porque son paralelas, las rayas son paralelas vos tenés que explicar que hay rayas paralelas en toda la pared

A₁₅- En franjas en todo caso

A₁₂- Los electrones se concentran en las tres franjas centrales

A₁₅- Eso, acá acá y acá, bueno la concentración de electrones

(E2; 190)

A₁₂- La distribución de electrones es por franjas pero se concentran más en el centro

A₁₃- Pero hay una mayor concentración en el centro... En tres franjas en el centro de estas y dos no tan concentradas en los extremos

A₁₅- No...en tres franjas en el centro, en tres franjas paralelas a las rendijas, en el centro de la pared y no tan concentradas en las...

A₁₂ - ¿Este es el mismo gráfico que vimos recién con las tres rayas? Entonces la concentración está en el medio no está en las tres centrales, la concentración disminuye desde el centro hacia...

A₁₃- Se van a concentrar en el centro, disminuyendo desde la central hacia los costados

A₁₂- La máxima concentración es en el centro

A₁₃- ¿Cómo interpretas la gráfica? Que la mayor concentración sigue estando en el centro de la pared, aunque también hay impactos...

En el encuentro siguiente (E3) la profesora propuso a este grupo de estudiantes que formulen la interpretación de la curva de $P(x)$. Aunque interpretan correctamente que los ceros de la gráfica representan puntos de la pantalla en los cuales la probabilidad es nula, la importancia del máximo central sigue siendo predominante:

Profesora: Fijate que curva especial, ¿qué está pasando con las los electrones en estos puntos? ¿Qué significa?

A₁₄- Que no hay!

(E3; 5)

Profesora- Que no hay, muy bien. Son lugares que no se sabe porque pero los electrones no llegan, por que será?

A₁₄- Bueno, la gráfica va disminuyendo desde el cero hacia los extremos. Llega al cero varias veces.

A₁₃- Lo que demuestra que la concentración de pelotitas en la pared es nula.

A₁₄- ...entonces los electrones no tocan la pared!

Nuevamente se insiste aquí en que el hecho que más perturba a los estudiantes es que las franjas de impactos aparecen en toda la pared, y como no disponen de conceptos ondulatorios firmes, sólo pueden pensar que si los electrones son como bolillas y las bolillas copiaban la forma de las rendijas, entonces es muy extraño que ahora estén en franjas que en modo alguno se corresponden con las ranuras. Juntando esto con la “increíble” cualidad de que los electrones atraviesan barreras, se arma, con el oportunismo que caracteriza a la conceptualización (Vergnaud, 2008) una explicación restringida a Te_1 .

Te₂: “Los electrones son bolillitas muy pequeñas”

El Grupo 6 utilizó este teorema en acto. Desde el primer encuentro, este grupo consideró el tamaño de las bolillas como un factor importante en el análisis. Cuando predicen para los electrones, vuelven a considerar las dimensionales relativas de la experiencia. Ellas interpretaron que el reemplazo de bolillas por electrones se realizó dejando el resto de los parámetros iguales (ancho y separación de las rendijas) sin reparar en que se indicaba cambiar los parámetros para adecuar las dimensiones de la experiencia. Por lo tanto, predijeron que si sólo se varía el tamaño de los proyectiles hasta llegar a electrones manteniendo las dimensiones de las rendijas, el comportamiento sería como el de las bolillas:

- A₂₇- Pero por lo que decía acá son... lo del tamaño que decías vos....Le ponemos que no, porque cambia según el tamaño?*
- A₂₈- No, porque...Claro...y que...hay mayor probabilidad en el centro! Porque..al ser más pequeño, es mayor el ángulo de donde..pueden rebotar! Va a ir por ejemplo...*
- A₂₇- Ya sé, pero por qué entran todos? Claro, todo es mucho más grandote ahora...Pongamos eso ahora...*
- A₂₈- Que depende del tamaño...*
- (E2; 201) *A₂₇- No, porque al ser de menor tamaño..eh....varía el ángulo con que pasa....varía la curva, de probabilidad...*
- A₂₈- Y aumenta las zonas de probabilidad porque ahora es mucho más*
- A₂₈- Para mí es lo mismo que...como si se..se agrandaran las dos rendijas..porque al agrandar las rendijas, es como que las bolas sean más chiquitas, entonces se agrandan...*
- Entonces le ponemos funciona como si, se agrandaran las rendijas*
- A₂₇- Entonces le ponemos funciona como si, se agrandaran las rendijas*
- A₂₇- Funciona como si se agrandaran las rendijas en el caso de las bolillas*
- A₂₉- Le tenemos que poner como si fuera un límite, las bolillas, o sea que cuando atraviesan son bollillas los electrones*

Al ver los resultados de la simulación, ellas parecen asombradas por la forma de la curva $P(x)$, y el teorema en acto Te_2 resulta parcialmente legitimado por la presencia del máximo central debido al efecto de la difracción:

- (E2; 222) *A₂₇.....Bueno, ya estamos. Probamos? Hay mirá!!!!!!! Guauu! Mirá lo que hacían!!!!... Al final teníamos razón nosotras!*
- A₂₈- Con qué?*
- A₂₇...Que teníamos razón como quedan...Y...mirá, más o menos quedan!!*

- (E2;267) *A₂₈- Describe como se distribuyen...Bueno se distribuyen...Se distribuyen en el centro, no, con mayor probabilidad en el centro...*

*A₂₇- Bueno se distribuyen ...Se distribuyen en el centro...No, con mayor probabilidad en el centro...
Bueno, con igual probabilidad...y la probabilidad disminuye al aumentar la distancia*

A pesar de que este teorema en acto podría resultar un obstáculo para la comparación entre las curvas de probabilidad de electrones y de bolillas, en el tercer encuentro (E3) establecieron y formularon las diferencias entre ambas curvas.

A₂₈- ¿Tienen estas curvas alguna relación respecto a las curvas obtenidas con las bolillas?

A₂₇- Y ...no....

A₂₈- No, porque de un lado, depende...cuando estás, en la curva en el centro aumenta, y cuando hay una sola rendija no...

A₂₇- Digamos, pongámosle...cuando, cuando están las dos rendijas sí pero ..cuando hay una sola no

(E3; 281) *A₂₈- Digamos, cuando están las dos rendijas y están anchas, o hay muy poca distancia*

A₂₇- ¿Se cumple que la curva de probabilidad cuando ambas rendijas están abiertas es la suma de cada una de las curvas de probabilidad por separado? No sé...acá no se suma! Porque si no tendrías esta, más la otra igual, tendrías una súper grande!!!

A₂₈- Claro...

A₂₇- Pero no, porque solamente suma cuando....no!!! ya se porque en las de las bolillas sí se cumple!!!!!!!!!!!!!!! Ahí es la suma....En cambio en esta no! Entonces no!

Síntesis de lo analizado en la Situación 2:

- Para el caso de las bolillas, la suma o superposición de curvas fue aceptada en los grupos de forma relativamente explícita, y esto resultó un buen punto de partida para encontrar diferencias con el caso de los electrones mostrado por el software.
- Los estudiantes utilizaron *Te₁* “**Los electrones tienen una cualidad especial: atravesar paredes**” ó *Te₂* “**Los electrones son bolillitas muy pequeñas**” o ambos, para explicar la distribución y la curva $P(x)$ para electrones que mostraba el software. Pero como la salida presenta la curva de interferencia modulada por la difracción -un máximo absoluto en el cero y varios máximos hacia los costados- los estudiantes dirigieron su atención al máximo central, sin sorprenderse por los mínimos de la curva, que no aparecían en el caso de las bolillas. Entonces, en lugar de reconocer las diferencias fundamentales entre las curvas para los electrones y las bolillas, las encontraron parecidas, pues ambas curvas de $P(x)$ tienen el máximo en el centro.
- Otro punto conflictivo ligado a *Te₁* es que cuando los estudiantes advierten las franjas de impactos en toda la pared, solo consiguen explicarlas si los “electrones-bolitas” atraviesan la pantalla en cualquier parte. No reparan en que hay zonas con ningún impacto, ni relacionan este patrón con los conceptos ondulatorios previos, que evidentemente no están aquí disponibles, aunque habían sido estudiados en el año anterior. Como el electrón es considerado una “partícula diminuta” esta experiencia debe enmarcarse en mecánica, no hay razón para actualizar en ese momento conocimientos de los fenómenos ondulatorios!
- El obstáculo anterior complicó en parte la continuidad de la secuencia, pero fue sorteado por la intervención de la profesora, quien señaló a los estudiantes la presencia

de los mínimos de la curva $P(x)$ que habían resultado inadvertidos. Se insistió en que las rendijas afectan a la distribución de los electrones de forma que ya no se “copia” la forma de las rendijas en la pantalla como lo hacían las bolillas, sino de otra forma, que resulta inesperada. Se consensuó con los estudiantes el nombre de “sistema cuántico” para señalar este comportamiento propio y distinto del esperado de los electrones en la EDR. A partir de esto se instaló la necesidad de buscar una explicación de la forma de la curva de “no suma”. En la próxima situación de la secuencia se aborda esta cuestión, pero previamente se analiza el comportamiento de un electrón libre, y luego el electrón en la EDR.

Situación 3: “Presentación de la técnica Sumar Todas las Alternativas”

Luego de acordar con los estudiantes la denominación de “sistemas cuánticos” para los electrones, enfatizando así su comportamiento “inesperado” en la EDR, se propuso la **Situación 3 “Presentación de la técnica Sumar Todas las Alternativas”** para presentar la técnica STA y aplicarla a sistemas cuánticos libres.

El objetivo era mostrar cómo se calcula la probabilidad para un electrón libre que está inicialmente en cierta posición y finalmente en otra. Se comienza con este caso, porque el electrón libre será el caso prototípico del comportamiento cuántico.

La Situación 3 tenía como acción principal que los estudiantes apliquen la técnica y analicen el resultado de aplicarla para el caso de un electrón libre. Se utilizó la “Simulación 1”, creada con Modellus para que los estudiantes visualicen la correspondencia de seleccionar distintas funciones $x(t)$ con los vectores amplitud de probabilidad asociados al mismo tiempo, sin tener que calcularlo. De esta forma, la simulación se utilizó para visualizar y aplicar los primeros dos “pasos” de la técnica STA (hasta la suma de todos los vectores asociados). La simulación también muestra instantáneamente el valor numérico del ángulo que forma con el eje de abscisas, cada vector amplitud de probabilidad asociado a la función seleccionada, expresado en el sistema sexagesimal, ya que resulta más familiar para los estudiantes que el sistema radial. Antes de ejecutar la simulación, se presentó a todo el Grupo de Clase, una imagen de lo que presenta inicialmente, indicando a los estudiantes como ejecutar la simulación. También se reflexionó acerca del significado de la función lineal que conecta ambos estados, refiriéndose a ella como $x_{clas}(t)$.

Luego la situación solicitaba a los estudiantes observar cómo variaban los valores de acción correspondientes con cada $x(t)$ “posibles” seleccionadas, respecto a la acción de la función clásica. El valor de acción S debía ser calculado a partir del ángulo del vector amplitud asociado a cada función.

- Acerca de la relación entre vectores y valores de acción (S)

La secuencia solicitaba a los estudiantes ejecutaran la simulación, y a partir de lo que ésta mostraba, que comparen los valores de acción de las funciones cercanas y alejadas de la clásica. Como el software presenta los valores de ángulo, los estudiantes debían realizar un sencillo cálculo para obtener los valores de acción. Entonces, primero compararon los vectores, y luego los valores de acción. Cuando se pidió comparar las direcciones de los distintos ángulos respecto a la dirección del vector amplitud de probabilidad clásico, la notación empleada no resultó familiar que la dirección de un vector esté dado por su ángulo.

Algunos estudiantes lograron establecer relación entre los vectores y las funciones que seleccionaban, mientras otros encontraron estos resultados totalmente desconectados, aunque ya se había conversado acerca de la técnica y de la simulación. Por eso se infiere la utilización de dos teoremas en acto (Teoremas de comparación de vectores *Tcv*):

Tcv₁: “Las funciones cercanas a la función clásica tienen asociados vectores parecidos al vector asociado a la clásica” y
Tcv₂: “Ángulos y funciones no se relacionan”

Utilizar el segundo de estos teoremas en acto implica no aceptar que hay una relación entre las funciones que se seleccionan y los vectores asociados, lo cual obstaculiza la conceptualización, porque los estudiantes quedan anclados en la situación, y no se pueden formular las conclusiones requeridas para abordar las próximas situaciones.

A continuación, se analiza la utilización de cada uno de estos teoremas en acto:

Tcv₁: “Las funciones cercanas a la función clásica tienen asociados vectores parecidos al vector asociado a la clásica”

Los integrantes del Grupo 2, intentaron interpretar las consecuencias de seleccionar funciones “cercanas” a la función clásica, utilizando este teorema en acto:

- (E5;41)
- A₉: *¿El ángulo depende del vector? ¿O no? ¿O el vector depende del ángulo? ¿Qué depende de qué?*
A₆: *El ángulo depende de cada vector.*
A₉: *Entonces cuando vos te alejás poco de la función original te movés poco y por lo tanto el ángulo aumenta...*
A₆: *...poco...*
A₉: *Poco, pero si vos te movés para abajo ¿también es lo mismo o qué?*
A₁₀: *Aumenta también*
A₉: *Ah es verdad, aumenta!*
A₇: *Ves ahí, ahí te corriste del valor de x...para abajo pero para arriba también aumenta. Para arriba*
A₁₀: *Bueno, en los valores que están repetidos, los valores, aumenta!*
A₉: *¿Por qué siempre sube?*
A₁₀: *18, 19, 20 ...*

Los integrantes del Grupo 3 propusieron abordar la tarea de comparar los valores de acción seleccionando una función “alejada por arriba” de la clásica, y otra por “debajo de la clásica”, calcularon los valores de acción para cada caso, y formularon una conclusión acorde a sus resultados:

- (E5;162)
- A₁₃: *Bien, comparemos las acciones*
A₁₄: *Es mayor.*
A₁₃: *Por eso, ésta es menor!*
A₁₄: *No importa, decimos que es menor y listo!*
A₁₃: *Entonces que puedes concluir...que...Podemos concluir que S del 1 b es menor que S de 2 a. Lo que la hace menor es. ...*
A₁₄: *No sabemos cuanto?*
A₁₃: *Lo que lo va a hacer menor es que, fijate...no, porque...Sí, claro, porque era el ángulo lo que cambiaba! No, claro, cambiamos el ángulo, y el ese, al cambiarlo, se modificó.*

A₁₄: Si el ángulo era lo que cambiaba.
A₁₁: Cambió el ángulo porque el ángulo era 49.
A₁₃: Es más grande ahora!
A₁₄: 2 a es más grande que 1 b.
Profesora: Bueno, hicieron una sola función ¿cómo saben que siempre va a ser más grande? Elijan otra, una de por abajo, una lejos por arriba y una bien cerquita....elijan...por ejemplo, una que esté por arriba...y una por abajo...ves, esa está lejos por arriba
A₁₃: Hacé que se mueva poquito...
A₁₄: Pará, anotemos cada una....Bueno....
A₁₃: Equis... 0,005 ¿y t? 1,404
A₁₄: ¿y el ángulo? 143 guau...143!
A₁₃: Entonces ese va a ser igual a 143.87Por 6,625 por 10 a la menos 34 sobre 2 pi, cierro paréntesis...ese es igual a....1,51 por 10 a la menos 32.....Joules. Uhhh! También es mayor.
A₁₄: También es mayor que este, y menor que este....1 b es mayor que S de 2 a. ..que ese es mayor...
A₁₃: Claro...ponele uno...Hacés ese de uno a es mayor que ese de entre paréntesis, uno...Ahora tenemos que ese uno be es menor que S de 2 a 2...y, cómo se dice este con respecto a este?
A₁₄: El...el...éste ese uno y este ese dos....
A₁₃: Claro.
A₁₄: Entonces ese uno be es menor que ese 1, que es menor que ...y ahora por abajo, esto era por arriba...Este se llama ese uno y este ese dos
A₁₃: 1 b menor 1 es menor que ...este se llama S1 y este se llama S2. S1 b es menor que S de 2 a acá poné 1 y a su vez es menor que S de 2 a.
A₁₄: Bueno, otro caso, a ver...
A₁₃: Agarrá uno del medio.
A₁₄: Este caso es de abajo y este de acá arriba es de arriba...ya hora al medio... S3 igual al ángulo 49,207... S1 es mayor que esta.
A₁₃: Claro, pero ahora hay que comparar con el uno be...
A₁₄: Sí, bueno, uno be es mayor que esta!
A₁₃: El 1 b siempre es menor....S1... Entonces, uno be sigue siendo menor que... Arriba al medio abajo, tenés razón. Claro, va... disminuyendo así.
A₁₄: Dos... Va disminuyendo así..no! va aumentando así!

Sin embargo, cuando tuvieron que referirse a las direcciones de los vectores, utilizando los ángulos de cada vector que la simulación va mostrando en forma instantánea debajo del dibujo del vector, no pudieron formular ninguna relación entre los vectores. No era familiar la relación directa entre la dirección de un vector y el ángulo que éste forma con el eje positivo de abscisas:

A₁₃: ¿Cómo son las direcciones de los vectores asociados a x t cercanas a x clas t ?
Este!!! No sé... y las direcciones alejadas.....aaaaaaaaaahh ¿La llamo a
(E5; 259) Profe?
A₁₄: y si, dale
A₁₃: Ahora ¿Cómo son las direcciones de los vectores asociados? La conclusión total fue que este es menor a todos estos!

Luego, con la interacción de la profesora consiguieron formular una respuesta basada en la proporcionalidad entre proximidad de las funciones y similitud de los ángulos de los vectores:

- Profesora:** *Primero: les dice a cada equis de te cercanas a la equis clásica. Esta es la equis clásica. ¿cuáles son las cercanas?*
 A₁₃: *estas*
 A₁₄: *Y las que están por acá (...) Pero, ¿cómo sacamos la dirección?*
 (E5; 264) **Profesora:** *¿qué está pasando con las direcciones de los vectores respecto a la clásica?*
 A₁₃: *Se superponen.*
 A₁₄: *Están cerca.!*
 A₁₃: *Y... En las alejadas se aleja.!!! mirá!*
 A₁₄: *Cuanto más me alejo más... y si es un poquito es poquito...*

Las integrantes que conformaban este grupo, interpretaron los resultados de la simulación utilizando Tcv_I :

- A₁₈: *Y..con respecto al clásico, para abajo son grandes... Para acá son más grandes*
 A₂₁: *Sí, dio grande... Para allá también.*
 A₁₈: *A medida que se acercan al coso van a ser más chicos a medida que se alejan van a ser más grandes...*
 A₂₁: *A medida que se alejan más grandes y a medida que se acercan más chicos, pongamos, ¿qué podés decir?*
 A₁₈: *A medida que se acercan...*
 A₂₁: *¿cómo se llamaba el coso?*
 A₁₈: *Ángulo de amplitud de probabilidad clásica, que se acerca al ángulo de amplitud de probabilidad*
 (E5; 36) A₂₁: *va a ser más chico el valor del ángulo...*
 A₁₈: *No, no van a ser más chicos, llega un momento que son iguales*
 A₂₁: *Bueno pero le ponemos que, a medida que se acercan al ángulo de amplitud de probabilidad clásica*
 A₁₈: *El valor... A medida que se acerca al ángulo de amplitud de probabilidad clásica*
 A₂₁: *Entonces ya está...*
 A₁₈: *El valor de las distintas x en función de tiempo se va a acercar más a dicho ángulo...*
 A₂₁: *Se va a cercar más... a...*
 A₁₈: *Se va a acercar más a dicho ángulo Y a medida que se alejan, el valor del ángulo de las distintas x en función de t va a ir en aumento.*

Profesora: *cuando vos te corrés poquitito de acá ¿cómo son estos vectores?*
 A₂₁: *Eh....se parecen más a estos*
 (E5;60) **Profesora:** *Claro, bien ¿y cuando te alejas?*
 A₂₁: *Son más grandes*
 A₁₈: *Son más grandes!*

Luego, también tomaron algunos valores de ángulo que la simulación ofrecía, y realizaron el cálculo para concluir acerca del aumento del valor de la acción para otras funciones respecto de la clásica:

- (E5; 94) A₁₈: *A ver, cerca...cerca, entonces tenemos que hacer...*

A₂₁: Ese es igual a 58...
 A₁₈: 58 coma 427 por.... 9 coma 11 por 10 a la menos 35
 A₂₁: ¿Cuánto te da?
 A₁₈: 58 coma 427 por 9 coma 11 por 10 a la menos 35, 5 coma 32 por 10 a la menos 33...ay no!... joules por segundo
 A₂₁: Ah o sea más grande! Ahora “ese” es igual a 134, 828 por 9 coma 11 por 10 a la menos 35...
 A₁₈: 134 coma 828 por 9 coma 11 exponente negativo y da 2 coma 13 por 10 a la menos 32...No! Ah sí, es más grande...Joules sobre segundo
 A₂₁: Si, es más grande!!!!
 A₁₈: Entonces, cuanto más...lejos
 A₂₁: cuánto más lejos...cuánto más lejos más grande es
 A₁₈: Más grande... es el valor de “ese”

Tcv₂: “Las funciones y los ángulos de los vectores no tienen ninguna relación”

El Grupo 6, no logró interpretar lo que muestra el software, negando que exista alguna relación entre la proximidad de las funciones alternativas seleccionadas y los vectores asociados. Esto constituye un obstáculo para la continuidad de la secuencia, porque las preguntas que se plantean en la situación no tienen sentido para este grupo de estudiantes:

- (E5;69) A₂₇: *Profe! ¿Qué tenemos que poner? ¿ que puede tomar cualquier valor de ángulo?*
Profesora: *¿Cualquier valor? Fijate lo que dice acá:
 Compara el valor de la acción de cada una de las distintas x que el programa te va mostrando, con respecto a la acción de $x_{clas}(t)$ Al valor de acción de equis clásica ¿ya la habías calculado, no es cierto?*
 A₂₇: *Que es un solo ángulo...*
Profesora: *Claro, es un solo ángulo. Ahora, cómo es, cómo son los demás, respecto de ése? Tenés que comparar...*
 A₂₇: *Y...Son...son distintos... porque puede tomar cualquier valor!*
-
- (E5;88) A₂₈: *Ahí, fijate cuanto te va dando ahí..*
 A₂₇: *Cero coma...nueve, ocho....*
 A₂₈: *Y si subís que pasa?*
 A₂₇: *Al subir...nada! Puede tomar cualquiera!*
-
- (E5;104) A₂₇: *Y no sé que poner...No sé, nosotras vamos a poner que da toda la vuelta! Comparar...?*
 A₂₈: *Entonces le ponemos que puede tomar cualquier valor?*
 A₃₀: *Puede tomar cualquier valor*
 A₂₇: *Puede tomar cualquier valor, ya está! Fíjense de no pasarse de dos coma...de dos...pero va a dar la vuelta, sí!*
-
- (E5;115) A₂₇: *Entonces podemos poner que...las, que según varía equis te, varía el vector, pudiendo tomar cualquier valor...*
 A₂₈: *Y da la vuelta*
 A₂₇: *Sí, pero cualquier vector..el ángulo es cualquiera! Según varía equis te, varía el vector...No, varía el vector de ángulo pudiendo tomar cualquier valor.*

Cuando la profesora orientó a los estudiantes hacia la comparación, ellas formularon una respuesta basada en el uso de Tcv₂, y consensuaron que seleccionar funciones cercanas a la función clásica implica poca variación de los ángulos asociados con respecto al vector amplitud clásico:

Profesora: Bueno, entonces lo que nos pide es...¿que pasa si el electrón, en vez de moverse por la función o trayectoria clásica se le ocurre moverse por otro lado?. Que vector asociado va a tener?

(E5;230) A₂₇: Cuanto menos te muevas, más parecido es el ángulo... Ves que si te movés muy cerquita, ves que el ángulo va a ser..poca modificación va a tener...En cambio cuanto más nos alejemos del vector clásico, más va a ser el ángulo!

Pero se puede observar en la conversación siguiente del mismo encuentro, que vuelven a utilizar Tcv_2 , al interpretar que las direcciones de los vectores son aleatorias, y no guardan ninguna relación con las funciones seleccionadas:

A₂₇: No, la cosa es que, hay que poner..este ya lo hicimos, que según varía el equis te varía el vector del ángulo, ehhh tomando valores más alejados del valor de ángulo, podemos poner, tomando valores más ehhh alejados del valor de ángulo según cuanto más se aleje de equis te clásico

A₃₀: Del ángulo?

A₂₇: O..., varía con el vector clásico..Sí, varía el valor del ángulo...No! Varía el vector del ángulo eh siendo más ehmmm más alejado de éste, más alejado de este valor cuanto más se aleje equis te de equis clas te

A₃₀: Se aleje?

(E5;250) A₂₇: Ehmmm siendo más alejado de este valor, cuanto más aleje equis te de equis clas te. Eh hh no sé porqué...jajaja! Entonces, por qué? Pongamos, también concluimos que, eh hh a pesar de que tome cualquier valor equis te el vector amplitud de probabilidad nunca se mueve, vah, siempre se mueve hacia la izquierda, y nunca puede pasar hacia la derecha... Ponemos también concluimos... A pesar de cualquier valor, cualquier valor de equis te el vector siempre sigue hacia... Siempre gira hacia la derecha y no hacia la izquierda del vector eh equis clas

A₂₈: clásico

A₂₇: sí...Acá iría varía el vector del ángulo equis clas te

En un encuentro siguiente, (E6), luego de la conversación con todo el grupo, en la cual se buscaba generar consenso con todo el GC, las estudiantes del Grupo 6 parecen haber abandonado el Tcv_2 y respondieron señalando la existencia de una relación entre las funciones alejadas de la función clásica y los vectores correspondientes:

(E6;82) A₂₇: Porque nosotras como que pusimos que según varía equis de te varía la dirección del ángulo.... de amplitud... Claro...siendo más alejada, y acá no sé si está bien... Claro, y cuanto más lejos, más lejos es el ángulo!

Aquellos estudiantes que reflexionaron acerca de la relación directa entre el valor de la acción S con el ángulo del vector asociado, y también los que realizaron el cálculo del valor de la acción a partir de los ángulos de los vectores mostrados en la simulación, formularon que **“La acción clásica es menor respecto a otras acciones”** (Grupos 3 y 4). Aunque el Grupo 2 también había utilizado Tcv_1 , formuló que **“La acción disminuye al alejarse de la función clásica”**. Las integrantes de este Grupo 6 no consiguieron realizar una formulación, debido a que seguían sosteniendo el Tcv_2 , sin notar la relación entre la selección de distintas funciones y el valor de los ángulos asociados.

En el encuentro siguiente (E6), cuando la profesora propuso establecer un acuerdo respecto de los resultados inferidos a partir del software, los estudiantes de los Grupos 3 y 4 que habían concluido que el valor de acción es el menor, intentan convencer a los demás grupos, que la acción es mínima para la función clásica:

A₁₀: Bueno, nosotros dijimos si el vector era hacia abajo, movía el electrón..un poco más de equis clas, o sea ,el ángulo era 132, mas o menos, y “ese” era de 5,58 por I₀ a la menos 33 kg por metro cuadrado sobre segundo, o sea, era menor que la “ese” de equis clas.

(...)

A₉: nosotros habíamos concluido que a medida que el vector se aleja de x sub clas, tanto hacia arriba como hacia abajo, su valor de acción disminuye.

Profesora: *¿disminuye?*

(E6;76)

A₁₈: no, aumenta.

A₉: ¿no disminuye?

A₁₈: nosotras pusimos...cuánto más abajo está, mayor “ese”

A₁₄: No! Nosotros pusimos que cuanto más lejos está, mayor es el valor de ese!

A₁₈: a medida que se acerca el ángulo de amplitud de probabilidad clásica al ángulo de probabilidad de amplitud el valor de las distintas x en función de t se va acercar más a dicho ángulo y a medida que se aleja el valor del ángulo de las distintas x de t va a ir en aumento

A₁₄: la clásica es menor que las demás!

(E6;96)

A₁₃: a medida que te alejas de equis sub clas de t en cualquier dirección, ese aumenta....

A partir de esta conversación, la profesora señaló que la acción es mínima para la función clásica, aunque en esa oportunidad no lo estableció como principio, porque no era el objetivo en ese momento hacer referencia a los sistemas clásicos, ya que se estaba ocupando del caso del electrón. Esto responde a la decisión didáctica de instalar el Principio de Mínima Acción más adelante, al estudiar la transición cuántico-clásica.

Profesora: *¿y cuando algo es menor que todo lo demás cómo es?*

Varios estudiantes: mínimo!

Profesora: *Mínimo, ¿están de acuerdo? Entonces la equis clas tiene S mínimo, sí? Es el menor valor...*

A₁₃: puedo decirlo a ver si lo escribí bien? a medida que te alejas de equis sub clas de te, ese aumenta. (como dictando para todos)

(E6; 97)

Profesora: *Claro, o sea si S aumenta el ángulo tiene que aumentar, ¿por qué? ¿cómo era la fórmula para encontrar el ángulo?*

Varios estudiantes: ese sobre...h barra

Profesora: *Claro, y ¿qué significa? Si S aumenta, como hace es un número que no cambia ¿qué va a pasar con S?*

A₁₃: S cambia, aumenta

A₁₄: es proporcional.

- Acerca del resultado de la suma de los vectores para el electrón libre

Los estudiantes tenían que obtener una conclusión acerca de la suma de los vectores asociados, a partir de la suma geométrica con algunos vectores que se ofrecían. Para eso tenían que notar en el gráfico que aquellos vectores que corresponden a funciones alejadas

a la clásica se anulan, y los vectores asociados a las funciones cercanas a la clásica no, y contribuyen a formar el vector suma. Como no era familiar realizar la suma de forma geométrica de más de dos vectores, al inicio del sexto encuentro (E6), la profesora resaltó la naturaleza de la suma vectorial, contrastándola con la suma aritmética de números.

De forma más o menos explícitamente, y con mayor o menor necesidad de la orientación de la profesora, los estudiantes utilizaron el siguiente teorema en acto (Teorema de anulación de vectores asociados, T_{ava}) para interpretar el gráfico realizado, y abordar la pregunta:

T_{ava}: “Los vectores asociados a funciones alejadas de la clásica se anulan”

El Grupo 1 necesitó la orientación de la profesora para formular una descripción de su resultado:

- (E6; 101) **Profesora:** *Miren el gráfico. ¿A qué conclusión llegaron? Estos que estaban alejados, ¿qué pasaba con estos? Yo sumo este vector, este, este, y este....La suma total ¿cuánto da?*
A₂: 360...
Profesora: *No, la suma...yo digo suma...inicial con final ¿Y todas estas que te pasó?*
A₂: Se anularon.
Profesora: *¿Y estos? Los únicos que no se anularon ¿quiénes son?*
A₂: De la misma dirección
Profesora: *Los que están ..cerca...*
A₂: Sí... Tienen la misma dirección

Uno de los estudiantes del Grupo 2, se refirió a la naturaleza de sumar vectores y las posibles anulaciones, y luego con la interacción de la profesora consiguieron formular una descripción del gráfico realizado:

- (E6; 43) *A₇: No siempre la resultante va a ser mayor al valor de..., a los factores de la suma, a la contribución a la suma de los vectores correspondientes*
...
A₇: Según el ángulo que tenga el vector... La dirección del vector sea determinada por el ángulo de amplitud.
-
- (E6; 62) **Profesora:** *Bueno, ¿cómo va la suma? Como va quedando?*
A₈: Cerrada
A₉: Entonces te da la línea esta...
A₇: Claro porque una va para arriba y la otra va para abajo
A₉: Que no es tan recta por...
Profesora: *Claro, son parecidas por muy poquito, o sea que la suma va a estar formada ¿por que vectores? Los que estén...*
A₈: en el medio...
Profesora: *Que son los que están cercanos... Los que estén cercanos al vector equis clásico, esos son los únicos que cuentan porque los demás...*
A₈: Ah, es verdad, ¿entonces esa es a la conclusión que teníamos que llegar?
A₇: Claro!
A₈: Sumado se anulan...
A₇: Entonces, sumados... a ver que ponemos? Todos los vectores cuyos ángulos tienen un valor...quedan representados tienen valores cercanos a equis clásica....(dicta)

Los estudiantes del Grupo 3, realizaron consideraciones cinemáticas antes de formular una conclusión de lo obtenido en la suma, dirigiendo su mirada a los pares ordenados ofrecidos:

A₁₇: ¿Qué puedes concluir acerca de lo que sucede con la contribución a la suma de los vectores correspondientes a las equis(t) alejadas de la equis clas(t)?

A₁₅: Que nos queda igual...

A₁₃: Que la suma va a ser igual, porque, fijate que equis te... la suma de equis clás te es igual a la suma que está alejada de equis clas te ¿o no?

A₁₄: Si....

(E6;38) *A₁₅: No sé, para mi la suma esta no cambia, va a ser la misma...Porque como va para arriba, para abajo, no hace nada...*

A₁₄: Claro, porque como que este, que es de este equis clas, es igual que el de este equis, y son iguales pero van para distintos lados...

Esto sería de equis clas más abajo y esto más arriba y estos son iguales. ...

A₁₃: Entonces sabemos, que de equis clas si el valor aumenta, perdón, si el tiempo es menor, el mismo valor de equis clas te va a estar en equis t pero hacia abajo va a ser el mismo si el tiempo es mayor hacia arriba...o no?

Profesora: *Entonces, ¿cuáles van a considerar en conclusión?*

A₁₅: Estos de acá, en la línea

Profesora: *Exacto, ¿y estos cuáles son?*

A₁₅: No los que forman los rombitos, los rombos...no

A₁₄: Los que están cercanos tienen todos la misma dirección

Profesora: *Claro, ¿qué pasa con estos? ¿Qué hagan este rulito que quiere decir? En cuanto a vectores, la suma total de todo esto, ¿qué les daría? ¿Se acuerdan como era la suma de los vectores? Que iban poniendo uno a continuación del otro. Y el total era, de donde había empezado con el primero...*

A₁₃: Porque vos empezás acá, vas teniendo en cuenta los ángulos, vas sumando los ángulos y te anulás porque al final terminás en el mismo punto.

Profesora: *En general, cuando están alejados de la clásica forman un rombo ¿y por qué forman eso? Porque habían visto que las direcciones de los ángulos estaban bien alejados.*

A₁₅: Ah claro, eso Si.

(E6;49) **Profesora:** *Porque si los ángulos hubieran sido siempre cercanos ¿que hubiera pasado?*

A₁₃: Hubiera seguido y seguido. Considerando...los valores... de los vectores cuyo ángulo está alejado de equis sub clas t. Valores de los ángulos que se encuentran alejados del ángulo equis clas t coma sus vectores forman una especie de...

A₁₅: rombo

A₁₃: Si, eso. Punto Esto quiere decir que los vectores se van sumando, pero al poseer diferentes ángulos la suma de todos estos da cero ya que se empieza y se termina...

A₁₄: Podemos decir, como sabemos que empieza y termina en el mismo punto...eh...

A₁₃: Al ver que se terminan en el mismo punto, la suma de sus vectores es 0, porque sus valores se anulan por la posición de los ángulos. La suma de los vectores da 0. Porque sus valores se anulan por sus ángulos... O sea, da cero porque...por la posición de los ángulos....

Las dos integrantes del Grupo 4 presentes en ese encuentro, ya habían dibujado los vectores en el encuentro anterior, y habían interpretado su dibujo como el de un “dragón chino” pero en este encuentro (E6) con la intervención de la profesora lograron formular una conclusión para la suma:

- Profesora:** A ver... fijémonos un poquito acá, la suma final es desde el principio hasta el último, fijate qué pasa cuando los sumas*
- A₁₈:* *Y van aumentando...y restan pero además vuelven al principio!*
- Profesora:** ¿qué pasa con estos vectores cuando yo los sumo? Uno que va para arriba y hace así con otro que hace esto... ¿qué sucede con esa suma?*
- A₁₈:* *Y...sube y baja, o sea, disminuye la suma*
- Profesora:** Claro, disminuye ¿hasta llegar a cuanto? Mirá, si volvés al punto de partida*
- A₁₆:* *A cero*
- A₁₈:* *A cero*
- Profesora:** O sea que todos estos vectores, ¿Qué les pasa?*
- A₁₈:* *Y...se anulan!*
- Profesora:** Se te están anulando... y estos? También, o sea que los únicos que voy a tener que considerar para hacer la suma son estos ¿qué son quiénes? Fijate quienes son acá*
- (E6;2) *A₁₈:* *Los de 50, 51, 53 49, 52*
- Profesora:** Claro, y si vos te fijás en la simulación son los que están, son las equis de t estas que están cercanas a ¿qué?*
- A₁₈:* *A uno!*
- Profesora:** Claro, fijate cuánto es 1, a ver, poné el circulito azul sobre la línea, cuanto es el ángulo?.*
- A₁₈:* *Este, 49,5*
- Profesora:** Claro, es la mitad de esa función equis de te...fijate, es bien cerquita, ¿de quién?*
- A₁₈:* *De equis de te...*
- Profesora:** Clásica... muy bien, o sea, en conclusión, las únicas que tengo que tomar, ¿cuáles son?*
- A₁₈:* *Las que están cerca!.... Sólo se pueden sumar los vectores cuyos valores pará no, cuyos...cuyos equis de t se encuentran cerca de equis de t clásica coma el resto se anulan*

En el siguiente encuentro (E7) en una conversación entre el GC y la profesora, una de las integrantes del Grupo 4, (A₁₈) nuevamente se refirió a la suma:

- (E7;14) *A₁₈:* *(...) sólo se pueden sumar los vectores cuyos equis en función de se te se encuentran cerca de la equis en función de te clásica porque y los del resto se anulan...*
- Profesora:** claro la fórmula te decía que sumes todos pero, cuando sumas las que están lejos de acá...*
- A₁₈:* *se anulan!*

Las integrantes del Grupo 5, expresan que no les resulta familiar el término “contribución a la suma”, aunque con mucha interacción con la profesora, finalmente logran formular una conclusión a partir de su gráfico:

- (E6;17) ***Profesora:** bueno. ¿qué pueden concluir? ¿Qué puedes concluir acerca de lo*

que sucede con la contribución a la suma de los vectores correspondientes a las equis de t alejadas?

A₂₄: ¿Qué significa contribución?

Profesora: Contribución, significa si hacen que la suma aumente o disminuya o se anule.

A₂₄: Bien...se anulan!

Profesora: Bien. Todas estas que son las que están lejos

A₂₄: Sí

Profesora: se anulan. ¿Y todas estas?

A₂₄: También.

Profesora: Bien, entonces ¿quiénes son las únicas que contribuyen a la suma?

A₂₄: Y..las que están más...éstas son! La suma de los vectores correspondiente a las equis t, ehmmm, alejadas de la equis clas t...

A₂₂: Se anula?

A₂₄: No! Ahhh las que están cerca..contribuyen a la suma de los vectores...

Ehh...cómo es esto? Hay algunos vectores que...contribuyen a la suma, hay que poner, eso!

Las estudiantes del Grupo 6, aunque al principio también permanecieron ancladas un tiempo debido al desconocimiento del término “contribución a la suma”, intentaron formular una conclusión acerca de lo que observaban en su gráfico, y lo hicieron correctamente sin la intervención de la profesora:

A₂₇: Pero después de sumar los vectores siempre va a terminar en el último!

A₂₉: Ay, no sé que tiene que ver las alejadas!

(E6;150) A₂₇: Como que al sumar las alejadas, las alejadas se..cancelan, digamos
A₂₈: Las más grandes!

A₂₇: Las alejadas serían los ángulos más grandes!

A₂₈: Claro, se cancelan estas con estas también igual, porque si vos ves, que esto lo trasladás acá, te da ...te da cero!

A₂₇: Pero...no entiendo a que se refiere con la contribución a la suma

A₂₈: Y, yo pondría que se cancelan los ángulos a medida que se alejan...

A₂₇: Sí...entonces llegamos a la conclusión de que se pueden anular todos los vectores alejados, y por lo tanto, la suma volvía a éste

En una instancia en que la profesora se acercó a este grupo y notó que las estudiantes no habían representado el vector suma como un vector cuyo inicio coincide con el inicio del primer vector y el extremo con el final del último vector -como es usual en la suma geométrica-, ellas aprovecharon la ocasión para “chequear” con la profesora su conclusión:

Profesora: Y entonces en éste, cuál sería la suma?

(E6;175) A₂₈:: Sería de acá a acá...

A₂₇: Sería de este a éste. Ahhh sería este!!! Sí, sería de ese clas a...

A₂₇: Entonces, luego de sumar, ehhh muchos ángulos de de amplitud... de ángulos del vector amplitud..No! luego de sumar vectores...con distintos ángulos del vector amplitud

(E6;202) **Profesora:** Vectores amplitud, se llaman así, vector amplitud...

A₂₇: Luego de sumar los ángulos del vector amplitud...

Profesora: Sí, o los vectores solamente!

A₂₇: Ay...me marié...

Profesora: O sea, vos sumás los vectores, sí? Para sumar vectores, cómo hacen? Tienen igual longitud, pero no son iguales en ángulo... A ver...cuando ustedes suman ángulos en geometría, los ponen todos acá, y entonces bueno, sumo este, sumo éste ángulo, sumo éste...Pero acá ustedes no están sumando ángulos nada más... Suman vectores....

A₂₇: Sí, y bueno llegamos a que..estos ángulos...o! estos vectores se cancelan, por lo que obtenemos, eh, como era? La misma eh amplitud?

Profesora: El vector...

A₂₇: Ponemos el vector correspondiente a ese... Luego de, luego de sumar los vectores, luego de sumar los vectores amplitud, ponemos entre paréntesis teniendo en cuenta los ángulos...Teniendo en cuenta los ángulos de los mismos, eh obtenemos que..Ehh de los mismos, obtenemos que estos se cancelan dando como resultado como era ...el vector éste?? Todo el vector, cual es?...

A₂₈: Y..no es éste?

Profesora: Pero...vos luego de sumar todos los vectores...

A₂₇: Sí, estos...

Profesora: Claro, pero cuáles son? No se cancelan todos...Que es lo que dijimos hace un rato, cuáles eran los que se cancelaban?

A₂₈ Éstos...

A₂₇: ...los que estaban al costado.... Obtenemos que los que están alejados... del camino...

A₂₈:: del clásico!

A₂₇: Claro, ponemos que los que están más alejados de equis clas de se te cancelan...

A₂₈:: ...dando como resultado ...

Es notable que una de las estudiantes de este grupo, al final del fragmento de protocolo recién presentado utiliza el término “camino”, para referirse a las funciones $x(t)$. Momentos anteriores a este fragmento, fue la profesora quien utilizó esta expresión con este grupo, explicitando que no se estaba expresando “camino” como sinónimo de trayectoria en el espacio. La utilización de esta notación en reemplazo de la expresión $x(t)$ se realizó solamente por cuestiones de simplicidad de la notación.

Para sintetizar el resultado de la suma, la profesora orientó a este grupo de estudiantes para que noten que la conclusión no se refiere solamente a la anulación de los vectores alejados, sino que consideró que en ese momento era muy importante la conclusión referida a la contribución de las funciones cercanas a la función clásica, y no solamente ésta:

A₂₇: ¡Entonces no da como resultado el vector equis clas!!

Profesora: No, no..! Porque el vector equis clas es un vector que mide uno! Y cuando vos hagas esa suma, cuánto te va a medir? ¿Cuánto mide?? La suma...

A₂₇: Cincuenta y algo..

A₂₈: No, la suma!

Profesora: La suma! Vos tenés este que vale uno, este que vale uno...

A₂₇: Sí...Ah..tres!!

(E6; 279) **Profesora:** Claro, ves? Y yo puse algunos nomás..en realidad tendría que haber puesto una tabla re larga! Sí? Entonces, los que están alejados que hacen?

A₂₈: Se cancelan

Profesora: Se cancelan entre sí, y esos no te aportan a la suma, pero los que están cerquita, de la equis de te clas..

A₂₈: Aportan!!

A₂₇: Entonces tenemos que los que están más alejados de equis clas, se cancelan, ehhh aportando a la suma solo aquellos que están cerca... Ah!!!! Por eso dice de lo de la contribución a la suma!!!!!!!!!! Como contribuyendo en vez de aportando!!!!...Aportando a la suma, a la suma de los vectores

Síntesis de lo analizado en la Situación 3

- El grupo de clase se familiarizó sin demasiadas dificultades con el software, a pesar de que es esencialmente diferente al software de simulación anterior, ya que mientras que en el anterior se simulaba una experiencia de laboratorio, y en cambio aquí se simula el modelo matemático de una parte de la técnica para calcular la probabilidad para un electrón libre, la STA. La Simulación 1 fue creada para evitar a los estudiantes los cálculos de las acciones y los ángulos de a los vectores asociados, que pueden resultar engorrosos.
- En la interpretación de la relación entre las funciones seleccionadas y los ángulos de los vectores asociados, algunos grupos utilizaron el teorema en acto *Tcv₁: Las funciones cercanas a la función clásica tienen asociados vectores parecidos al vector asociado a la clásica*, que era necesario para la continuidad de la secuencia. En este sentido, la simulación colaboró con la visualización de los resultados y los cálculos, como se había propuesto.
- Sin embargo, en otros grupos, la utilización del teorema en acto *Tcv₂: “Las funciones y los ángulos de los vectores no tienen ninguna relación”* constituyó un obstáculo, y posiblemente esto se debe a que la interpretación de lo que el software muestra se realizó solamente a partir de la visualización de los resultados del modelo. La profesora propuso entonces a los estudiantes reflexionar acerca los valores mostrados, proponiendo ejemplos numéricos concretos para que los estudiantes infieran que las funciones $x(t)$ alejadas tienen un valor de acción mayor porque cualquier función que une el estado inicial con el final que no sea la recta, implica una velocidad que en promedio es mayor. Como el valor de S es proporcional a la velocidad, al mantener los demás parámetros (masa y tiempo) constantes, y aumentar la velocidad, el valor de S aumenta. Para esta secuencia resulta esencial comprender el resultado de la técnica para el caso del electrón libre, ya en la ECPE se ha considerado a los electrones libres como un caso prototípico del comportamiento cuántico. Por lo tanto, para futuras repeticiones es necesario el planteo de preguntas y problemas acerca de los valores de acción de funciones alejadas de la función clásica, que permitan a los estudiantes anticipar los resultados de la técnica, y luego contrastarlos con la simulación.

- Para la continuidad de la secuencia era muy importante que los estudiantes comprendieran que hay un conjunto de funciones, cercanas a la función clásica cuyos vectores tienen dirección similar al vector de amplitud clásico, mientras que aquellas funciones que están más alejadas, tienen asociados vectores cuya dirección es muy distinta. Los ángulos de los vectores unitarios ofrecidos en la situación, permitió a los estudiantes abandonar T_{cv_2} , para poder realizar la suma y reducir la suma de todos los vectores alternativos, a un conjunto finito de ellos, correspondientes a funciones cercanas a la clásica. En el momento de realizar la suma, la profesora había notando que los estudiantes sólo utilizaban el teorema en acto T_{ava} : “**Los vectores asociados a funciones alejadas de la clásica se anulan**” y que desconocían la suma geométrica para más de dos vectores. Entonces, la profesora debió orientar a los estudiantes a que interpreten cuáles eran los vectores que no se cancelaban, y contribuían a la suma. La formulación final de la expresión para la suma, necesitó de la interacción con la profesora con cada uno de los grupos.

- En el material escrito entregado a los estudiantes y en momentos de la conversación con los estudiantes, la profesora utilizó dos expresiones que a la luz de este análisis no colaborarían para que los estudiantes establezcan la distinción entre el modelo matemático, y el sistema físico en cuestión. Es clave que los estudiantes entiendan que la simulación ofrece una herramienta de visualización del funcionamiento del modelo, y que no se “simula” ninguna experiencia. Así, las funciones $x(t)$ no son trayectorias del electrón, en el sentido de trayectoria en el espacio, ni caminos por los que transita el electrón. La primera de estas expresiones que fueron descuidadas, se encuentra en el material entregado a los estudiantes, que al explicar el funcionamiento de la simulación expresaba: “*el círculo azul puede representar un electrón o una partícula de masa mayor que él (según elijamos) que se encuentra libre*”. El pequeño círculo azul se programó para ser sólo un punto de referencia sobre la recta de la función $x(t)$ para poder seleccionar otras funciones compuestas por trozos de funciones lineales. La otra expresión utilizada por la profesora con uno de los grupos de estudiantes es “camino”, que conduce naturalmente a la idea de trayectoria en el espacio.

Aunque la profesora explicitó que con la expresión “camino” se estaba refiriendo a la función $x(t)$ que conecta el estado inicial con el final, esto puede constituir un obstáculo para la comprensión de los estudiantes. No debe interpretarse que cada función considerada equivale la trayectoria en el espacio, porque conduce a la idea incorrecta que “el electrón sigue todos los caminos a la vez”. La técnica debe interpretarse de forma pragmática, y ser aceptada como herramienta de cálculo. Lo que debe ser interpretado es el resultado que se obtiene al aplicar la técnica: no es posible describir el movimiento con una sola función $x(t)$, como en las partículas macroscópicas, sino se necesita la función clásica más un conjunto finito de funciones cercanas a ella. Estas expresiones deberán ser revisadas y reemplazadas en futuras repeticiones y adaptaciones.

Situación 4: “Análisis de la transición cuántica-clásica: del electrón a las partículas libres”

Una vez que los estudiantes formularon que en el cálculo de la probabilidad únicamente hay que considerar el aporte de aquellas $x(t)$ cercanas a la clásica, debido a que las alejadas se anulan sin aportar a la suma, se propuso el análisis de la transición cuántico-clásica, es decir estudiar lo que ocurre con la suma de los vectores en casos de masas mayores a la del electrón. De esta forma, se propuso que los estudiantes ejecuten la misma

“**Simulación 1**” pero seleccionando distintos “casos” para simular masas sucesivamente mayores.

Al correr la simulación para masas mayores que la masa del electrón, los estudiantes debían notar que aquellas funciones que se alejan poco de $x_{\text{clas}}(t)$, tienen vectores asociados con direcciones muy distintas respecto del vector asociado a la clásica. Este efecto se hacía más notable a medida que se seleccionaban los casos de masa cada vez mayor. El último caso que el programa permite corresponde a una masa de un billón de veces la masa de un electrón. Siguiendo lo establecido para el caso del electrón acerca de la anulación de vectores de ángulos muy distintos en la suma, se esperaba que ellos concluyeran que a medida que aumenta la masa, cada vez hay menos vectores que aportan a la suma, es decir que para valores más grandes de masa, el conjunto de funciones que se debían considerar en la suma era cada vez más pequeño. Se buscó abordar a la conclusión que en el caso extremo, de una masa “macroscópica”, el único vector a considerar es el asociado a la función clásica, ya que todos los demás se anulan. Esto permitía revalidar los conocimientos de los estudiantes acerca de las leyes de Newton, y que los estudiantes percibieran coherencia y continuidad de los saberes escolares estudiados.

La **Situación 4** requería dos tipos de acciones: analizar la relación entre las funciones alternativas y los vectores asociados, en casos de masas sucesivamente mayores a la del electrón. y por otro lado, analizar como resulta la suma en consecuencia:

- Acerca del cambio en los vectores asociados a las distintas funciones:

Para la acción de analizar los resultados de aumentar la masa, surgieron tres tipos de respuesta, que se dirigían a tres aspectos diferentes: Uno de los grupos señaló que el aumento del ángulo del vector clásico, y quedaron varados en esta idea, sin poder establecer ninguna otra relación, y sin cuestionarse el motivo. Otro grupo notó que seguía siendo válido que el ángulo del vector amplitud clásico es el menor respecto de otras funciones, como en el caso del electrón. Otros grupos, en cambio notaron que la regularidad que habían encontrado para el caso del electrón respecto de las direcciones de los vectores asociados a funciones cercanas y alejadas de la clásica cuando se aumenta la masa, dejaba de cumplirse, aunque no podían explicitar la nueva relación. Por lo tanto, se infiere la utilización de los siguientes teoremas en acto, utilizados para interpretar los resultados observados en la simulación. (Teoremas acerca de cambios al aumentar la masa T_{cam}):

Tcam₁: “Aunque aumenta la masa, todo sigue igual”; y

Tcam₂: “Al aumentar la masa, cambian los resultados encontrados para el electrón”

El primero de estos teoremas en acto, T_{cam_1} , fue utilizado por el Grupo1, y es análogo al teorema en acto utilizado en la situación anterior T_{cv_2} : “***Las funciones y los ángulos de los vectores no tienen ninguna relación***”, porque así como antes no se había establecido relación entre las funciones y los vectores, ahora tampoco tenía sentido analizar el efecto de aumentar la masa, que implicaba ejecutar la misma Simulación 1.

El teorema en acto T_{cam_2} - es necesario para comprender la transición cuántica-clásica, aunque debía ser enriquecido porque resultaba insuficiente para concluir que con el aumento del valor de la masa, la acción aumenta, y debido a que el ángulo está dado por el cociente entre la acción y la constante de Planck, pequeños cambios en la acción, significan grandes cambios en el cociente. Posiblemente esta imposibilidad de formular conclusiones, sea consecuencia de la forma de trabajar con el software en la situación anterior. Esto se podría evitar si en el diseño se hubieran contemplado preguntas para que los estudiantes formulen explicaciones basadas en consideraciones cinemáticas. Como los estudiantes en la situación anterior no habían reflexionado acerca de lo que mostraba el

software para el electrón, tampoco resultan comprensibles los resultados en esta situación, lo cual constituye un obstáculo en la conceptualización. Esto debió ser subsanado por la profesora, mediante la introducción de ejemplos durante el transcurso de la clase.

Tcam₁: “Aunque aumenta la masa, todo sigue igual”

Cuando los estudiantes del Grupo 1 ejecutaron la simulación notaron que el valor del ángulo es mayor que cuando se trataba del electrón, aunque no se cuestionaron acerca de ello. Se observa al final del fragmento que se presenta a continuación, que pese a la intervención de la profesora, cuya intención era reorientar la interpretación del software, ellos permanecen anclados utilizando **Tcam₁** sin conseguir formular ninguna conclusión:

Profesor: *El segundo caso es acá. El caso 2 es 1000 veces la masa del electrón, o sea, una partícula que tenga 1000 su masa*

A5: *¿Te cambia el vector?*

Profesor: *Te cambiará el vector? Eso es lo que tienen que averiguar ustedes...*

A₂: *A medida que le aumentás la masa al electrón cambias el vector.... Podemos poner que las componentes del vector se aproximan a menos 1 hasta llegar a cero, igual que acá...*

A₃: *Ah, ...entonces para sumar. ¿De qué forma afecta esto a...? Para ponele de nuevo play*

A₄: *8643 coma...*

(E6;74) **A₂:** *...afecta la dirección... Esto, cuando vos ponés acá... Puede ser que acá, cuando desplazamos el electrón en la mayoría de los casos tiene posición negativa arriba?*

Profesor: *Antes, cuando tenías el electrón, te tenías que alejar un poquito y el ángulo mas o menos era el mismo. Ahora, cuando la masa aumenta, ¿qué pasa? ¿Cambia o no cambia? esa es la pregunta. Cambia muchísimo más que antes!*

A₅: *Cambia! Con respecto a la dirección!!*

Profesor: *Si, con respecto a la dirección. El ángulo... ¿Se puede observar eso? Que a medida que aumenta la masa ni bien se alejan un poquito ya el vector se fue, entonces, con la suma, ¿qué va a pasar?*

A₅: *La suma va a quedar mucho mayor... o sea...*

Tcam₂: “Al aumentar la masa, algo cambia en los resultados encontrados para el electrón”

Los integrantes del Grupo 3, utilizaron **Tcam₂** al corroborar que para los casos de masa mayor se sigue cumpliendo que el ángulo del vector de amplitud clásico es el menor respecto de otros vectores asociados a funciones cercanas a la clásica, pero no formularon ninguna descripción de qué es lo que cambiaba en relación a la selección de las funciones y los vectores. Esto indicaría que ellos utilizaron la idea de la acción mínima para la función clásica construida en la situación anterior, y consensuada previamente en este encuentro, para responder la pregunta planteada:

(E6; 77) **A₁₄:** *Ehmm, fijate en los casos... Veamos el efecto de la masa del cálculo de la probabilidad*

A₁₅: *Se acaba el tiempo, nos quedan 10 minutos!!! Profe!!!! acá en el cuatro...*

Profesora: *Ahí ya pusieron el caso dos que es el caso de cien veces la masa*

del electrón..y hay que hacer lo mismo, hay que seleccionar, y analizar.

A₁₄: *¿Qué pasa con las alejadas? Con equis te!*

A₁₅: *Paso, be...vamos al siguiente!*

A₁₄: *Pará, ¿Cómo comparás?*

A₁₃: *A ver....acá, estas que están más alejadas..alejadas...que pasa con la equis clas alejadas?...El ángulo va a ser, de probabilidad...Anotá: Alejado poné, ángulo de amplitud de probabilidad clásica... 4,91 para comparar, y el de probabilidad es ... Si están cerca poné, ángulo de amplitud de probabilidad mínimo...*

A₁₅: *4.91? Es lejos o cerca?*

A₁₃: *Cerca*

Los integrantes del Grupo 2 también notaron que pasaba algo “distinto” pero no podían formular de que forma variaba la dirección de los vectores al seleccionar funciones cercanas a la clásica:

A₁₀: *A ver cuando está cerca, ahí, y cuando está lejos....*

(E6;112) **Profesor:** *A ver fijate bien, tratá de mover bien cerquita... ¿Qué pasa con el vector?*

A₁₀: *Va para todos lados!!!!..*

Profesora: *Bueno, y ¿que significa que va para todos lados?*

A₇: *Qué el ángulo de amplitud...sea muy grande, ..pero no...*

(E6; 138) A₇: *No tienen escala.*

Profesora: *¿ una escala....?*

A₈: *Una secuencia...*

También las estudiantes del Grupo 4 utilizaron **Tcam₂** y notaron un “cambio” respecto de los vectores:

A₁: *Bueno, vamos con las cercanitas.*

A₁₈: *Vamos con el segundo, cercanas, cercanas, cercanas, lejanas, lejanas. A medida que se alejan el valor aumenta.*

(E6;39) A₁: *El segundo caso*

A₂₁: *No, mirá, disminuye el valor, se hace negativo, mirá vamos de vuelta.*

A₁₈: *Cerca, cerca... En el segundo caso y en el tercer caso... En el tercer caso igual, a ver vamos de vuelta, tercer caso igual a medida que se alejan del valor...*

Las estudiantes del Grupo 6, al final del E6, también utilizaron **Tcam₂**:

A₂₈: *Mirá, a medida que se acerca, mirá que rápido cambia....*

A₂₉: *Ah queda abajo!!*

(E6;304) A₂₈: *A pesar de que está re-cerquita da cualquier valor...Si queda acá abajo!*

Como algunos grupos no habían alcanzado a realizar la simulación en este E6, y en el encuentro siguiente (E7) el aula de Informática no estaba disponible, se propuso a los estudiantes realizar una puesta en común retomando y enriqueciendo lo formulado por los Grupos 2 y 4, que habían utilizado **Tcam₂**:

(E7; 15) **Profesora:** *La fórmula decía que sumes todos pero, cuando vos sumas las que están lejos de acá...?*

A₁₈: se anulan!

Profesora: Se anulan... ¿Cómo sabemos que se anula? Porque se hacía como una especie de rulito acá. Así, así y así. O sea, volvía a partir de donde...de donde había partido. Está bien? Ahora, lo que ustedes no alcanzaron a hacer el otro día es cuando uno aumenta la masa. ¿Se seguirá cumpliendo o no eso?

A₂₁: sí, nosotras lo hicimos!!

Profesora: Ah, ¿ustedes lo hicieron? Porque no lo cuentan.

A₂₁: en el segundo caso a medida que se aleja la x de t de la clásica...aumentaba el ángulo

A₇: no! Variaba!!!!

Profesora: Y... cómo??

A₁₈: Sí. Teníamos que aumenta y disminuye, y...después que nos fijamos bien no...no nos dio así...

Profesora: Ustedes? A ver A₁₀? Bueno, podemos revisar, porque la idea...la idea es que yo tengo esto ahora, a ver...Yo tengo que m es 1000 veces la masa del electrón, Sí? Sería ideal que lo que ustedes vieran pero no tenemos posibilidad de ir porque ahora está ocupada la sala ...pasaría esto....

A₉: era eso de que se nos iba para cualquier lado?

A₇: Sí, sí....

Profesora: Cuando vos apenas te movés, y elegís esta, por ejemplo, antes esto era cercano a ella, y te daba por acá ¿no es cierto?

Estudiantes: sí...

Profesora: Pero ahora a medida que la masa aumenta resulta que yo ni bien me muevo un poquitito cambia totalmente.

A₁₀: aah pero cambiaba así, sin...

Profesora: Enormemente!

A₁₀: ahhh sí, entonces estaba bien....

A₁₈: nosotras pusimos que a medida que se aleja disminuye porque cuando más nos alejábamos aparecían valores negativos

Para establecer acuerdo al respecto, la profesora propuso que los estudiantes realicen el cálculo y a partir de allí, analicen el efecto del aumento de la masa:

Profesora: ¿Cómo podemos calcular un ángulo de una función que esté cerquita de esta clásica, un caminito que esté cerquita pero para este caso, de masa mucho mayor del electrón? O sea, hagamos esta cuenta, ustedes ayúdenme a hacer esta cuenta..Después la dividimos por h barra y ¿qué me va a dar la acción ese dividida por h barra? ¿El ángulo, ¿se acuerdan?

A₇: el ángulo!

(E7; 41) **Profesora:** Bueno, por qué no me ayudan y hacemos, un medio de e por ve cuadrado...Cuando era electrón había todo un conjunto acá que sí te aportaba ¿qué significa te aportaba? Que tenía vectores parecidos! Pero a medida que uno va aumentando la masa... ni bien te movés un poquitito el ángulo cambia muchísimo y cuando más grande sea la masa ese efecto es más notable.... Sí?

Algunos: sí...

Profesora: ¿Cuál sería el extremo de los casos? Que sea una pelota, una pelota de..

A₇: de fútbol

Profesora: Claro... en ese caso, ¿porque digo que es el extremo? porque ahí no puedo ni alejar, está bien? ¿por qué? Porque yo ni bien me aleje su ángulo es tan grande que me pasa lo del rulito se me cancela la suma. La idea de todo esto era hacerlo en la compu pero no pudimos. ¿Vamos bien?

Algunos: un poco...

Profesora: Acá está x clas, para el electrón... yo hacía el gráfico, y los que estaban cerquita y los podía sumar porque me daban parecido las fases, fases y ángulos es lo mismo, los ángulos eran parecidos

Alumnas: ahhh,

A₉: sí...

Profesora: Pero como yo la masa la voy aumentando respecto al electrón, resulta que ni bien me muevo un poquitito ya el ángulo cambió totalmente y cambió totalmente ¿Y qué significa que el ángulo cambie totalmente? Que en la suma se va a anular, sí?

A₉: y cuanto me puedo alejar?

Profesora: Entonces en una pelota grande yo ¿cuantas posibilidades tengo para que la partícula esa, o la pelota vaya de acá hasta acá? Una sola, ¿cuál? Esta, se llama x clas, sí? Para una pelota sigue una sola... que es esa. Pero para el mundo subatómico, por ejemplo los electrones, no es cierto que sigue una sola. ¿Cual sigue? La verdad es que la física no puede decir cual sigue, sí?. Porque es “como si” siguiera todas a la vez en el cálculo. ¿Porque digo que es “como si” siguiera todas a la vez? Y, porque para hacer el cálculo yo tengo que tener esta, esta, esta, Sí? Ya esta no. ¿por qué esta no?

A₁₄: porque se anula...!

- Acerca de la suma resultante en partículas clásicas o macroscópicas:

Luego de la conversación del séptimo encuentro (E7), los estudiantes intentaron formular las respuestas a las preguntas de que no habían podido abordar en el encuentro anterior, en la sala de informática, a partir de lo conversado con todo el grupo y la lectura de la síntesis que se les entregó por escrito. Es posible identificar el uso de dos teoremas en acto, utilizado por distintos grupos de estudiantes (Teoremas de la suma de vectores **Tsv**):

Tsv₁: “Si se suman menos vectores, la suma va a resultar menor” y

Tsv₂: “Queda un solo vector en la suma, entonces, el resultado es más exacto”

A continuación se presenta el análisis correspondiente a cada uno de ellos:

Tsv₁: “Si se suman menos vectores, la suma va a resultar menor”

Las estudiantes del Grupo 4, utilizaron este teorema en acto e infirieron que la suma de vectores es proporcional a la cantidad de vectores que intervienen en la suma, como se puede notar a partir del siguiente fragmento de conversación. La utilización de este teorema no les permitió formular una explicación válida para la transición cuántica-clásica:

A₁₈: Pero...pará, que sucede entonces con la suma de los vectores?

(E7; 25)

Profesora: Ahora, ni bien te corras en el caso 2, ni bien te muevas un poquitito vas a ver que vas a tener un ángulo re diferente, entonces, ¿qué va a pasar con la suma?

A₁₈: Nada!

Profesora: Antes, cuando vos te corrías un poco de la función clásica, los vectores no tenían ángulos diferentes, o sea, en la suma ¿qué te pasaba? Te aportaban solo los que estaban cerquita

A₁₈: Sí...

Profesora: y ahora que los que están cerquita son muy poquitos ¿qué va a pasar con la suma?

A₁₈: Y los que están lejos son los que van a aportar...

Profesora: Sí??? A ver de nuevo, los que están cerca antes eran un montón, ¿por qué un montón? Porque vos te podías mover y no cambiaba mucho, ahora ni bien te movés un poquito ya cambia totalmente el ángulo

A₁₈: Sí...

Profesora: ¿Qué significa? Que cuando yo vaya a hacer la suma ¿cuáles voy a considerar?

A₂₁: Los cerca!

A₁₈: Y los que están cerca!

Profesora: Pero muy cerca, mucho más cerca de los de antes cuando era el electrón solo ¿te das cuenta? Porque antes cuando era el electrón vos te dabas cuenta aunque me mueva por acá y...pero ahora ni bien te corres un poquito te re-cambia el ángulo, o sea, que en la suma ¿a quién vas a considerar? Ése, los que están...

A₁₈: Entonces ponemos, en ambos casos, ehm....solo hay que considerar los vectores que estén bien cerca del...

Profesora: Bien cerca del camino clásico ¿sí?

A₁₈: Se sumarán... Los vectores que estén cerca... Que estén muy muy cerca, muy cerca! del vector original...Y ... Acá, ¿de qué forma afecta esto el cálculo de p de x?

Profesora: Claro, acordate que la probabilidad...calcular el módulo del vector suma ¿está bien? ¿te acordás la última parte de nuestra técnica? Era sumar todo...

A₂₁: Era eso de h barra?

Profesora: Claro, eso...tenés que sumar todos y después elevar al cuadrado, fijate ¿se ve afectado si yo tengo que sumar muchos o tengo que sumar pocos o no?

A₁₈: Si porque si sumas pocos va a ser más chico el resultado que si sumás muchos...

A₂₁: Cuando se suman vectores...ay cómo ponemos?

A₁₈: Entonces ponemos, si sumás pocos vectores el resultado final será menor... que si sumás muchos.

La utilización de este teorema en acto no les permitió a los estudiantes formular ninguna explicación acerca de lo que predice la técnica para partículas macroscópicas.

Tsv₂: “Queda un solo vector en la suma, entonces, el resultado es más exacto”

Los integrantes del Grupo 2, utilizando Tsv₂ abordaron a una conclusión a partir de la lectura de la síntesis que la profesora les había presentado, y cuestionaron la aproximación referida a la suma de los vectores asociados a funciones cercanas a la función clásica:

(E7;32) A₁₀: Si, acá lo que te está diciendo en realidad que cuando es una partícula grande vos tenés una sola posibilidad, todas las demás se van a cancelar.

(E7;37) A₇: Entonces, ¿por qué se anulan?

A₁₀: Escucha una cosa, cuando es macroscópica, grande, se anulan todas.

A₆: No queda nada, pero cuando es microscópico....
 A₁₀: Cuando es microscópica hay algunas que se anulan y las otras no!
 A₉: A ver, cuando vos tenés microscópico, el vector clásico y vectores casi ahí. Esto es lo que se suma. Es lo que te está diciendo acá.
 A₇: ¿Y los de lejos se anulan?
 A₉: Claro!
 A₇: Pero, ¿no se anulan porque eran opuestos a otros?
 A₁₀: Si, Clarita, mirá.
 A₇: Ella dijo los de lejos.
 A₁₀: Escuchame una cosita, esto que estamos reflexionando acá, es lo mismo que esto. Este va a ser este, este va a ser este....
 A₉: Los demás no existen, entendés?
 A₁₀: Si se anulan, no existen!!!
 A₉: Se anulan solitos. Acá este párrafo que vos leíste está diciendo lo que acabo de decir yo ahí.
 A₇: O sea este por ejemplo, y este forman uno acá entonces se anulan.
 A₁₀: Claro!

(E7; 66) A₇: De toda la suma resulta un vector y ese vector es “ene”?
Profesora: No, “ene” es un número entero que te está diciendo todos los que tenés que considerar alrededor del clásico. Este,este..., para no estar diciendo uno por uno, te digo es “ene” veces el clásico. Por ejemplo, en tu dibujo....
 A₁₀: Pero, no es “ene” veces el clásico!
Profesora: N veces, mirá tu dibujo. ¿Cuántas veces? 1,2 3.?
 A₁₀: Pero, no es igual, igual.
Profesora: No, es proporcional, está bien. Porque hay un número ...en el medio que no se los di yo porque no es importante, es proporcional.

Finalmente, con una versión más enriquecida de *Tsv*₂, formularon explícitamente su conclusión:

(E7; 77) A₇: ¿Qué sucede con la dirección de los vectores cuando las $x(t)$ se alejan de la $x_{clas}(t)$?
 A₉: ...una partícula grande...
 A₁₀: A medida que se aleja entonces van adquiriendo valores que se cancelan.!!!
 A₇: Claro, cuanto más lejos se cancelan más valores
 A₁₀: Cuanto más se alejan... Adquieren valores distintos. Y tiene que ser así porque.... A medida que lo vectores...
 A₇: Cuando los vectores se alejan de x sub clas de t ...
 A₁₀: Se anulan...
 A₇: Los valores lejanos a x sub clas se anulan
 A₁₀: No, todos.
 A₉: ¿El macroscópico?
 A₁₀: Si, todos se anulan.
 A₆: En el macroscópico no queda nada, se anula todo en el macroscópico?
 A₁₀: Fijate.
 A₉: ¿Todos se anulan con su opuesto?
 A₁₀: La suma de todos los vectores asociados se reduce a un único vector cuyo valor de x es mínimo o sea x clas de t
 A₇: No, se reducen a un único vector...dando como resultado un único vector....¿Le ponemos correspondiente a aquella x sub clas cuyo valor de

acción es mínimo?

A₁₀: No. ¿De qué forma afecta esto el cálculo de p de x?

A₉: ¡Profe! ¿Qué es p de x?

Profesora: P de x es la probabilidad, si antes tenían que tomar un conjunto....

A₁₀: Ahora no!!!

Profesora: ¿Qué voy a considerar para la suma?

A₁₀: El vector

A₉: Porque es más probable.

A₁₀: Es más exacto!!

Profesora: Bien, por eso tenemos exactitud en decir que la pelota tiene esta función solamente...

A₁₀: Ahí va a estar, en cambio el electrón es una zona donde

Profesora: Es una zona...

A₉: Probable!

A₁₀: No existen muchos vectores sino que existe una única posibilidad es la x sub clas de t, por lo tanto...

A₉: Debido a que no se suman vectores hay una única posibilidad que es x en función de t y por lo tanto el cálculo de la probabilidad es exacta... Por lo tanto, p de x

A₇: Es una zona!

A₉: No, pero...probabilidades

A₇: Ah, no, claro...

A₆: Por lo tanto p de x es exacta.

A₇: Y si, no va a existir una zona sino un lugar específico donde se va a encontrar en un determinado tiempo

A₆: En un determinado punto...más probable

A₇: Para masa grande se obtiene un lugar específico, listo!

Los estudiantes del Grupo 3 también utilizaron el teorema en acto T_{sv2} , y a partir de él infirieron que, “en este caso como hay menos vectores para sumar, hay menos posibilidades que considerar”, como se puede apreciar en su conversación:

Profesora: La pregunta es ¿Qué sucede con la dirección de los ...?

A₁₅: Aumenta.

Profesora: Pero, aumenta ni bien me alejé, antes con el electrón aumentaba pero me tenía que alejar mucho, ahora aumenta enseguida...

A₁₅: Ah, claro.

Profesora: Ni bien te corrés un poquito...

A₁₅: Tiene menos posibilidades!

A₁₃: la dirección aumenta.

(E7; 28) *A₁₅: La dirección de los vectores aumentará ya que el ángulo será cada vez mayor. Punto aparte también se notará un aumento más significativo en el cambio de dirección de un electrón de mayor masa que el de uno de masa más pequeña*

A₁₃: De menor masa.

A₁₅: ¿Qué ocurrirá entonces con la suma de los vectores? Habrá que sumar menos vectores coma ya que al aumentar la masa la cantidad de probabilidades disminuye.

A₁₄: Qué la probabilidad disminuye. No la cantidad de probabilidad.

A₁₅: El número de probabilidad

A₁₃: ¿De que forma afecta esto el cálculo de P(x)?

A₁₅: Lo afecta de manera tal... Que el resultado obtenido sea más... preciso...?

Las integrantes del Grupo 6, utilizando los términos de la síntesis, y en base a *Tsv₂* formularon la conclusión solicitada:

- (E7;130) *A₂₇: Porque, digamos, está bien lo que dice acá, pero para mí lo que habría que poner acá es que..cuanto más..al ser mayor el objeto, ehhs más se cancelan! O sea.. ¡No!!, está bien!!!..*
A₂₈: Claro, se cancelan más y queda una sola dirección, una posible te acordás de la pelota que dijo?
A₂₇: Sí, está bien...No, pero está bien lo que dice porque...cuanto más alejada...cuanto...al ser más chiquito.....más pequeño, va a...
-
- (E7;151) *A₂₈: Que ocurre? Que...van a cancelar los cercanos...*
A₂₇: ¿Qué ponemos? Que...se van a cancelar... A ambos lados... Sí, se cancelan ángulos, se cancelan los más cercanos...ehh..y quedó ahí?
A₂₈: Como afecta esto al cálculo de pe de equis?
A₂₇: No sé como ponerlo...
A₂₈: y...está acá... Para los muy grandes la probabilidad...cumple las leyes de la física clásica... Y que...sigue un movimiento rectilíneo.....porque hay una velocidad constante
A₂₇: Pero...esto que es?
A₂₈: Es el caso macroscópico..Porque dice partículas u objetos de dimensiones mucho mayores que la del electrón...
A₂₇: sí...
A₂₈: Para mí la conclusión es que...en casos de masa grande se cumplen las leyes de la física clásica, es decir que si ehhs no se ejerce fuerza sobre un cuerpo su velocidad se mantiene constante
A₂₇: Bueno, entonces pongamos eso, repetilo...
A₂₈: Ehhs en los objetos macroscópicos se cumplen las leyes de la física clásica...Y eso habría que poner...si no se ejerce una fuerza sobre un cuerpo
A₂₇: Quedando un movimiento rectilíneo uniforme le ponemos?...Ahí leélo...

En el octavo encuentro, la profesora propuso realizar una puesta en común con todos los estudiantes, para retomar la cuestión del aumento de la masa en el cálculo de probabilidades, en base al teorema en acto *Tsv₂* utilizado por los estudiantes, intentando que los estudiantes abandonaran *Tsv₁*. Planteó analizar un ejemplo donde invitaba a los estudiantes a calcular los vectores asociados a dos funciones cercanas a la función clásica para un valor de masa de 1000 veces la masa del electrón, y las consecuencias para la suma. Pretendía analizar los cocientes en el caso del electrón y de una partícula de masa mayor, y compararlos. En este análisis la profesora hizo énfasis en el pequeñísimo valor de la constante de Planck. De esta forma, se propuso a los estudiantes generar consenso acerca de que es la constante de Planck es la que finalmente decide si se notarán los efectos cuánticos o clásicos:

- (E8; 29) *Profesora: ¿Por qué cambia tanto cuando la masa es grande? Te acordás que vos me decías, ¿por qué cambia tanto? Bueno, la respuesta es...porque la masa es grande...Bueno, porque justamente porque ya no tengo muy chico dividido muy chico; ahora tengo no tan chico dividido muy chico. ..Sí? ¿Acá que tenía? Muy chiquito dividido muy chiquito, pero acá... no*

tengo tan chiquito, acá tengo tres órdenes, no tengo muy chico dividido muy chico, y ahora fijate cómo va a dar el cociente, si algo no tan chico....

A₁₈: más grande!

Alumnos: sí...

Profesora: Bueno, y entonces acá que es lo más importante? Y... que el de abajo es el que manda todo...

A₁: ¿y entonces depende del valor de h barra, entonces?

Profesora: claro pero h barra es fijo

A₁: ¿pero es fijo para este caso nada más?

Profesora: es una constante universal, va a tener siempre ese mismo valor, siempre es chico...Entonces...acá ¿quién me está dominando la situación?

Varios estudiantes: hache barra!!!

Profesora: h barra, porque ese siempre es chiquito, lo que pasa es que depende de lo que yo le ponga arriba me va a dar grande o chico. Conclusión.... Podemos escribir una conclusión, para que les quede para estudiar...

h barra muuuuuuuuuuy chico, muuuuuuuuuuy chico... si S también es chico, muy chico, ¿qué pasa con el cociente? Un pequeño cambio...cambia poco el cociente...están de acuerdo?

A₁: aaa entendiía algo!!!

Profesora: Fíjense, eh hh acá! Un pequeño cambio en ese, fijate que de acá a acá cambió muy poquito, se ve que cambió muy poquito? y el ángulo también cambió muy poquito...Entonces, ese muy chico, entonces un pequeño cambio de ese obviamente, lleva a que cambie un poco el cociente, están de acuerdo? Entonces, si ustedes esto lo entienden matemáticamente, lo que sigue, físicamente, se entiende más. Hagamos el esfuerzo... ¿qué puede pasar? al revés, que en vez de S muy chico, ese? Grande... un poco más...entonces un pequeño cambio en S lleva a que S sobre h barra cambie mucho. ¿Está bien?

Otros: claro

A₅: Y pero en radianes ya es bastante diferencia

Profesora: Es...pero vos fijate que no es tanto como para decir... Vos fijate, mirá este ángulo y este ángulo sumados ¿se anularían? Así, mirándolos por ahí no, son parecidos, no se tendrían que anular. Pero cuando lo pasas a grados, fijate que este está en el segundo cuadrante y este en el tercer cuadrante, nada que ver...está bien?

Por último, en esa conversación la profesora abordó el problema de la interpretación de la técnica, explicitando que se trata solamente de una técnica de cálculo que describe lo que hay que considerar para calcular probabilidades, y que no debe interpretarse en términos de lo que hace **efectivamente** el electrón. Nuevamente surgió por parte de los estudiantes la cuestión de la cancelación de los vectores de ángulos muy distintos cuando se suman:

Profesora: Bueno, vamos a ver qué significa esto físicamente....Cuando yo tenga que sumar acá... los vectores que estén cerquita de la clásica, como son parecidos: cincuenta, cincuenta y uno...cuarenta y nueve, cincuenta y tres... ¿qué va a pasar? ¿se van a anular?

(E8;35) A₁₈: podemos decir que cuando ese es muy chico, eh hhh respecto de ese clásica...

Varios: no!

Otros: sí

Profesora: No!!...porque son parecidos, sumo y no se anulan, está

bien?...pero cuando pongo una masa más grande, ¿qué va a pasar? Ni bien me muevo un poquito... el ángulo me cambia tanto que es muy probable que me lo anule....está bien? En el caso límite, que en vez de una pelotita tengo una pelota de fútbol, ¿qué pasará?

A₂₈: y..muchísimo va a cambiar...

Profesora: ¿Se anulan hasta que punto?

A₇: se van a anular...

A₇ y A₂₇: y...hasta que quede una sola!!!

Profesora: ¡Hasta que no te podés mover de esa!... porque ni bien te muevas un poquito te va a dar tan grande que cuando quieras sumar te lo va a anular, ¿sí?

A₇: sí...no...como? Que pasa al sumar??

Profesora ¿Otra vez? A ver...¿Quién me ayuda a decirlo otra vez? Si...vamos, los que dijeron que sí habían entendido...A ver..acá este grupo?

A₂₇: a medida que cambie, o sea, el tamaño de la pelotita, cuanto más grande es, más valores grandes te va a dar y ...al sumarlos se te va a anular.

Profesora: Claro, pero, ¿qué sumo yo?

A₂₇: vectores!

Profesora: Vectores...Vectores asociados... a qué? ...A cada uno de los caminitos posibles pero la pelota es tan grande que de todos esos caminitos posibles no tenés que considerar ninguno, ¿por qué? porque como son tan diferentes que cuando los sumás se te van a anular, para que los vamos a considerar si se van a anular

Estudiante:: y, pero ¿para que vas a sumar?

Profesora: Bueno... es una pregunta que tiene que ver con la técnica, la técnica dice que vos sumés (y predice correctamente), yo no te puedo decir porque te dice que sumes...No lo sé! Al que se le ocurrió es a un físico que se llama Feynman, que obtuvo un premio Nóbel de Física, y que ya murió.. hace poco, se le ocurrió hacer este método y funciona ¿qué significa que funciona? Que no nos podemos preguntar ¿y por qué hay que sumar? ¿Y por qué hay que elevar al cuadrado? ...Bueno, es como una receta...Si vamos a hacer una torta, seguimos la receta, no nos preguntamos por qué en vez de tres huevos hay que ponerle cuatro? Bueno...así te va a salir mejor, no sé... ¿Está bien? Lo que es importante para ustedes es que acá hay un modelo matemático...La idea, ¿cuál es? Vamos a ver si esto mismo que hicimos acá lo podemos aplicar a la experiencia de la doble rendija, para darle el cierre. Con esto tendríamos que ir cerrando lo que empezamos hace casi un mes, que...aunque hubo muchas horas que no tuvimos, hace casi un mes ya que empezamos...que era la Experiencia de la Doble Rendija con electrones.

A₁₁: Antes que sigas, puedo hacerte una pregunta? Por qué...? Ya sé que cambia mucho el valor cuando cambia la masa y eso..., pero, ¿por qué se van a anular, no entiendo

Profesora: ¿Por qué se te va a anular? A ver...es como que vos quieras sumar infinitos números que son muy distintos entre sí, a ver, por ejemplo sumás el menos 5 con el menos 4; el menos 9 con el 2; el 5 con el 8; con el menos 5, ¿entendés? Estadísticamente, ¿qué significa estadísticamente? Que si haces eso, muchas, pero muchas veces, la suma de todo eso va a ser cero... Bueno... ustedes tienen que tener en

mente...se acuerdan del rulito? Que aparecía en la suma?

A₁₁: sí...te va a ir dando diferente, por eso...

A₁, (y otros): cero!!

Profesora: Claro...como si fuera... Va uno para arriba y otro para abajo, entonces cuando quieras sumar...¿qué te da la suma? Cero!

A₁: ahhhhhhhhh sí, sí!

Profesora: A ver...mirá...¿te acordás en el gráfico?, tenías una que era así, la otra así...se acuerdan que iban así, así ...

A₁: claro, claro, ahora sí!

Profesor: Así...así...y se anulaban!

Síntesis de lo analizado en la Situación 4:

- La utilización del teorema en acto *Tcam₁*: “**Aunque aumenta la masa, todo sigue igual**” por parte de algunos grupos estaría indicando un obstáculo para la comprensión, porque se está desestimando la importancia de la masa en los efectos que se buscan analizar. Este teorema está estrechamente vinculado con el tratamiento corpuscular indistintamente se trate de bolillas o de electrones. Por otro lado, posiblemente la utilización de este teorema en acto se relacione con la ausencia de preguntas que hagan anticipar los resultados, y que luego el software se proponga para corroborar o refutar sus predicciones. Aún la utilización del teorema en acto *Tcam₂*: “**Al aumentar la masa, algo cambia en los resultados encontrados para el electrón**” fue necesaria aunque no suficiente, y requirió la interacción de la profesora, que les propuso realizar consideraciones cinemáticas para comprender los resultados de la técnica STA para masas macroscópicas.

- En cuanto a la suma de los vectores en forma gráfica -colocando un vector a continuación del otro- requería la utilización de un nuevo marco de representación: el marco geométrico, a partir del marco funcional. Fue notable que esta forma de representación de la situación resultaba una forma nunca antes vista por los estudiantes. Este problema también había surgido en la situación anterior, donde debían sumar los vectores correspondientes a un electrón libre. Aunque esto no generó demasiadas dificultades, la utilización del teorema en acto *Tsv₁*: “**Si se suman menos vectores, la suma va a resultar menor**” indica que los estudiantes no pueden actualizar sus conocimientos matemáticos y establecer la diferencia esencial entre sumar números y sumar vectores. Por lo tanto, esto obstaculizó la formulación de conclusiones acerca del cálculo de probabilidades, como se solicitaba. En cambio, el teorema en acto *Tsv₂*: “**Queda un solo vector en la suma, entonces, el resultado es más exacto**” utilizado por uno de los grupos, colaboró con la conceptualización de la transición cuántico-clásico, y permitió validar las leyes de la Mecánica clásica conocida por los estudiantes: si no actúan fuerzas sobre un cuerpo, su movimiento queda descrito por una relación lineal entre la posición y el tiempo.

- En vista a la insuficiencia de los teoremas utilizados por los estudiantes al abordar la Situación 4, la profesora consideró adecuado conversar con todo el GC para intentar que ellos comprendieran el hecho que estadísticamente la suma de vectores de igual módulo y ángulos muy diferentes, da como resultado el vector nulo, y las consecuencias que esto tiene en la descripción del movimiento. Es evidente la necesidad de contar, para futuras repeticiones, con una situación que permita construir la resultante de un gran conjunto de vectores de igual módulo y ángulos muy diferentes, y la aproximación estadística al vector nulo. Esto podría incluir la utilización de software, que sería útil en esta situación, y en la anterior.

Situación 5: “Aplicación de la técnica STA para la EDR Reconstruyendo el diagrama de la EDR con electrones”

Una vez que se acordó el resultado de la aplicación de la técnica STA tanto para los sistemas cuánticos libres como para partículas macroscópicas libres, (Encuentros 7 y 8) se retomó la cuestión generatriz de la secuencia: ¿cómo explicar los máximos y mínimos de $P(x)$ en la EDR realizada con electrones? Para esto se propuso a los estudiantes analizar la aplicación de la STA para los electrones de la EDR retomando la pregunta clave: *¿Cuál es la probabilidad de que el electrón arribe a una distancia x del centro de la pantalla partiendo de la fuente?*

Los estudiantes debían conversar y analizar con los miembros de su grupo, los procesos matemáticos utilizados y la forma funcional de la expresión obtenida, que la profesora les había propuesto en la situación. A partir de la expresión funcional y las características experimentales que estaban preestablecidas (distancia de separación, tiempo empleado, etc.) ellos debían realizar una representación gráfica aproximada de $P(x)$. Los valores de la variable independiente fueron dados en la secuencia, seleccionados intencionalmente de forma tal que cuando se graficara la función se apreciarían los máximos y mínimos.

Hacia el final del E8 y el comienzo de E9, cuando analizaron la función $P(x)$ obtenida con los cálculos mostrados, todos los grupos reconocieron que la función $P(x)$ que se obtiene es de segundo grado, y por lo tanto que no puede tomar valores negativos. Casi todos los grupos (excepto el Grupo 5) reconocieron que la expresión corresponde a una función periódica y simétrica respecto del cero, que tiene máximos y mínimos. No surgieron inconvenientes al calcular los valores de ordenadas para las abscisas ofrecidas, y luego todos los grupos se dedicaron a realizar el gráfico a partir del conocimiento de la forma y de los valores calculados.

Es notable la sorpresa que manifestaron los estudiantes del Grupo 3 cuando intentaron interpretar el significado de los máximos y mínimos en términos de probabilidad. En particular, les resultaba extraño que el máximo estuviera en el cero, y la profesora les recordó la relación entre los valores de mínima probabilidad y la presencia de “franjas” de concentración de los electrones, del software:

A₁₅: Una pregunta...la probabilidad que caiga en esta zona...o sea no va a caer casi!

A₁₃: Si..es casi cero!

A₁₅: Pero...no entiendo, ponete, la probabilidad que caiga en esta zona es cero! O sea no van a caer casi

Profesora: *Es cero sí! , o sea, ¿qué significa? Que no va a caer ningún electrón..., se acuerdan que software mostraba franjas, ¿qué significa franjas?...cero...cero*

(E9; 79) *A₁₅: Ah es verdad!!!*

A₁₃: Ahhhhhh ahí caí de las franjas!!!!!! No nos acordábamos de las franjas...por eso!

A₁₅: ...Y cuanto más nos acerquemos al cero, ahí va a haber más probabilidad?

Profesora: *En el cero... ¿cómo es máxima o mínima la probabilidad?*

A₁₄: Máxima

Profesora: *Ahí era máxima la probabilidad... y no es donde va directo la rendija como antes, con bolillas*

A₁₅: Ah, claro porque la rendija...no está el cero

La última pregunta de la Situación 4 -¿Qué puedes concluir acerca de lo obtenido aplicando la STA de la Mecánica Cuántica respecto de lo que obtuvimos cuando simulamos la EDR con electrones en el software Dopplespalt?- tenía como objetivo que los estudiantes reconocieran que la curva obtenida mediante la aplicación de los resultados de la STA en la disposición experimental de la EDR, era una curva que representaba la curva $P(x)$ del software de la Situación 2. De esta forma, se buscaba retornar a la cuestión inicial de la distribución de los electrones en la EDR. Excepto los estudiantes de los Grupos 1 y 5, los cuatro grupos restantes formularon una respuesta utilizando dos teoremas en acto acerca de la comparación de gráficos (Teoremas de la modelización *Tmod*):

Tmod₁: “La curva teórica debe coincidir con la obtenida experimentalmente” y
Tmod₂: “Como la curva teórica es sólo parecida en algún aspecto a la obtenida en la simulación de la experiencia, hay algo incorrecto”

A continuación se presenta el análisis correspondiente a cada teorema en acto:

Tmod₁: “La curva teórica debe coincidir con la obtenida experimentalmente”

Las integrantes del Grupo 4, escogieron una escala diferente a la dada, para representar la variable independiente (x), y realizaron el gráfico que se presenta en la Figura 5.5:

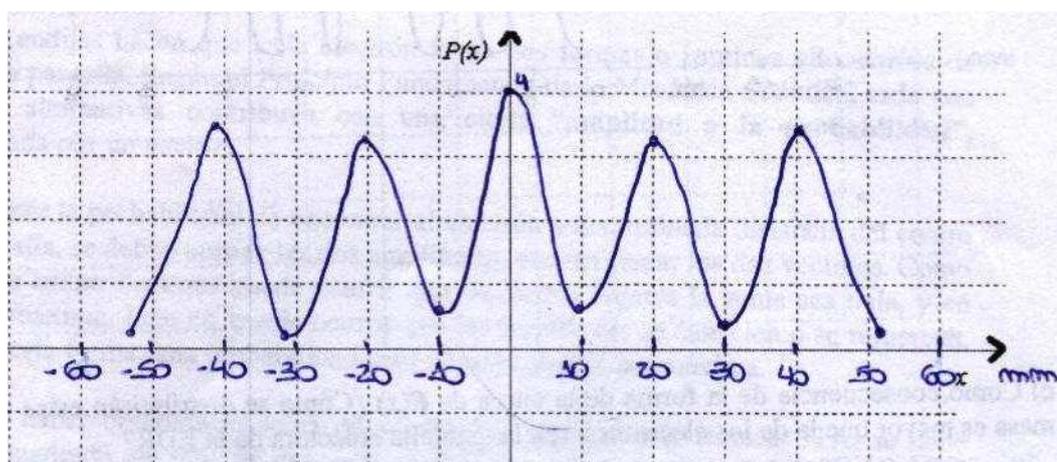


Figura 5. 5: Gráfico realizado por una de las integrantes del Grupo 4, a partir de la expresión algebraica de $P(x)$

La elección de la escala vertical no fue considerada: las pequeñas diferencias de los valores de las ordenadas de los máximos, reflejaban grandes diferencias de alturas en el gráfico. Al notar que en este gráfico el máximo central era mayor que el siguiente para ambos lados, ellas responden que los gráficos son similares, y por lo tanto, aceptan que se está modelizando la situación original.

Profesora: Claro, esto que obtuviste acá, se parece o no se parece a lo que obtuviste con el software?

A₁₈: Sí, se parece...

(E9; 129) **Profesora:** Bueno, se parece... ¿en qué sentido se parece?

A₁₈: En que tiene muchos máximos y mínimos

Profesora: Claro en cada uno de estos máximos, ¿qué significa que la probabilidad sea máxima? Que ahí... ¿cuántos electrones va a haber?

A₁₈: Y... Muchos

Profesora: Entonces...?

A₁₈: y...hay muchos máximos y mínimos

A₂₁: Y en los máximos hay más probabilidad

A₁₈: Se parecen porque ambos tienen máximos y mínimos, y en los máximos hay más probabilidad de que impacten electrones

La aceptación de la similitud entre ambas curvas que reconoció este Grupo 4, denota una escasa reflexión acerca de la modelización, y no permite establecer su validez y sus alcances, como por ejemplo entender que la curva recién obtenida es diferente a la mostrada en el software en la altura de los máximos, y a pesar de ello la modelización igual resulta satisfactoria.

Tmod₂: “Como la curva teórica es sólo parecida en algún aspecto a la obtenida en la simulación de la experiencia, hay algo incorrecto”

A diferencia del Grupo 3, otros grupos se quedaron anclados en la diferencia entre ambas gráficas, enfatizando que ahora los máximos tenían todos la misma altura, mientras que la curva del software mostraba un máximo absoluto en el cero, y los otros máximos de menor valor, debido a la interferencia modulada por la difracción. Esta idea no les permitía apreciar el valor de la modelización. Entonces se hizo necesario que la profesora intervenga para que ellos pudieran reconocer que más allá de las diferencias, ambas gráficas representan el mismo fenómeno: la distribución de probabilidades para electrones en la EDR.

Los estudiantes del Grupo 1 realizaron el gráfico que se presenta en la Figura 5.6. Conociendo la forma periódica de la función, y sin establecer una correspondencia exacta con los valores calculados, dibujaron los máximos con la misma ordenada, y los mínimos también, todos ubicados en el cero del eje de abscisas:

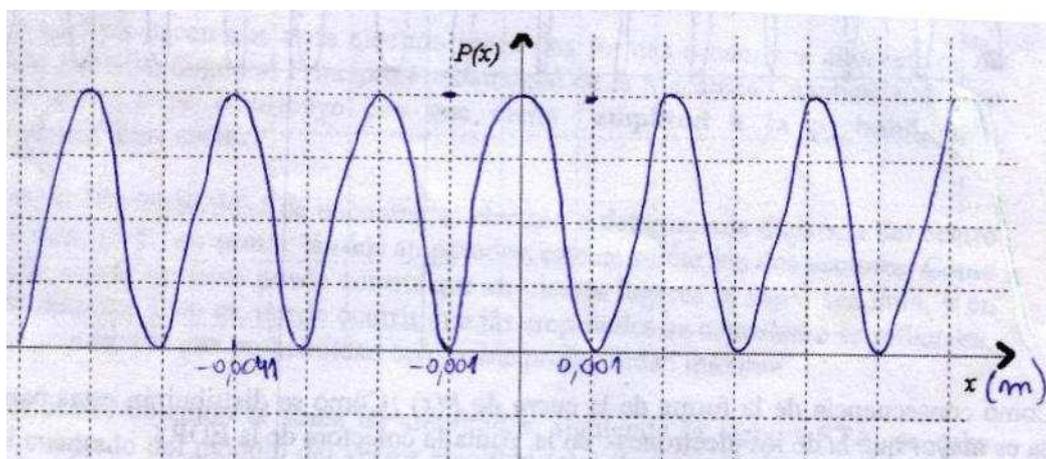


Figura 5. 6: Gráfica de P(x) realizada por un estudiante del Grupo 1

A abordar la respuesta acerca de la comparación, formularon la similitud de los gráficos pero rápidamente enfocaron en las diferencias:

(E10; 13) A₄: Son similares, eso hay que responder (...); ¿Qué puedes concluir acerca de lo obtenido aplicando la STA de la Mecánica Cuántica respecto de lo que obtuvimos cuando simulamos la EDR con electrones en el software Dopplespalt?

Profesora: Estos resultados ¿Son parecidos, son diferentes? ¿Si son

distintos, en que? ¿Son iguales exactamente? ¿En qué se diferencian? Vos dijiste son similares. ¿Por qué?

A₄: Porque son cosenoidales, nada más que acá el máximo es parecido

Profesora: ¿Y en el otro que pasaba? ¿En la simulación?

A₄: Eran diferentes, muy diferentes.

...

A₅: Era distinta.

Profesora: Ahí la tenés, esa. Igual, equis está en metros y acá en centímetros así que por ahí son iguales. Bueno, las escalas no son iguales. Bien, pero la forma ¿es igual? Y no, igual igual no.

A₁: Porque esta poseía muchos máximos pero no me acuerdo porque era.

Profesora: Y esta acá también tiene muchos máximos.

A₁: Si, pero distintos, a eso me refiero.

Profesora: Claro, tienen distinta altura, aquellos.

A₂: O sea, que ...función trigonométrica aquella.

Profesora: Y aquella es una función trigonométrica pero adelante tiene algo multiplicado que le hace que algunos máximos no vayan hasta arriba del todo.

A₂: ¿La masa era?

A₁: Eso es lo que no me puedo acordar yo.

Profesora: No, no el gráfico es el similar, nada más que en vez de llegar todos los máximos hasta la misma altura acá como es? Bien, ya tienen para escribir...

A₁: ¿Qué ponemos entonces?

A₄: Igual, no entendí porque son distintos los máximos y acá son iguales.

El Grupo 2, realizó el gráfico que se presenta en la Figura 5.7. Es similar al anterior, aunque este grupo lo hizo ubicando los puntos de manera más precisa, y acorde a la tabla de valores, ofrecida en la situación:

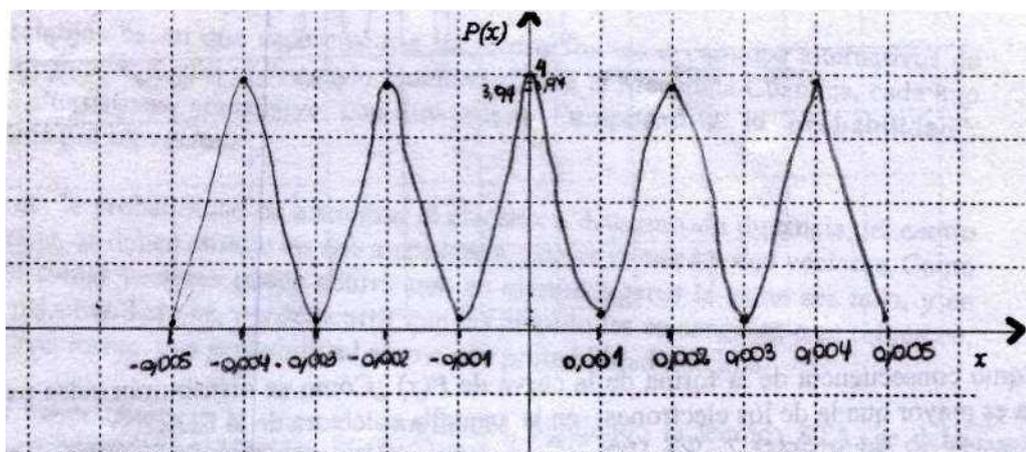


Figura 5. 7: Gráfica de P(x) realizada por un estudiante del Grupo 2

Para ellos, el gráfico obtenido resulta distinto de la curva mostrada en el software, que tenía el máximo central absoluto, y los otros dos máximos de menor valor. También en este grupo fue necesario que la profesora oriente su atención hacia las semejanzas dejando a un lado las diferencias. Al final de esta conversación parecería que ellos lograron darle sentido a lo trabajado, al interpretar que se logró el objetivo de encontrar un modelo que de cuenta de los resultados que mostraba el software inicialmente para los electrones:

A₇: ¿Qué puedes concluir acerca de lo obtenido aplicando la STA de la Mecánica Cuántica respecto de lo que obtuvimos cuando simulamos la EDR con electrones en el software Dopplespalt? Sacás primero el resultado de esto a esto le sacás el coseno y después lo elevás al cuadrado.

A₈: Profe, ¿está bien?

Profesora: Aparentemente, eso explicaría, ¿no?, esto permitiría explicar....

A₇: Mas o menos

A₈: Es como que es periódico...

Profesora: Mas o menos y ¿Por qué mas o menos? Y no exactamente igual.

A₈: Es como que está exagerado. No, no sé. Aplicamos la fórmula y todo pero es como que todavía...

Profesora: Pero, ¿se ubican en lo que estamos haciendo? Estamos tratando de explicar esa distribución de máximos y mínimos que vimos en la pantalla cuando fuimos a la sala de informática. Entonces la forma de encontrar la explicación es encontrar una expresión que nos permita explicarla. Más o menos encontraron una, ahora yo les pregunto, ¿si es exactamente igual o no?

A₇: No

Profesora: No, ¿Por qué?

A₇: Porque ahora los mínimos y los máximos...

Profesora: Claro, porque es como que tiene un máximo y después los otros máximos no son tan máximos.

(E9; 108)

A₈: No, el punto máximo es en cero.

Profesora: Es en cero pero lo que pasa es que todo el tiempo.... fíjense que es una sutileza pero ahora entra en juego, ¿Qué puse yo acá? ¿Qué signo puse? Aproximado, viste Paula que vos un día me preguntaste si no es igual y yo te dije no, es proporcional.

A₉: ¿Qué era proporcional?

Profesora: Es porque hay una constante. Y bueno esa constante ahí lo que hace es modular, ¿qué significa modular? Que a los mínimos de los costados los achata un poco, pero es muy complicado eso. Por lo menos, nos damos cuenta que esa expresión representa los máximos y mínimos. Ésta tendría que haber sido más chatita.

A₈: Si, claro, el más chico volver a bajar.

Profesora: Claro, pero eso está encerrado en esta constante, ¿entienden? Esta constante ¿que hace? A los máximos de los costados te los baja. Pero no importa, no es central en nuestro estudio. Lo que nosotros tenemos que ver es que hay lugares en que no hay ningún electrón o casi ninguno. Si hubieran sido bolillas ¿qué tendría que pasar?

A₈: Había una zona más...

Profesora: No pasaba esto, no?

A₈: Y había una sola alta

Profesora: Y entonces...pudimos concluir que los electrones no son bolillas.

A₇: Entonces, qué podemos concluir... Que en el modelo de electrones, existen lugares o zonas en donde la probabilidad de que caiga un electrón es muy baja...Y en otras.... hay zonas...

A₆: Donde la probabilidad es muy alta.

Profesora: Y además lo que hablamos recién... Si bien la curva no da

exactamente igual se ajusta a los máximos y mínimos.

A₇: Le ponemos lo del positivo y negativo

A₈: No, hay que poner que se aproxima al modelo ya que supone la idea de que hay un máximo

A₇: La zona donde la probabilidad es mayor, presentan máximos y donde la probabilidad es menor se presentan mínimos.

A₈: Coma aproximando al modelo inicial de la fotocopia ésta, de ...de la curva

A₇: Obteniendo un modelo aproximado de la curva

A₈: Bueno, si aproximándose al modelo de la curva ...Inicial o al anterior.

El Grupo 3, dibujó la curva que se presenta en la Figura 5.8, de forma similar a los demás grupos:

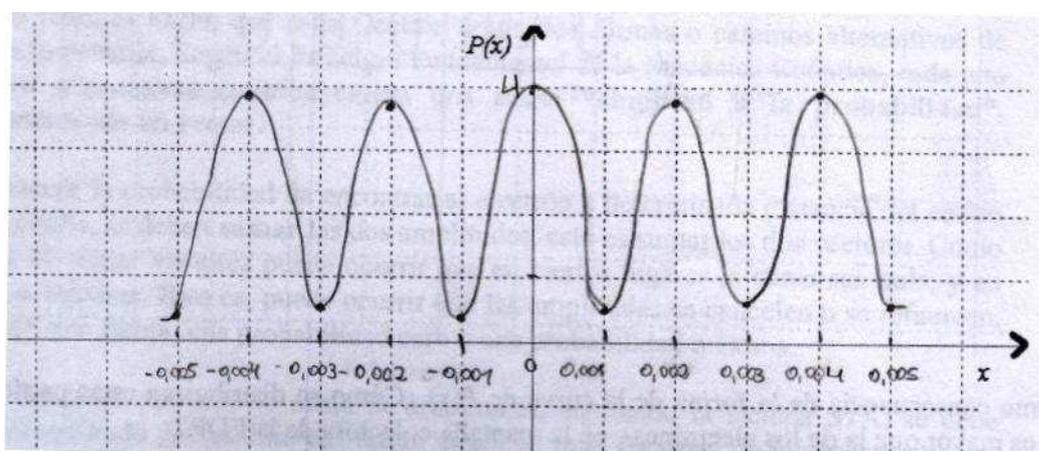


Figura 5.8: Representación gráfica de $P(x)$ realizada por el estudiante A₂₂ (Grupo 3)

Cuando buscaron la relación entre la curva graficada con la del software, también notaron primero las diferencias respecto de la altura de los máximos, hasta que la profesora insistió en las similitudes, estableciendo que el modelo matemático de la STA aplicado a la experiencia arroja los mismos resultados que la experiencia. En el final de esta parte de la conversación, algunos estudiantes de este grupo expresaron asombro y convencimiento acerca de la naturaleza Cuántica del electrón:

A₁₄: ¿Qué puedes concluir acerca de lo obtenido aplicando la STA de la Mecánica Cuántica respecto de lo que obtuvimos cuando simulamos la EDR con electrones en el software Dopplespalt?

A₁₅: Qué acá te da máximo!!!!

A₁₄: Qué cuanto más se aleja menos probabilidad hay en cambio acá, por más... por más que...

A₁₆: La probabilidad no varía tanto... o sea, los máximos...y allá no!

(E9; 104)

...

A₁₃: Claro, allá te da diferentes... Los picos van variando del más grande al más chico y en el otro son todos iguales.

A₁₄: Claro, y acá son todos iguales!

Profesora: Lo que importa es que ustedes noten la diferencia de las funciones que se obtienen cuando se hacen con bolillas.... Cuando lo hacemos con bolillas nos encontramos que la forma de la curva ...que tenía dos máximos ¿por qué? Los electrones entonces no son como bolillas no?

A₁₄: No!!!

Profesora: ¿Entienden a lo que estamos llegando? Estamos llegando a explicar porque hay lugares en donde si los electrones fueran pequeñas bolillas deberían caer...no hay ninguno!!! Por qué?

A₁₃: Pará que ahora nos estás cambiando nuestro pensamiento de...de toda la vida! los electrones no son bolillas...

Profesora: Bueno, imagínense la revolución que armó esto entre los científicos, que pensaban que eran partículas! Y eso les hizo pensar que había que revisar toda la física!

A₁₄: O sea que no son partículas!

Profesora: No son partículas, son sistemas cuánticos

Luego, ellos se mostraron muy interesados en saber más acerca del mundo cuántico, y la profesora aprovechó este momento para establecer los alcances de las explicaciones de la Física, y establecer las diferencias fundamentales entre el mundo macroscópico y el microscópico:

A₁₄: O sea que no son partículas!!!

Profesora: No son partículas, son sistemas cuánticos.

A₁₃: ¿Y qué forma tienen?

Profesora: No tienen forma porque la forma se da con el volumen, y como son taaaaaaaan chiquititos, no tienen volumen!

A₁₄: Y pero...que lugar ocupan en el espacio?

A₁₃: Si no, ¿cómo los sentís? como...? si no tienen nada...cómo impactan en la pared!!!

(E9;126) **Profesora:** Las preguntas que me están haciendo se pueden responder si se trata de partículas...y como no son partículas no tiene sentido,... el concepto de trayectoria no tiene sentido,...o sea estaba acá, y después acá lo único que se sabe es que acá es más probable que acá...Hay preguntas que no se pueden responder.

A₁₅: ¿Por qué? ¿por la energía es?

Profesora: Porque se trata del mundo microscópico y nosotros no estamos acostumbrados al mundo macroscópico, y creemos que al disminuir la escala todo va a ser igual, y no! Saben lo que decía Feynman? Que los electrones están chiflados!

Las estudiantes del Grupo 6, graficaron la curva de manera similar a los ya mostrados, aunque, como se presenta en la Figura 5.9, ubicaron los mínimos en los ceros de la probabilidad. Es decir aproximaron los valores calculados en la tabla para los mínimos, pero no para los máximos:

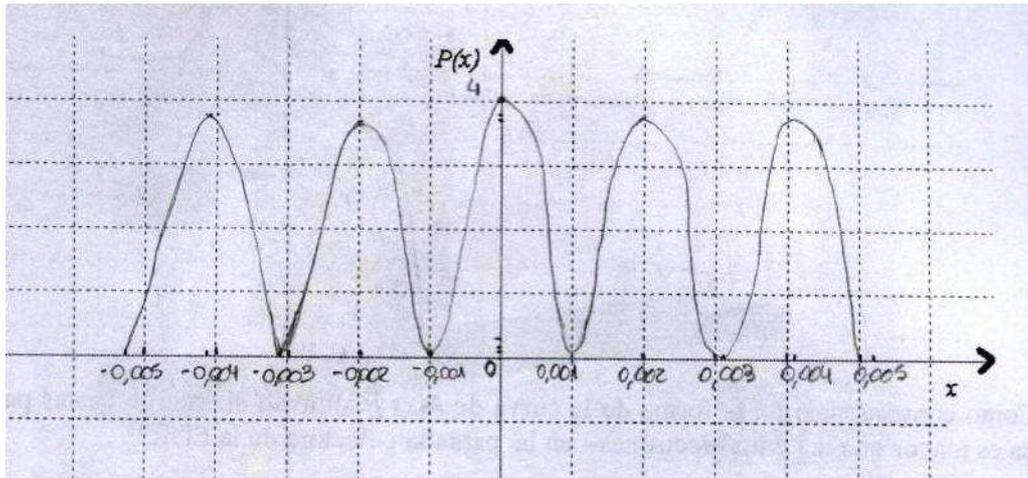


Figura 5.9: Representación gráfica de $P(x)$ realizada por un estudiante del Grupo 6

Las estudiantes de este grupo, utilizaron parcialmente $Tmod_2$ ya que al principio parecían aceptar la modelización cuando notaron que el máximo central tenía mayor ordenada que los dos máximos consecutivos para cada lado del cero del eje equis. Pero cuando notaron que hacia los extremos la ordenada los máximos aumentaban, la modelización dejaba de ser válida. Luego, con la interacción de la profesora aceptaron la validez de la modelización:

A27: ¿Qué puedes concluir...respecto de la STA sería eso de...lo que vimos, simulando la EDR sería esto...

Profesora: Ahá..

A27: Así que puede ser que acá, ehheh el máximo está acá, y acá también, y va decreciendo siempre...

Profesora: Sí...

A27: Pero acá va decreciendo, y acá aumenta en este momento

Profesora: Sí...pero...fíjense ustedes, los números que les dieron...Sí... Son insignificantes las diferencias!

A27: Que...que todos los puntos son iguales?

Profesora: Que todos los máximos son iguales! Sí?

A27: Que no...no forma un pico...porque esto es periódico, y tiene...esto es como simétrico al medio, pero...nada más...

(E9;415) **Profesora:** Este también es simétrico al medio...

A27: Claro, pero por eso...esto nada más...

Profesora: Sí, pero digamos, en común tienen la forma de máximos y mínimos... este está decreciendo acá pero igual tiene máximo...De esa forma...La función es parecida...no?

A28: Sí...

Profesora: Esto también lo pueden...lo pueden interpretar como un coseno, sí?

A27: Pero como un coseno...?

Profesora: Por un coseno multiplicado por otra función...

A27: Claro, como que ...

Profesora: ..que lo haría decrecer, pero..de base, esto, la única función que hace que sea eso es un coseno cuadrado! No puede ser un coseno común porque si no seguiría para abajo! Esta es un coseno cuadrado...Esta tendrá otras cosas...

A₂₇: Claro...

Profesora: Pero de base será un coseno cuadrado

A₂₇: Entonces, para la conclusión es como que... que la otra se basa también en la expresión...

Profesora: Sí...

A₂₇: Se basa en la misma función, que esta, aunque presenta diferencias...

Profesora: Claro! Sí...

A₂₇: O le podemos poner, se basa en que es simétrica con respecto a este eje... ya que... presenta los máximos a cada lado, y... y que también es un coseno cuadrado...

Profesora: Sí... fíjense que esto mismo lo vimos con el software, de encontrar el... o sea el software dibujaba esto, pero no entendíamos de donde salía y eso, fíjense ahora llegaron, haciéndolo matemáticamente, con el texto que les dí el otro día, se acuerdan? Y ahora, matemáticamente llegan a una conclusión, bastante parecida... Como que pudieron calcular, lo que hacía el software, así, mágicamente! Sí?

A₂₇: Sí, se entiende lo que decís... Entonces, al comparar las dos funciones eh... obtenemos que ambas son simétricas con respecto al eje.. No, equis, a ver...

Profesora: La idea es... ¿lo que estuvimos haciendo con los cálculos, se parece o no a la función esa que nos daba el software, color azul, se acuerdan? Se parece! Pero... es igual?

A₂₈: No!

Profesora: Por qué no es igual? Que tienen distinto?

A₂₈: Que acá, los mínimos son parecidos pero... tienen todos la misma altura y antes no...

Profesora: Claro! Yo les quería contar un poco por qué es eso... Vieron que acá, todo el tiempo trabajaron con esta expresión... que dijimos que era proporcional... Bueno, y que significa que sea proporcional? Que acá va adelante hay algo que multiplica...

A₂₈: una constante

Profesora: Claro, si yo pongo el igual es porque está ese algo multiplicando

A₂₇: Sí..

Profesora: Bueno, ese algo que no puse, no es importante... pero les quería contar eso!

A₂₇: Nos dimos cuenta que había algo, como otra cosa más que... la función, la base es la misma, coseno cuadrado

Profesora: Claro!

A₂₇: Que era en lo que más se parecía, pero que... era diferente

Luego de la conversación con la profesora, formularon por escrito una explicación acerca de la modelización y la relación entre ambas curvas.

A₂₈: Ambas tienen como base la función... coseno? No sé si poner coseno porque en realidad...

A₂₇: La función coseno cuadrado, si, pero es coseno...

(E9; 471)

A₂₉: Ambas tienen como base?

A₂₈: Al coseno cuadrado

A₂₇: Tendríamos que poner... pero son distintas ya que hay algo, que multiplica a la función...

A₂₉: Y la modula..

A₂₈: una constante, que multiplica la función y la modula

...

A₂₉: Digamos, que esta función es de la EDR ...

A₂₇: Pero son distintas porque hay una constante que multiplica a la función...podemos poner que multiplica la función STA para obtener EDR

A₂₈: Claro!!!!

De esta forma, este grupo parece ser el que más lejos llega en términos de conceptualización.

Síntesis de lo analizado en la Situación 5

- Los estudiantes no manifestaron dificultades para reconocer la forma y las características de la función $P(x)$ que se obtiene al aplicar la STA en la EDR, ni en graficarla a partir de sus características funcionales –periodicidad, positividad y valores extremos- y de algunos puntos notables de la función que habían sido predeterminados.
- La curva modelizada no es idéntica a la que mostraba el software, puesto que éste considera el efecto de la difracción que modula a la interferencia. En cambio, la curva teórica obtenida con la aplicación de la STA resulta en una curva en la cual los máximos tienen todos los mismos valores, ya que no se consideran los efectos de la difracción. La idea era reconocer que la STA, a pesar de las diferencias recién comentadas, modeliza la curva del software para los electrones, en el sentido que permite describir la distribución en franjas, y explicar la presencia y ausencia de electrones en ciertos lugares.

Un solo grupo, al utilizar el teorema en acto *Tmod₁*: “**La curva teórica debe coincidir con la obtenida experimentalmente**” aceptó la semejanza de las curvas, dejando a un lado las diferencias, aunque lo hizo con poca reflexión. La mayoría de los estudiantes, no logró reconocer la modelización, al resaltar las diferencias entre las dos curvas, utilizando el *Tmod₂*: “**Como la curva teórica es sólo parecida en algún aspecto a la obtenida en la simulación de la experiencia, hay algo incorrecto**”. La intervención de la profesora fue fundamental para que ellos, dejen a un lado las diferencias de la curva teórica y la experimental. Esto lleva a reflexionar acerca de la necesidad de revisar el concepto de modelización matemática que se plantea en la Física escolar. No es común que en la escuela se presente un fenómeno para el cual se “construya” un modelo matemático que se ajuste al fenómeno. Por el contrario, generalmente se presenta el modelo matemático, y se lo aplica sin reflexionar acerca de sus ventajas y limitaciones.

- El desconocimiento de los estudiantes de los fenómenos físicos de interferencia, difracción, e interferencia modulada por difracción podría constituir un obstáculo, porque no permite aceptar la aproximación de la curva obtenida. En el caso de que los estudiantes conocieran estos efectos, se podría explicar la aproximación reconociendo que en el modelo se están dejando de lado los efectos de la difracción, como es usual en toda modelización. Para futuras repeticiones, en las cuales los estudiantes desconozcan los fenómenos ondulatorios en cuestión, se debería enfatizar en la “forma” de máximos y mínimos que muestra el software, y desestimar la altura de estos últimos en la secuencia, para que los estudiantes puedan reconocer de forma más natural la modelización.

Situación 6: “Análisis de la transición cuántico-clásico en la EDR”

En la primer parte de la Situación 6, los estudiantes debían realizar el gráfico aproximado de $P(x)$ evaluando la expresión funcional en un valor de masa de 2000 veces la masa del

electrón. Para realizar el gráfico de forma aproximada, era necesario analizar el argumento de la función trigonométrica, que resulta dos mil veces mayor, y por lo tanto es una curva cuyos máximos y mínimos se encuentran mucho más próximos. Esta parte de la Situación 6 se desarrolló en los encuentros E9 y E10.

- Acerca de la curva teórica que modeliza lo obtenido en la EDR con masa mayor a la del electrón.

Cinco de los seis grupos realizaron un gráfico aproximado, sin realizar la tabla de valores nuevamente. El gráfico ahora resulta más comprimido en el eje equis, respecto del gráfico que habían dibujado para el electrón, considerando que al aumentar el argumento de la función, ésta debería tener mayor proximidad entre máximos y mínimos. A partir de éste, los estudiantes debían predecir cómo resultaría la distribución en la pared colectora si ellas se utilizaban en la EDR.

Se había previsto que posiblemente los estudiantes cuestionarían que en el caso límite, por ejemplo para las bolillas, este gráfico no es el que mostraba el software. Sin embargo, en base al gráfico obtenido, casi todos respondieron que “estas partículas se distribuirán más cercanas unas de otras”, y esto no generó ningún conflicto. El análisis de los valores de masas progresivamente mayor, sería planteado al final de la situación con la utilización de la Simulación 2.

Los estudiantes del Grupo 2 realizaron el siguiente bosquejo de $P(x)$:

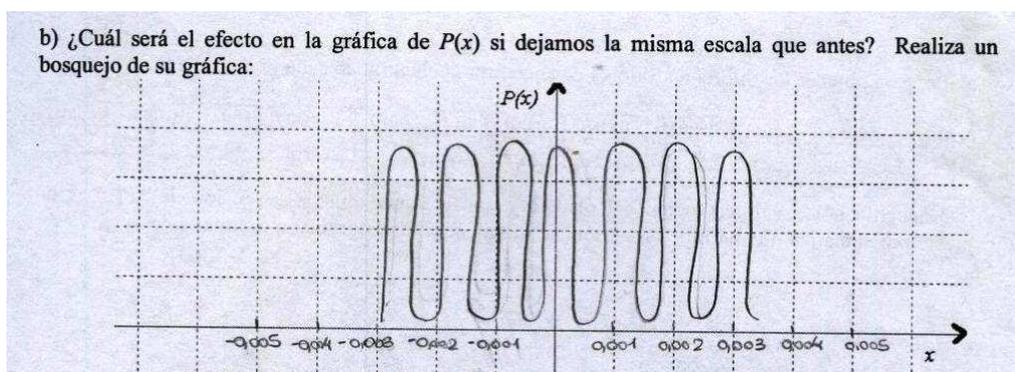


Figura 5. 11 Gráfica de $P(x)$ para un caso de masa del protón, realizado por un estudiante del Grupo 2

Este grupo formuló la siguiente respuesta, de acuerdo a su interpretación:

A₇: ¿Cómo se distribuirán estas partículas -cuya masa es mayor que la de los electrones- en la pantalla colectora?

A₈: Se distribuirán más juntas, más juntas una de las otras

(E9; 219) A₇: Más cercanas.

A₈: Siguiendo el modelo de máximos y mínimos.

A₇: Siguiendo el modelo de máximos y mínimos, estas partículas se distribuirán de manera...más cercana? Una de otra que en el modelo anterior...Punto!

Las respuestas de los demás grupos, indican la utilización del siguiente teorema en acto, acerca de la validez de la Mecánica Cuántica: (Teorema de validez de la mecánica cuántica T_{vmc}). Como si los estudiantes concibieran que valores de masa de dos mil veces la masa del electrón, resultarían macroscópicas:

T_{vmc} : “Al aplicar la STA en la EDR con masas mayores al electrón debe obtenerse la curva que se obtenía para bolillas”

Los estudiantes del Grupo 1, aunque habían realizado el gráfico con los máximos y mínimos más cercanos, al responder la pregunta de la distribución de estas partículas en la EDR no lo hicieron en base a la gráfica, sino respondieron argumentando que si la masa ahora es de 2000 veces la del electrón, el comportamiento debía ser el de bolillas. De esta forma, parece que para ellos la STA resulta innecesaria para modelizar este caso, cuya respuesta ya conocían. La Figura 5.12 presenta la respuesta de los estudiantes:

c) Como consecuencia de la forma de la curva de $P(x)$ ¿Cómo se distribuirán estas partículas -cuya masa es mayor que la de los electrones- en la pantalla colectora de la EDR?
Se distribuirán con la silueta de las rendijas, es decir que tiende a impactar. ?

Figura 5. 12 Respuesta que escribieron los estudiantes del Grupo 1 a continuación de la Gráfica de $P(x)$ para una masa mil veces mayor a la del electrón.

Las integrantes del Grupo 6 fueron las únicas que calcularon de las ordenadas a partir de la expresión de $P(x)$ reemplazando la masa del electrón por un valor 2000 veces mayor. Luego, guiadas por el teorema T_{vmc} y sin reflexionar acerca del cambio del argumento de la función, ubicaron los puntos y los unieron obteniendo la curva para $P(x)$ que se presenta en la figura 5.13:

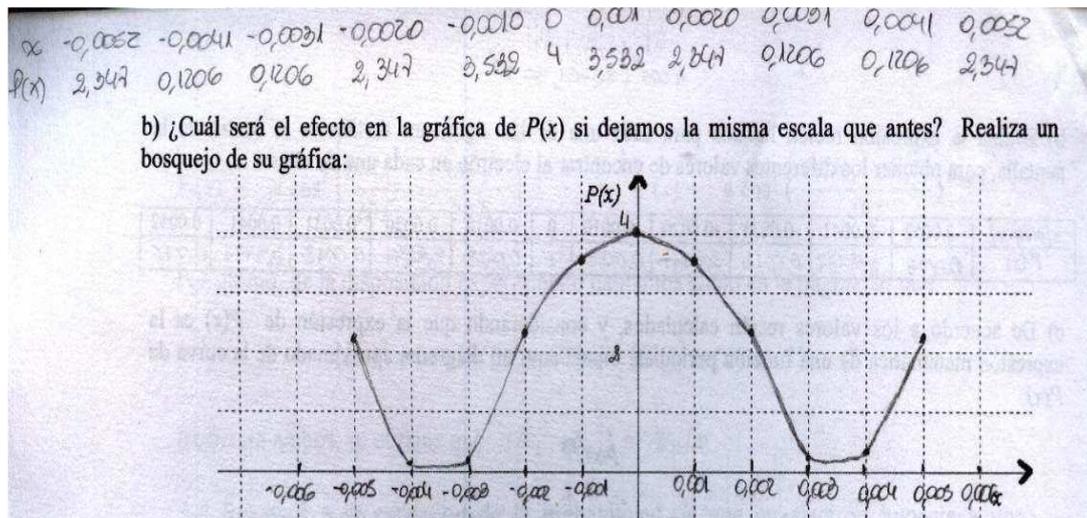


Figura 5. 13 Curva de probabilidad teórica para la EDR para un valor de masa de 2000 veces la masa del electrón, realizada por la estudiante A_{28}

Los estudiantes de este grupo, convencidos que este gráfico debe coincidir al obtenido en la realización de la EDR con proyectiles cuya masa es la de las bolillas, no repararon en que hacia los extremos la curva debería disminuir suavemente, y esto no sucedía para las bolillas:

- (E10; 115) A_{28} : Te acordás que dijimos que se amplía la amplitud?...No, la amplitud no, mayor longitud de onda es... Sí me quedó así ...y..tiene mayor amplitud, que habíamos dicho... esto...
 A_{27} : Pará, qué era que pasaba? Lo que marcaba esta cosa que era?

A₂₈: No me acuerdo eso...tengo que retomar lo anterior...Ah el aumento de la masa... O sea aumentando la masa...te dio esto....

A₂₇: O sea esa era la curva de probabilidad!

A₂₈: Sí...

A₂₇: O sea, había más en el medio...eso era? Ay no me acuerdo!! ¿Qué dice la pregunta, a ver?

A₂₈: Claro, cómo era eso?

A₂₇: ¿Cómo se distribuirán esas partículas según aumente el tamaño? Claro, se...se concentrarán más en el medio!

A₂₈: Ahhh acá esta....ésto es...., no?... Claro, pero en realidad, después le va quedando más

A₂₇: Estas deben ser...

A₂₈: Ehm...estas de cuando eran separadas, y la otra cuando eran juntas...

A₂₇: Sí? Me acuerdo que era que se sumaban, pero eran dos...?

A₂₈: Esto era como aquella, pero era diferente...Esto nos dio en el primero, ahora nos queda esto!... Porque...aunque no nos queda igual, la parte de abajo...

A₂₇: Sí...claro..... Estará mal?

A₂₈: Acá, según esta curva de probabilidad, tiene más de que impacte en el centro, porque pe es la probabilidad...

A₂₇: Bueno, pongámosle eso....que al aumentar la masa....

A₂₈: Ehhh la probabilidad es mayor en el centro?

A₂₇: No, ehhh la probabilidad de impacto es mayor en el centro... Y...no sé que mas poner...

Se infiere que las estudiantes recuperaron el teorema en acto **Tc₂: Superposición de efectos individuales en el centro**, de la primer situación, y lo utilizaron para validar sus resultados, ya que aquí también concluyen que en el centro la probabilidad es máxima. El conflicto surge cuando la **Simulación 2** invalida los teoremas utilizados, como se analiza a continuación.

Al final del encuentro E10, la profesora propuso realizar una síntesis con los estudiantes, y retomó el concepto de interferencia de ondas que los estudiantes habían estudiado el año anterior, para interpretar la imagen de las franjas de interferencia de los electrones. Es notable que en la conversación del Grupo 6, aunque aparentemente comprenden la modelización de la EDR con la STA, a medida que fueron leyendo la síntesis, volvieron a tener validez los teoremas en acto que ya se habían utilizado en la segunda situación: **Te₁ “Los electrones tienen una cualidad especial: atravesar paredes”** y **Te₂: “Los electrones son bolillitas muy pequeñas”** como si éstos fueran necesarios para darle “sentido” a los resultados encontrados:

(E10; 70)

A₂₇: Entonces, hasta ahí?

A₂₈: Bien...

A₂₇: Entonces, hasta ahí que sería? Que...

A₂₈: Que...hay más probabilidad....que hay dos formas de llegar al mismo lugar

A₂₇: Claro, a un mismo lugar

A₂₈: Porque hay dos rendijas...

A₂₇: Claro...sí..Bueno, y eso de que cada una de las alternativas contribuye con una amplitud de probabilidad... O que es distinto, según si...

A₂₈: Por qué es eso? No puede pasar entre medio de los átomos de la pantalla? Digo, de la cosa?

A₂₇: Vos decís los electrones...

A₂₈: Claro, son tan chiquitos!! Que por ahí pasan entre medio, no sé!... Yo

le decía a Pao que acá estás sumando vectores, y como tienen distintos ángulos se anulan...y acá se te anula, porque es cero!

A₂₇: Sí, pero...¿Por qué sumás las dos amplitudes de los dos que pueden llegar al mismo lugar? Eso es lo que no entiendo, porque dice: para obtener la probabilidad de encontrar al electrón a determinada distancia del centro debemos sumar las dos amplitudes, o sea las dos posibilidades de que llegue a ese lugar

A₂₈: Ah y eso es la probabilidad, claro! Y entonces tenemos esta probabilidad, y esta probabilidad! Sumamos las dos probabilidades, y te da la probabilidad total! Porque la probabilidad era como la amplitud!...Hasta ahí entendí! Claro!!!!!! el patrón de interferencia, es como la...la curva!

A₂₇: Claro...Aquí se presenta una serie de fotografías que muestran cómo se va formando el patrón de Interferencia de los electrones, a medida que van llegando a la pantalla, conforme transcurre el tiempo.

A₂₈: Ah...sí era lo que veíamos con...con. El programa...al principio!

A₂₇: Claro, por ahí es como que no son pero se van a comportar como...!

Profesora: Claro, se comportan como si fueran ondas por esto!

Y si vos me decís, pero... ¿son o no son?...Y...se comportan como sí! Está bien?

(E10; 22)

A₂₇: Claro, sí no, y ella también me decía recién como sabes que los electrones pasan entre las rendijas y no atraviesan

A₂₈: Porque viste que los rayos atraviesan las...las fuentes...

Profesora: Bueno, en principio no tendrían por qué atravesar, porque son...son materia!!!!!! y La materia no traspasa...

A₂₇: Claro, pero puede que haya espacio entre las...rendijas o algo así.

A₂₇: Le estaba diciendo que manera hay de que pasen, pero no...

A₂₈: Interesante el tema, pero hay que verlo...bien de nuevo, a la tarde...

A₂₇: Sí, pero...para mí el electrón es una partícula puntual...jeje(risas)

A₂₈: Si lo que pasa es que me parece que nos estamos yendo muy.... No sé...

Además lo más importante no era que el electrón giraba alrededor del átomo? Y después acá, como que un electrón se puede sacar de un átomo es como medio raro...

A₂₇: Claro! Es como que estamos yendo muy raro...

A₂₈: No sé donde quedó el átomo... Y donde están los protones, y los neutrones!! y todo eso... Lo que pasa es que nadie dijo que es el movimiento del electrón hace así.

(E10;236)

A₂₇: No importa, lo que importa del movimiento es...si va derecho, o no, de la pantalla

A₂₈: Pero no importa, es la probabilidad!

A₂₇: Éste sale...así, y?

A₂₈: Pero no es la direcc...como es el movimiento del electrón, es la probabilidad de impacto, o sea la probabilidad de dirección...no de cómo se mueve el electrón, sino la dirección..!!

A₂₇: Claro, pero ahí no tiene nada que ver, porque ponele, si llegan todos acá, si no llegan todos...uniformemente digamos...

A₂₈: Pero... hay que ver también si se mueve solamente así, o también así...

A₂₇: Sí...

A₂₈: Porque si no también hay posibilidad...

A₂₇: Claro, yo quiero saber como se mueve el electrón así, no la dirección! No se....¿ver un electrón!?

A₂₈: Bueno...Y a mí me llama la atención que entre sí...o sea si tiran varios yo creo que es distinto, porque se van a...

A₂₇: ..a chocar?

A₂₈: A chocar no.....como son cargas negativas se van a... Sí, a separar...entonces, para mí van a quedar re distintas si tiran varios electrones a la vez! Que al aislarlos no...no cambia, o sea! No, es que cada vez que me pongo a pensar, me surgen las dudas, asique prefiero no pensar..porque si no tengo que cambiar las respuestas...Nadie sabe como llegar...Si no hubieran sido electrones...y entonces hubiera pensado que los rayos atravesaron las paredes...

La última parte de la Situación 6, la actividad requería ejecutar la **Simulación 2**. La simulación pretendía a que los estudiantes visualizaran la formación de los máximos y los mínimos de la curva de $P(x)$ con el vector Suma de los dos vectores de amplitud correspondientes a las dos rendijas, que hacen las veces de alternativas. Las primeras preguntas planteadas en la situación tenían el propósito de que los estudiantes puedan visualizar que los valores máximos y mínimos de $P(x)$ se corresponden con la máxima y mínima longitud del vector suma de los dos vectores, respectivamente. Esto fue comprendido, y casi todos los estudiantes lograron explicitar esta relación.

Luego, se solicitaba a los estudiantes seleccionar los distintos “casos” correspondientes a mayores valores de masa, y elaborar una conclusión acerca de los cambios en las funciones $P(x)$ que el programa realizaba para cada caso. La mayoría de los grupos pudo interpretar el aumento de la frecuencia de la función con el aumento de la masa, y así corroborar el gráfico que habían realizado a partir de la expresión de $P(x)$ surgida de la aplicación de la STA.

Las estudiantes del Grupo 6, se encontraron ante un problema, ya que ellas habían realizado una gráfica con un máximo central en el encuentro anterior, y ésta no coincidía con lo que ahora mostraba la simulación: que la función aumentaba su frecuencia a medida que se aumenta la masa. Notando que no conseguían explicar las diferencias, la profesora decidió orientarlas:

A₂₈: Acá dice...en el tres...ah...al aumentar la masa la probabilidad es mayor en el centro...ah entonces al aumentar la masa la longitud de onda aumenta! Y acá disminuye!!!!no aumenta

A₂₇: A ver Profe, una pregunta ¿por qué acá aumentar la masa aumentaba la longitud? Porque nos da al revés... A ver Profe, una pregunta ¿por qué acá aumentar la masa aumentaba la longitud? Porque nos da al revés...

Profesora: *Y...a ver..¿de cuál dudan ustedes?*

A₂₇: Y..de éste

(E11; 60) *A₂₈: Porque este lo hicimos nosotras!*

Profesora: *Ah ja! Está bien que confíen en ustedes! A mí me parece que acá ustedes en las cuentas tuvieron un problema...Por qué? Vamos a pensarlo... Porque vos multiplicás por 2000 acá...Y si a un coseno vos le aumentás el argumento...suponete en vez de coseno de alfa, tenés, vamos a ponerle...dos alfa...¿qué le pasa a la función coseno? ¿Va a tener mayor frecuencia?*

A₂₈: No, menor frecuencia!

A₂₇: Ay ¡no me acuerdo eso!

Profesora: *A ver... cómo nos podemos ayudar a pensarlo..ehmmm...¿te*

acordás como se sacaba el período? Dos pi divido “be”, donde “be” era lo que multiplicaba a la equis... Bueno... Período es 2 pi sobre be donde b es lo que multiplica al ángulo. Bueno... Período es 2 pi sobre be donde b es lo que multiplica al ángulo

A₂₇: Ah sí sí!

Profesora: *Bien, entonces si el argumento es grande, be como es?*

A₂₈: Grande

Profesora: *O sea, vos vas a hacer 2 pi sobre algo más grande, cuanto te da el período?*

A₂₈: Menor...

A₂₇: O sea, al revés de lo que tenemos...

Profesora: *Bueno, después, en su casa, con tiempo, tranquilas, pueden hacer las cuentas*

Finalmente, ellas realizaron nuevamente los cálculos, y decidieron abandonarlos y revisarlos luego:

(E11; 65) *A₂₈: Entonces la que tiene razón es ésta, la de la computadora!...Y ponemos como conclusión que...que la amplitud de la onda, disminuye...la longitud...de onda...*

A₂₇: Al aumentar la masa ...

A₂₈: La longitud de onda, disminuye

(E11;289) *A₂₇: Bueno, dejalo así, ponele si le aumentamos la masa, ehm...disminuye la...*

A₂₈: Aumenta la frecuencia y disminuye su longitud de onda

A₂₉: Al aumentar la masa? La masa aumenta?

A₂₈: Eh..aumenta la frecuencia y disminuye la longitud de onda

En el encuentro E11 se entregó una síntesis escrita a todos los estudiantes, donde se define la longitud de onda asociada a todos los sistemas, cuánticos o no, y se planteaba como caso límite de la transición, la no detección de máximos y mínimos cuando se utilizaban bolillas, y se explicaba la diferencia entre la curva teórica y la curva que se obtenía experimentalmente, haciendo referencia a la precisión del instrumento de detección. Resultan interesantes las relaciones y comentarios que realizaron los integrantes del Grupo 2 y del Grupo 6 a medida que avanzaban en la lectura, como se presenta a continuación:

Los integrantes del Grupo 2, realizaron los cálculos de la longitud de onda solicitados, y de esta forma, corroboraron la relación entre la masa y la longitud antes formulada, mostrando lo lejos que pudieron llegar, en términos de conceptualización:

A₆: ¿Cuánto te dio?

A₈: 1,325 por 10 a la menos 24 metros, o sea, ahí te das cuenta que a menor masa menor longitud, es lo que habíamos escrito!!!

A₆: 1,325 por 10 ¿a la cuánto?

A₈: Profe, ¿con estos ejercicios estamos comprobando lo que vimos acá, no?

(E11;171) **Profesora:** *Claro!*

A₈: Que a menor masa, menor longitud

Profesora: *A menor masa...*

A₆: Mayor longitud.

A₈: Es decir, toda la materia tiene un comportamiento ondulatorio, claro. Está bien lo que pusimos. Porque acá nos dio mucha más longitud en una

masa mucho menor que en esta que tengo una masa no tan chica.

Profesora: *Son inversas, si la masa es muy grande, la longitud es...si son inversas.*

A₈: *Claro porque está dividiendo, claro esto con esto inversamente proporcional.*

Síntesis de lo analizado en la Situación 6

- Casi todos los estudiantes lograron graficar la curva que predice la aplicación de la STA en la EDR para masas mayores al electrón y lo pudieron corroborar con la Simulación 2. Esto era necesario para concluir la indistinguibilidad de los máximos y los mínimos en el caso macroscópico. Sin embargo, la utilización del teorema en acto T_{vmc} "Al aplicar la STA en la EDR con masas mayores al electrón debe obtenerse la curva que se obtenía para bolillas" indica la dificultad de los estudiantes para comprender que aunque las leyes cuánticas tienen validez universal, hay una transición al aumentar la masa, en la cual los efectos cuánticos dejan de ser perceptibles, detectables por los instrumentos experimentales.

- La Simulación resultó ser útil para que los estudiantes corroboren la relación entre la suma de los dos vectores correspondientes a las dos rendijas, y la formación de la curva de $P(x)$, que es proporcional a ella. También permitió visualizar que al aumentar el valor de masa, aumenta la frecuencia espacial de $P(x)$, aunque casi todos los estudiantes ya habían abordado a esta conclusión. Sin embargo, aunque los máximos y mínimos resultan cada vez más cercanos para casos de gran masa respecto al electrón, como tienen todos la misma altura, no es posible que ellos concluyan que para el caso extremo -como bolillas- la curva tiene uno o dos máximos como se mostraba en el primer software. Por ello, en la síntesis final entregada a los estudiantes se presenta y analiza la comparación entre la curva teórica que predice la aplicación de la STA y la curva promedio que se obtiene experimentalmente, que está restringida por la resolución del detector. Sería deseable que en futuras repeticiones, una versión mejorada de esta simulación, para los casos de masa macroscópica, muestre un gráfico "promedio" que presente uno o dos máximos, así los estudiantes pueden arribar a los mismos resultados que los que mostraba el software inicialmente y comprender que las leyes de la Mecánica Cuántica permiten explicar tanto sistemas macroscópicos como microscópicos.

Síntesis acerca de los teoremas en acto

El siguiente esquema de la Figura 5.12 sintetiza los teoremas en acto identificados para cada situación, y sus relaciones, e intenta reconstruir una ruta conceptual de los estudiantes. Con un rectángulo se representan aquellos teoremas en acto que obstaculizaron la comprensión:

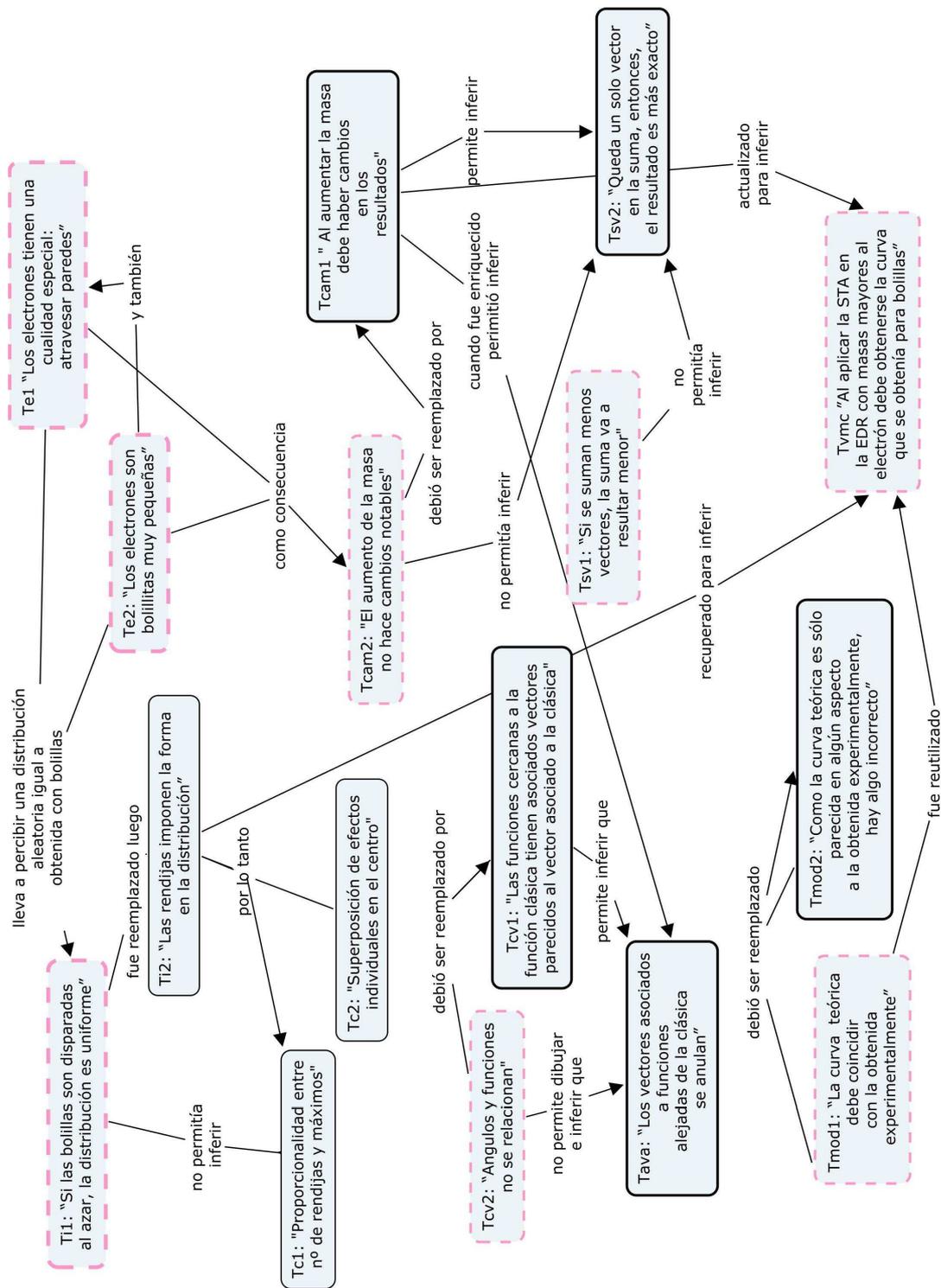


Figura 5.12: Esquema de los teoremas en acto identificados durante las situaciones de la secuencia y sus relaciones

Con relación a la **primera situación**, dirigida primero a anticipar los resultados de la EDR con bolillas y en un segundo momento, a introducir la idea de probabilidad, se infiere que la situación llamó al concepto en acto de azar y centró a los estudiantes en el proceso aleatorio de emisión de la fuente y de la llegada individual de los proyectiles. Aún los estudiantes que utilizaron el teorema en acto que establece que la distribución aleatoria de impactos se relaciona con la presencia de las rendijas, suelen volver al teorema en acto de la uniformidad, como si el efecto del azar no los deja pensar en términos probabilísticos debido a la presencia de las rendijas. El hecho de que en la situación se usaran los términos

“aleatorio” y “azar” y se expresara que desconocíamos el lugar de impacto de “cada” bolilla, habría obstaculizado inicialmente la comprensión de la distribución. Solo después de introducir la definición de distribución de probabilidad y la curva, el azar perdió su posición dominante y los estudiantes interpretaron adecuadamente los máximos, y mínimos de la curva de probabilidad. Esto ha sido corroborado en las replicaciones realizadas.

En la **segunda situación** el punto problemático se presentó cuando la salida del software mostró las “bandas de concentración de impactos” y los estudiantes tuvieron que explicarlas. Aunque el fenómeno de interferencia haya sido estudiado en un curso de física anterior, en este contexto, ellos no lo utilizaron. En ese momento, esto no fue un obstáculo para la continuidad secuencia, pues no se pretendía abordar la semejanza entre el comportamiento de los electrones con las ondas. Sí se esperaba que los estudiantes percibieran la diferencia entre electrones y bolillas, contrariando indirectamente el teorema en acto subyacente de los electrones-bolitas. Resulta llamativo que aún percibiendo diferencias, los estudiantes buscaban similitudes. Por un lado, porque el software mostraba tanto efectos de interferencia como de difracción, y ellos se apoyaban en la semejanza entre las curvas de $P(x)$ con bolillas y con electrones, pues en ambos casos hay un máximo central. Por el otro, ellos resultaron sorprendidos por la presencia de franjas en toda la pantalla, e insistieron en que se debían a la capacidad de atravesar paredes de los electrones. Es posible que esto era lo que les impedía “ver” la concentración de impactos en lugares que no se correspondían a la proyección de las rendijas, y la ausencia de impactos en otros. Solo cuando la profesora interrogó acerca de los mínimos, la diferencia de comportamientos entre bolillas y electrones fue percibida.

En la **tercera situación**, algunos estudiantes utilizaron el teorema en acto Tcv_1 : “**Las funciones cercanas a la función clásica tienen asociados vectores parecidos al vector asociado a la clásica**”, para describir lo que veían en el software, y esto era fundamental para la continuidad de la secuencia. En este sentido, la simulación colaboró con la visualización de los resultados y los cálculos, como se había propuesto. Sin embargo, otros estudiantes no podían encontrar relación entre lo que se mostraba en el software y la situación que se estaba modelizando, al utilizar el teorema en acto Tcv_2 : “**Ángulos y funciones no se relacionan**” Esto constituyó un obstáculo, y posiblemente esto se debe a que la interpretación de lo que el software mostrado era realizaba solamente a partir del software. La profesora propuso entonces a los estudiantes reflexionar acerca los valores mostrados, proponiendo ejemplos, buscando generar un consenso con los estudiantes. Por otro lado, era muy importante para la continuidad de la secuencia que los estudiantes comprendieran que hay un conjunto de funciones, cercanas a la función clásica cuyos vectores tienen dirección similar al vector de amplitud clásico, mientras que aquellas funciones que están más alejadas, tienen asociados vectores cuya dirección es muy distinta. La tabla presentada en la situación, tenía como objetivo que los estudiantes utilizaran Tcv_1 para poder realizar la suma y reducir la suma de todos los vectores alternativos, a un conjunto finito de ellos, correspondientes a funciones cercanas a la clásica. En el momento de realizar la suma, la profesora había notando que los estudiantes sólo utilizaban el teorema en acto $Tava$: “**Los vectores asociados a funciones alejadas de la clásica se anulan**” y que desconocían la suma geométrica para más de dos vectores. Entonces, la profesora debió orientar a los estudiantes a que interpreten cuáles eran los vectores que no se cancelaban, y contribuían a la suma. La formulación final de la expresión para la suma, necesitó de la interacción de la profesora con cada uno de los grupos.

En la **cuarta situación**, la utilización del teorema en acto $Tcam_1$: “**Aunque aumenta la masa, todo sigue igual**” por parte de algunos grupos estaría indicando un obstáculo para

la comprensión, porque se está desestimando la importancia de la masa en los efectos que se buscan analizar. Posiblemente, la utilización de este teorema en acto se relacione con el hecho que antes de ejecutar la simulación, no se solicitó a los estudiantes anticipar los resultados, y que luego el software se corroboren o refuten sus predicciones. La utilización del teorema en acto *Tcam₂*: “**Al aumentar la masa, cambian los resultados encontrados para el electrón**” colaboró en la conceptualización aunque fue necesaria la interacción de la profesora, que propuso realizar consideraciones cinemáticas para comprender los resultados de la técnica STA para masas macroscópicas. Por otro lado, en relación a la suma de los vectores en forma gráfica la utilización del teorema en acto *Tsv₁*: “**Si se suman menos vectores, la suma va a resultar menor**” indica que los estudiantes no pueden actualizar sus conocimientos matemáticos y establecer la diferencia esencial entre sumar números y sumar vectores. Por lo tanto, esto obstaculizó la formulación de conclusiones acerca del cálculo de probabilidades, como se solicitaba. En cambio, el teorema en acto *Tsv₂*: “**Queda un solo vector en la suma, entonces, el resultado es más exacto**” utilizado por uno de los grupos, colabora a la conceptualización de la transición cuántico-clásico, y permite validar las leyes de la Mecánica clásica conocida por los estudiantes: si no actúan fuerzas sobre un cuerpo, su movimiento queda descrito por una relación lineal entre la posición y el tiempo.

En la **quinta situación** los estudiantes no tuvieron dificultades para reconocer la forma y las características de la función $P(x)$ que se obtiene al aplicar la STA en la EDR, ni en graficarla a partir de sus características funcionales –periodicidad, positividad y valores extremos- y de algunos puntos notables de la función que habían sido predeterminados. Con relación a la modelización, un solo grupo, utilizando el teorema en acto *Tmod₁*: “**La técnica STA modeliza la experiencia si da una gráfica aproximada**” aceptó la semejanza de las curvas, dejando a un lado las diferencias. La mayoría de los estudiantes, no logró reconocer la modelización, al resaltar las diferencias entre las dos curvas, utilizando el *Tmod₂*: “**Como la curva teórica es sólo parecida en algún aspecto a la obtenida en la simulación de la experiencia, hay algo incorrecto**”. La intervención de la profesora fue fundamental para que ellos dejen a un lado las diferencias de la curva teórica y la experimental. Esto lleva a reflexionar acerca de la necesidad de revisar el concepto de modelización matemática que se plantea en la Física escolar. No es común que en la escuela se presente un fenómeno para el cual se “construya” un modelo matemático que se ajuste al fenómeno. Por el contrario, generalmente se presenta el modelo matemático, y se lo aplica sin reflexionar acerca de sus ventajas y limitaciones.

Posiblemente el desconocimiento de los estudiantes de los fenómenos físicos de interferencia, difracción, e interferencia modulada por difracción no les permita aceptar la aproximación de la curva obtenida. Si los estudiantes conocieran estos efectos, se podría explicar la aproximación reconociendo que en el modelo se están dejando de lado los efectos de la difracción, como es usual en toda modelización. Para futuras replications, en las cuales los estudiantes desconozcan los fenómenos ondulatorios en cuestión, se debería enfatizar en la “forma” de máximos y mínimos que muestra el software, y desestimar la altura de estos últimos en la secuencia, para que se pueda reconocer naturalmente la modelización.

En la **sexta situación** el uso del teorema en acto: *T_{vmc}* “**Al aplicar la STA en la EDR con masas mayores al electrón debe obtenerse la curva que se obtenía para bolillas**” indica la dificultad de los estudiantes para comprender que aunque las leyes cuánticas tienen validez universal, hay una transición al aumentar la masa, en la cual los efectos cuánticos dejan de ser perceptibles, detectables por los instrumentos experimentales. La transición entre los dos sistemas fue planteada desde la EDR y para poder colaborar en la

comprensión, se utilizó la Simulación 2. Ésta resultó ser útil ya que permitió a los estudiantes visualizar que al aumentar el valor de masa, aumenta la frecuencia de $P(x)$, la curva periódica modelizada. La mayoría de los estudiantes había formulado esta conclusión cuando se les solicitó realizar las gráficas de $P(x)$ para un valor de masa mayor. En la síntesis final que se entregó a los estudiantes se presentó una imagen para analizar la comparación entre la curva teórica que predice la aplicación de la STA y la curva promedio que se obtiene experimentalmente, que está restringida por la resolución del detector. Sería deseable que en futuras repeticiones, se contara con una versión mejorada de esta Simulación 2, para que en los casos de masa macroscópica, muestre un gráfico “promedio” que presente uno o dos máximos, que muestre a los estudiantes los mismos resultados que los que muestra el software, colaborando en la comprensión del principio de correspondencia, es decir que las leyes de la Mecánica Cuántica permiten explicar tanto sistemas macroscópicos como microscópicos.

En el análisis realizado, en el que se consideraron las conversaciones de los estudiantes en el transcurso de cada una de las clases -tratando de interpretar cómo fueron pensando y construyendo sus ideas- desde la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, permite corroborar el funcionamiento del *carácter oportunista* de la conceptualización. Este fenómeno, señalado por Vergnaud (2008) combinado con la presencia de invariantes operatorios (teoremas en acto y conceptos en acto) construidos en la historia cognitiva del alumno, hacen que la conceptualización sea un proceso complejo, y sea bastante difícil lograr consensos y explicaciones con los estudiantes. El ejemplo más representativo de esto es el teorema en acto relativo a los electrones que los identifica con pequeñísimas bolillas, capaces de “atravesar paredes”. Este teorema en acto, fertilizado y regado por años de escolaridad, tiene además un correlato mental imagístico y otro pictórico, que está bien documentado en múltiples textos de física y de química. Este trabajo muestra hasta qué punto, está obstaculizando la conceptualización del electrón como un sistema cuántico. A la vez que conduce a advertir acerca de la importancia de evitar esta auténtica creación didáctica, de electrones como bolitas que pueden atravesar cualquier pared.

Análisis de la evaluación final

Al finalizar la implementación de las situaciones de la secuencia, y de dos encuentros dedicados a la revisión, síntesis y acuerdo con los estudiantes, se realizó la evaluación¹⁹.

La evaluación no es entendida como un acto final de comprobación y constatación de saberes, sino como un conjunto de situaciones para actualizar y utilizar el conocimiento construido. Así, el análisis de las acciones de los estudiantes en esta instancia, contribuye a interpretar y comprender la conceptualización y la transferencia a situaciones que no son las mismas, pero guardan relación con las situaciones anteriores.

En esta instancia, las acciones requeridas no son nuevas para los estudiantes, ya que es posterior a la negociación de significados previa. El análisis de la evaluación se realizó tomando como punto de partida que *“alguien sabe, cuando sus acciones satisfacen los criterios de aceptación establecidos por el grupo para construir los conocimientos que se consideran aceptables. Tales criterios son producto del consenso y forman parte del*

¹⁹ Los resultados del análisis de la evaluación se encuentran publicados como:
FANARO, M; OTERO, M R; ARLEGO, M. “Teaching the foundations of quantum mechanics in secondary school: a proposed conceptual structure” *Investigações em ensino de ciencias*. V14(1), pp. 37-64- Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, BRASIL

conocimiento público -del grupo- según haya sido formulado en documentos escritos o en el flujo de las conversaciones que forman parte del vivir de dicho grupo.”(Otero, 2006:22).

Las situaciones planteadas requerían las siguientes acciones:

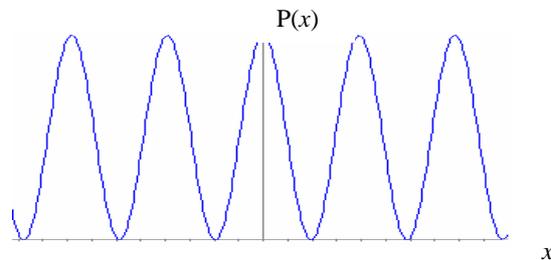
- Argumentar con los conceptos y principios relativos a la EDR, a la técnica STA y el comportamiento cuántico de los electrones.
- Trazar gráficos aproximados resultantes de la EDR con diferentes proyectiles por comparación con una curva dada, justificando la forma obtenida
- Calcular la longitud de onda y decidir acerca de la detección del patrón de interferencia.
- Describir los procesos realizados para aplicar la STA a la EDR.
- Anticipar resultados de simulaciones con determinadas condiciones iniciales.

Las situaciones que conforman la evaluación son las siguientes:

1- Decidí si las siguientes afirmaciones son correctas, justificando la respuesta:

- a) El patrón de interferencia obtenido en la EDR con electrones se debe a que ellos son ondas.
- b) Lo esencial en la técnica STA es que las probabilidades se suman.
- c) La forma final de los impactos de las bolillas obtenida en la pantalla de la EDR siempre forman dos columnas en forma de “proyección” de las rendijas.
- d) Según la técnica STA para el electrón libre, en el cálculo de la amplitud de probabilidad total hay que considerar no sólo el camino clásico sino todo un conjunto de caminos cercanos alrededor de él. Esto significa que el electrón sigue realmente todos esos caminos a la vez.
- e) La longitud de onda asociada a las partículas, hace que siempre se obtenga un patrón de interferencia.

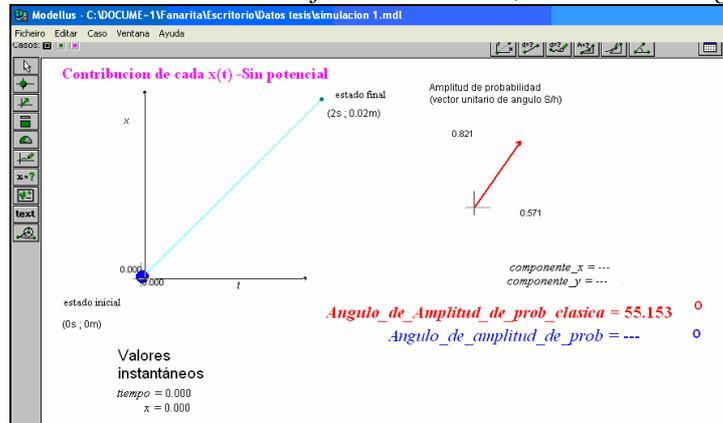
2- La siguiente figura representa de manera aproximada la curva de $P(x)$ resultante de la EDR con ambas rendijas abiertas, utilizando como proyectiles protones. Realiza en forma aproximada una gráfica que corresponda a la curva $P(x)$ cuando se realiza con electrones, y otra con bolillas, explicando en cada caso.



3- Suponiendo que se detecta un patrón de interferencia en la pantalla de la EDR recién cuando la longitud de onda asociada a los “proyectiles” que se utilizan sea de 10^{-15} m. Al realizar la experiencia con partículas de masa de 10^{-10} kg. ¿Se observará un patrón de interferencia en la pantalla?

4- ¿Por qué la técnica STA nos permitió explicar el patrón de interferencia obtenido con electrones en la EDR? Comenta los procedimientos realizados

5- Si se ejecuta una simulación con el software Modellus, se obtiene la siguiente pantalla:



a) ¿Se trata de un sistema cuántico o de una partícula? Justifica tu respuesta

b) ¿Qué tendría que mostrar la pantalla cuando se elijan un conjunto de caminos cercanos a $x_{clas}(t)$?

La primera situación pedía a los estudiantes decidir si ciertas afirmaciones son verdaderas o falsas. La segunda, evaluaba su capacidad para realizar la curva $P(x)$ en la EDR para electrones y bolillas, a partir de una curva correspondiente a protones, discutiendo similitudes y diferencias. La tercera, requería calcular y comprender el significado de la longitud de onda asociada a los proyectiles de la EDR. La cuarta, pedía a los estudiantes que explicaran como se aplica la STA a la EDR y cómo se explica el patrón de máximos y mínimos. La última pregunta requería: calcular el valor de la masa de una partícula o sistema cuántico “libre” en condiciones iniciales y finales dadas, utilizar la constante de Planck para decidir si se estaba en un caso cuántico o no, y explicar los resultados de la simulación con relación a los vectores asociados a caminos cercanos la trayectoria clásica. La fiabilidad de este instrumento, se estimó mediante el coeficiente alfa de Cronbach (Moreira y Lang da Silveira, 1993) obteniéndose $\alpha = 0.72$ para este GC.

Los conceptos, los principios fundamentales y las relaciones que los estudiantes tenían que aprender y así como las acciones necesarias para que ocurriera este aprendizaje se sintetizan en la Tabla 5.1:

Tabla 5.1: Conceptos, principios clave y explicaciones considerados en la evaluación y acciones explícitas de los estudiantes

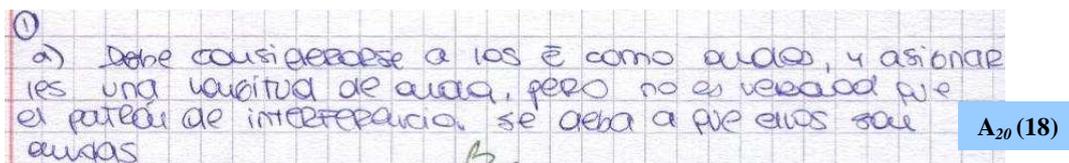
Conceptos, principios clave y explicaciones	Acciones de los estudiantes	Tarea
1- Electrón como “Sistema cuántico”	Aceptar la naturaleza del electrón según la distribución en la EDR	1.a)
2- STA para el electrón libre	2.1- Describir del movimiento del electrón	1.d)
	2.2 -Aplicar la STA para obtener el valor de la masa en las condiciones iniciales dadas (estado inicial y final, y ángulo del vector amplitud para $x(t)$ clásica) y decidir si es o no un sistema cuántico.	5.a)
		5.b)

3- La STA para la EDR	Describir los procedimientos realizados para explicar la curva de $P(x)$ aplicando la STA	4)
4- Resultados clásicos y resultados cuánticos de la EDR: análisis de la transición	4.1- Graficar $P(x)$ para distintos valores de masa 4.2- Distinguir entre formación y detección del patrón de interferencia	2) 1.e)

A continuación analizamos las respuestas de los estudiantes, y ofrecemos ejemplos para cada categoría de la tabla:

1- Electrón como “Sistema cuántico”

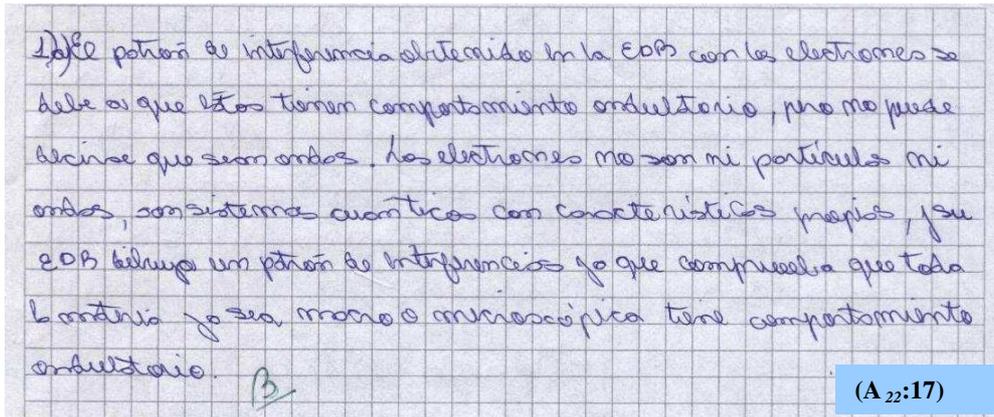
Casi todos los estudiantes admiten cierto comportamiento ondulatorio de los electrones, pero no los consideran como si fueran ondas. El carácter ondulatorio de los electrones sería entendido como una nueva propiedad de los mismos, que se “agrega” a la propiedad corpuscular de impactar de a uno en una pantalla. Como dijo A₂₀(18)²⁰ “no es verdad que el patrón de interferencia se debe a que ellos son ondas”.



Los estudiantes continúan utilizando la concepción corpuscular aún cuando reconocen el comportamiento ondulatorio. Así, algunos usaron la expresión “partículas Cuánticas” para referirse a los electrones aunque durante el desarrollo de la secuencia didáctica nunca se utilizó este término. Esto sugiere que la idea corpuscular se conservaría y se agregaría como adjetivo “Cuántica”. La forma de representar, nombrar e imaginar a los electrones que los alumnos usan habitualmente, sería un obstáculo para comprenderlos como sistemas cuánticos.

Entre los estudiantes que aceptan el comportamiento ondulatorio de los electrones, ocho se refieren a ellos como “sistemas cuánticos” como se los denominó en las clases. Ellos ofrecen explicaciones más o menos detalladas acerca de esta nueva idea. (A₂₂:17) dijo en la primera parte de su respuesta escrita que no se debe considerar al electrón como partícula o como onda en el sentido excluyente, y sí como algo nuevo, con características especiales. La respuesta de (A₂₂:17) se presenta a continuación:

²⁰ Cada estudiante se identifica con un número y su edad entre paréntesis.



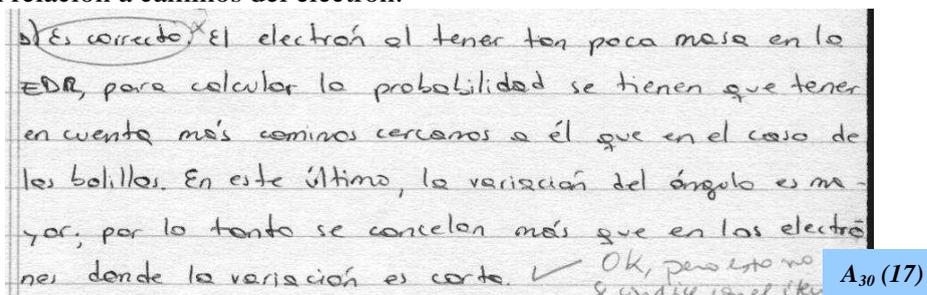
2- STA para el electrón libre

2.1 Describir el movimiento del electrón

El carácter ondulatorio de los electrones y la técnica STA para calcular probabilidades, implican que no hay una única y determinada $x(t)$ con la que se pueda describir **directamente**²¹ el movimiento del electrón. Como para calcular la probabilidad es necesario considerar todo un conjunto de $x(t)$ ó “camino” cercanos alrededor de la $x(t)$ clásica, no tiene sentido pensar que ese conjunto describe el movimiento del mismo modo que en Mecánica clásica. Aunque podría interpretarse que el movimiento del electrón es “como si siguiera todos esos caminos a la vez”, durante el desarrollo de esta secuencia se evitó mencionar esa idea, porque la idea de camino no se refiere a una trayectoria en el espacio, sino a funciones posición-tiempo que conectan estados iniciales y finales. La STA se mostró como una técnica de cálculo que considera un conjunto de caminos alrededor del clásico para obtener la probabilidad de cambio de un estado inicial a otro final.

La pregunta (1. d) indaga si los estudiantes piensan que el electrón sigue un conjunto de caminos “a la vez” o solo uno, basándose en la “vieja idea de trayectoria”; o si entienden que no es posible conocer el camino de un electrón libre, porque no se dispone de una única función $x(t)$ que describa su movimiento. Por lo tanto, ni sólo uno, ni un conjunto simultáneo de caminos es la respuesta adecuada.

Solo dos estudiantes aceptaron la afirmación (1.d) como correcta. En los otros casos, la respuesta mencionaba solo la primera parte de la afirmación referida a la cancelación o el refuerzo de los vectores de amplitud asociados para el caso del electrón libre. El estudiante A₃₀ (17) dio la afirmación como correcta sin referirse a cómo se interpreta la técnica en relación a caminos del electrón:



²¹ Esto es, conocida la expresión funcional de $x(t)$, es posible determinar la posición en la que se encuentra un objeto, para un tiempo dado, o viceversa.

A₄(18) afirma que (1.d) es correcta y agrega que los electrones son sistemas cuánticos con características propias, como si esto justificara la multiplicidad de caminos posibles:

d) Este ^{pareciera ser!} es cierto para los sistemas cuánticos (que se comportan distinto) donde no existe un camino ^{solo} posible. Resp A₄(18)

La mayor parte de los estudiantes (22) cuestionaron la expresión o la encontraron incorrecta, según se describe a continuación:

Cuatro estudiantes dicen que aunque en el caso del electrón hay que considerar un conjunto de caminos, este finalmente tomará **uno sólo**. Ellos tendrían la idea clásica del electrón como corpúsculo. A₉(17) propuso que había que considerar los caminos cercanos para la suma, pero que el cálculo sería el que finalmente decidirá el camino que “finalmente tomará”:

d) Según la técnica STA para el electrón libre, en el cálculo de la amplitud de probabilidad total hay que considerar no sólo el camino clásico sino todo un conjunto de caminos cercanos alrededor de él, desde a que estos contribuyen a la suma. Sin embargo, el electrón toma un solo camino. El que fue obtenido mediante el cálculo. A₉(17)

Adoptando una posición animista, A₂₆(19) dijo que acepta la idea de caminos probables, aunque “será el electrón quien elegirá” porque la STA permite calcular el camino más probable.

d) El electrón tiene múltiples caminos a seguir, pero en realidad “elige” uno, la STA nos permite calcular el camino más probable y va a tomar. A₂₆(19)

Doce estudiantes mencionaron que la STA considera diferentes caminos “probables” para el electrón, pero ellos no se refirieron a si de hecho es o no posible describir el movimiento de los electrones. Por ejemplo A₂₃(18) representa esta subcategoría:

D) Falso. Es falso porque el e no toma todos esos caminos a la vez, sino existe la posibilidad de tome cualquiera de esos caminos (no a la vez). A₂₃(18)

- Referencia al carácter instrumental de la técnica STA.

Seis estudiantes dijeron que la técnica solo serviría para el cálculo y que la STA solo permitiría afirmar que no se puede conocer cuál es el “camino” de los electrones.

A₁₄(17) dijo que tener en cuenta diferentes caminos para calcular la probabilidad no implica decidirse por uno o varios caminos. Ella no mencionó el carácter incierto del movimiento:

En un conjunto de franjas.
 d) La técnica STA se suman en un conjunto de caminos, lo cual me quiere decir que ^{el} ~~los~~ electron ^{no} ~~tiene~~ realmente todos ellos, sino que son todos las probabilidades por lo cual hay que tenerlos en cuenta bien!

A₁₄(17)

A₁₁(17) respondió acerca de la EDR, el dijo que el electrón no toma todos los caminos.

d) El electron no toma todos los caminos, sino que al ser todos estos caminos probables hay que considerarlos para la amplitud de probabilidad total que nos indicara cuanto es probable que un electron impacte en una zona de la pared. B

A₁₁(17)

La respuesta de A₂₇ (18) indica que ella comprende muy bien como se usa la técnica STA. Ella no analizó como se interpreta la contribución de los caminos cercanos al clásico:

d) según la técnica STA para el electron libre, en el cálculo de la amplitud de probabilidad total hay que considerar no sólo el camino clásico sino todo un conjunto de caminos cercanos alrededor de él, ya que el ángulo que determina los ritos sea muy poco (debido a que la masa del electron, es cercana a la constante de Planck) y por lo tanto los ~~caminos~~ ^{ritos} no se cancelan. Esto no significa que realmente tome todos esos caminos a la vez, sino que no se sabe por cuál de esos caminos va.

A₂₇ (18)

2.2 Aplicar la STA para el caso del electrón libre

Veintiséis estudiantes (26) describieron la técnica STA en alguna de las cuestiones planteadas en la evaluación -a veces de manera literal- aunque no se les pidió que lo hicieran. Para resolver la última situación se necesitaba utilizar la técnica STA. Los estudiantes no tuvieron dificultades para reproducir los “pasos” de la técnica, ni para calcular la acción S cuando se proporciona el ángulo del vector amplitud asociado a la $x(t)$ clásica.

Seis estudiantes intentaron obtener el valor de la masa pero no lo consiguieron. El resto de los estudiantes (24) pudieron obtener algún valor para la masa y decidir de qué sistema se trataba. En estos casos, las respuestas se pueden agrupar en tres clases:

a) Dieciséis estudiantes (16) compararon el valor de masa obtenido con la masa del electrón. A₁₈(18) cometió un error menor en la cuenta final y obtuvo una masa cuyo valor es la mitad de la de electrón. Aunque esto nunca sucedió durante las clases, A₁₈(18) no advirtió que había obtenido una masa inferior a la del electrón. Nuestro diseño seleccionó cuidadosamente los parámetros iniciales para evitar que surgieran valores de la masa

inferiores a la masa del electrón. Aunque esto sería físicamente admisible, como en ese caso las partículas no tienen existencia independiente, se decidió considerar al electrón libre como caso prototípico de sistema cuántico.

⑤ a) $180^\circ - 1\pi$
 $55,123^\circ - 0,96 \text{ rad}$

$$\hbar = \frac{6,625 \cdot 10^{-34}}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$$

$$\frac{S}{\hbar} = 0,96 \text{ rad} \quad S = 0,96 \text{ rad} \cdot \hbar$$

$$S = 1,008 \cdot 10^{-34}$$

$$S = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \cdot t$$

$$1,008 \cdot 10^{-34} = \frac{1}{2} m (0,01)^2 \cdot 2s$$

$$\frac{1,008 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot (0,01)^2} = \frac{1}{2} m$$

$$\frac{2,52 \cdot 10^{-31}}{1/2} = m \Rightarrow 5,04 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

MASA del ELECTRÓN = $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

La masa obtenida es menor que la masa del electrón, por lo tanto se habla de un sistema cuántico.

A₁₈(18)

b) Cuatro estudiantes dijeron que se trataba de un sistema cuántico porque el ángulo propuesto era similar al ángulo del vector asociado a la $x(t)$ clásica. Por ejemplo A₂₈(17) justifica como se aprecia a continuación:

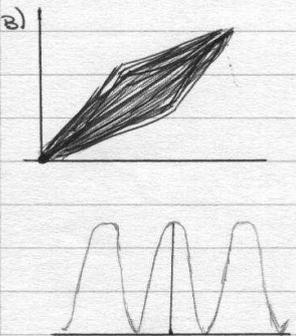
⑤

a) Es un sistema cuántico porque el ángulo $X_{clás}$ se parece al de los electrones ✓

$\phi = \frac{S}{\hbar} \Rightarrow S = \phi \cdot \hbar = 55,153 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 5,79 \cdot 10^{-33}$ *no posición e radiantes!*

$S = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \cdot T \Rightarrow m = \frac{S}{\frac{1}{2} v^2 \cdot T} = \frac{5,79 \cdot 10^{-33}}{\frac{1}{2} (0,01 \text{ m/s})^2 \cdot 2s} = 5,79 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$ (K)

b)



No varía mucho la amplitud porque la masa es poca al tomar valores cercanos a $X_{clás}$ ✓

A₂₈(17)

c) Cuatro estudiantes utilizaron la constante de Planck en la toma de la decisión:

A₉(17) calculó correctamente la masa y la comparó con la constante de Planck, en lugar de comparar con la masa del electrón, así respondió que no correspondía a un sistema cuántico.

$S = \frac{1}{2} m v^2 t$ • $v = \lambda / t$ $v = 0,02 \text{ m} / 2 \text{ s} \rightarrow v = 0,01 \text{ m/s}$
 • $m = \frac{S}{v^2 t \cdot \frac{1}{2}}$ • $\lambda = S / h$
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 9^\circ$ • $S = \lambda h \rightarrow S = 0,96 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 1,008 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
 $0,96 = \lambda \cdot 55^\circ$

$m = \frac{1,008 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{(0,01 \text{ m/s})^2 \cdot 2 \text{ s} \cdot \frac{1}{2}} = 1,008 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ **A₉(17)**

Debido a que la masa de la partícula es mayor a la constante de Planck ($6,625 \cdot 10^{-34}$) se trata de una partícula y no de un sistema cuántico. *notan mayor...*

Cuando se elijan un conjunto de caminos cercanos a $\chi_{\text{clas}}(t)$ la pantalla deberá mostrar que sus vectores tienen valores de acción parecidos a los de la función clásica. Si se eligieran caminos alejados deberá mostrar que los vectores tienen valores de acción muy diferentes a $\chi_{\text{clas}}(t)$ y entre sí, por lo que al sumarse se cancelan. *¿aunque 1 to 1 cumple para sí? "clásico"*

La respuesta de A₂₉(18) es similar a la de A₉(17) en los cálculos, pero se diferencia en la interpretación. Ella compara el valor de la masa con la constante de Planck, y responde que se trata de un sistema cuántico.

$\lambda = 55^\circ = 0,96 \text{ rad}$ $t = 2 \text{ s}$ $\vec{v} = \frac{0,01 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 0,01 \text{ m/s}$
 $\frac{180^\circ}{\pi} = 57,3 \text{ rad}$

$\lambda = \frac{S}{h}$ $h = \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{2\pi}$
 $\lambda \cdot h = S$ $h = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$

$0,96 \text{ rad} \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} = 1,01 \cdot 10^{-34}$

$S = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \cdot t$ **A₂₉(18)**
 $m = \frac{S}{\frac{1}{2} m \cdot v^2 \cdot t} = \frac{1,01 \cdot 10^{-34}}{\frac{1}{2} (0,01)^2 \cdot 2} = 1,01 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$

Rta: se trata de un sistema cuántico ya que la masa obtenida es cercana al valor de la constante de Planck.

Cuando se elija un conjunto de caminos cercanos a $\chi_{\text{clas}}(t)$ la pantalla deberá mostrar una mínima variación del ángulo, por lo que al sumar los vectores estos no se cancelarán, sino que aportarán a la suma.

3- La STA para la EDR

La cuarta pregunta del examen pedía a los estudiantes que justificaran como la expresión de $P(x)$ obtenida aplicando la STA para la EDR con electrones, explica el patrón de interferencia. Se necesitaba mencionar que la expresión coseno al cuadrado para $P(x)$ corresponde a los máximos y mínimos de la curva obtenida con el software (aunque sin modulación). Todos los estudiantes intentaron alguna respuesta que se agrupó en la siguiente forma:

a) Seis estudiantes no pudieron explicar la forma de la curva $P(x)$ para los electrones. Solo describieron los procedimientos generales de la STA sin aplicarla a la EDR con electrones.

b) Ocho estudiantes describieron los procedimientos de la técnica y sus resultados en relación a los vectores. Sin embargo, este conjunto de estudiantes no es capaz de explicar su relación con el patrón de interferencia de la EDR. El protocolo de $A_3(18)$:

ningún mínimo. En cambio la curva de
electrón posee 2 máximos y 1 mínimo.
Puede expresarse así = $P(x) = 4 \cos^2\left(\frac{m \cdot d}{2\lambda} \cdot x\right)$

④ Mediante la técnica STA se obtiene varios
vectores, denominados vectores de amplitud
que sumados permiten analizar la amplitud
total de los electrones en la EDR.
Aquellos vectores obtenidos de funciones
cercanas a la x (clást) son los que van
a contribuir a la suma mientras que los
que se alejan se anulan.

$A_3(18)$

$A_{11}(17)$ describió los procedimientos de la técnica para el caso de la EDR con electrones. Como no escribió la expresión de $P(x)$ no pudo explicar los máximos y mínimos. Su respuesta es original porque él utilizó el concepto de longitud de onda asociada.

4) La técnica STA nos permite hallar la amplitud de la probabilidad de impactos, hallando la acción de los vectores y luego hallar la acción de todos los probables de ese vector de salir de un lugar y llegar a otro, luego se fusionan que suman todas estas posibilidades y el módulo de este suma elevando al cuadrado. También podemos hallar el ángulo de estos vectores, y concluimos que en la experiencia los electrones cualquier variable de salir de un lugar y llegar a otro siempre están muy juntos al ángulo central muy pocas, entonces hay que tomar la mayoría de los puntos posibles, y así calculando la longitud de onda nos permitieron concluir al patrón de interferencia con varios máximos y mínimos.

A₁₁(17)

c) Aproximadamente la mitad de los estudiantes (16) describieron la aplicación de la técnica STA para el caso de la EDR, y colocaron al final la expresión de $P(x)$ resultante para explicar la forma de máximos y mínimos. A₁₅(18) expresa:

4) Cada camino posible es solo un valor de acción S , el cual está asociado a un vector a amplitud dada por un módulo y un ángulo. Conociendo es igual a 1 el ángulo a $\frac{S}{\hbar}$, thus se obtiene el ángulo se debe saber la amplitud de c caminos posible. Esto se realiza por medio de la fórmula de probabilidad obtenida como $P(x) = 4 \cos^2 \left(\frac{m \cdot d}{2 \hbar \cdot t} \cdot x \right)$ Pero al hacer 2 ranuras se suman 2 ángulos. (aquella acción x es (ϵ) obtenida es probabilidad esto es el caso de cuadrado, obteniendo la probabilidad total $P(x) = 4 \cos^2 \left(\frac{m \cdot d}{2 \hbar \cdot t} \cdot x \right)$.

A₁₅(18)

S₁₆(17) dijo que la expresión de $P(x)$ es la que permite explicar los máximos y mínimos mostrados en la simulación de la EDR con electrones:

4) A PARTIR DE LA TÉCNICA STA HACIENDO S SE OBTIENE EL θ DE CADA $X(t)$. LAS COMPONENTES SON: ~~$x(t)$~~
 $x(t) = (\cos S/\hbar; \sin S/\hbar)$.
 CADA SISTEMA O PARTICULA SE DIRIGIA DE UNA POSICIÓN

INICIAL (I) A UNA POSICIÓN FINAL (F), TENIENDO EN CUENTA QUE PODÍA PASAR POR LA RENDIJA R_1 O R_2 .
 LUEGO DE UNA SERIE DE PROCEDIMIENTOS SE OBTENÍA QUE PARA AVERIGUAR A QUÉ DISTANCIA DEL CENTRO CADA PARTICULA O SISTEMA SE DEBÍA REALIZAR EL SIG.
 CALCULO: $P(x) = 4 \cos^2 \left(\frac{m \cdot d \cdot x}{2 \cdot h \cdot t} \right)$, DEPENDIENDO DEL x QUE TOMÁRAMOS. ASÍ SE OBTENIAN LOS MÁXIMOS Y LOS MÍNIMOS

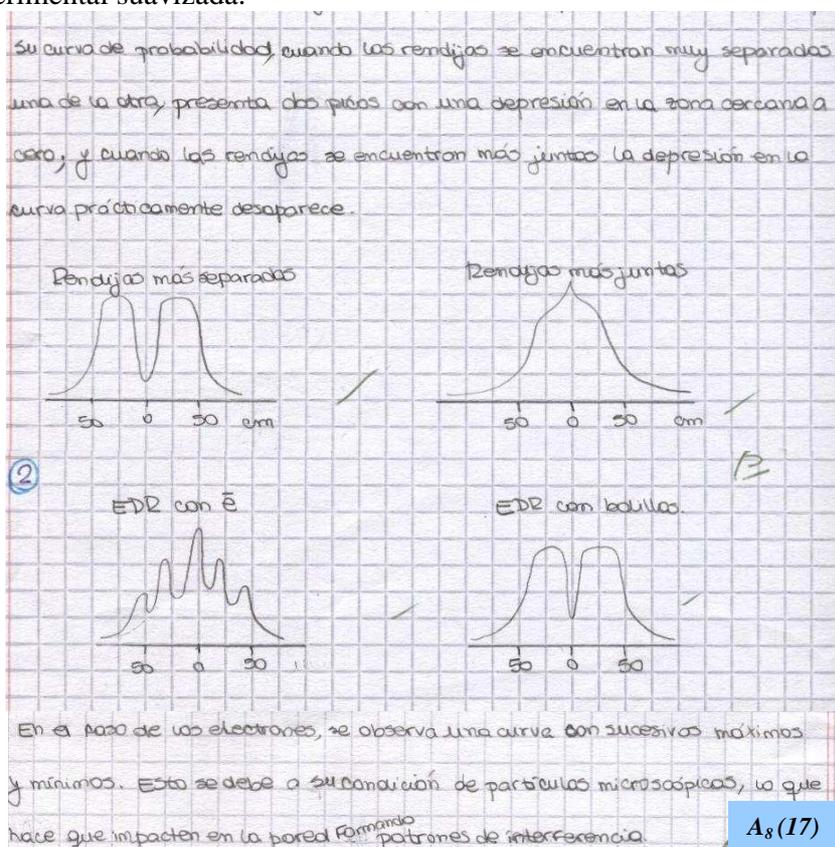
A₁₆(17)

4- Resultados clásicos y resultados cuánticos de la EDR: análisis de la transición

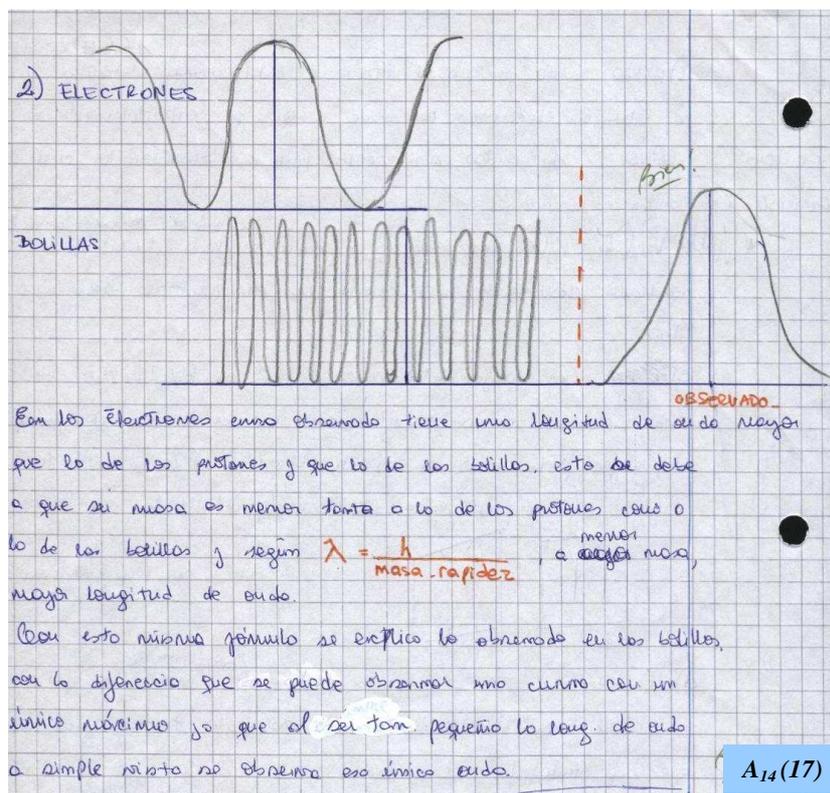
• 4.1 Graficar $P(x)$ según distintos valores de masa

La segunda pregunta del examen pedía que los estudiantes esbozaran el gráfico de $P(x)$ para electrones y bolillas en la EDR, basándose en base al gráfico con protones que se les ofrecía. Según los valores de masa y según se tratara de electrones o bolillas, los gráficos debían mostrar distinta separación entre máximos y mínimos.

Veinte estudiantes dibujaron las dos curvas de $P(x)$ correctamente y usaron la noción de probabilidad. Sin embargo, no mencionaron las diferencias con la curva dada, debidas a la separación entre los máximos. A₈(17) dibujó ambas curvas y consideró como cambió la curva de bolillas según la separación de las rendijas. Mientras que para los electrones representó la curva obtenida experimentalmente, en el caso de las bolillas solo dibujó la forma experimental suavizada.



A₈(17)



4.2 Distinción entre formación y detección del patrón de interferencia

Cuando finalizó el trabajo en clase el grupo acordó que las explicaciones ofrecidas por la Mecánica Cuántica deben coincidir con los resultados obtenidos con la Mecánica clásica para los casos macroscópicos como las bolillas. También los estudiantes analizaron las simulaciones en estos casos, y comentaron figuras de las curvas teóricas y experimentales para el caso de las bolillas.

Si para responder la pregunta (1e) del examen, los estudiantes eran capaces de reflexionar sobre la formación y detección del patrón de interferencia en la EDR, podría decirse que ellos comprendían la transición entre la Mecánica Cuántica y la clásica, y que ellos entendían que el caso macroscópico es un caso límite de las leyes Cuánticas.

Solo dos estudiantes no respondieron la pregunta. Seis estudiantes solo hicieron referencia a que “lo habían visto con el software” (por ejemplo A₂₄(17)), quizás porque el software actúa como un mecanismo explicativo para los estudiantes.

Veintidós estudiantes escribieron una explicación, y sus respuestas se agruparon en:

a) Rechazo de la afirmación propuesta, sin reflexionar acerca de resultados teóricos y experimentales

Seis estudiantes argumentaron que el patrón de interferencia se forma sólo cuando la longitud de onda es suficientemente “grande”, como en el caso de las partículas de pequeña masa, o los electrones. Ellos no entienden la diferencia entre poder detectar experimentalmente el patrón de interferencia y el hecho de que este se forma igual aunque nos sea apreciable. A₁(17) expresa “Falso, el patrón de interferencia sólo se da en las partículas microscópicas, ya que poseen mayor frecuencia que las partículas macroscópicas”

b) Diferenciación entre formación del patrón de interferencia y su observación experimental

Dieciocho estudiantes argumentaron que aunque la formación del patrón siempre se produce, esto no siempre es “notable” o “perceptible” por los aparatos de detección. A₂₂(17), ofrece una explicación basada en el cociente entre la constante de Planck y la masa, como se discutió durante el desarrollo de las clases:

e) Toda la materia, ya sea partículas macroscópicas o sistemas cuánticos, tiene comportamiento ondulatorio, pero su longitud de onda varía de acuerdo a la masa de dicho materia. Las partículas macroscópicas tienen una longitud de onda tan pequeña que la curva de probabilidad no forma un patrón de interferencia sino una curva con un máximo central que disminuye hacia los costados. Esta longitud de onda pequeña es el resultado del cociente entre la constante de Planck (de valor pequeño) y una masa de valor grande comparada a los sistemas cuánticos (en estos sí es posible observar el patrón de interferencias). A₂₂(17)

A₂₇(18) expresó la diferencia entre el fenómeno y su detección, realizó la gráfica de la curva de $P(x)$ para electrones y para las bolillas. Ella dibujó las dos curvas de $P(x)$ por un lado la curva teórica que predice la STA, y por otro la curva obtenida experimentalmente (suavizada):

e) V. Aunque en el caso de las partículas al ser grande la masa en relación a la constante de Planck, la longitud de onda es muy pequeña y estas oscilaciones no se pueden ver en la pantalla. (ver gráfico pag. 4)

los tienen un comportamiento ondulatorio, que explica los máximos ^(suma de crestas) y mínimos ^(suma de valles) obtenidos, pero en el caso de los bolillos al ser la masa mayor la longitud de onda es tan pequeña que no pueden detectarse estas oscilaciones, por lo que se ve como si fuera una sola onda.

A₂₇(18)

A₂₈(17) respondió brevemente y agregó al final un diagrama representativo de la situación:

e) En el caso de las partículas muy grandes, la longitud de onda es muy pequeña y los programas no la llegan a detectar por esto forman 1 sola curva

A₂₈(17)

A₂₈(17) entendería que las leyes de la Mecánica clásica son el caso límite de la Mecánica Cuántica. Ella agregó al final que “en la física Cuántica, al aumentar la masa se cumple la física clásica”

Síntesis acerca de la Evaluación

La evaluación final es un conjunto de situaciones y es considerado un instrumento más que permite apreciar el funcionamiento de las situaciones diseñadas y de la secuencia completa. Del análisis de sus respuestas se concluye que buena parte de los estudiantes:

- En general aceptaron que los electrones tienen un comportamiento peculiar y característico, que lleva a considerarlos como sistemas cuánticos.
- También aceptaron que la técnica STA es un mecanismo explicativo adecuado del patrón de interferencia en la Experiencia de la Doble Rendija, de otro modo inexplicable.
- Hubo buena aceptación respecto a que la asociación del comportamiento ondulatorio de la materia permite definir una longitud de onda tanto a las partículas macroscópicas como a las microscópicas.
- Lograron establecer la relación entre la formación y la detección del patrón de interferencia según se trate de sistemas macroscópicos o microscópicos.

- La mayoría no está dispuesto a aceptar que es imposible conocer cuál es la función que describirá el movimiento del electrón. Después de la secuencia, y según lo muestra la evaluación ellos siguen pensando que *“finalmente debe tomar un camino”*.
- El concepto clásico de **trayectoria en el espacio** resultó un obstáculo para comprender el concepto de “camino” que conecta el estado inicial con el final, en el sentido de función $x(t)$ que en esta secuencia didáctica se presenta a veces. Esto obstaculizó la interpretación de lo que se mostraba con el software. Esta situación podría mejorarse si en los cursos de física anteriores se evitara asociar la idea de trayectoria física con la imagen de recorrido determinado y único, y se adoptara la idea de modelización. Ello permitiría aceptar de forma más natural un punto de vista más instrumental y funcional para la adopción de la técnica STA. La enseñanza de nociones cuánticas exige profundizar la utilización de modelos en la Física; en particular la física cuántica suma una nueva abstracción en la modelización ya que por un lado, sus modelos físicos son muy abstractos, dentro de los cuales, nuestras antiguas y cristalizadas imágenes son inadecuadas. Los modelos matemáticos para los modelos físicos si bien no son complejos, como en el caso de la STA, también constituyen un obstáculo cuando se les quita el carácter pragmático y funcional.

Conclusiones acerca de la conceptualización

La identificación de algunos de los teoremas en acto que posiblemente fueron evocados cuando se presentaron las situaciones propuestas, se realizó para explorar y describir el funcionamiento de los problemas y las preguntas planteadas. Conocer los teoremas en acto utilizados y las inferencias que éstos permitieron y/o obstaculizaron permite, desde una mirada global, evaluar la viabilidad conceptual de la propuesta.

El proceso de conceptualización es un proceso a largo plazo, y no se termina en el tiempo en que se implementó la secuencia de situaciones y la evaluación. Para Vergnaud (2008, p. 5) *“la serie de teoremas en acto susceptible de ser asociada al mismo concepto es generalmente muy grande, particularmente en las disciplinas científicas y técnicas, de manera que, declarar que tal sujeto ha entendido el concepto, a menudo no tiene sentido”*. Sin embargo, es posible establecer las siguientes afirmaciones sobre la relación entre los conceptos que se esperaban reconstruir -establecidos en la ECR-, los teoremas en acto identificados cuando los estudiantes abordaron las situaciones, y los resultados obtenidos en la evaluación:

- Respecto a la conceptualización de distribución de probabilidad $P(x)$ para bolillas y para electrones en la EDR

Inicialmente el concepto de azar fue dominante, y no permitió a los estudiantes pensar en términos de probabilidades, pero luego el teorema en acto referido a la uniformidad de los resultados fue abandonado, y en la evaluación utilizaron el concepto de curva de probabilidades $[P(x)]$ en los marcos algebraico, funcional y gráfico de forma adecuada. Casi todos los estudiantes lograron diferenciar las curvas de probabilidad $P(x)$ para electrones y para bolillas, en términos de la presencia de máximos y mínimos.

Cuando los estudiantes abordaron las situaciones que implicaban el concepto de suma de funciones, no lograban reconocer la suma de ambas curvas en el sentido funcional, aunque varios de ellos notaban el efecto de superposición en el centro. Luego, la simulación con el software de la doble rendija parece haber contribuido a que reconocieran y explicitaran, que los efectos de cada una de las curvas se superponían cuando se abrían ambas rendijas

en simultáneo. Este fue un buen punto de partida para contrastar con la curva $P(x)$ de electrones.

- Respecto al electrón como **sistema cuántico**

En el diseño de la secuencia se había previsto que los estudiantes asociaran los resultados con los fenómenos ondulatorios - interferencia y difracción-, cuando se enfrentaran con la curva $P(x)$ en el software de la Experiencia de la Doble Rendija con electrones, pues ésta función es visualmente similar a la representación gráfica de la curva de intensidad en la Experiencia de Young. Sin embargo, esto no sucedió. Reflexionando críticamente acerca de las expectativas originales durante el diseño, caemos en la cuenta de que no se puede esperar que los estudiantes utilicen una estrategia cognitiva tan propia de los físicos: asociar características ondulatorias a las partículas, debido a que ambos casos se describen con las mismas herramientas matemáticas. Tal vez, si los estudiantes dispusieran de una base conceptual sólida de los conceptos ondulatorios, la asociación podría resultar más probable.

Los estudiantes no advirtieron la distribución de los electrones en franjas de concentración. Al contrario percibían que estaban “*distribuidos por toda la pared*” sin notar las bandas de concentración y los lugares vacíos. Esto se debe a que utilizaban el teorema en acto referido al comportamiento de los electrones: “*son bolillas pequeñísimas que pueden atravesar paredes*”-, lo cual les hacía ver la distribución homogénea en la pared, evidenciando una vez más que los invariantes operatorios orientan la percepción y la acción como un todo. Fue la profesora quien cuestionó la visión de homogeneidad cuando preguntó acerca de la interpretación de los mínimos de la curva. Esto hizo que los estudiantes revisaran su percepción y aceptaran la necesidad de encontrar una nueva categoría para los electrones, alternativa a “pequeñísimas bolillas”, conviniendo en llamarlos “sistemas cuánticos”. De esta forma, fue adquiriendo sentido la necesidad de buscar una manera de explicar la ley que rige la distribución de probabilidades. Estos resultados muestran que: 1) los productos de investigación deben ser testeados en aulas reales, modificados, y así siguiendo; 2) la relevancia de la intervención oportuna del profesor imbuido en la tarea que está desarrollando. Más adelante en el desarrollo de la Situación 5, expresiones de los estudiantes como “*ahora nos estás cambiando nuestro pensamiento de...de toda la vida! los electrones no son bolillas...(estudiante A13, en el E9)*” estarían indicando que ellos al menos pusieron en duda su idea de los electrones como “pequeñas bolillas”.

Según los resultados de la evaluación, una buena parte de los estudiantes parece reconocer el comportamiento “diferente” del electrón, respecto de las partículas macroscópicas como bolillas. Sin embargo, algunas respuestas en dicha instancia, muestran que ellos aún siguen considerando a los electrones como partículas, añadiendo la propiedad “cuántica”. Esto significa que los teoremas en acto referidos a los electrones como “*pequeñas bolillas*” probablemente sean reutilizados en aquellas situaciones que les requieran representar, nombrar e imaginar a los electrones.

- Respecto a la **contribución de las funciones $x(t)$ cercanas a la función clásica en el cálculo de probabilidad (Principio de superposición)**

Durante el desarrollo de las situaciones 3 y 4 algunos estudiantes manifestaron dificultades para responder a las preguntas requeridas con la utilización del software Modellus, porque no aceptaban la relación entre las funciones $x(t)$ y el vector amplitud de probabilidad (teorema en acto Tcv_2). Sin embargo otros, a pesar de la falta de familiaridad con la simulación, reconocieron la relación entre proximidad de funciones y dirección de

los ángulos del vector amplitud. Esto permitió avanzar en la conceptualización de la contribución de funciones en el cálculo de probabilidad.

Ciertos obstáculos como la falta de conocimientos relativos a la suma de vectores en forma geométrica y la diferencia entre sumar números y sumar vectores, tuvieron que ser sorteados en la interacción con la profesora. Finalmente, se formularon y aceptaron las conclusiones acerca de los resultados de la aplicación de la STA para el caso de electrones libres. En la evaluación, casi todos los estudiantes lograron referirse en forma adecuada a la contribución de funciones o “camino” cercanos al clásico en varias de sus respuestas.

Cuando se propuso aplicar la técnica STA para sistemas cuya masa fuera aumentando gradualmente, utilizando la *Simulación 1* surgieron nuevos obstáculos. Por un lado, la dificultad para interpretar la salida del software. Por otro, aquellos estudiantes que no habían aceptado los resultados para el caso del electrón, naturalmente tampoco comprendían la aplicación de la STA para casos de masa mayor. En algunos estudiantes fue notable la utilización del teorema *Tsv₂* “*Queda un solo vector en la suma, entonces, el resultado es más exacto*”. Esto indicaría que se aproximaban a la idea de que la probabilidad se transformaba en certeza si con una sola función se podía describir el movimiento de las partículas macroscópicas. Es decir que estaban a un paso de conceptualizar la transición cuántico-clásico.

- Respecto al **comportamiento ondulatorio y la longitud de onda asociada**

Cuando se aplicaron los resultados de la STA a la EDR, (Situación 5) se obtuvo una función que se ajustaba –parcialmente- a la función experimental mostrada por el software. Los estudiantes manifestaron dificultades para reconocer la modelización, porque ambas curvas no resultan exactamente iguales: la que muestra el software considera la difracción y la que predice la técnica no. Sin embargo, la propuesta de utilizar la *Simulación 2* colaboró para construir el concepto de longitud de onda asociada, porque ellos corroboraron cómo cambia la curva de $P(x)$ al aumentar la masa, que ya habían reconocido cuando analizaron la expresión funcional. En la evaluación, ellos parecen utilizar adecuadamente este concepto, cuando consiguen graficar curvas de probabilidad relativas a sistemas cuánticos y a sistemas clásicos, y calculan e interpretan apropiadamente las longitudes de onda involucradas en las preguntas.

- Respecto al significado de la **constante de Planck y la transición cuántica-clásica**

En varias ocasiones durante el desarrollo de la secuencia se estableció la importancia de la pequeñez de la constante de Planck. Se propusieron ejemplos para que los estudiantes analicen distintos cocientes, para casos cuánticos y clásicos, y para que calculen longitudes de onda asociada a distintos valores de masa. Finalmente se decidió que la constante de Planck es fundamental en la naturaleza, pues fija el límite entre lo macroscópico y lo microscópico. En los problemas de la evaluación la mayoría de los estudiantes se refirieron adecuadamente a la constante de Planck, a sus dimensiones, la utilizaron de forma adecuada, y se aludieron en varias ocasiones a su aspecto fundamental para la Mecánica Cuántica. Expresaron conocer las diferencias entre formación y detección de la curva de interferencia, y realizaron representaciones gráficas adecuadas. En este sentido, se podría decir que conceptualizaron el Principio de Correspondencia.

El análisis realizado refleja la génesis conceptual que la secuencia consiguió disparar. Se ha focalizado en algunos de los teoremas y conceptos en acto que se pudieron identificar,

esto debe entenderse en el contexto de la complejidad del estudio del proceso de conceptualización. Las acciones dirigidas por estos invariantes operatorios, son sistemáticas y se producen en el devenir de la historia cognitiva de los estudiantes. Esto se manifiesta en el teorema en acto que concibe a los electrones como pequeñísimas bolillas. Este teorema en acto, fertilizado y regado por años de escolaridad, también tiene un correlato mental imagístico y otro pictórico externo, que parecen inevitables. Su origen puede rastrearse y documentarse en múltiples textos de física y de química, y aunque a primera vista constituye un obstáculo para la conceptualización de sistema cuántico, su emergencia y explicitación son indispensables para las nuevas ideas cuánticas.

Las repeticiones y adaptaciones de esta secuencia con otros grupos de clase, han permitido reafirmar el papel que la relación entre esquemas del sujeto y situaciones tiene en la conceptualización. Por ejemplo, el caso del azar y la distribución, en la experiencia de la doble rendija. Los estudiantes interpretaron la situación a la luz del concepto en acto de azar, recuperando los teoremas y conceptos en acto disponibles y a su juicio, acordes a la solución buscada. Al modificar la formulación de la situación, los teoremas y conceptos llamados son otros. Así se pone de manifiesto que las situaciones no pueden ser producto de la improvisación, sino que son resultado de un proceso de diseño, del análisis didáctico a priori y de prueba efectiva en aula produciendo una reformulación y un nuevo ciclo. Como señala Vergnaud al admitir el carácter *contingente* de la acción, entendemos como los invariantes operatorios dirigen las acciones de los estudiantes, pero éstos invariantes son “gatillados” a partir de las preguntas y tareas solicitadas en las situaciones. En este sentido, la acción es también una oportunidad para la conceptualización pretendida.

Por otro lado, este trabajo también muestra la necesidad de discutir el significado de modelización en física con los estudiantes. Ellos no perciben que se trata de una forma de representar la situación que se quiere explicar - la distribución de los electrones en la pantalla colectora, en este caso-. Los estudiantes no comprenden que los modelos científicos son aproximaciones que no tratan directamente con la realidad ni la agotan, tal como en la aplicación del método de Feynman.

Estudio 2: Descripción de los aspectos afectivos del grupo de clase

La descripción y caracterización de los aspectos afectivos de los estudiantes se realizó en dos momentos: durante la implementación, y al final de ella. Cada instancia de análisis se realizó en base a dos tipos de instrumentos: los protocolos de los estudiantes, situación a situación para el primer caso, y un cuestionario individual que los estudiantes respondieron al finalizar la implementación, para el segundo caso.

Descripción de los aspectos afectivos a partir de los protocolos durante el desarrollo de las situaciones

Se formularon tres categorías para la descripción y el análisis:

- **Empatía**

Comúnmente se entiende a la empatía como “el preocuparse por los demás”, la capacidad de colocarse en el lugar del otro. Las situaciones que conforman la ECPE necesitan una cooperación de los integrantes del grupo, ya que las preguntas requieren imaginar, predecir y consensuar, para formular y dar respuesta al problema, a las preguntas clave. Con esta categoría se busca analizar en que medida los estudiantes, para cada situación funcionaron genuinamente como un grupo de conversación e intercambio, con todos los integrantes participando de las conversaciones y expresando sus puntos de vista. Si en un

grupo de estudiantes, en una determinada situación, uno de ellos es quien toma la palabra y decide lo que se va a responder al problema planteado, y los demás no participan de la conversación, se considera que hay un nivel bajo de empatía por parte de ambos lados: el que decide tomar la palabra no se preocupa por que los demás también expresen sus ideas, y el que decide no participar, no coopera para poder resolver los problemas, que deja en manos del primero, considerado como “el que sabe”.

- **Autonomía-Resiliencia:** las situaciones que se proponen a los alumnos en esta ECPE tienen un carácter problemático, están conformadas por un conjunto de preguntas cuya respuesta sólo se puede construir si los miembros del grupo conversan acerca de ellas, y aceptan enfrentar las situaciones nuevas sin miedo, con confianza en que podrán abordarlas. La secuencia no presupone una autonomía absoluta por parte de los estudiantes en las situaciones, sino que desde la construcción de la ECPE se proponen instancias en las cuales los estudiantes puedan poner en juego sus conocimientos previos, conversando con los demás componentes del grupo, y para ello es necesario que ellos no las perciban como “inabordables”. Se prevé también instancias donde la profesora, además de establecer comunicación con sus estudiantes vía la secuencia, dialoga con todo el grupo de clase, buscando el consenso con todo el grupo, en ocasiones que considere necesaria una orientación para todo el grupo. Las preguntas y tareas planteadas constituyen una invitación para el alumno a entrar en el ámbito de conocimiento de la Mecánica Cuántica, y es su decisión aceptar o no, y hacerse cargo de la elección. Cuando los estudiantes conversan acerca del problema, anticipan, formulan nuevas preguntas y proponen soluciones, es posible interpretar que están asumiendo responsablemente su papel de alumno, en el sentido de hacerse cargo de su aceptación a ingresar al dominio al cual están siendo invitados. Si se asume la responsabilidad, se persiste en la tarea, y no se la abandona hasta poder formular una explicación, y se resiste a la tentación de recurrir al auxilio la profesora para resolverlo. También un grupo con un alto grado de autonomía, no sucumbe fácilmente a la “tentación de la certidumbre”, es decir de tener la seguridad de la respuesta correcta, que suponen, viene de la mano de la profesora.

- **Aceptación de las explicaciones:** se refiere a si los estudiantes pueden formular y consensuar explicaciones acerca de las preguntas, luego de la conversación con los integrantes del grupo. Esto también indica si fueron aceptadas las preguntas como tales, si las consideran válidas. Los estudiantes pueden intentar abordar el problema, en el sentido de “deber institucional”: leerlo, y conversar acerca del problema, realizar algunas anticipaciones, imaginar e hipotetizar, pero puede ser que sientan insatisfacción al no lograr dar explicación, y esto puede producir un gran desaliento en ellos. Según si luego de las anticipaciones y conversaciones acerca de las preguntas planteadas, logran consensuar algún tipo de respuesta, aunque no esté correcta, se considerará que aceptaron el problema como propio.

Para realizar el análisis, a partir de los registros de las conversaciones de los estudiantes durante el desarrollo de las situaciones, se generó para cada uno de los seis subgrupos del Grupo de Clases una representación pictórica donde se representa cronológicamente la sucesión de acciones realizadas por los estudiantes, interpretadas a partir de su conversación. Esta representación se denominó “espectro de acciones”. Se construyeron las siguientes modalidades para las categorías formuladas, que permiten describir la dinámica de cada uno de los grupos al abordar las situaciones, a partir de los espectros de acción y de cada protocolo en su totalidad:

Empatía: dependiendo del número de estudiantes del grupo que participen en las anticipaciones que requiere cada situación, y del tipo de participación en el contexto de la conversación, se considera la empatía del grupo:

BAJA: cuando menos de la mitad los estudiantes se involucran en las discusiones, y el resto, aunque interviene en las conversaciones, lo hace de una forma trivial sin aportar a la conversación.

MEDIA: cuando cerca de la mitad de los estudiantes intervienen en las conversaciones, y éstas tienen que ver directamente con el abordaje de las preguntas y los problemas propuestos.

ALTA: cuando la mayoría de los estudiantes participan de forma activa en las discusiones, aportando a la resolución.

Autonomía-Resiliencia: este indicador se construye a partir de las demandas que los estudiantes hacen a la profesora, solicitando su ayuda:

BAJA: cuando demandan a la profesora explicaciones para poder abordar los problemas porque quedan “anclados”, sin avanzar en una formulación.

MEDIA: cuando luego de sostener algunas conversaciones, y formular alguna explicación, demandan algunas explicaciones a la profesora, y lo hacen para poder avanzar en la formulación

ALTA: cuando conversan, y logran formular explicaciones con mínimas intervenciones de la profesora, y cuando lo hacen es para reafirmar o comunicar alguna idea que ya conversaron y consensuaron.

Aceptación de las explicaciones: este indicador se conforma a partir del análisis de las acciones de los estudiantes en relación a la posibilidad de lograr consenso con sus compañeros, y así formular una posible explicación al problema planteado. Adopta las modalidades:

BAJA: luego de conversar y realizar anticipaciones, no logran formular ninguna explicación, o son escasas.

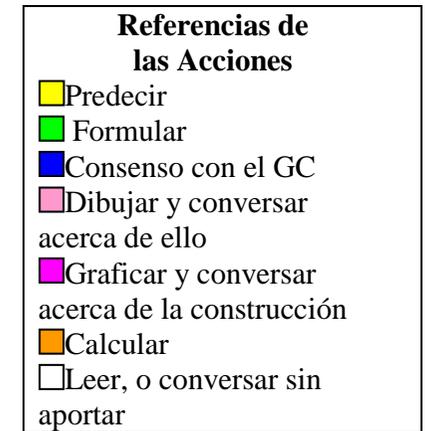
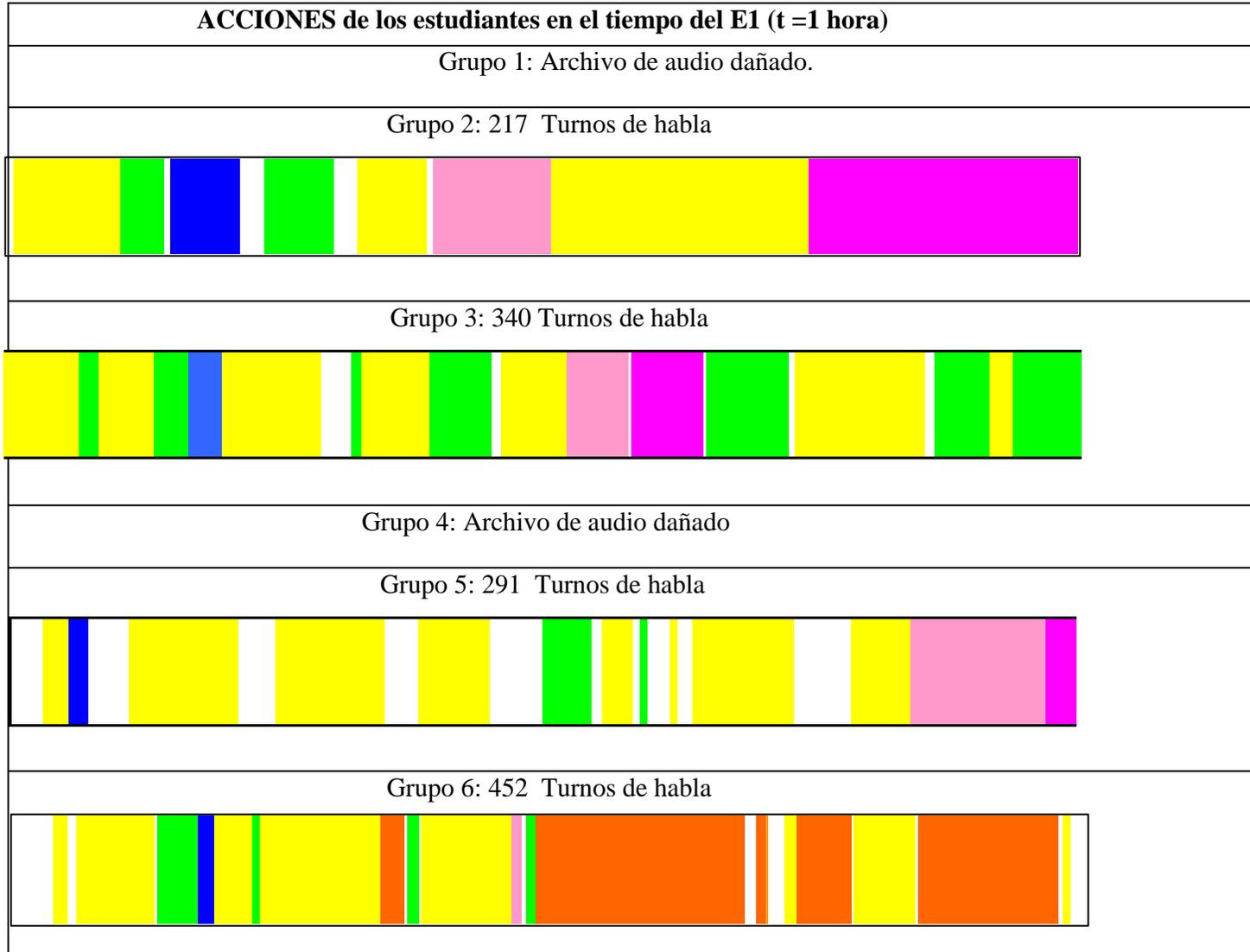
MEDIA: luego de anticipar respuestas posibles, logran acordar algunas explicaciones, y las formulan por escrito

ALTA: logran formular por escrito todas las explicaciones previamente consensuadas, aunque a veces no sean de la forma esperada.

Descripción de los aspectos afectivos de los estudiantes en la Situación 1

Se categorizaron las acciones de los estudiantes en: predecir, formular una explicación, consensuar con el resto del grupo de clase, dibujar y conversar acerca de ello, graficar curvas y conversar acerca de la construcción, realizar cálculos. En el espectro de acciones se representan las acciones con distintos colores, y la extensión del color es proporcional a la cantidad de turnos de habla correspondientes:

Tabla 5.2: Espectro de acciones de cada Grupo en la Situación 1



A partir del “espectro de acciones” de cada grupo, y los protocolos correspondientes, para cada grupo se infiere que:

El Grupo 2 (conformado por cinco estudiantes, pero en el encuentro que se desarrolló esta situación estaban presente cuatro) trabajó muy buena empatía, ya que todos sus estudiantes participaron en las conversaciones, y se involucraron en las discusiones, expresando su punto de vista al anticipar los resultados. También de las pocas demandas a la profesora, y la cantidad de instancias donde los estudiantes intercambiaban ideas, se lograron formular una explicación previo consenso, se puede inferir que este grupo fue autónomo y aceptó las explicaciones.

Los estudiantes del Grupo 3, conformado por siete estudiantes que asistieron a este primer encuentro, no fue igualmente participativo en las conversaciones del grupo. Por ello, se interpreta que el grupo no trabajó con buena empatía. Sin embargo, los estudiantes que se involucraron en la situación propuesta, realizaron sus anticipaciones con autonomía, dedicando gran tiempo del encuentro al intercambio de sus anticipaciones y formulaciones. La buena aceptación de explicaciones se infiere de la cantidad de tiempo dedicado a la formulación y al consenso.

El Grupo 5, lo formaban cinco integrantes aunque en este encuentro asistieron sólo tres, y se involucraron en las discusiones, aportando su punto de vista, aunque en muchas ocasiones permanecieron “ancladas” en la cuestión del azar sin lograr formular explicaciones, por lo cual demandaron constantemente a la profesora, solicitándole ayuda para poder responder a lo solicitado.

El Grupo 6, estuvo conformado cuatro estudiantes, que a diferencia de los demás grupos, asistieron a casi todos los encuentros²². De las cuatro integrantes, solamente dos de ellas sostenían el intercambio de ideas, alumnas destacadas por sus buenas calificaciones. Como se puede observar en el “espectro de acciones” correspondientes, donde predominan los momentos dedicados al intercambio de ideas acerca de los resultados de la experiencia, y son pocas las instancias donde se consiguió formular explicaciones a lo planteado. Aún así, ellas no desistieron en la tarea, y con pocas demandas a la profesora, dirigieron sus acciones hacia la realización de cálculos aritméticos, como se comentó en el análisis conceptual. Fue el único grupo que decidió esto, aunque la situación en ningún momento lo solicitaba. Podría pensarse que ellas de esta forma, sienten que responden “correctamente” con expresiones matemáticas y consideraciones geométricas, como usualmente abordan los problemas en las clases de física de años anteriores.

La Tabla 5.3 sintetiza los resultados del análisis basado en las categorías anteriores:

²² Se quiere destacar esto, ya que sólo este grupo fue estable, en el sentido que los grupos restantes, aunque estuvieran formados por los mismos integrantes, en cada encuentro no concurrían todos. Esto dificulta el tipo de análisis y la descripción de los aspectos afectivos buscada, y constituye un motivo más por el cual solo se realizó para las primeras dos situaciones, como se dijo en el capítulo de Metodología.

Tabla 5.3: Descripción de las categorías que describen los aspectos afectivos de cada grupo para la primera situación

	Empatía	Autonomía-Resiliencia	Aceptación de las explicaciones:
Grupo 2	Alta	Alta	Alta
Grupo 3	Media	Alta	Alta
Grupo 5	Alta	Baja	Baja
Grupo 6	Media	Alta	Baja

En síntesis, la empatía del GC al abordar la situación fue buena, aunque no la deseada, ya que en grupos de cuatro o cinco integrantes, no todos participaban para intentar dar respuesta a las preguntas de la situación, algunos solamente escuchaban y copiaban las formulaciones de los demás. Tanto la decisión de no participar involucrándose en el problema, ni tomarlo como “suyo”, como la de quien “tiene la palabra” y realiza la formulación, indica la poca empatía entre los integrantes de cada uno de los grupos.

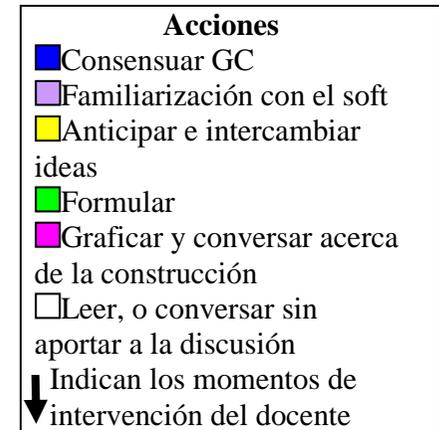
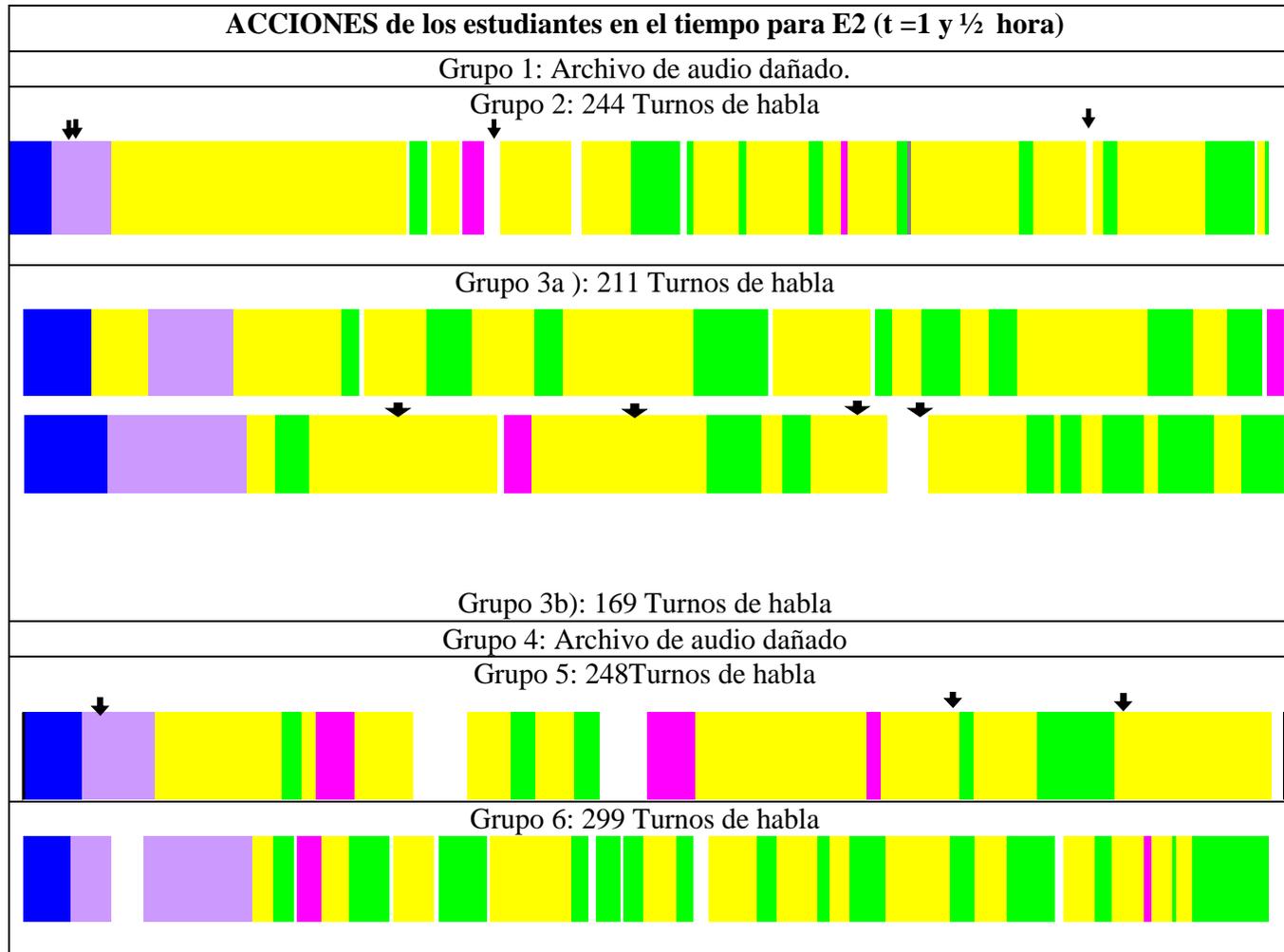
Sin embargo, en relación a la autonomía, casi todos los grupos afrontaron el problema sin temor ante la situación nueva, anticipando y conversando con sus compañeros. Las pocas demandas a la profesora eran solicitando orientación acerca de la nueva notación, o las definiciones, que resultaban nuevas. Aún en las instancias en los estudiantes parecían “anclados” sin poder formular respuestas, no abandonaron la tarea de imaginar y predecir lo que sucedía en esta experiencia nueva. Solamente uno de los grupos (Grupo 5) se caracterizó por la baja autonomía, reclamando explicaciones a la profesora y manifestando su desinterés en varias ocasiones. Este grupo no consiguió abordar la situación, a pesar de las conversaciones e interacciones con la profesora, resultando en una poca aceptación de las explicaciones al problema planteado.

Por el contrario, es notable que los estudiantes que mantuvieron una buena interacción con sus compañeros de grupo y tuvieron gran persistencia, fueron los que más lejos pudieron ir en términos de conceptualización. Esto es una condición imprescindible para poder abordar la situación que le sucedía en la secuencia.

- **Descripción de los aspectos afectivos de los estudiantes en la Situación 2**

Así como se hizo para la Situación 1, para esta segunda situación, también se generó a partir de cada protocolo un “espectro de acciones” que se presenta a continuación:

Tabla 5.4: Espectro de acciones de cada Grupo en la Situación 2



Como se puede inferir a partir de los espectros de acción de los grupos, casi todos los estudiantes se familiarizaron fácilmente con el software de la Experiencia de la Doble Rendija.

Con relación al Grupo 2, a este segundo encuentro (E2) asistieron los mismos cuatro estudiantes que ya habían asistido a E1. La interacción de dos de ellos en el aula de informática fue menor que en la Situación 1, por lo cual la empatía podría considerarse menor respecto a la Situación 1. Posiblemente estar en un aula y en un tiempo que no es habitual para las clases de Física (el E2 fue en el Aula de Informática del colegio) hizo que estos estudiantes se “dispersaran” y no se involucraran en las conversaciones. De la buena interacción entre los propios integrantes y las pocas demandas a la profesora, se puede inferir que los estudiantes de este grupo pudieron abordar la situación con gran autonomía, y casi todas las conversaciones finalizaron con la formulación de explicaciones y respuestas a las preguntas planteadas.

El grupo 3, como se dijo antes, por una cuestión de trabajo más cómodo con las computadoras, decidió subdividirse en dos subgrupos de tres integrantes cada uno, cuyos protocolos fueron identificados para el análisis como Grupo 3 a) y Grupo 3b). Los dos integrantes que en la situación anterior habían participado muy poco, en esta instancia se mostraron más interesados, y participaron en las conversaciones. Esta situación fue abordada con mucha autonomía por parte del grupo y casi todas las conversaciones y discusiones finalmente terminaron en formulaciones, mostrando así una buena aceptación de las explicaciones.

El grupo 5 estuvo conformado por los mismos tres integrantes que habían estado en la situación anterior. Dos de ellas fueron las que sostuvieron la mayor parte de la conversación, aunque la mayoría de las conversaciones no derivaron en ninguna formulación. Las demandas a la profesora fueron pocas, pero esto no lleva a considerar que sostuvieron autonomía en la realización de las actividades, ya que la profesora, notando que ellas se quedaban “ancladas” sin poder abordar la situación, en varias instancias se acercó para orientarlas.

Las integrantes del Grupo 6, eran las mismas estudiantes que en la situación anterior, pero esta vez todas conversaron y realizaron aportes a la resolución. Este grupo se caracterizó por tener los protocolos más extensos, formularon preguntas y reflexiones, además de las planteadas en la secuencia. En este encuentro, lograron realizar gran cantidad de formulaciones, y lo hicieron con gran autonomía. La Tabla 5.5 sintetiza los resultados del análisis basado en las categorías anteriores:

Tabla 5.5: Descripción de las categorías que describen los aspectos afectivos de cada grupo para la segunda situación

	Empatía	Autonomía-Resiliencia	Aceptación de las explicaciones:
Grupo 2	Media	Alta	Alta
Grupo 3	Alta	Alta	Alta
Grupo 5	Media	Baja	Baja
Grupo 6	Media	Alta	Baja

En síntesis, de esta descripción se infiere que los estudiantes aceptaron el software como parte necesaria de la secuencia, familiarizándose rápidamente y con buena interacción con él. También se mostraron más participativos y empáticos con sus compañeros de grupo, comparado con la Situación 1. El trabajo con el software también animó a los estudiantes

a realizar un trabajo más autónomo, como si ellos se sintieran “más a gusto” con este tipo de actividad.

Al igual que en la situación anterior, es notable que los estudiantes que mantuvieron una buena interacción con sus compañeros de grupo y sostuvieron alta persistencia, fueron los que más lejos pudieron ir en términos de conceptualización.

Durante el desarrollo de la investigación fue necesario realizar un recorte metodológico y se decidió suspender este análisis. En primer lugar, porque este tipo de análisis se requiere un gran tiempo debido a su complejidad y al gran volumen de datos generados. Resultaría muy interesante un análisis de la evolución de la afectividad del grupo de clases, pero para esto se debe contar con otras formas de registros (por ejemplo videos que registren lo gestual, etc.) y una metodología más apropiada, y realizar el seguimiento durante un tiempo mucho mayor al que se empleó aquí. El análisis se realizó para los dos primeros encuentros, donde se presentaron las dos primeras situaciones porque se consideró que éstas tienen un impacto importante en la viabilidad; la forma en que se “viven” decide la posibilidad de continuar con las situaciones de la secuencia. De esta forma, queda abierta una vía para futuras investigaciones que aborden la descripción y comprensión de la evolución del estado emocional del grupo

Descripción de los aspectos afectivos al finalizar la implementación

Luego de la evaluación, los estudiantes respondieron un cuestionario diseñado para este grupo, con veintisiete preguntas cerradas. Esto permitió analizar las opiniones de los estudiantes acerca de sus sentimientos respecto a:

- La naturaleza de los conceptos cuánticos estudiados

En pruebas piloto exploratorias previas a la implementación, fue notable el desconcierto producido por la incertidumbre del mundo cuántico, y hasta cierto malestar. Quizás porque tradicionalmente la física escolar favorece posiciones realistas ingenuas y deterministas. También la abstracción de los conceptos cuánticos, la imposibilidad de imaginarlos y las implicaciones epistemológicas que conllevan, podrían afectar a los estudiantes.

- La forma de trabajo propuesta

Las situaciones, que por definición son problemas y preguntas, debían ser resueltas en forma grupal e implicaban trabajo de discusión, perturbación, acuerdo, y formulación de las conclusiones consensuadas. Cada clase suponía el encuentro con conceptos y problemas nuevos y demandaba esfuerzo a los estudiantes.

- Las simulaciones utilizadas en la secuencia.

Desde cierta “pedagogía de sentido común” suele asumirse que los estudiantes sienten agrado por el solo hecho de trabajar con simulaciones y herramientas visuales. En esta secuencia, las simulaciones no tuvieron fines decorativos, ni buscaron motivar a los estudiantes. Son herramientas para visualizar los resultados de ciertos cálculos, evitando que los estudiantes deban realizarlos. Aquí el trabajo con el software exige atención voluntaria y esfuerzo.

El cuestionario estaba formado por las afirmaciones presentadas en la Tabla 5.6. Los estudiantes debían valorar su grado de acuerdo en una escala de 1 a 5, donde 1 representaba el desacuerdo total y 5 el acuerdo total con la afirmación:

Tabla 5.6: Cuestionario acerca de los aspectos afectivos de los estudiantes al finalizar la implementación

1	El trabajo con los vectores y las funciones trigonométricas necesario para entender los conceptos de MQ finalmente no fue complicado
2	El carácter probabilístico de la MQ me resultó incómodo
3	Estudiar los conceptos de MQ me hizo cambiar radicalmente las ideas que tenía acerca de los electrones.
4	Aprendí una Física distinta a la usual, aunque se basa en lo que yo ya sabía
5	Me siento conforme por haber estudiado una parte muy actual e importante de la física, que muchos estudiantes de la escuela secundaria nunca llegan a estudiar
6	Si tuviera mis conocimientos matemáticos más actualizados, hubiera sido más fácil entender
7	No creo que lo que aprendí sea tan difícil como para que otros estudiantes de características similares no lo estudien
8	Me sorprendió el comportamiento extraño de los electrones y del mundo microscópico
9	El mundo cuántico me resultó extraño, difícil de imaginar.
10	Me deja tranquila/o que esto nuevo que aprendí aún me permite explicar lo que yo sabía de antes.
11	Poniendo un gran esfuerzo de mi parte, creo que pude resolver las cuestiones planteadas
12	Me sentí a gusto con las cuestiones y desafíos propuestos
13	Conversar con mi grupo fue imprescindible para entender los conceptos cuánticos
14	Comprender los conceptos requirió mucho esfuerzo de mi parte
15	Me sentí muy motivado por los conceptos nuevos cuando me enteré que eran conceptos de actuales de física
16	Tuve que esforzarme para entender las preguntas de Mecánica Cuántica que me proponían contestar.
17	Si me hubieran explicado más en vez de plantearme actividades y preguntas, habría entendido más.
18	Hacer la síntesis en forma personal hizo que pudiera reflexionar en forma personal sobre lo trabajado en las clases, con mis compañeros de grupo.
19	Las “actividades de síntesis” que hicimos fueron imprescindibles para terminar de entender y realizar una mirada global de lo que estudiamos
20	Fue un trabajo en el que sentí interés por comprender de qué se trataba lo que me estaban planteando.
21	Confíe en los resultados que mostraban las simulaciones, y eso me hacía revisar mis cálculos y razonamientos si no coincidían con lo mostrado.
22	Las simulaciones de las experiencias me resultaron muy útiles para comprender los conceptos involucrados.
23	Trabajar con las simulaciones requirió mucha atención de mi parte, no fue sencillo.
24	Me gustó trabajar con la simulación de la EDR, porque me mostró resultados de una experiencia que es imposible que hubiésemos podido hacer en la escuela
25	Las simulaciones me ayudaron a comprender los conceptos abstractos de la Mecánica Cuántica, pero sin las preguntas y actividades planteadas no hubiera sido posible
26	El software Modellus no era atractivo visualmente, pero sin él hubiera sido difícil comprender como funciona la técnica STA
27	Me parece importante que me den la posibilidad de estudiar esta parte de la física con las simulaciones.

El coeficiente alfa de Cronbach resultó $\alpha = 0,7$. Las preguntas se dirigían a los siguientes aspectos:

1- Percepciones de los estudiantes con relación a los conceptos cuánticos estudiados

Trece ítems del cuestionario conforman esta categoría y se refieren a los siguientes aspectos:

Aspecto matemático: se refiere a si los estudiantes percibieron como difícil el modelo matemático de la STA, el trabajo con los vectores y las funciones trigonométricas. Si fue un obstáculo para comprender los conceptos cuánticos.

Desconcierto e incomodidad: El carácter probabilístico de la MC es difícil de aceptar. En nuestra cotidianeidad la certidumbre nos hace sentir seguros y confiados; la incertidumbre lo opuesto. Por otro lado, nuestros estudiantes son adolescentes y les cuesta relativizar su pensamiento, pues aún conservan rasgos del período operatorio concreto, donde lo posible se subordina a lo real, en lugar de que la posibilidad incluya a la realidad apenas como un subconjunto. La necesidad de abandonar el determinismo –vivido como certeza a nivel macroscópico-; la sustitución de lo exactamente predecible frente a un fenómeno físico, por lo probable, genera resistencia y exige cambios considerables en la forma de pensar. Esencialmente la secuencia propone dejar de lado la idea de electrones como “diminutas porciones de materia” y asignarles un nuevo significado: sistemas cuánticos. La descripción de los fenómenos cuánticos que se presentan a escala microscópica, exige nuevas leyes y nuevas explicaciones.

Interés por entender: Estas preguntas se refieren a si los estudiantes sienten interés o curiosidad por los conocimientos físicos actuales. Si sienten satisfacción o no, por haber logrado comprender los conceptos con el esfuerzo que esto requería.

Relación con conocimientos previos: se refiere a si los estudiantes sienten que los nuevos conceptos están muy relacionados con sus conocimientos previos. Al analizar la transición cuántico - clásico tanto en el caso de la partícula libre como en la experiencia de la doble rendija, se quiere conocer si los estudiantes relacionan los resultados cuánticos con las descripciones macroscópicas acerca del movimiento, que les eran familiares.

En la siguiente tabla se presentan los aspectos mencionados y los ítems del cuestionario que se refieren a ellos:

Tabla 5.7: Aspectos relativos a las percepciones de los estudiantes con relación a los conceptos cuánticos estudiados, e ítems del cuestionario

	Aspecto Matemático	Desconcierto, incomodidad	Interés por entender	Relación con conocimientos previos
Ítem	1; 6	2; 3; 7; 8; 9	5; 15; 20; 27	4;10

2- Percepciones de los estudiantes con relación a la secuencia didáctica y al trabajo en clase

Ocho ítems del cuestionario conforman esta categoría y se refieren a los siguientes aspectos:

Esfuerzo / resultados obtenidos: Para enfrentar cuestiones y desafíos clase a clase, la atención voluntaria y la predisposición de los estudiantes eran fundamentales. Estas preguntas se formulan para saber como se sintieron los estudiantes respecto del esfuerzo requerido para avanzar en el desarrollo de la secuencia.

Desafíos / explicaciones de la profesora: En la escuela predomina un modelo docente que establece como tarea central de la profesora la de explicar. Los estudiantes prefieren y están acostumbrados a las explicaciones de los profesores, más que enfrentarse ellos mismos a los desafíos y compartir la responsabilidad por su aprendizaje. Esta secuencia didáctica requiere de actividades muy diferentes para la profesora, cuyas intervenciones en clase, consistían en conversar y discutir con los estudiantes sobre los resultados obtenidos y gestionar con todo el grupo las conclusiones parciales.

El diseño de la ECPE requiere de la profesora tareas fundamentales, aunque invisibles al alumno: considerar los parámetros, valores, cuestiones, y anticipaciones de las posibles respuestas, orientar al estudiante para formular conclusiones y explicaciones que luego serían consensuadas. Las preguntas se refieren por un lado al agrado o desagrado de los estudiantes frente a los desafíos, y por otro, si ellos hubieran preferido que la profesora explique en lugar de plantear preguntas y actividades.

Trabajo grupal / individual: El lugar del alumno en la secuencia requería conversar, interactuar y discutir con los compañeros del grupo. Además hubo una instancia de síntesis individual escrita al finalizar. Estas preguntas se refieren a como se sintieron los estudiantes durante el trabajo con compañeros y cuando se encontraron solos frente a las situaciones.

En la Tabla siguiente se presentan los aspectos mencionados y los ítems del cuestionario que se refieren a ellos:

Tabla 5.8: Aspectos relativos a las percepciones de los estudiantes con relación a la secuencia didáctica y al trabajo en clase

	Esfuerzo / resultados obtenidos	Desafíos / explicaciones de la profesora	Trabajo grupal / individual
Ítem	11; 14; 16	12; 17	13; 18; 19

3- Percepciones relacionadas con el uso del software.

Seis ítems del cuestionario conforman esta categoría y se refieren a los siguientes aspectos:

Confianza en el software: se refiere a si los estudiantes daban por ciertos los resultados de las simulaciones. Cuando sus predicciones no coincidían ¿las revisaban y las modificaban dándole crédito al software? o por el contrario ¿cuestionaban los resultados de las simulaciones confiando más en sus ideas?

Utilidad de las simulaciones: Las simulaciones son la única alternativa escolar para visualizar los resultados de la Experiencia de la Doble Rendija. Las simulaciones diseñadas con Modellus para este caso, muestran los resultados de aplicar la técnica STA y los vectores y valores instantáneos de ángulos, y acciones correspondientes a cada selección, indispensables en la construcción conceptual que se buscaba. Estas preguntas se refieren a la valoración de los estudiantes acerca de la utilidad de las simulaciones en la construcción de los conceptos y a si les agradó usarlas.

Esfuerzo para usar las simulaciones: Las simulaciones con Modellus, donde las representaciones son esquemáticas y matemáticas (funciones, vectores) requerían entender lo que el software mostraba, tanto para ejecutarlo como para contestar las preguntas de la

secuencia. Además de la instancia de familiarización que implica trabajar con cualquier software nuevo, estas simulaciones requerían atención durante la ejecución. Se buscó conocer si los estudiantes sintieron que realizaban un gran esfuerzo. En la Tabla 5.9 se presentan los aspectos mencionados y los ítems del cuestionario que se refieren a ellos

Tabla 5.9: Aspectos relativos a las percepciones de los estudiantes relacionadas con el uso del software.

	Confianza en el software	Utilidad de las simulaciones	Esfuerzo en las simulaciones
Ítem	21	22; 24; 25; 26	23

A continuación se presentan los resultados del análisis:

a) Percepciones acerca de los conceptos cuánticos:

En el Gráfico 1 se sintetizan los resultados en cada categoría formulada.

Dificultad matemática: La mayoría de los estudiantes (25) contestó que los aspectos matemáticos resultaron accesibles y acordes a sus conocimientos previos. Sin embargo, algo más de la mitad (17) reconoce que no recordar algunos aspectos matemáticos impidió en alguna medida comprender los conceptos cuánticos.

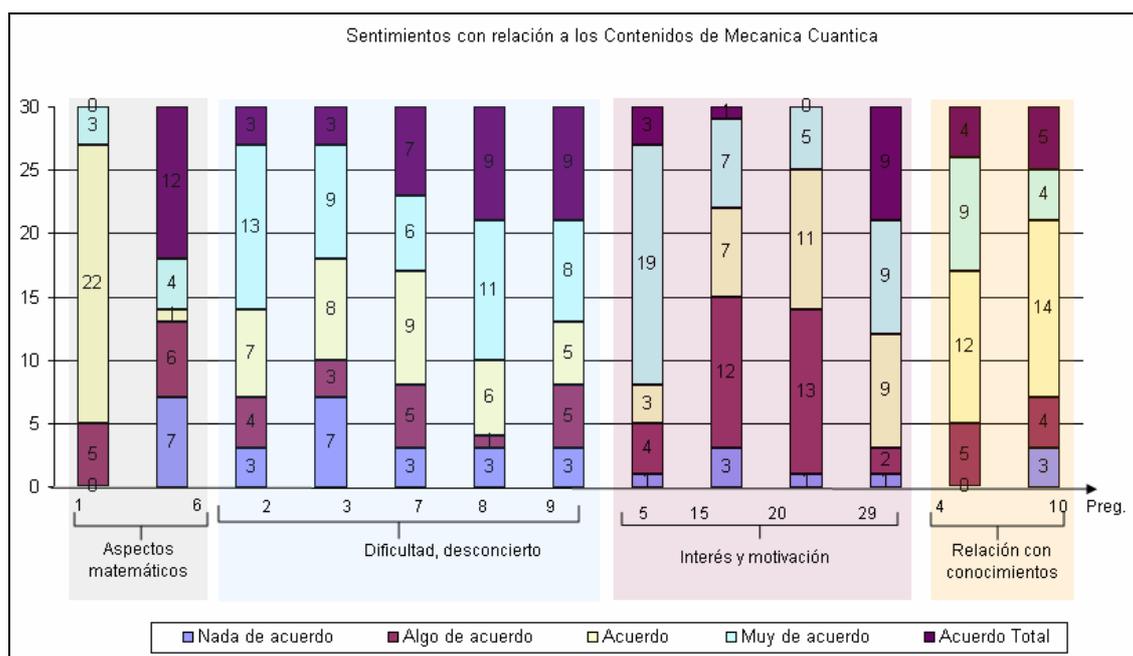


Gráfico 1: Sentimientos acerca de los conceptos cuánticos

Dificultad y desconcierto: Un número importante de estudiantes (26) se manifestó sorprendido por el comportamiento peculiar de los electrones, mientras (23) reconocieron que el carácter probabilístico les genera incomodidad. Los conceptos cuánticos resultaron extraños, difíciles de imaginar para una gran mayoría (22). Sin embargo, a pesar de la complejidad y las dificultades que nuestros estudiantes reconocen, (22) de ellos consideran que sería posible para otros estudiantes –similares- acceder a estos conceptos.

Interés y motivación: La mitad de los estudiantes (15) manifiesta que sintió interés por comprender ideas de física actual. Aunque entonces la otra mitad sentiría desinterés, muchos estudiantes (25) se sintieron satisfechos por haber estudiado nociones de física

actuales, que en general no se enseñan en la escuela. Además casi todos (27) valoraron positivamente la posibilidad de aprender física de esta manera.

Relación con sus conocimientos previos: Casi todos los estudiantes (25) consideran que estos conceptos nuevos guardan relación con sus conocimientos físicos previos. Una gran parte (23) de ellos dice sentirse tranquilo porque aunque los principios cuánticos son novedosos y sorprendentes, también explican los resultados clásicos, que ya conocían antes.

b) Percepciones respecto a la secuencia didáctica y el trabajo en las clases

En el Gráfico 2 se presentan las respuestas relacionadas a la forma en que se desarrollaron las clases:

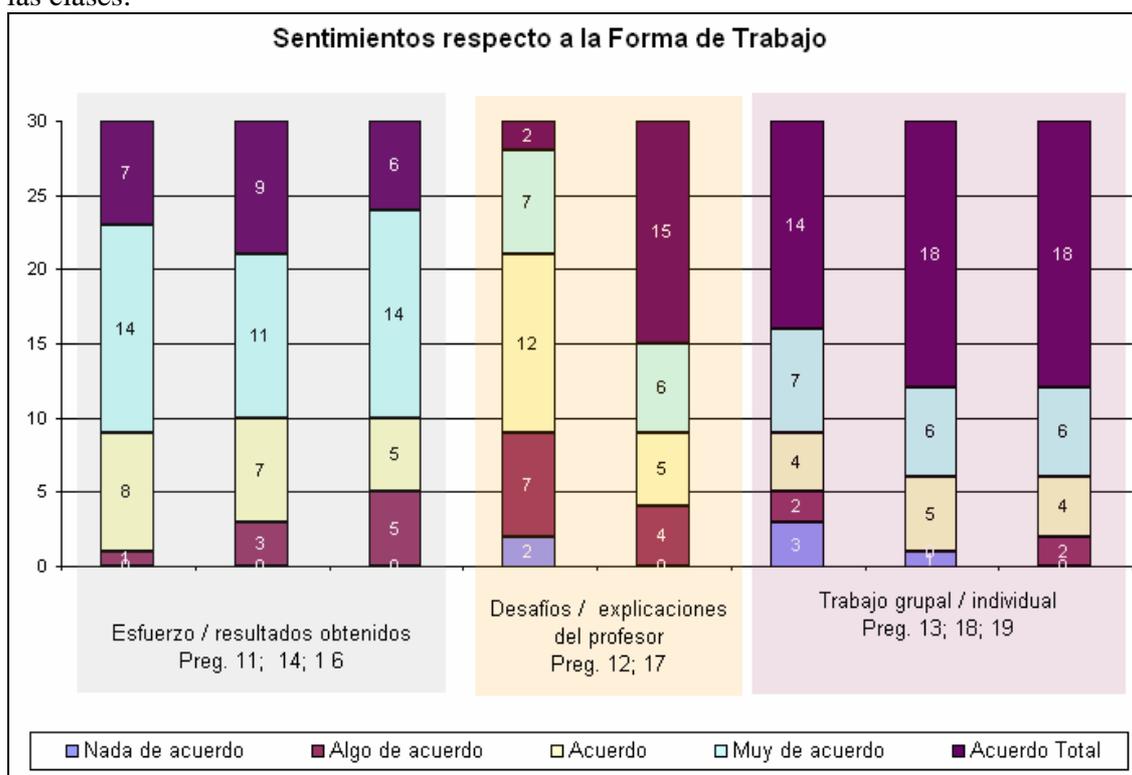


Gráfico 2: Sentimientos acerca de la Secuencia Didáctica

Esfuerzo / resultados obtenidos:

Muchos estudiantes (25) reconocen que tuvieron que realizar un gran esfuerzo para entender. También todos (29) sienten que las situaciones eran abordables y que las podían resolver.

Desafíos / explicaciones de la profesora: Dos tercios de estudiantes (21) se sintieron a gusto con los desafíos y cuestiones planteadas. Casi todos (26) sienten que hubieran “entendido más” si la profesora le hubiera explicado, en lugar de enfrentarlos a situaciones y a cuestiones.

Trabajo grupal / individual: Muchos estudiantes (25) reconocen el valor del trabajo en cada grupo. También casi todos (29) sintieron positiva y necesaria reelaboración escrita e individual que se les solicitó realizar.

c) Percepciones referidas al software

En el Gráfico 3 se presentan las respuestas relacionadas con el software

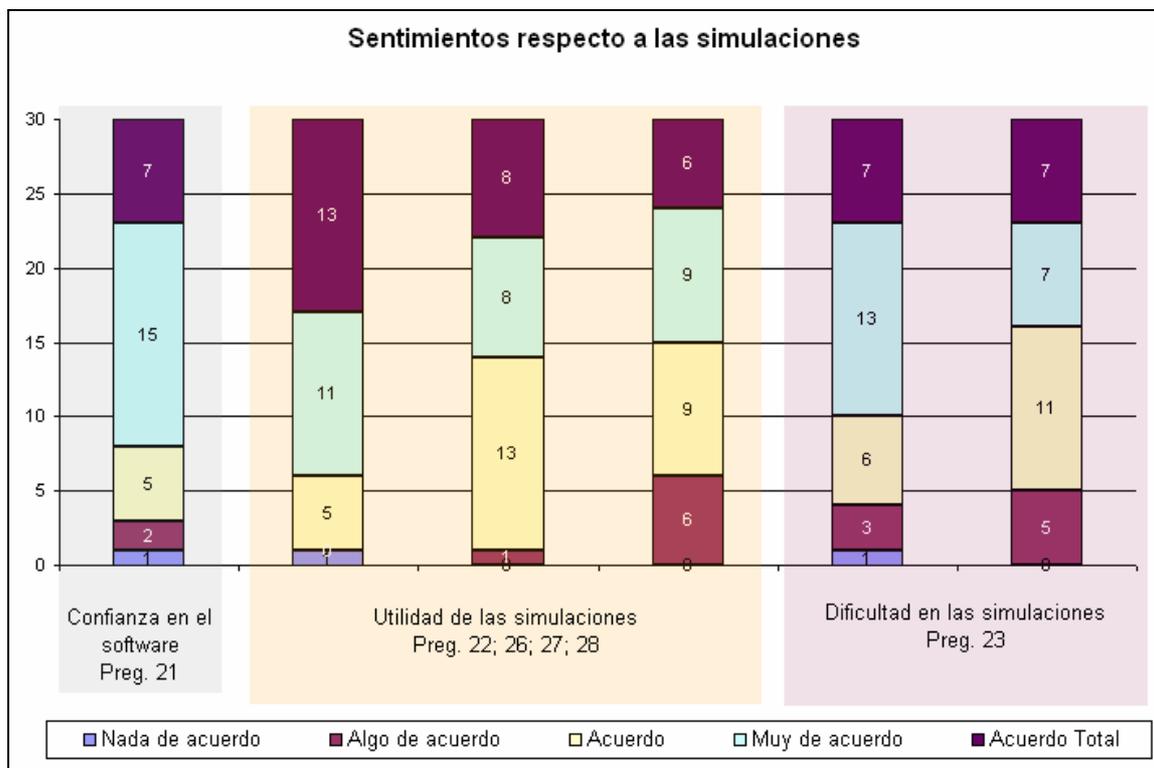


Gráfico 3: Sentimientos con relación al software

Confianza en el software: (27) estudiantes dicen que confían en el software más que en sus ideas, es decir que al igual que ocurre con un libro, no se piensa que puede estar mal. En esto la cultura escolar, basada en la petición de obediencia más que en los cuestionamientos tendría gran incidencia.

Utilidad de las simulaciones casi todos los estudiantes considera que las simulaciones son útiles, agradables aunque no sean visualmente atractivas y que colaboran en la comprensión y reducen la abstracción.

En este aspecto es importante destacar que la pertinencia, cantidad y calidad de las simulaciones, fueron aspectos muy analizados y cuidados en esta secuencia. Se usaron estas herramientas porque evitaban cálculos y sostenían un lenguaje geométrico, que aunque abstracto, permitía relacionar los aspectos matemáticos con el significado físico. Sin embargo, los estudiantes tienen una clara percepción de su esfuerzo, en todas las actividades propuestas.

Esfuerzo en las simulaciones (25) estudiantes manifiestan que no fue sencillo el trabajo con las simulaciones. Como se mencionó, esto se relaciona con el hecho de que las simulaciones eran funcionales a las situaciones planteadas por la secuencia, es decir que presentaban un carácter problemático. Además de entender lo que se mostraba en ellas, se debían abordar preguntas cuya respuesta, permitía comprender nuevos aspectos y conceptos.

Conclusiones acerca de los aspectos afectivos

- Tomando en cuenta que la secuencia se desarrolló según los pasos y etapas previstas y que los alumnos perciben y califican su esfuerzo como intenso pero posible, es posible afirmar que los aspectos afectivos de los estudiantes colaboraron en la posibilidad de la secuencia en esta institución. Es decir los estudiantes no fueron superados por las situaciones propuestas y aceptaron los desafíos.
- Como ya se mencionó, la construcción de los conceptos cuánticos involucrados requiere que los estudiantes sean capaces de realizar el esfuerzo cognitivo y afectivo necesario. Es decir, frente a la abstracción que los conceptos involucran y a las dificultades que supone comprenderlos, los estudiantes vencieron la tentación de abandonar. Esto se relaciona con el tipo de emociones implicadas en el diseño de la secuencia. Por ejemplo, la primera etapa acepta las ideas corpusculares de los estudiantes acerca de los electrones, antes de perturbarlas.
- Con relación al software, también los estudiantes reconocen el valor de su utilización y el esfuerzo que les requirió. Si bien las herramientas elegidas y diseñadas buscan aliviar ciertos aspectos desalentadores como el cálculo, no suponen una utilización pasiva. Ellas son parte de situaciones indisolubles de la conceptualización y por lo tanto están ligadas a problemas y preguntas.
- Otro indicador de viabilidad es la satisfacción que los estudiantes manifiestan acerca de los resultados de su esfuerzo y de la forma de trabajo, que exigió atención y enfatizó la comunicación oral y escrita.

Acerca de las nuevas implementaciones

La secuencia se implementó nuevamente dos veces más, al año siguiente de la primera implementación, en dos condiciones distintas. Una de ellas fue una replicación, ya que sólo se hicieron modificaciones menores para mejorar algunas formas de expresión y evitar la presentación de algunos obstáculos identificados durante el transcurso de la primera implementación. Aquí nuevamente fue la profesora del curso y a su vez la investigadora quien la implementó. La segunda *nueva* implementación, resultó luego de una adaptación de la secuencia para un grupo de estudiantes de otra escuela, y la llevó a cabo la profesora del curso, que previamente participó en la adaptación de la secuencia, junto con la investigadora.

1- La replicación de la secuencia

Esta implementación fue realizada al año siguiente de la primera, por la misma profesora-investigadora en un curso de características similares al grupo original, con veintisiete estudiantes, en la misma escuela. Se propusieron las mismas situaciones con pequeñas modificaciones de forma, una evaluación similar a la anterior, y el mismo cuestionario personal al finalizar. A diferencia de la primera implementación, ésta se realizó en el primer trimestre del año, en 13 encuentros áulicos, con la ventaja de no tener el período de recesión invernal en el transcurso de ella, como en la original. Se procuró un ámbito de clases natural, sin la intervención del instrumento de recolección de audio. Al final de la implementación se recogieron las carpetas de los estudiantes, las evaluaciones y los cuestionarios realizados. En el Anexo se encuentra la secuencia de situaciones que se

implementó a modo de replicación. A continuación se describen las modificaciones realizadas, y se comentan algunos resultados preliminares:

En la Situación 1 **“Imaginando la experiencia de la doble rendija con bolillas”**:

- 1) Se agregó una pregunta para que los estudiantes anticipen los resultados de la EDR en los límites extremos de separación de las rendijas (lo más próximas y lo más distantes posibles). Esto colaboró luego en la confrontación con los resultados mostrados por el software de la Doble Rendija.
- 2) Se hicieron explícitas algunas condiciones experimentales de las bolillas de la experiencia, relativas al momento de atravesar las rendijas. Así no entró en juego la idea de que las bolillas podrían quedar “trabadas” en las rendijas y afectar la distribución, como había ocurrido en la primera implementación.
- 3) Se incluyó en la secuencia una serie de tres histogramas, representando los resultados de la distribución de bolillas en la pared de madera como si se tratara de distintos tiempos de ejecución de la EDR con bolillas. En la implementación original se había detectado que los estudiantes tenían dificultad para reconocer el límite entre la distribución de frecuencias según el eje horizontal, y la curva $P(x)$. Esta explicitación colaboró en la comprensión de esta forma de representar los resultados de la experiencia, que resulta nueva para los estudiantes.
- 4) Se presentó la expresión matemática de la suma de las curvas individuales, y se solicitó a los estudiantes que argumentaran acerca de su validez. Esta forma de representar el resultado con ambas rendijas abiertas para bolillas resultó beneficioso cuando posteriormente se buscaba una expresión análoga para el caso de los electrones. Al encontrar que la curva para los electrones no era expresable como “suma” daba sentido a la búsqueda de la descripción de la curva en términos probabilísticos, que más adelante incluirían el concepto de interferencia.
- 5) Se cambió de lugar la pregunta acerca de la anticipación del comportamiento de los electrones, colocando esta cuestión en el momento de observar los resultados de la distribución de los electrones en la pantalla colectora, preguntando: *¿Esta distribución se corresponde con la idea de que los electrones son como pequeñísimas bolillas?* La idea era la misma que en la secuencia original: producir un conflicto cognitivo entre el concepto de electrones como pequeñas bolillas y una distribución en desacuerdo con esta idea. En esta ocasión se planteó antes de que los estudiantes fueran al aula fueran al aula de informática a simular la experiencia de la doble rendija, para evitar que simularan la experiencia para responder, como había ocurrido en la primera implementación.

En la Situación 3: **“Presentación de la técnica Sumar Todas las Alternativas”** para la expresión de la Amplitud de probabilidad **total** se utilizó la notación polar de los vectores, en lugar de la notación de par ordenado, dado que los estudiantes habían expresado que esta forma les era más usual, y se sentían más a gusto con esta forma que con la expresión en coordenadas cartesianas. Esto resultó beneficioso porque de esta forma se enfatizaba que los vectores amplitud de probabilidad asociados a cada función, tienen módulo 1. Con respecto al uso del software de simulación Modellus, se propuso comenzar con el caso de valores macroscópicos de masa, para que guarde estrecha relación con el procedimiento seguido en la simulación de la EDR (que comenzaba con bolillas y terminaba con electrones). Se solicitó a los estudiantes que seleccionaran algunas funciones cercanas a la clásica, que registren sus valores de posición y tiempo, y que analicen cómo resultaban las direcciones de los vectores asociados a cada $x(t)$. Luego lo mismo pero para funciones que estén alejadas de la clásica. Se solicitó que escribieran sus conclusiones acerca de la variación de

los valores de acción y de ángulos. En esta misma situación, se planteó analizar que resultado se obtiene al sumar infinitos vectores de módulo uno, cuando los ángulos son muy diferentes, invitándolos a elaborar alguna estrategia para resolver esto. Se esperaba que los estudiantes dibujaran un conjunto de vectores cuyos ángulos fueran muy diferentes, construyeran la suma geométrica, y pudieran generalizar el resultado para el caso de infinitos vectores. Ellos lo hicieron con ayuda de la profesora, y abordaron a la conclusión buscada. Luego, en base a esta idea, se propuso la siguiente cuestión: *¿Qué predice la STA para valores de masa muy grandes (partículas u objetos de dimensiones mucho mayores a las del electrón) respecto de las funciones necesarias para describir su movimiento?* Esto es, desde el primer encuentro con el software Modellus, se utilizó la expresión “función $x(t)$ que describe el movimiento”, y se siguió utilizando en el resto de la secuencia, ya que es central en la secuencia.

En la Situación 6: **“Análisis de la transición cuántico-clásico”**, se solicitó a los estudiantes realizar el gráfico de la función $P(x)$ obtenida al aplicar la STA a la EDR, pero ahora utilizando el software de graficación como era usual en las clases de Matemática. Esto también permitía aumentar el argumento de la función trigonométrica obtenida, e instantáneamente graficar la función para compararla con la original -correspondiente a electrones- sin realizar los cálculos. De esta forma fue posible notar cómo la gráfica se iba haciendo cada vez más “apretada” cuando se trata de funciones $P(x)$ correspondientes a valores de masa macroscópicos.

Luego de la implementación de las seis situaciones, se planteó una situación de revisión de los conceptos, y para ello se presentaron las preguntas de la evaluación de la implementación original. En la clase siguiente a la revisión, los estudiantes realizaron la evaluación escrita, como se presenta en el Anexo. En esta instancia, a diferencia de la evaluación original, se presentaron tres curvas de $P(x)$ resultante de la EDR con ambas rendijas abiertas y con poca separación entre ellas, utilizando como proyectiles libres: electrones, partículas alfa (2 neutrones y dos protones) y spray de color –las tres opciones se presentaban en el software de la doble rendija trabajado en la secuencia. El objetivo era decidir cuál podría ser el gráfico correspondiente a cada proyectil, justificando la respuesta. De esta forma, en lugar de graficar las funciones (como solicitaba la evaluación original) los estudiantes debían argumentar la correspondencia entre cada curva y el tipo de proyectil que se empleaba en la experiencia. También en esta evaluación se incluyó un ítem relativo al principio de mínima acción, dado que en las conversaciones con todo el grupo de clase, se había hecho énfasis en la validez de este principio. También se agregó una pregunta acerca de la importancia de la constante de Planck.

Es posible anticipar que en este grupo de clase, cuyas condiciones fueron similares a la implementación original, la replicación de la secuencia resultó posible, y no se detectaron nuevos obstáculos en la conceptualización de los estudiantes. Este resultado constituye un aporte al análisis de la viabilidad institucional de la secuencia, aunque un análisis más completo de lo ocurrido clase a clase arrojará un mejor conocimiento acerca de la viabilidad de la secuencia.

2- La adaptación de la secuencia

Previo a la implementación, se realizaron diez encuentros periódicos con la profesora del curso para realizar las adaptaciones necesarias, para que las situaciones se ajusten a las características del grupo de estudiantes, y a su vez se eviten los obstáculos que habían sido detectados en el análisis de la primera implementación. La profesora que implementó la

secuencia en su curso colaboró en la realización de las modificaciones en base a las características de su grupo de estudiantes, respetando las normas institucionales de la escuela. Se propuso mantener invariante la ECPE original, lo cual significa mantener los conceptos y principios clave a enseñar, modificando algunas preguntas y parámetros de las situaciones para evitar que tuvieran lugar los obstáculos previamente identificados. En este caso, la secuencia se implementó en catorce aulas de una hora cada una, hacia el final del año lectivo, en un curso de Física del último año de la escuela secundaria de dieciocho estudiantes de buen desempeño. Este grupo había estudiado los fenómenos ondulatorios de forma usual, antes de la implementación.

Por restricciones institucionales, la evaluación de los conceptos y principios cuánticos formó parte de una evaluación más general de otros conceptos estudiados previamente.

La secuencia adaptada y finalmente implementada se encuentra en el Anexo. A continuación se señalan las modificaciones realizadas en cada una de las situaciones, las justificaciones correspondientes y los efectos, de una forma general:

En la **Situación 1**, se eliminó la expresión “azar” en la presentación de la Experiencia de la Doble Rendija. En las dos implementaciones anteriores, se había detectado que al predecir la distribución de las bolillas de la experiencia de la doble rendija, los estudiantes utilizaban el teorema en acto Ti_1 : “*Si las bolillas son disparadas al azar, la distribución es uniforme*”. Posiblemente la presencia de la palabra “azar” en la presentación de la experiencia llamara al uso de este teorema. En la adaptación, al eliminar la expresión “azar”, los estudiantes no utilizaron tal teorema, sino las inferencias fueron relativas a los lugares más probables donde se encontrarían las bolillas, lo cual resulta beneficioso en términos de la conceptualización.

También en esta situación se propuso a los estudiantes sumar cada una de las funciones $P(x)$ que se obtienen al abrir una sola rendija, porque se detectó en las implementaciones anteriores que los estudiantes se referían a “superposición de curvas” cuando observaban los resultados del software, y es preferible el concepto de “suma de curvas” para confrontarlo con la idea de “no suma” en el caso de los electrones. Como lo había previsto la profesora del curso, los estudiantes estaban familiarizados con la suma matemática de curvas, y entonces no tuvieron problemas en obtener la suma de las curvas en forma aproximada, y obtener la suma total. Cuando en la Situación 2 los estudiantes simulaban la EDR con electrones, pudieron reconocer más fácilmente que en las otras implementaciones, que para la curva $P(x)$ de electrones no se cumple la ley de suma de curvas, como lo era para las bolillas, legitimando así la necesidad de diferenciar a los electrones de “pequeñas bolillas”, y buscar otra descripción del fenómeno.

En la **Situación 3**, la técnica STA se presentó como respuesta a la pregunta: *¿Qué modelo permite explicar a la curva $P(x)$ de la EDR con electrones?* Se buscaba enfatizar desde el principio que se trata de una modelización, como una forma aproximada y simplificada de describir al comportamiento del electrón, que ya para ese momento se tenía por aceptado que su distribución en la EDR no era típicamente corpuscular. En la técnica se modificaron las expresiones con el objetivo de hacerlas menos confusas a los estudiantes, utilizando la notación geométrica para cada amplitud de probabilidad y la amplitud de probabilidad total. La expresión “amplitud” en el contexto escolar tiene un significado de “rango”, relacionado a “extensión en el espacio”, y por ello se evitó en esta implementación. Así, en esta adaptación se utilizó la expresión “*Vector asociado a cada $x(t)$* ”, reemplazando la expresión “vector amplitud de probabilidad” y al vector que antes se representaba como “Amplitud de probabilidad total”, se llamó simplemente “*Vector suma*”. Con estas expresiones, no se cambió la esencia de la técnica y se evitó que los estudiantes confundan la magnitud

vectorial *amplitud de probabilidad* con el escalar *probabilidad*. Luego, esta denominación se continuó en toda la secuencia.

Otra modificación en esta **Situación 3**, fue que luego de la presentación de la técnica, se plantearon las siguientes preguntas:

Entre todas las funciones $x(t)$ que es posible seleccionar para conectar el estado inicial con el final, observa que una de ellas es una línea recta:

a) *¿Qué tipo de movimiento representa esta función?*

b) *Suponiendo un tiempo y posición inicial en cero, y un tiempo y posición final, (2s.; 0,02m) Calcula el ángulo que forma el vector asociado respecto al eje horizontal, y luego dibújalo.*

c) *Las funciones que no son lineales, ¿que tipos de movimiento describen? ¿Cómo son sus velocidades?*

d) *En este último caso, ¿los valores de acción serían mayores o menores que en la función lineal? ¿Por qué?*

La introducción de estas preguntas tenía como objetivo ofrecer a los estudiantes la posibilidad de reflexionar y conversar acerca de la técnica, y sus formulaciones luego serían retomadas para establecer los resultados de la técnica para sistemas libres y analizar la validez de la técnica para casos macroscópicos.

En la siguiente situación, a diferencia de las dos implementaciones anteriores, no se propuso la simulación de la técnica para casos de masas mayores a la del electrón con el Modellus, sino que se dejó para más adelante. En este momento se decidió que luego de simular la aplicación de la técnica para electrones libres y establecer una expresión para la suma, directamente aplicar estos resultados a la experiencia de la doble rendija con electrones, ya que así se daría más continuidad a la secuencia. Así, se presentó la **Situación 4 “Reconstruyendo el diagrama de la EDR con electrones”**. En este caso, la profesora decidió no utilizar software de graficación para las funciones $P(x)$, argumentando que ello sería un obstáculo para los estudiantes, que no estaban habituados a él. Entonces se solicitó la realización del gráfico de $P(x)$ *aproximado*, que los estudiantes tienen como “cualitativo”, es decir como un esbozo de la función para apreciar su forma. Según la profesora, los estudiantes estaban habituados a realizar gráficos de funciones trigonométricas de esa forma.

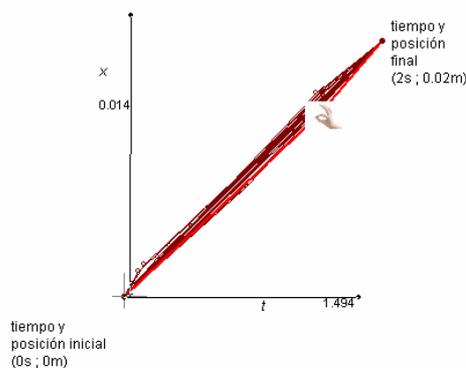
En la implementación original se había detectado que los estudiantes manifestaban dificultades para reconocer la modelización que implicaba la técnica STA, y habían utilizado teoremas en acto que no colaboraban para la conceptualización buscada. Por eso, también se agregó en esta situación la cuestión acerca de semejanzas y diferencias entre el gráfico obtenido y el gráfico que mostraba el software cuando se simulaba la experiencia con electrones. El objetivo era colocar a los estudiantes en el lugar de reflexionar acerca de las simplificaciones que implican la modelización. Luego, enfatizando la idea de reconocer los alcances y límites de la modelización, en la misma situación, se presentó la serie de fotografías de los impactos de la EDR realizada en laboratorio, y se solicitó a los estudiantes que analicen la relación entre la forma de la distribución de los electrones mostrada y la gráfica que se obtiene al aplicar la STA.

En la última situación, la **Situación 5**, se planteó el estudio de la transición cuántica-clásica, a su vez estaba dividida en dos sub-situaciones: a) Desde la EDR y b) Desde la STA para sistemas libres.

La primera, planteaba las mismas cuestiones que la implementación original, pero se agregó la cuestión de los alcances de la modelización nuevamente, al preguntar acerca de las semejanzas y diferencias de los gráficos de $P(x)$ con bolillas obtenidos con el software de la doble rendija y el gráfico realizado de forma “cualitativo” realizado a partir de la expresión $P(x)$ obtenida y evaluada para casos macroscópicos. También se formuló una nueva pregunta: *¿Podría concluirse que la técnica STA explica los fenómenos macroscópicos y microscópicos? ¿Por qué.* El objetivo era que los estudiantes reflexionaran y explicitaran que la técnica STA es válida para calcular probabilidades en ambos casos, con resultados distintos.

La propuesta del análisis de la transición desde la STA fue diseñada especialmente para esta implementación, y buscó que los estudiantes construyeran la idea de que en el caso clásico-con partículas macroscópicas- la suma se reduce a un único vector, y como consecuencia una sola función $x(t)$ es suficiente para describir su movimiento. Para ello, se utilizó la misma estrategia didáctica que para el caso cuántico: ofrecer la siguiente tabla de valores, correspondiente a una partícula de masa de un millón de veces la masa del electrón:

Tiempo (seg.)	$x(t)$ (metros)	Ángulo del vector (en grados)	Ángulo reducido al 1ºcuadrante
0.630	0.007	49.270.000	40
0.783	0.008	49.260.000	220
0.774	0.009	50.010.000	100
0.774	0.010	51.410.000	280
1,00	0,01	49.710.909	210($x_{clas}(t)$)
1,13	0.012	49.600.000	20
1,24	0.013	49.700.000	200
1,27	0.014	49.810.000	220
1,43	0.015	49.780.000	40



En ella se presentan los valores de “ x ”, “ t ” “ángulo del vector asociado” y en la última columna, ese mismo ángulo, comprendido entre 0 y 360 para evitar que los estudiantes tengan que realizar los cálculos necesarios para graficar cada vector. La imagen de la derecha, representa la selección de funciones que originaba estos valores, según la ejecución con el software. Luego, se solicitaba a los estudiantes realizar los mismos cálculos que en el caso de los sistemas cuánticos –sumar de forma geométrica y analizar si aquí también había todo un conjunto de funciones a considerar. Esto fue el punto de partida para el planteo del problema de si es posible conocer el estado de movimiento de una partícula con certeza, y confrontarlo con el resultado con los sistemas cuánticos.

En este caso, a diferencia de las dos implementaciones anteriores, no se hizo referencia a los conceptos ondulatorios. Se había notado que en las implementaciones anteriores cuando los estudiantes estaban frente a los resultados que arrojaba el software de la doble rendija con electrones, no se establecía relación entre esta curva y una curva de interferencia. Aún los estudiantes de esta última implementación, quienes habían estudiado los fenómenos ondulatorios recientemente, no reconocieron la curva como una curva típica de interferencia. Esto no resulta extraño, puesto que para los estudiantes resulta familiar relacionar a los electrones con las pequeñas bolillas y no es natural que surja la relación con los fenómenos ondulatorios. Por lo tanto, se evitó que la decisión acerca de si los electrones tienen comportamiento de ondas o de partículas, no ocupara el lugar central de la discusión. Fieles al objetivo de provocar un conflicto cognitivo que permita colocar a los electrones en una categoría especial -sistemas cuánticos- basándose en el reconocimiento de un comportamiento distinto al de “pequeñísimas bolillas”, se decidió prescindir de la

asociación con fenómenos ondulatorios. Así, en el final de la secuencia, a diferencia de las dos implementaciones anteriores, no se solicitó a los estudiantes que calculen longitudes de onda, ya que no se hizo referencia a este concepto. Por lo tanto tampoco se estableció la relación entre la longitud de onda y la masa, sino se enfatizó en la “forma de la distribución” en la pantalla colectora, según los lugares de concentración de los impactos, y en la forma de la “función de $P(x)$ ” con sus máximos y mínimos más apretados o no, y en la diferencia de las curvas que se obtienen experimentalmente, según se trate de electrones o de bolillas.

Por último, a modo de cierre, se acordó en la distinción entre la curva $P(x)$ que surge de la modelización para bolillas, y la curva experimental que muestra el software de la doble rendija, y se dibujaron en el pizarrón ambas curvas (la modelizada y la curva promedio detectada por el instrumento). Se realizó con los estudiantes la síntesis estableciendo la universalidad de la técnica STA, considerando los resultados de su aplicación según se trate de casos clásicos como bolillas y cuánticos como electrones, estableciendo que para objetos macroscópicos las leyes de la física cuántica predicen los mismos resultados que los de la física clásica. También se estableció que es la constante de Planck la que fija el límite en el cual el comportamiento cuántico se hace evidente en las experiencias físicas.

La profesora del curso y la investigadora, realizaron encuentros posteriores a cada clase, para tener un control del funcionamiento de la secuencia, y organizar los datos recolectados (las producciones escritas de los estudiantes y el registro diario de la profesora). Una mirada global de esta implementación permite apreciar que con las modificaciones descritas, el grupo de estudiantes no tuvo mayores dificultades en reconocer los alcances de la modelización de la STA, y logró conceptualizar la transición clásica-cuántica. Sin embargo, será el análisis completo de los datos obtenidos en esta implementación y en futuras implementaciones las que darán sustento a la afirmación de la viabilidad de la secuencia.

Capítulo 6

Reflexiones finales y perspectivas

Esta Tesis aborda la Enseñanza de la Mecánica Cuántica en la escuela media a partir de la comunidad científica de referencia, y analiza cómo volverlo enseñable, analizando la estructura conceptual del saber. La primera pregunta planteada fue:

1- ¿Qué Estructura Conceptual de Referencia es posible reconstruir para enseñar los aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica?

El proceso de recortar y gestionar el conocimiento físico del Campo Conceptual de la Mecánica Cuántica con vistas de volverlo enseñable en la escuela, y que atendiera a los problemas del campo de investigación ha sido complejo, pero posible. En la reconstrucción de la Estructura Conceptual de Referencia se decidió que los conceptos y principios clave para ser enseñados serían:

7. Forma de la distribución de probabilidad $P(x)$ para bolillas y para electrones en la Experiencia de la Doble Rendija
8. Electrón como sistema cuántico
9. Acción (S), construcción del vector Amplitud de probabilidad y construcción de la suma (técnica STA)
10. Consideración de funciones “alrededor” de la función clásica ($x_{clás}(t)$) en cálculo la probabilidad total en casos cuánticos y en casos clásicos (Principio de Superposición)
11. Asociación de propiedades ondulatorias a la materia: longitud de onda asociada, formación y detección del patrón de interferencia
12. Transición entre la Mecánica Cuántica y la Mecánica Clásica (Principio de correspondencia)

La selección y jerarquización de los conceptos y principios, se realizó considerando que:

- Se puede evitar el desarrollo estrictamente histórico con el que tradicionalmente se presenta la Mecánica Cuántica. Esto constituye una ventaja debido a que los problemas surgidos en la comunidad científica de referencia en la época en la cual se gestó la física cuántica carecen de sentido para los estudiantes, y finalmente los conceptos y principios cuánticos se terminan imponiendo a los estudiantes sin pasar por una construcción de su mecanismo explicativo, y sin abordar los aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica, como la descripción probabilística del movimiento del electrón, el Principio de Superposición, y el Principio de Correspondencia. La forma propuesta en este trabajo, sólo requiere que los estudiantes actualicen sus conocimientos básicos de Mecánica Clásica. Por lo tanto, una de las ventajas de adoptar el enfoque de Caminos Múltiples es que permite enseñar aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica

(sistema cuántico, Principio de Superposición y Principio de Correspondencia) a estudiantes que no disponen de una gran cantidad de conceptos físicos ni matemáticos.

- La técnica es aplicada al sistema más simple, el electrón libre, porque éste constituye un ejemplar que reúne las características de los sistemas cuánticos, y de esa forma permite analizar y caracterizar los sistemas cuánticos utilizando un nivel matemático basado en operaciones elementales con vectores (suma y módulo) y enfatizando principalmente la idea probabilística de la Mecánica Cuántica. (Arlego, 2008). De esta forma, permite trabajar el Principio de Superposición.
- La formulación del enfoque de Caminos Múltiples permite explicar la transición entre el comportamiento microscópico y macroscópico, centrandó el análisis en el cociente entre la acción S y la constante de Planck. Según el Principio de correspondencia, la descripción física de los eventos en la escala cuántica se debe extender al mundo macroscópico en el límite de grandes energías con respecto a \hbar . Es decir, la Mecánica Cuántica debe predecir los mismos resultados que la mecánica clásica para objetos macroscópicos, donde en la práctica puede considerarse \hbar tan pequeño en relación con las dimensiones macroscópicas, que \hbar tienda a cero.
- A pesar del nivel matemático complejo que implica su implementación técnica, para colaborar en la comprensión de la idea principal y los resultados de aplicar la técnica de Caminos Múltiples, se pueden utilizar de herramientas informáticas de simulación del cálculo, especialmente diseñadas para ello. En particular estas herramientas reemplazan el lenguaje analítico por el geométrico, utilizando un marco de operaciones básicas con vectores. El lenguaje geométrico permitiría a los alumnos visualizar el proceso de suma y reafirmar la idea que es la fase del vector y no el módulo quien varía de una trayectoria a otra.

La segunda pregunta de la Tesis:

2- ¿Qué características debería tener una Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica a estudiantes de escuela media, basada en la ECR reconstruida a partir del enfoque de Caminos Múltiples de Feynman?

Se realizó un estudio de las transformaciones necesarias del saber científicamente aceptado, en un saber que fuera enseñable, diseñando la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica. Se generaron las situaciones, anticipando cuáles podrían ser las respuestas de los estudiantes y sus nuevas preguntas relativas a la resolución. Se anticiparon las preguntas posibles con las cuales la profesora devolvería la responsabilidad de responderlas a los estudiantes.

El diseño de la ECPE y su análisis didáctico a priori insumió un año del trabajo de la Tesis, debido a la multiplicidad de decisiones que fue necesario tomar: qué conceptos y principios se propondrían a un grupo de clase del cual se conocen sus características de antemano (edad, rendimiento, conocimientos previos, etc.); qué preguntas y problemas resultarían más adecuadas, que mecanismo explicativo resultaría adecuado, que lenguaje se propondría y cuál se evitará, etc. Entre las actividades realizadas en este tiempo, se destacan:

- La formulación de problemas y tareas, con la anticipación de posibles respuestas;
- La predeterminación de los parámetros experimentales y variables de las funciones para el software disponible;

- La elaboración de las síntesis para formular consensos e institucionalizar los saberes;
- La contextualización del software en las situaciones;
- La creación de simulaciones que permitan visualizar la aplicación del modelo. La simulación de la experiencia crucial de toda la secuencia- Experiencia de la Doble rendija- estaba disponible y lista para utilizar, la simulación para visualizar la aplicación de la técnica STA fue íntegramente programada para ser simulada con el software Modellus. Se crearon dos simulaciones: una para la Situación 3 y la otra para la Situación 6.

La secuencia fue testada con el grupo de profesores del estudio piloto, quienes realizaron aportes relativos a algunas expresiones de las consignas. Luego se implementó la secuencia en el curso de Física del último año de la escuela secundaria para el cual estaba destinada. La implementación demandó un gran esfuerzo por la exigencia que representó para la profesora y para los estudiantes. Se enseñó, provocando la emergencia de las ideas de los estudiantes, contrastándolas luego con el software y se realizó la evaluación, con resultados bastante satisfactorios. El desarrollo de la secuencia con este grupo presentó algunos obstáculos que fueron sorteados por la profesora, quien elaboró ejemplos y síntesis apropiados, que a veces no habían sido contemplados en el diseño. El grupo de clase fue muy colaborativo y aceptó la propuesta y el desafío de cada situación. Los estudiantes percibieron y manifestaron sus dificultades para comprender los conceptos abstractos involucrados.

Aunque la implementación se desarrolló en el tiempo previsto y los alumnos abordaron las preguntas y los problemas propuestos en las situaciones, se deben señalar algunas restricciones, propias del ámbito escolar:

- La infraestructura escolar: hubo que asistir al aula de informática en horario extra, dependiendo de que la profesora de Informática cediera su hora. Esto incidió en el tiempo que se le podía dedicar al trabajo frente al software.
- La distribución horaria de la asignatura y el período de receso invernal, que incidieron en la continuidad indispensable para construir y familiarizarse con tantos conceptos nuevos.
- Los estudiantes recordaban algunos conceptos aislados del campo conceptual de la Mecánica Clásica y los fenómenos Ondulatorios, que aunque habían sido estudiados años anteriores, tenían dificultades para establecer relaciones relevantes entre los resultados encontrados.

Una vez implementada la secuencia, se abordaron las preguntas:

3- ¿Cómo se caracteriza la conceptualización en el grupo de clase donde se implementa la secuencia?

4- ¿Es posible describir y caracterizar algunos aspectos afectivos del grupo de clase que pudieron incidir en el desarrollo de la secuencia?

Para responderlas se realizaron los estudios relativos al análisis de la conceptualización, y a la descripción de los aspectos afectivos de los estudiantes, obteniendo los siguientes resultados:

Conclusiones acerca de la conceptualización

La identificación de algunos de los teoremas en acto que posiblemente fueron evocados cuando se presentaron las situaciones propuestas, se realizó para explorar y describir el funcionamiento de los problemas y las preguntas planteadas. Conocer los teoremas en acto utilizados y las inferencias que éstos permitieron y/o obstaculizaron permite, desde una mirada global, evaluar la viabilidad conceptual de la propuesta.

El proceso de conceptualización es un proceso a largo plazo, y no se termina en el tiempo en que se implementó la secuencia de situaciones y la evaluación. Para Vergnaud (2008, p. 5) *“la serie de teoremas en acto susceptible de ser asociada al mismo concepto es generalmente muy grande, particularmente en las disciplinas científicas y técnicas, de manera que, declarar que tal sujeto ha entendido el concepto, a menudo no tiene sentido”*. Sin embargo, es posible establecer las siguientes afirmaciones sobre la relación entre los conceptos que se esperaban reconstruir -establecidos en la ECR-, los teoremas en acto identificados cuando los estudiantes abordaron las situaciones, y los resultados obtenidos en la evaluación:

- Respecto a la conceptualización de **distribución de probabilidad $P(x)$** para bolillas y para electrones en la EDR

Inicialmente el concepto de azar fue dominante, y no permitió a los estudiantes pensar en términos de probabilidades, pero luego el teorema en acto referido a la uniformidad de los resultados fue abandonado, y en la evaluación utilizaron el concepto de curva de probabilidades [$P(x)$] en los marcos algebraico, funcional y gráfico de forma adecuada. Casi todos los estudiantes lograron diferenciar las curvas de probabilidad $P(x)$ para electrones y para bolillas, en términos de la presencia de máximos y mínimos.

Cuando los estudiantes abordaron las situaciones que implicaban el concepto de suma de funciones, no lograban reconocer la suma de ambas curvas en el sentido funcional, aunque varios de ellos notaban el efecto de superposición en el centro. Luego, la simulación con el software de la doble rendija parece haber contribuido a que reconocieran y explicitaran, que los efectos de cada una de las curvas se superponían cuando se abrían ambas rendijas en simultáneo. Este fue un buen punto de partida para contrastar con la curva $P(x)$ de electrones.

- Respecto al electrón como **sistema cuántico**

En el diseño de la secuencia se había previsto que los estudiantes asociaran los resultados con los fenómenos ondulatorios - interferencia y difracción-, cuando se enfrentaran con la curva $P(x)$ en el software de la Experiencia de la Doble Rendija con electrones, pues ésta función es visualmente similar a la representación gráfica de la curva de intensidad en la Experiencia de Young. Sin embargo, esto no sucedió. Reflexionando críticamente acerca de las expectativas originales durante el diseño, se encuentra que no se puede esperar que los estudiantes utilicen una estrategia cognitiva tan propia de los físicos: asociar características ondulatorias a las partículas, debido a que ambos casos se describen con las mismas herramientas matemáticas. Tal vez, si los estudiantes dispusieran de una base conceptual sólida de los conceptos ondulatorios, la asociación podría resultar más probable.

Los estudiantes no advirtieron la distribución de los electrones en franjas de concentración. Al contrario percibían que estaban *“distribuidos por toda la pared”* sin notar las bandas de concentración y los lugares vacíos. Esto se debe a que utilizaban el

teorema en acto referido al comportamiento de los electrones: “*son bolillas pequeñísimas que pueden atravesar paredes*”-, lo cual les hacía ver la distribución homogénea en la pared, evidenciando una vez más que los invariantes operatorios orientan la percepción y la acción como un todo. Fue la profesora quien cuestionó la visión de homogeneidad cuando preguntó acerca de la interpretación de los mínimos de la curva. Esto hizo que los estudiantes revisaran su percepción y aceptaran la necesidad de encontrar una nueva categoría para los electrones, alternativa a “pequeñísimas bolillas”, conviniendo en llamarlos “sistemas cuánticos”. De esta forma, fue adquiriendo sentido la necesidad de buscar una manera de explicar la ley que rige la distribución de probabilidades. Estos resultados muestran que: 1) los productos de investigación deben ser testeados en aulas reales, modificados, y así siguiendo; 2) la relevancia de la intervención oportuna del profesor imbuido en la tarea que está desarrollando. Más adelante en el desarrollo de la Situación 5, expresiones de los estudiantes como “*ahora nos estás cambiando nuestro pensamiento de...de toda la vida! los electrones no son bolillas...(estudiante A13, en el E9)*” estarían indicando que ellos al menos pusieron en duda su idea de los electrones como “pequeñas bolillas”.

Según los resultados de la evaluación, una buena parte de los estudiantes parece reconocer el comportamiento “diferente” del electrón, respecto de las partículas macroscópicas como bolillas. Sin embargo, algunas respuestas en dicha instancia, muestran que ellos aún siguen considerando a los electrones como partículas, añadiendo la propiedad “cuántica”. Esto significa que los teoremas en acto referidos a los electrones como “*pequeñas bolillas*” probablemente sean reutilizados en aquellas situaciones que les requieran representar, nombrar e imaginar a los electrones.

- Respecto a la **contribución de las funciones $x(t)$ cercanas a la función clásica en el cálculo de probabilidad (Principio de superposición)**

Durante el desarrollo de las situaciones 3 y 4 algunos estudiantes manifestaron dificultades para responder a las preguntas requeridas con la utilización del software Modellus, porque no aceptaban la relación entre las funciones $x(t)$ y el vector amplitud de probabilidad (teorema en acto Tcv_2). Sin embargo otros, a pesar de la falta de familiaridad con la simulación, reconocieron la relación entre proximidad de funciones y dirección de los ángulos del vector amplitud. Esto permitió avanzar en la conceptualización de la contribución de funciones en el cálculo de probabilidad.

Ciertos obstáculos como la falta de conocimientos relativos a la suma de vectores en forma geométrica y la diferencia entre sumar números y sumar vectores, tuvieron que ser sorteados en la interacción con la profesora. Finalmente, se formularon y aceptaron las conclusiones acerca de los resultados de la aplicación de la STA para el caso de electrones libres. En la evaluación, casi todos los estudiantes lograron referirse en forma adecuada a la contribución de funciones o “camino” cercanos al clásico en varias de sus respuestas.

Cuando se propuso aplicar la técnica STA para sistemas cuya masa fuera aumentando gradualmente, utilizando la **Simulación 1** surgieron nuevos obstáculos. Por un lado, la dificultad para interpretar la salida del software. Por otro, aquellos estudiantes que no habían aceptado los resultados para el caso del electrón, naturalmente tampoco comprendían la aplicación de la STA para casos de masa mayor. En algunos estudiantes fue notable la utilización del teorema Tsv_2 “**Queda un solo vector en la suma, entonces, el resultado es más exacto**” Esto indicaría que se aproximaban a la idea de que la probabilidad se transformaba en certeza si con una sola función se podía describir el movimiento de las partículas macroscópicas. Es decir que estaban a un paso de conceptualizar la transición cuántico-clásico.

- Respecto al **comportamiento ondulatorio y la longitud de onda asociada**

Cuando se aplicaron los resultados de la STA a la EDR, (Situación 5) se obtuvo una función que se ajustaba –parcialmente- a la función experimental mostrada por el software. Los estudiantes manifestaron dificultades para reconocer la modelización, porque ambas curvas no resultan exactamente iguales: la que muestra el software considera la difracción y la que predice la técnica no. Sin embargo, la propuesta de utilizar la **Simulación 2** colaboró para construir el concepto de longitud de onda asociada, porque ellos corroboraron cómo cambia la curva de $P(x)$ al aumentar la masa, que ya habían reconocido cuando analizaron la expresión funcional. En la evaluación, ellos parecen utilizar adecuadamente este concepto, cuando consiguen graficar curvas de probabilidad relativas a sistemas cuánticos y a sistemas clásicos, y calculan e interpretan apropiadamente las longitudes de onda involucradas en las preguntas.

- Respecto al significado de la **constante de Planck y la transición cuántica-clásica**

En varias ocasiones durante el desarrollo de la secuencia se estableció la importancia de la pequeñez de la constante de Planck. Se propusieron ejemplos para que los estudiantes analicen distintos cocientes, para casos cuánticos y clásicos, y para que calculen longitudes de onda asociada a distintos valores de masa. Finalmente se decidió que la constante de Planck es fundamental en la naturaleza, pues fija el límite entre lo macroscópico y lo microscópico. En los problemas de la evaluación la mayoría de los estudiantes se refirieron adecuadamente a la constante de Planck, a sus dimensiones, la utilizaron de forma adecuada, y se aludieron en varias ocasiones a su aspecto fundamental para la Mecánica Cuántica. Expresaron conocer las diferencias entre formación y detección de la curva de interferencia, y realizaron representaciones gráficas adecuadas. En este sentido, se podría decir que conceptualizaron el Principio de Correspondencia.

El análisis realizado refleja la génesis conceptual que la secuencia consiguió disparar. Se ha focalizado en algunos de los teoremas y conceptos en acto que se pudieron identificar, esto debe entenderse en el contexto de la complejidad del estudio del proceso de conceptualización. Las acciones dirigidas por estos invariantes operatorios, son sistemáticas y se producen en el devenir de la historia cognitiva de los estudiantes. Esto se manifiesta en el teorema en acto que concibe a los electrones como pequeñísimas bolillas. Este teorema en acto, utilizado y reutilizado durante años de escolaridad, también tiene un correlato mental imagístico y otro pictórico externo, que parecen inevitables. Su origen puede rastrearse y documentarse en múltiples textos de física y de química, y aunque a primera vista constituye un obstáculo para la conceptualización de sistema cuántico, su emergencia y explicitación son indispensables para las nuevas ideas cuánticas.

Las replicaciones y adaptaciones de esta secuencia con otros grupos de clase, han permitido reafirmar el papel que la relación entre esquemas del sujeto y situaciones tiene en la conceptualización. Por ejemplo, el caso del azar y la distribución, en la experiencia de la doble rendija. Los estudiantes interpretaron la situación a la luz del concepto en acto de azar, recuperando los teoremas y conceptos en acto disponibles y a su juicio, acordes a la solución buscada. Al modificar la formulación de la situación, los teoremas y conceptos llamados son otros. Así se pone de manifiesto que las situaciones no pueden ser producto de la improvisación, sino que son resultado de un proceso de diseño, del análisis didáctico a priori y de prueba efectiva en aula produciendo una reformulación y un nuevo ciclo. Como señala Vergnaud al admitir el carácter **contingente** de la acción, entendemos como los invariantes operatorios dirigen las acciones de los estudiantes, pero éstos invariantes

son gatillados a partir de las preguntas y tareas solicitadas en las situaciones. En este sentido, la acción es también una oportunidad para la conceptualización pretendida.

Por otro lado, este trabajo también muestra la necesidad de discutir el significado de modelización en física con los estudiantes. Ellos no perciben que se trata de una forma de representar la situación que se quiere explicar - la distribución de los electrones en la pantalla colectora, en este caso-. Los estudiantes no comprenden que los modelos científicos son aproximaciones que no tratan directamente con la realidad ni la agotan, tal como en la aplicación del método de Feynman.

Conclusiones acerca de los aspectos afectivos en el grupo de clase:

Los aspectos afectivos se analizaron en dos momentos: durante la implementación, y al final de ella. Cada instancia se realizó en base a dos tipos de instrumentos: los protocolos de los estudiantes situación a situación para el primer caso, y un cuestionario individual que ellos respondieron al finalizar la implementación, para el segundo caso. Se concluye que:

- Tomando en cuenta que la secuencia se desarrolló según los pasos y etapas previstas y que los alumnos perciben y califican su esfuerzo como intenso pero posible, es posible afirmar que los aspectos afectivos de los estudiantes colaboraron en la posibilidad de la secuencia en esta institución. Es decir los estudiantes no fueron superados por las situaciones propuestas y aceptaron los desafíos.

Acerca de los aspectos afectivos es destacable que la secuencia demanda a los estudiantes un esfuerzo importante para no ser superados por las situaciones propuestas y para aceptar los desafíos. Este esfuerzo tiene doble naturaleza: por un lado cognitiva, para poder actualizar y relacionar los conceptos nuevos con otros conceptos previos, y es necesario aceptar que se intenta “*cambiar las ideas de toda una vida*” tal como lo expresan los estudiantes. Por otro lado hay que realizar un esfuerzo afectivo, relacionado con sentirse a gusto en resolver problemas y cuestiones, y por aceptar que dichas “*ideas de toda la vida*” son erradas. Esto se relaciona con la forma de considerar al estudiante, como otro legítimo ser, que también puede compartir el dominio de conocimientos que trae la profesora, y pone a su disposición. El diseño de toda la secuencia fue realizado bajo esa premisa, y toda vez que fue posible, se aceptaron las ideas de los estudiantes, sus predicciones y explicaciones, y luego se trató de perturbarlas, con preguntas, con problemas o con el software. También requirió un gran esfuerzo por parte de la profesora, quien al pretender seguir los principios didácticos (Otero, 2006; 2007; 2008) debía asumir que son sus estudiantes los que tienen la responsabilidad de aceptar o rechazar la invitación que se les realiza, y resistir la tentación de ocupar su lugar, y resolver los problemas por ellos.

- Con relación al software, también los estudiantes reconocen el valor de su utilización y el esfuerzo que les requirió. Si bien las herramientas elegidas y diseñadas buscan aliviar ciertos aspectos desalentadores como el cálculo, no suponen una utilización pasiva. Ellas son parte de situaciones indisolubles de la conceptualización y por lo tanto están ligadas a problemas y preguntas.
- Otro indicador de viabilidad es la satisfacción que los estudiantes manifiestan acerca de los resultados de su esfuerzo y de la forma de trabajo, que exigió atención y enfatizó la comunicación oral y escrita.

El análisis realizado en los dos estudios de la Tercera Fase de la Investigación ha permitido identificar algunos obstáculos en la conceptualización de las nociones cuánticas,

reconociendo que el tipo de interacciones en el grupo de clase -profesor y estudiantes- que se requieren para sostener el esfuerzo cognitivo que la secuencia demanda es importante, aunque posible. Se concluye que la secuencia tuvo viabilidad institucional y que es reproducible. Se han realizado dos nuevas implementaciones, con ajustes y mejoras, lo que estaría indicando su posible viabilidad ecológica.

Reflexiones finales y perspectivas

El trabajo permite formular las siguientes reflexiones dirigidas a responder la cuestión de cómo introducir la Mecánica Cuántica en la escuela tomando en cuenta la génesis escolar de los conceptos físicos:

1- La imagen que se introduce del electrón tempranamente en la escuela como diminuta partícula, enfatizando en las propiedades corpusculares, forma parte de un modelo cuya validez debe establecerse y explicitarse. Si durante toda la escolaridad únicamente se presenta este modelo, no hay alternativa para que los estudiantes dejen de considerarlo. Ciertas representaciones pictóricas como por ejemplo las presentadas en la descripción de la conocida Experiencia de Rutherford, donde los electrones, son utilizados a manera de proyectiles que deben atravesar la lámina de oro, hacen que los estudiantes reafirmen la idea de electrones como pequeñas bolillas cargadas- que poseen la propiedad de “atravesar” paredes. Además, ciertas representaciones pictóricas de algunos libros de texto para la escuela, cuando describen al “efecto túnel” muestran vallas –representando barreras de potencial- y partículas que pueden atravesarlas. Esto no solo enfatiza la idea corpuscular clásica sino que agrega propiedades casi “mágicas”, al acompañarse las representaciones gráficas de bolillas y vallas con expresiones verbales como: *“partículas que según la concepción cuántica, a pesar de que su energía es menor que la que impone la valla, el cuerpo puede atravesarla, con una cierta probabilidad”*.

2- La modelización en general y en Física en particular, es otro punto débil en la escuela. Difícilmente se reflexiona con los estudiantes acerca de que las teorías no tratan directamente con “la realidad” sino con modelos físicos que la simplifican y recortan y con modelos matemáticos que se interpretan con relación a tales recortes. Son esos “recortes” del sector de la realidad en estudio, a los que se llama “modelos” (Klimovsky y Boido, 2005). La ventajas de tratar con modelos sencillos es su accesibilidad para el análisis y la desventaja es que el despojamiento de factores reales puede conducir a formular teorías que no se correspondan con los resultados experimentales. Como durante la escolaridad los estudiantes no participan en la reconstrucción de modelos para explicar ciertos fenómenos, aún con funciones matemáticas sencillas como las de la cinemática, son esperables las dificultades detectadas en los estudiantes para comprender que la STA es un modelo que predice los resultados obtenidos en la EDR.

3- Uno de los hallazgos de este trabajo, que se ocupa de la Mecánica Cuántica en la escuela media es que destaca la importancia que reviste la enseñanza de la Mecánica Clásica en este nivel. Los conceptos de Mecánica Clásica, lejos de ser un obstáculo para la enseñanza de conceptos cuánticos, deberían seguir siendo enseñados en los primeros años de la escuela media para que colaboren con la introducción de conceptos cuánticos hacia el final de la escolaridad. No es posible evitarlos, porque es necesario que los estudiantes construyan un sistema conceptual sólido en los cuales se puedan “anclar” los nuevos conceptos cuánticos. Esto exige repensar la forma segmentada y mecánica como se enseña actualmente la Física en la escuela, limitada a la aplicación de fórmulas descontextualizada del modelo matemático que forma parte del modelo físico del fenómeno que se quiere describir. Así, es necesario estudiar didácticamente la forma en que pueden reconstruirse los modelos

cinemáticos y dinámicos con los estudiantes, y enfocarse a los aspectos fundamentales de la Mecánica Clásica, para poder comprender las diferencias con los de la Mecánica Cuántica y valorizar la utilidad de contar con una formulación cuya validez abarca los sistemas conceptuales previos que la comunidad científica fue construyendo.

4- Un problema intrínseco a la formulación misma de la Física Cuántica ha sido la interpretación de su formalismo. Son conocidas y documentadas las discusiones que se han generado en torno a la interpretación, y llevan a profundas consideraciones filosóficas, que resultan muy complejas para tratar con los estudiantes de la escuela media, cuyos estudiantes son de 17 años de edad, en promedio. Sin embargo, el planteo de la esencia radicalmente distinta de las leyes que rigen el mundo microscópico con las del mundo macroscópico, inevitablemente hace referencia a la incerteza intrínseca del primero, cuestión para la cual hay consenso científico que no será resuelta por ningún nuevo dispositivo experimental preciso que pueda inventarse. En este trabajo, se planteó a los estudiantes la incerteza mediante la consideración de todo un conjunto de funciones cercanas a la función clásica para realizar el cálculo de la probabilidad, y la falta de una única función para describir el movimiento de un electrón. Esto se ha realizado desde un punto de vista pragmático de la técnica, evitando interpretar que el electrón sigue múltiples trayectorias, idea absolutamente errada.

La Tesis se realizó considerando los aspectos anteriores, y se ha conseguido mostrar que es posible enseñar aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica en el último año de la escuela, a estudiantes que de otra forma hubieran egresado sin si siquiera *asomarse* al mundo cuántico. Los resultados se consideran aceptables, ya que los estudiantes no fueron superados por las situaciones propuestas y se trataron aspectos cuánticos fundamentales como sistema cuántico, principio de superposición y principio de correspondencia. La aproximación cuántica construida a partir del modesto conjunto de instrumentos conceptuales de los estudiantes es el resultado de mas de un año de trabajo dedicado al diseño de la secuencia, al análisis a priori y a la reconstrucción del saber de referencia relativo a la adopción del enfoque de Feynman para evaluar su potencialidad. La secuencia fue viable aún cuando las herramientas físicas y matemáticas disponibles eran modestas, pero estos obstáculos pudieron ser sorteados. Esto es importante frente a la realidad del sistema educativo argentino, donde las horas dedicadas al estudio de la Física se han visto progresivamente reducidas. Por otro lado, si los estudiantes dispusieran de un conocimiento más profundo de los fenómenos ondulatorios, la secuencia permite aprovecharlos para producir asociaciones fecundas con relación a la longitud de onda. No obstante, se insiste en que a través de la propuesta que enfatiza el papel de la constante de Planck, el principio de correspondencia puede igualmente ser enseñado. Esto habla a favor de la adaptabilidad del producto didáctico generado. Las nuevas implementaciones que se realicen, con ajustes y mejoras a las realizadas hasta el momento, indicarán su viabilidad ecológica.

Capítulo 7

Bibliografía

Arlego, M. (2008) Los fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela secundaria utilizando el concepto de integral de camino *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 3(1), 59-66 [En línea] Obtenido de http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/?q=es/anio3_num1

Aubrecht, I (1988) Redesigning courses and textbooks for the twenty-first century. *American Journal of Physics*. 57(4) 352-359

Ausubel, D. P., Novak, J. D. & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas, México

Bao L y Redish E (2002) Understanding probabilistic interpretations of physical systems: A prerequisite to learning quantum physics. *Am. J. Phys.* **70** (3) 210-217

Budde M, Nieddere, H, Scott P y Leach J (2002) 'Electronium': a quantum atomic teaching model Special Feature: Teaching Quantum Physics *Physics Education* **37** (3) 197-203

Cabral de Paulo, I y Moreira, M A (2005) Um Estudo Sobre A Captação Do Significado Do Conceito De Dualidade Onda-Partícula Por Alunos Do Ensino Médio *Enseñanza de las Ciencias*, Número extra.

Cataloglu, E; Robinett, R (2002) Testing the development of student conceptual and visualization understanding in quantum mechanics through the undergraduate career *American Journal of Physics*. 70 (3), 238-251.

Chevallard, I. (1999) *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al Saber enseñado*. Editorial AIQUE.

Coelho, J.V (1995) Física Moderna no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado-Instituto de Educação-Universidade Federal de Mato Grosso. **Ensino de Física no Brasil** Dissertações E Teses (1992 - 1995) C a t á l o g o A n a l í t i c o. Universidade De São Paulo Instituto De Física Disponible su resumen em http://www.if.usp.br/profis/arquivos/vol.2_TUDO.pdf

Cohen-Tannoudji, C; Diu, B y Laloe, F (1977) *Quantum mechanics* New York : Wiley-interscience.

Cuppari, A, Rinaudo, G, Robutti, O y Violino, P (1997) Gradual introduction of some aspects of quantum mechanics in a high school curriculum, *Physics Education* 32, 302-308

Damasio, A. (2001) *El error de Descartes*. Editorial Crítica, Barcelona. Original (1994) *Descartes' s Error. Emotion, Reason and the Human Brain*. Putnam Book, NY.

Damasio, A. (2005) *En busca de Spinoza. Neurobiología de la Emoción y los Sentimientos*. Editorial Crítica, Barcelona.

Dobson, K, Lawrence I y Britton P (2000) The A to B of quantum physics. *Phys. Educ.* 35(6) 400-405

Domert, D; Linder C y Ingerman A (2004) Probability as a conceptual hurdle to understanding one-dimensional quantum scattering and tunnelling *European Journal Of Physics* **26** 47-59

- Dowrick, N J (1997) Feynman's sum-over-histories in elementary quantum mechanics *Eur. J. Phys.* 18, 75-78
- Fanaro, M., Arlego, M., Otero M. R (2006) Los caminos múltiples de Feynman y la mecánica cuántica en la escuela media Actas del 8 *Simposio de Investigación en Educación en Física* (pp161-169)- Asociación de Profesores de Física de la Argentina (APFA).
- Fanaro, M, Otero, M, R, Moreira, M.A (2007) Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar los fundamentos de la Mecánica Cuántica en la escuela Actas del V *Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo*. Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía VIII, pp. 189-201. Madrid.
- Fanaro, M., Arlego, M., Otero, M. R., (2007). El método de caminos múltiples de Feynman para enseñar los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica en la escuela secundaria, *Caderno Catarinense de Ensino de Física* 22, 233-260
- Fanaro, M., Otero, M. R Arlego, M. (2007) Software de simulación y reconstrucción de fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología* N° 2, 4-12
- Fanaro, M., Otero, M. R; Arlego, M (2007) Nociones matemáticas necesarias para reconstruir fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela: la importancia de los vectores y los números complejos. Acta I *Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática*, Argentina (pp.297-309)
- Fanaro, M., Otero, M. R y Moreira, M. A. (2008) Teoremas en acto y conceptos en acto en dos situaciones relativas a la noción de Sistema Cuántico *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências (RBPEC)* Enviado el 18/07/2008, en evaluación.
- Fanaro, M., Otero, M. R., (2008) Basics Quantum Mechanics teaching in Secondary School: One Conceptual Structure based on Paths Integrals Method *Lat. Am. J. Phys. Educ.* 2(2), 103-112. [En línea] Obtenido de <http://journal.lapen.org.mx/may08/LAJPE%20149F-Fanaro%20Otero.pdf>
- Fanaro, M; Otero, M R; Arlego, M. A (2009) "Teaching the foundations of quantum mechanics in secondary school: a proposed conceptual structure" *Investigações em Ensino de Ciências – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, BRASIL.- ISSN 1518-8795 V14(1)*, pp. 37-64.
- Feynman, R (1965) *El carácter de la ley Física*. Tusquets Editores.
- Feynman, R (1985) *QED The strange theory of light and matter*. Penguin Books. Princeton University Press, USA
- Feynman, R y Hibbs A (1965) *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, Inc. USA
- Fischler y Lichtfeldt (1992) Modern Physics and students' conceptions. *International Journal of Science education* 14(2):181-190
- Freire J R, O, Carvalho Neto, R. A. de, Rocha, J. F. M., Vasconcelos, M., J. L., Socorro, M., Anjos, E. L. (1995) dos. Introducing quantum physics in secondary school. Salvador: Instituto de Física – UFBA
- Gil, D., Solbes, J. (1993) The introduction of modern physics: overcoming a deformed vision of science. *International Journal of Science Education*, London, v. 15, n. 3.
- Goldstein, H (1966) *Mecánica Clásica*. Madrid : Aguilar

- González, E. Fernández, P y Solbes, J (2000) Dificultades de docentes de ciencia en la conceptualización de temas de física actual. *Actas del V Simposio de Investigación en Educación en Física, Tomo 1*.138-147. Argentina
- Gowin, D.B (1981). *Educating*. Ithaca, N.Y., Cornell University Press. Traducción al español: *Hacia una teoría de la educación*. Ediciones Aragón. Argentina
- Greca, I (2000) *Construindo Significados Em Mecânica Quântica: Resultados De Uma Proposta Didática Aplicada A Estudantes De Física Geral*. Tesis Doctoral.
- Greca, I & Moreira, M.A (2004) Obstáculos representacionales mentales en el aprendizaje de conceptos cuánticos. En Moreira, M A. (2003) *Sobre el cambio conceptual, obstáculos representacionales, modelos mentales, esquemas de asimilación y campos conceptuales*. (pp. 26-40) Instituto de Física. UFRGS, Brasil.
- Greca, I; Moreira, MA y Herscovitz, V (2001) Uma Proposta para o Ensino de Mecânica Quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. 23(4), 444-457.
- Greiner, W (1994) *Quantum mechanics; an introduction* Berlin : Springer-Verlag,
- Hadzidaki, P (2008) `Quantum Mechanics´ and `Scientific Explanation´ An Explanatory Strategy Aiming at Providing `Understanding´ *Science & Education* 17:49-73
- Hanc, J y Tuleja, S (2005) The Feynman Quantum Mechanics with the help pf Java applets and physlets in Slovakia. En *actas del 10th Workshop on Multimedia in Physics. Teaching and Learning*. Berlin. [En línea] Obtenido de http://pen.physik.uni-kl.de/w_jodl/MPTL/MPTL10/contributions/hanc/Hanc-Tuleja.pdf
- Hobson, A (2000) Teaching “Modern” Physics in Introductory Courses. *The Physics Teacher* 38, Letters to the Editor
- Hobson, A (2005). Electrons as field quanta: A better way to teach quantum physics in introductory general physics courses. *Am. J. Phys.* **73** (7) 630-634
- Jones (1991) Teaching modern physics- misconceptions of photon can damage understanding. *Physics Education*, 26 , 93-98
- Klimovsky, G. & Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento científico*. AZ Editora. Buenos Aires, Argentina.
- Kragh, H. (1992) A sense of history: history of science and the teaching of introductory quantum theory. *Science & Education*, Dordrecht, v. 1, p. 349-363, 1992.
- Landau, L y Lifshitz; E. M (1978) *Mecánica cuántica no-relativista* Barcelona: Reverte.
- Lawrence I. (1996) Quantum physics in school. *Physics Education*, Bristol, v. 31, n. 5.
- Lezama Andalón, J; Farfán Márquez, M.R. (2001) Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 4(2) 161-192
- Lobato, T y Greca, I (2005) Analise da insercao de conteúdos de teoria quântica nos currículos de física do ensino médio. *Ciencia & Educação*, 11(1), 119-132
- Lühl J (1992) Teaching of social and philosophical background to atomic theory. *Science & Education*, Dordrecht, v. 1..
- Mashaddi, A (1998) Instructional Design for the 21 st Century Towards a New Conceptual Framework. Paper presented at the International Conference on Computers in Education. Beijin, China. [En línea]. Obtenido de la base ERIC: http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/17/87/b9.pdf

- Mashaddi, A (2000) 21 st Century Thinking and Science Education. Paper presented at the International Conference on Thinking. Singapur. [En línea]. Obtenido de la base ERIC:http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/15/13/82.pdf
- Maturana, H. R. (1990) *Emociones y Lenguaje en Educación y Política* Editorial Dolmen, España.
- Maturana, H. R. (1991) *El Sentido de lo Humano*. Editorial Dolmen, España.
- Maturana, H. R. (1995) *La realidad ¿objetiva o construida? I Fundamentos biológicos de la realidad*. Ed. Anthoropos/Universidad Iberoamericano/ Iteso. México.
- Maturana, H. R. (2001) *Cognição, Ciência e Vida Cotidiana*. Editorial UFMG, Brasil.
- Merzbacher, (1970) *Quantum mechanics* New York : J Wiley
- Messiah, A (1973) *Mecánica cuántica* Madrid : Tecnos,
- Montenegro, R.L. y Pessoa Jr., O. (2002) - Interpretações da teoria quântica e as concepções dos alunos do curso de física – *Investigações em Ensino de Ciências*, 7,(2), Obtenido en mayo de 2006 de <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>
- Moreira M. A. A (2002) Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*, Porto Alegre, V. 7, n. 1, p. 7-30
- Moreira, M. A. (2005). *Aprendizagem significativa crítica*. Porto Alegre, Brasil.
- Moreira, M. A. y Greca, I. (2000) Introdução a Mecânica Quântica: seria o caso de evitar a aprendizagem significativa (subordinada)? Em *Atas do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa*, Peniche, Portugal.
- Moreira, M.A. y Lang da Silveira, F. (1993) Instrumentos de pesquisa em ensino e aprendizagem: a entrevista clínica e a validação de testes de papel e lápis- (EDIPUCRS, Porto Alegre)
- Müller, R y Wiesner, H (2002) Teaching quantum mechanics on an introductory level *American Journal of Physics*, (70) 3 200-209.
- Niedderer, H (1996) Teaching quantum atomic physics in college and research results about a learning pathway *Proceedings of the International Conference on Undergraduate Physics Education (ICUPE)* University of Maryland, College Park, USA. [En línea] Obtenido de http://didaktik.physik.uni-bremen.de/niedderer/personal.pages/niedderer/pubs_files/1996_ICUPE_Atom.pdf
- Niedderer, H y Petri, J. (1997) Learning Pathways in High- School Level Quantum Atomic Physics. Paper presented at they Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching [En línea]. Obtenido de la base ERIC: http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/16/70/bc.pdf
- Niedderer, H y Deylitz, S. (1999) Evaluation of a new approach in quantum atomic physics in high school. In: Annual Meeting National Association For Research In Science Teaching, Boston. *Collection of papers presented*. Disponible en internet: www.phys.ksu.edu/perg/papers/narst
- Novak, JD. & Gowin, DB. (1988) *Aprendiendo a aprender*. Madrid: Alianza Editorial Martínez Roca.
- Ogborn, J (1970) Introducing quantum physics *New Trends in Physics Teaching Volume 2 Paris: UNESCO* 436-443

- Olsen, R (2002) Introducing quantum mechanics in the upper secondary school: a study in Norway *International Journal of Science Education* 24(6), 565–574
- Osterman, F & Moreira, M (2000) Uma revisão bibliográfica sobre a área de pesquisa "física moderna e contemporânea no ensino médio *Investigações em ensino de ciências*. 5(1) Obtenida en mayo de 2006 de http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol5/n1/v5_n1_a2.htm
- Osterman, F y Ricci, T (2004) Construindo uma unidade didactica conceitual sobre mecanica cuantica: um estudo na formação de profesores de fisica. *Ciencia & Educação*, 10, (2) 235-257. [En línea] Obtenido en Junio de 2006 de <http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol7/Num1/v12a07.pdf>
- Osterman, F; Prado,S y Ricci, T (2006)Desenvolvimento de um software para o ensino de Fundamentos de Física Quântica *A Física na Escola*. São Paulo, 7(1): 22-25
- Osterman, F; Prado,S y Ricci, T (2008) Investigando A Aprendizagem De Professores De Física Acerca Do Fenômeno Da Interferência Quântica. *Ciência & Educação*, 14(1) 35-54
- Otero M R (2007) Emociones, sentimientos y razonamientos en Educación Matemática *Acta I Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática: perspectiva Cognitiva, Didáctica y Epistemológica*. (Acta I ENEM. pp. LXXXII-CV). Tandil, Buenos Aires, Argentina.
- Otero, M. R. (2006) *Emociones, sentimientos y razonamientos en Didáctica de las Ciencias*, Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 1(1) 24-53 [En línea] Obtenido de http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/files/anio1/num1/REIEC_anio1_num1_art3.pdf
- Otero, M. R., (2008). Enseñanza de las Ciencias: Aspectos Didácticos, Cognitivos y Afectivos *Actas del V Semana de Investigación Programa Internacional De Doctorado En Enseñanza De Las Ciencias UBU/UFRGS Puerto Alegre*. (En prensa)
- Paulo, I.J.C. & Moreira, M. A (2004) Abordando conceitos fundamentais da mecanica quantica no nivel medio. En *Actas del II Encuentro Iberoamericano sobre Investigación Básica en Enseñanza de las Ciencias*, España.
- Paulo, I.J.C. (2006) A Aprendizagem Significativa Crítica de Conceitos da Mecânica Quântica Segundo a Interpretação de Copenhagen e o Problema da Diversidade de Propostas de Inserção da Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio. Tesis Doctoral.
- Pereira de Pereira (2008) Fundamentos de física quântica na formação de professores: uma análise de interações discursivas em atividades centradas no uso de um interferômetro virtual de Mach-Zehender. Tesis de maestría Obtenida en Internet: <http://www.bibliotecadigital.ufrgs.br/da.php?nrb=000631479&loc=2008&l=2649039b325c30f3>
- Pessoa Jr, O. (1997) Interferometria, interpretação e intuição: uma introdução conceitual à Física Quântica *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 19 (1) 27-47.
- Pinto, A.C. y Zanetic, J. (1999) – É possível levar a Física Quântica para o Ensino Médio? *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, 16(1), 7-34.
- Posner G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., Gertzog, W. A. (1982) Accommodation of a scientific conception: toward a theory of conceptual change. *Science Education*, New York, v. 66, n. 2.
- Rüdinger, E (1976) On the teaching of introductory Quantum Mechanics. *American Journal of Physics*. 44(2) 144-148

- Ryder L. Quantum field theory. Cambridge University Press, 1996.
- Shankar, R (1980) *Quantum Mechanics*. Plenum Press, New York
- Simas Alveti, M A (1999) *Ensino de física moderna e contemporânea e a revista ciência hoje*. Florianópolis, 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Stamatis V; Shaffer, P; Ambrose B, y McDermott L. (2000) Student understanding of the wave nature of matter: Diffraction and interference of particles *Phys. Educ. Res., Am. J. Phys. Suppl.* **68** (7) S42-S51
- Stefanel , A. (1998) Una experiencia en el marco de la introducción de la física cuántica en la escuela secundaria. *Revista de Enseñanza de la Física*, Rosario, v. 11, n. 2.
- Strnad, J (1981) Pitfalls in the teaching of introductory quantum physics. *European Journal of Physics* 2, Letters and comments 250-254
- Strnad, J (1981) Quantum physics for beginners *Physics Education*, V16: 88-92
- Styer, D. F. (2000) *The Strange World of Quantum mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, [En línea] Obtenido de <http://www.oberlin.edu/physics/dstyer/StrangeQM/>
- Taylor, E (2000) *Desmityfing QM Quantum Mechanics Workbook*. [En línea] Disponible en <http://www.eftaylor.com/>
- Taylor, E. (2003) A call to action *American Journal of Physics*, 71(5), 423-425. Guest Editorial
- Taylor., F; Stamatis Vokos, S ; O'Mearac, J y Hornberd, N (1998) Teaching Feynman's sum-over-paths quantum theory. *Computers in Physics*, 12 (2), 190-199.
- Vergnaud, G. (1992) Qu'est-ce que la didactique ? En quoi peut-elle intéresser la formation des adultes peu qualifiés. in G. Vergnaud. *Education Permanente*. N° 111. 19-31.
- Vergnaud G., Halbwachs F., Rouchier A. (1981). Estructura de la materia enseñada, historia de las ciencias, y desarrollo conceptual del alumno. in Coll C (Ed.), *Psicología genética y education*, Oikos-tau-Barcelona, pp.115-128.
- Vergnaud G., Recope M. (2000) De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui. *Psychologie française* (La Société Française de Psychologie a cent ans), 45, 1, 35-50.
- Vergnaud G., Ricco G. (1986). Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y Métodos. *Revista Argentina de Educación*, 4, pp. 67-92.
- Vergnaud, G (2005) en *Sur la théorie des situations didactiques*. Hommage à Guy Brousseau. La Pensée Sauvage, Édition.
- Vergnaud, G, Durand C. (1983). Estructuras aditivas y complejidad psicogenética. In Coll. C. (Ed.). *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Madrid, Siglo XXI de España Editores, pp. 105-128.
- Vergnaud, G. (1979). The acquisition of arithmetical concepts. *Educational studies in Mathematics*, 10, pp. 263-274.
- Vergnaud, G. (1982). *A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems*, in Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (Eds). *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*, Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum, 39-59.
- Vergnaud, G. (1983). Actividad y conocimiento operatorio. In Coll. C. (Ed.) *Psicología genética y aprendizajes escolares*, Madrid, Siglo XXI de España Editores, pp. 91-104.

- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In Lesh R., Landau M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press, pp. 127-174.
- Vergnaud, G. (1983). Psychology and didactics of Mathematics in France: an overview. *Zentralblatt fur Didaktick der Mathematik*, 2, pp. 59-63.
- Vergnaud, G. (1985). Understanding Mathematics at the Secondary School Level. In Bell A., Low B., Kilpatrick J. *Theory, Research and Practice*. University of Nottingham, pp. 27-45.
- Vergnaud, G. (1986). A tentative conclusion. In Janvier C. (Ed.). *Problems of representation in teaching and learning mathematics*. Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 227-232.
- Vergnaud, G. (1986). Editorial du numéro spécial "Psychologie et apprentissage des Mathématiques". *European Journal of Psychology of Education*. 1, pp. 3-5 (Editeur invité).
- Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didactica das matematicas. Um exemplo: as estruturas aditivas. In *Analise Psicologica*, 1 (V): pp. 75-90.
- Vergnaud, G. (1988) Multiplicative structures. in H. Hiebert, M. Behr (Eds.) *Research Agenda in Mathematics Education : Number concepts and operations in the Middle Grades* 141-161. Hillsdale, Lawrence Erlbaum. pp 141-161.
- Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathematiques*, Vol. 10, 2, 3. Traducido por Juan D. Godino.
- Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10 (2/3), pp.133-170. La Pensée Sauvage, Marseille
- Vergnaud, G. (1991) *El niño las matemáticas y la realidad*. Mexico, Trillas.
- Vergnaud, G. (1991) *Morphismes fondamentaux dans les processus de conceptualisation*. In G. Vergnaud (Ed) *Les Sciences cognitives en débat*. Paris, Editions du C.N.R.S., pp. 15-23.
- Vergnaud, G. (1994) (coord). *Aprendizajes y didácticas: ¿Qué hay de nuevo?*, Edicial, Buenos Aires.
- Vergnaud, G. (1994) Multiplicative Conceptual Field. What and Why. in G. Harel and J. Confrey (Eds). *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of Mathematics*. Albany State, University of New York Press.
- Vergnaud, G. (1995) Introduction. *Performances humaines et techniques* (dossier: compétences), 75-76, 7-12.
- Vergnaud, G. (1996) Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica, en *Revista Perspectivas*, Vol. XXVI, NÂ° 1.
- Vergnaud, G. (1996) Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica, en *Revista Perspectivas*, Vol. XXVI, N° 1.
- Vergnaud, G. (1996) *Au fond de l'action, la conceptualisation*. In J-M. Barbier (Ed). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris, Presses Universitaires de France.
- Vergnaud, G. (1996) Education the best portion of Piaget's heritage. *Swiss Journal of Psychology*, 55-2/3, 112-118.
- Vergnaud, G. (1996) Some of Piaget's fundamental ideas concerning didactics, *Prospects*, 26-1, 183-194.

- Vergnaud, G. (1996) The theory of conceptual fields. in L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin, B. Greer (Eds) *Theories of Mathematical Learning*. Mahwah, Lawrence Erlbaum Ass.
- Vergnaud, G. (1998) Towards a cognitive theory of practice. In A. Sierpiska, J. Kilpatrick (Eds) *Mathematics Education as a research domain: A Search for Identity*. Kluwer Academic Publishers.
- Vergnaud, G. (1999) A comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior* (Número spécial sur la représentation), 17, 2, 167-181.
- Vergnaud, G. (2000) Apprentissage et didactique en formation professionnelle. In J.C. Ruano-Borbalan et M. Fournier (Eds) *Savoirs et compétences*. Les Editions Demos.
- Vergnaud, G. (1992) Conceptual Fields, Problem-Solving and Intelligent Computer-Tools. in E. De Corte, M. Linn, H. Mandl and L. Verschaffel (Eds). *Computer-based learning environments and problem-solving*. Berlin, Springer.
- Vergnaud, G. (1992) The appropriation of the concept of number : a lengthy process. in J. Bideaud, C. Meljac, J-P. Fischer.(Eds) *Pathways to number*. Hillsdale, New Jersey Lawrence Erlbaum, pp 219-227.
- Vergnaud, G.(2008) *Functions, concepts and schemes*. A reply to Rita Otero. (Comunicación personal)
- Vergnaud, G.. (1997) The nature of mathematical concepts in T. Nunes, P. Bryant (Eds) *Learning and Teaching Mathematics; An International Perspective*. Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd.
- Vergnaud, G.et al. (1990) Epistemology and psychology of mathematics education. In J. Kilpatrick & P. Nesher (Eds). *Mathematics and cognition*. Cambridge, Cambridge University Press, pp 2-17.
- Yadmi, I (1978) Teaching the exclusion principle with philosophical flavour . *American Journal of Physics*. 46(8) 844-848
- Zollman, D (1999) Research on teaching and learning quantum mechanics Papers presented at the *Annual Meeting National Association For Research In Science Teaching (NARST)*. [En línea] Disponible en http://web.phys.ksu.edu/papers/narst/QM_papers.pdf

Anexo

1- Las situaciones de la replicación

Situación 1: “Los fundamentos de la mecánica cuántica: estudiando el mundo microscópico”

La Experiencia de la Doble Rendija (EDR)

Imaginemos una experiencia como la que muestra esquemáticamente la siguiente figura.

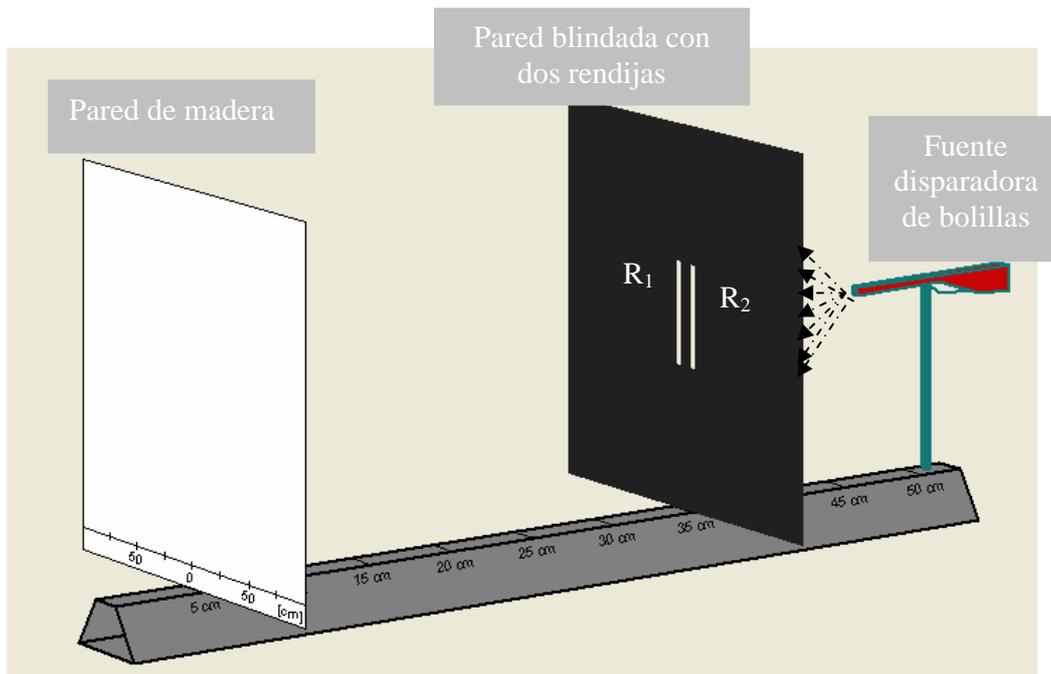


Figura 1: Esquema de la disposición experimental de la doble rendija con bolillas

En la derecha, está representada una fuente disparadora de bolillas, que salen disparadas al azar dentro de un ángulo bastante grande porque la fuente disparadora se mueve al azar (hacia arriba, abajo, y de izquierda a derecha). Las bolillas que salen de la fuente son indestructibles, y entonces llegan en unidades enteras a la pared de madera. Y además ellas salen de a una, a iguales intervalos de tiempo, y con la misma rapidez.

Más allá de la fuente, se encuentra una pared blindada con dos ranuras de tamaño tal que las bolillas pasan sin que quede trabada ninguna en la rendija, aunque no pueden pasar más de una a la vez. Supongamos que las rendijas tienen un ancho de 10 mm, y ambas rendijas se encuentran separadas a 20 mm una de la otra. A la izquierda de la Figura 1 se representa una pared de madera en la cual quedan incrustadas las bolillas que impacten en ella. Esta pared de madera tiene en su base una escala perpendicular a la regla gris, en la cual el 0 representa el centro de la pantalla, en esa dirección.

Se pone en funcionamiento la fuente disparadora durante un tiempo, algunos minutos. Conversa con tus compañeros acerca de las siguientes cuestiones, y escribe a continuación la conclusión a la que llegas:

1) ¿Cómo te parece que se distribuirán las bolillas que pasen por las rendijas y lleguen a la pared de madera? ¿Habrá más en algún lugar que en otro, o no? ¿Por qué?

2) ¿Cómo se vería la pared de madera, al cabo de un largo tiempo? Dibujalo en la siguiente figura:

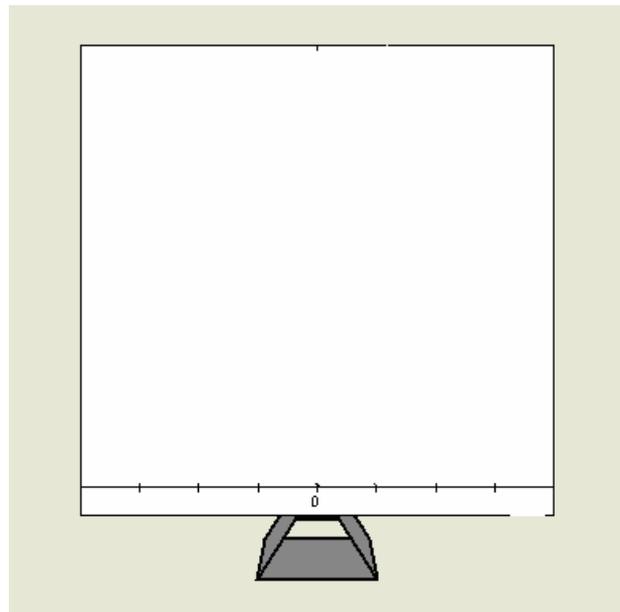


Figura 2: Distribución de las bolillas en la pared de madera

3) Si se separaran mucho entre sí las rendijas, cambiaría la distribución? ¿Y por el contrario, si se juntaran lo más posible? Dibuja la distribución de las bolillas en la pared para cada caso en las siguientes figuras:

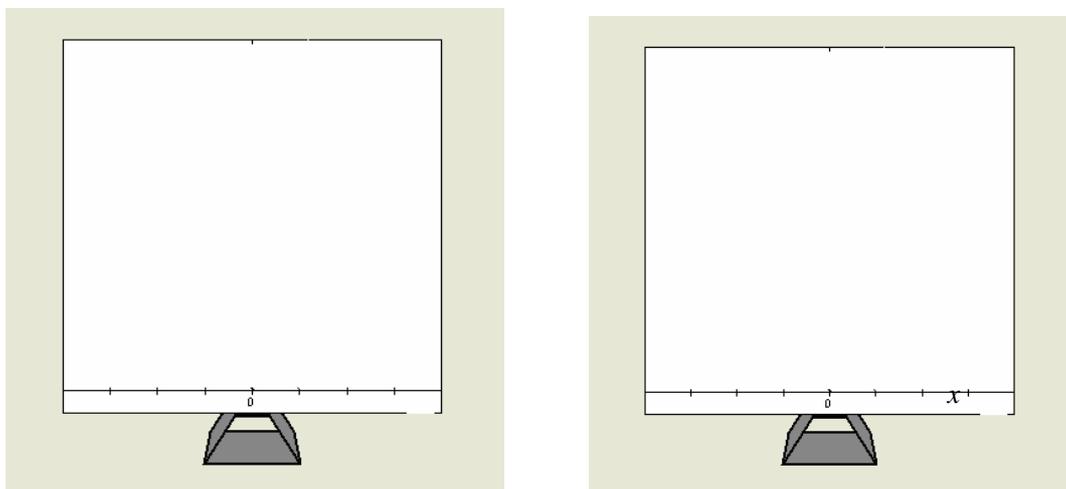
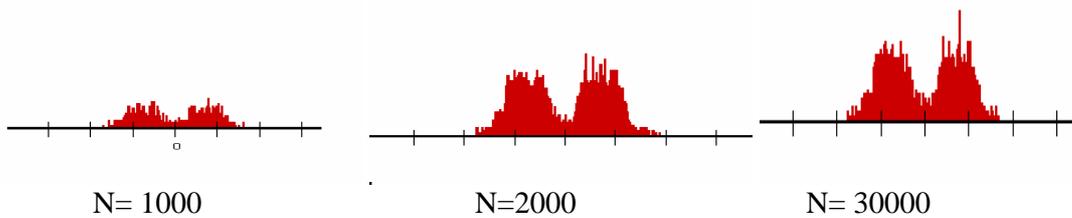


Figura 3: En la derecha: distribución de las bolillas en la pared de madera con las rendijas bien separadas. A la izquierda: distribución de las bolillas en la pared de madera con las rendijas bien juntitas.

Supongamos que en ese tiempo, contamos cuántas bolillas en total impactaron en la pared de madera, y llamamos a este número N , y también contamos cuántas bolillas se encuentran a determinada distancia del centro de la pared (o sea, sin importar cual sea su posición en el sentido vertical, sólo nos interesa su ubicación en el sentido horizontal). Armamos la fracción:

$$f = \frac{N^{\circ} \text{ de bolillas que impactan a una distancia "x" del centro de la pared}}{N}$$

No podemos decir de antemano *exactamente* en que lugar de la pared incidirá una bolilla determinada, porque una bolilla que se dirige hacia una de las rendijas puede que pase y siga derecho, o bien que rebote en el borde con un cierto ángulo, pero logre pasar... Al realizar la experiencia tomando sucesivos intervalos de tiempo, iremos obteniendo gráficos de frecuencias relativas, según x . Estos gráficos se llaman *histogramas*. Por ejemplo con la separación y el ancho que le dimos antes, tomando tres intervalos de tiempo distintos, vamos obteniendo la siguiente distribución de bolillas según la distancia al centro:



Ahora, supongamos que dejamos la máquina disparadora un largo tiempo prendida, una hora por ejemplo. Eso significa que la máquina disparará muchísimas bolillas, (es decir hacemos a N infinitamente grande), entonces en este límite, la fracción representa la “probabilidad” que una bolilla caiga a cierta **distancia del centro de la pantalla**. El histograma entonces, se vuelve una curva teórica, que llamaremos “curva de probabilidad $P(x)$ ”. Si a cierta distancia x del centro 0 (sin que nos importe la dirección vertical en la que se encuentre) se encuentran incrustadas muchas bolillas, la probabilidad en esa x será alta. Por el contrario, si hay pocas bolillas, diremos que en esa x la probabilidad es baja.

4) ¿Podrías dibujar aquí de forma aproximada la curva que se obtendría?

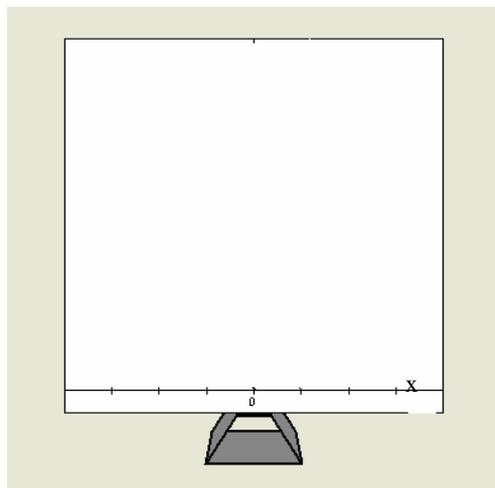


Figura 4: Curva de la probabilidad en función de x (teórica)

5) Describe la forma de la curva $P(x)$ que dibujaste recién

Ahora imaginemos que con la separación y el ancho del principio (10 mm de ancho y 20 mm de separación entre ambas) tapamos una de las rendijas y realizamos la experiencia. Luego, tapamos esa rendija y abrimos la otra. ¿Podrías dibujar en la parte izquierda de las figuras siguientes, cómo se distribuirán las bolillas en la pared de madera y en la parte derecha, cómo será la curva de probabilidad?

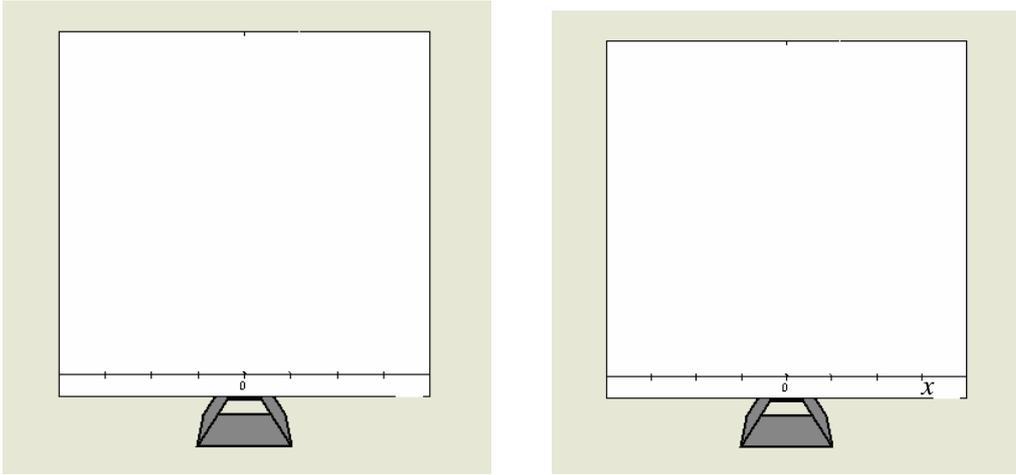


Figura 5: Bloqueando R_1 .
 Izquierda: Distribución de las bolillas que llegaron a la pantalla.
 Derecha: Curva de probabilidad según x

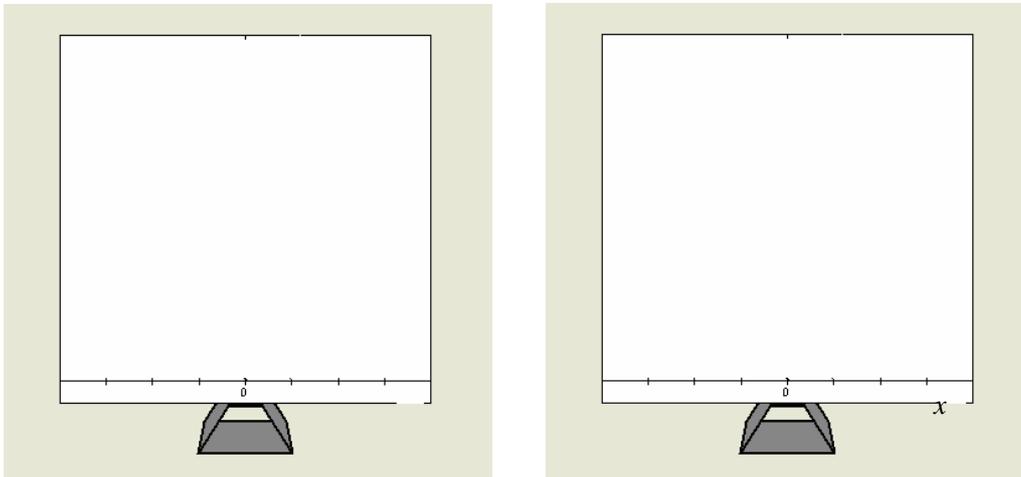


Figura 6: Bloqueando R_2 .
 Izquierda: Distribución de las bolillas que llegaron a la pantalla.
 Derecha: Curva de probabilidad según x

6) ¿Cómo se podrían relacionar los resultados obtenidos cuando se realiza la experiencia con ambas rendijas abiertas, con lo obtenido si se tapa cada una de las rendijas?

7) Si llamamos $P_{1;2}(x)$ a la curva obtenida con ambas rendijas abiertas y $P_1(x)$ cuando se abre solamente la R_1 , y $P_2(x)$ cuando se abre R_2 , discuta la siguiente afirmación:

$$P_{1;2}(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

Situación 2

Simulación de la EDR con software

Te proponemos que simulemos la experiencia que imaginamos antes, con software “Doppelspaltversuch”.

2- Simula la experiencia seleccionando bolillas, y ambas rendijas a la vez, con un ancho de 10mm y una separación de 20mm (o sea, las rendijas tienen un ancho de 10mm y están separadas a 10mm una de la otra). Enciende la fuente.

- a) Dibuja la distribución de los impactos de las bolillas en la pared, y la curva $P(x)$ que resulta.
- b) ¿Cómo fueron tus predicciones con respecto a los resultados mostrados en la simulación en relación a la distribución de bolillas en la pared? Si no coincidieron, argumenta a que se debe la diferencia.

2- Ahora mantén fijo el ancho de las rendijas en $a = 10\text{mm}$, pero comienza a disminuir gradualmente la distancia de separación.

- a. ¿Qué sucede con los impactos en la pantalla a medida que se disminuye la distancia?
- b. Describe cómo va cambiando la curva de probabilidad, y cómo se puede interpretar eso.
- c. ¿Podrías explicar a qué se debe la forma de la curva en el centro ($x = 0$)?

3- Cierra de a una las rendijas dejando los demás parámetros constantes y corre la simulación, y dibuja aquí cada una de las curvas de probabilidad cuando se cierra cada rendija por separado

b) ¿Cómo se puede argumentar que “la curva de probabilidad que se obtiene cuando están ambas rendijas abiertas sea la suma de cada una de las sumas de las curvas individuales” con este software? Argumenta tu respuesta

¿Qué se obtiene en la EDR si se realiza con electrones?
--

Cuando selecciones como proyectiles a los ELECTRONES, verás que es posible seleccionar su energía, medida en keV (kilo electrón-volts. La unidad usual para la energía que hasta ahora has estudiado es el joule, pero en el caso del electrón, se utiliza como unidad de energía al electrón-volt (eV) ya que es una unidad más adecuada. Un e-volt equivale a 1.6×10^{-19} joules.

4- Simula la experiencia de la doble rendija con electrones de 100 KeV, con un ancho de rendijas de 100nm, y una distancia entre los puntos medios de las rendijas de 300nm.

- a) Describe cómo resultó la distribución de los electrones en la pantalla colectora. ¿Esta distribución se corresponde con la idea de que los electrones son como pequeñísimas bolillas? Argumenta tu respuesta en función de los resultados obtenidos en ambos casos.
- b) Reproduce aquí de manera aproximada como resulta la gráfica de la curva de probabilidad, y describe su forma.
- c) ¿Cómo interpretas esta gráfica en términos de probabilidad?

6- Abre una de las rendijas por vez, y enciende la fuente disparadora de electrones, dejando todos los anteriores parámetros iguales. (ancho 100nm, distancia 300nm, energía 100KeV)

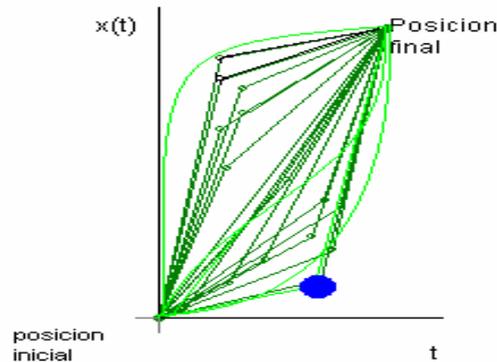
- a) Describe cómo se distribuyen los electrones en la pantalla en cada caso
- b) ¿Tienen estas curvas alguna relación respecto a las curvas obtenidas con las bolillas?
- c) Con los electrones, ¿se cumple que la curva de probabilidad cuando ambas rendijas están abiertas es la **suma** de cada una de las curvas de probabilidad por separado? Expresa esto en forma simbólica, como la página 4.

Situación 3

¿Cómo se calcula la probabilidad P de que una partícula o un electrón que parta de un estado inicial I termine en otro estado final F ? $P [(t_i; x_i) \rightarrow (t_f; x_f)]$

La técnica Sumar Todas las Alternativas (STA) y consiste los siguientes cuatro “pasos”:

1- Considerar que hay múltiples formas de conectar el estado inicial I con el final F , -con diversas $x(t)$ – todas igualmente posibles. Llamaremos a cada una de estas $x(t)$ “camino”, alertando que no es un camino real, sino una función que conecta I con F



Luego, cada una de los caminos posible, tiene asociado un valor numérico llamado acción, representado por “ S ”, relacionado con la energía cinética promedio (de movimiento) y potencial promedio (de la posición respecto de otros cuerpos con los que interactúa).

$$S = (EC - EP) \cdot \text{tiempo}$$

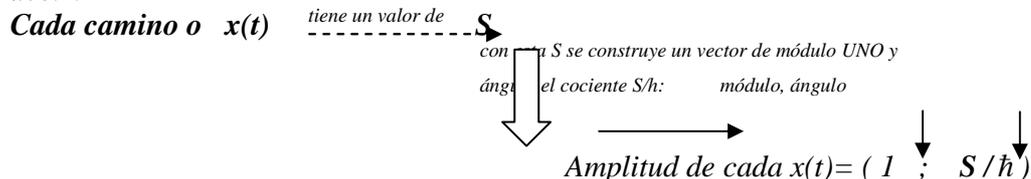
Si no está en presencia de fuerzas, o sea es “libre”, consideramos que tiene energía potencial nula. Entonces, directamente la acción en este caso es:

$$S = Ec \cdot t \rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot t$$

2- Con dicha acción S se construye un **vector** en el plano llamado “**Amplitud de probabilidad**” que tiene **módulo uno** y **ángulo de medida S/\hbar** (este ángulo ese toma respecto al eje x positivo).

En el denominador del cociente (ángulo del vector) hay una constante, se lee “hache barra), simbolizado con $\hbar = h / 2 \pi$, donde $h = 6.625 \times 10^{-34}$ Joule/seg. se denomina constante de Planck, constante **fundamental** para la física.

Es decir:



3- Se suman **todos** los vectores asociados a las diferentes funciones que conectan ambos estados inicial y final. Llamamos a este vector suma “Amplitud de probabilidad total”

Amplitud de probabilidad **TOTAL** = Suma de todos los vectores asociados de la forma

$$(1 ; S/\hbar)$$

4- Se calcula el **MÓDULO** de la amplitud de probabilidad total (o sea el vector resultante de la suma) y se eleva al cuadrado. De esta forma, el resultado es la probabilidad de arribar

al estado final F , habiendo partido del estado inicial I

1) Comenzando a aplicar la técnica STA para una partícula libre:

Para una partícula libre que recorre 2 cm. en 2 segundos ($t = 0$ en $x = 0$ para el estado inicial y $x = 0.02$ m y $t = 2$ seg para el estado final)

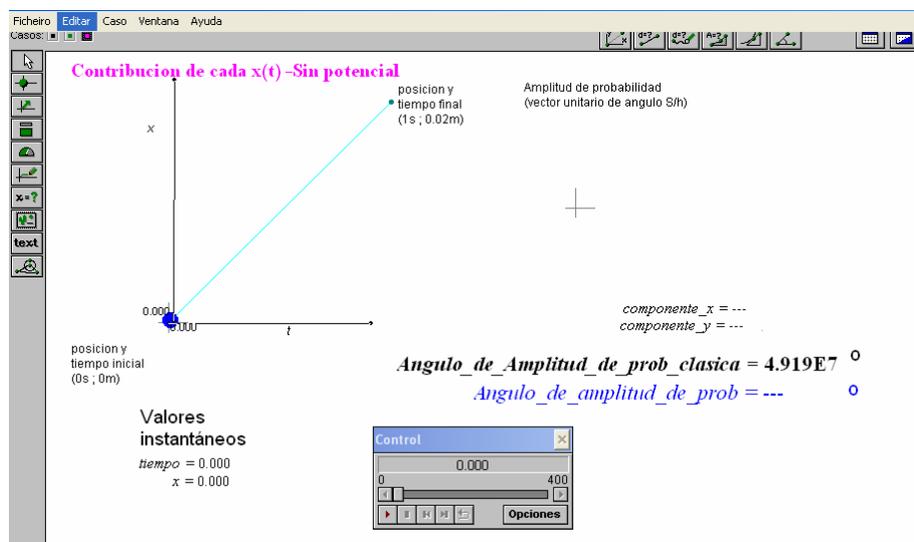
- ¿Cómo es la función $x(t)$? Realiza el gráfico aquí:
- ¿Cómo se relaciona la velocidad de la partícula con el gráfico?
- Calcula la acción S para este caso, tomando un valor de masa de un millón de veces la masa del electrón. ($m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg.) Llamaremos a este valor, **Acción clásica**.
- ¿Cuál es el ángulo del **vector amplitud de probabilidad asociado** a $x_{\text{clas}}(t)$? Exprésalo en radianes y en grados sexagesimales.
- Ubica este vector en un plano cartesiano

Situación 4

2) Utilización del software de simulación “Modellus™”, para aplicar la técnica STA para partículas clásicas:

- El círculo azul puede representar un electrón o una partícula de masa mayor que él (según elijamos) que se encuentra libre. Una vez que actives el control, (presionando el botón  del cuadro de Control), cuando pases el cursor por arriba del pequeño círculo azul, te habilitará (cambiando el cursor a una manito) para que lo puedas deslizar en cualquier dirección, y de esta forma podrás visualizar como cambia la función posición-tiempo. También el programa deja el dibujo de algunas de las funciones seleccionadas.
- La función $x(t)$ que está dibujada al inicio conectando el estado inicial con el final, es una línea recta. Llamamos a esta función “clásica” y se representa por $x_{\text{clas}}(t)$. Ella corresponde al movimiento de una bolilla o partícula “clásica” macroscópica.
- En la parte de la derecha el software muestra cada vector amplitud de probabilidad (vector unitario de ángulo S/\hbar) correspondiente a la función $x(t)$ que se elija.

1- Abre el archivo “*Simulación 1*” y selecciona el tercer caso (corresponde a partícula macroscópica). Elige distintas funciones $x(t)$ posibles que ligen al estado inicial con el final (serán funciones compuestas por dos trozos de funciones lineales). Te aparecerá una ventana como la siguiente:



- a) ¿Cómo son los valores de **acción S** para distintas $x(t)$ respecto a la acción clásica que calculaste para la partícula?
- b) Ahora, atendiendo a los vectores que el programa muestra en la simulación, selecciona algunas funciones cercanas a la clásica, y observa cómo son las **direcciones de los vectores** asociados a cada $x(t)$. Haz lo mismo, pero eligiendo ahora funciones que estén alejadas de la clásica. Escribe tus conclusiones acerca de la variación de los valores de acción y de ángulos.
- c) Llegamos al paso 3 de la técnica STA, donde nos encontramos con el problema de tener que **sumar todos** los vectores de amplitud. Analiza cómo resulta sumar infinitos vectores de módulo uno, cuando los ángulos son muy diferentes. Piensa en alguna estrategia para resolver esto.
- d) De acuerdo al punto anterior, ¿qué predice la STA para valores de masa muy grandes (partículas u objetos de dimensiones mucho mayores a las del electrón) respecto de las funciones necesarias para describir su movimiento?

3) Uso de “Modellus” para aplicar la técnica STA para sistemas cuánticos:

- a) Realiza los cálculos de la acción clásica y el vector asociado, para el electrón cuyo valor de masa es $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg., de forma análoga a como lo hiciste antes para partículas
- b) Abre el archivo “*Simulación 1*” y selecciona el primer caso (electrón). Mueve el círculo azul para elegir distintas funciones $x(t)$ posibles que ligen al estado inicial con el final
- c) ¿Cómo son los valores de **acción S** para distintas $x(t)$ comparados con la acción clásica que calculaste para la masa del electrón?
- d) Ahora, atendiendo a los vectores que el programa representa para cada función que eliges, selecciona algunas funciones cercanas a la clásica, y observa cómo son las **direcciones de los vectores** asociados a cada $x(t)$. Haz lo mismo, pero eligiendo ahora funciones que estén apartadas de la clásica. ¿Observas algún cambio ahora respecto de los valores de acción y las direcciones de los vectores? Escribe tus conclusiones.
- e) Para poder pensar sobre la suma de los vectores para el caso del electrón, a continuación te presentamos la tabla con algunos valores tomados durante la simulación. En ella se muestran algunos valores captados de t , y de $x(t)$ correspondientes a la posición del círculo azul. También se muestra el vector **amplitud asociado a cada una**, y en la última columna se muestra **el ángulo** de dicho vector (recuerda que éste corresponde al valor S/\hbar). Este ángulo es respecto del eje x .

Tiempo (seg.)	$x(t)$ (metros)	Ángulo del vector amplitud de probabilidad asociado (en grados)
0.38	0.011	90
0.243	0.011	140
0.279	0.019	230
0.303	0.018	270
0.018	0.015	320
0.126	0.02	50
0.486	0.03	51
1.296	0.01	53
1	0.01	49.5° (corresponde a $x(t)$ clásica)
0.882	0.011	52
1.775	0.002	320
1.746	0.003	270
1.854	0.006	230
1.422	0.002	140
1.03	0.001	90

Dibuja de forma aproximada los vectores en un plano como usualmente lo haces en matemática, colocando uno a continuación del otro. Considera que el módulo (longitud) debe ser uno, en la escala que elijas, y que el ángulo de la última columna es el ángulo del vector con respecto al **eje horizontal**.

f) Según la forma del gráfico anterior, ¿Cómo contribuyen a la suma los vectores correspondientes a las $x(t)$ **alejadas** de la $x_{\text{clas}}(t)$? ¿Cómo queda conformada entonces la suma o resultante?

g) ¿Podrías escribir una expresión matemática que represente el resultado de la suma?

h) El último paso de la aplicación de la STA: Calcular el módulo del vector suma y elevarlo al cuadrado. Intenta encontrar una expresión para el módulo del vector suma. Recuerda que el módulo de un vector resulta de la raíz cuadrada de la suma de cada componente al cuadrado.

Síntesis: El Principio fundamental de la mecánica cuántica

Estudiamos que la técnica o método para calcular la probabilidad de pasar de un estado inicial I a uno final F , *sean sistemas cuánticos o partículas de masa mayor* consiste en:

Considerar *todas* las *alternativas* en que eso puede suceder. A cada una de ellas, hay que asociarle un **vector** llamado “**Amplitud de probabilidad**”. Luego se deben *sumar todos* los vectores, y la probabilidad es el resultado de *elegir al cuadrado el módulo* de este vector suma.

Algunas aplicaciones de este principio fundamental a casos “particulares”

A) **PARTÍCULA MACROSCÓPICA LIBRE** como bolillas o cualquier objeto macroscópico que sigamos considerando “libre” (lejos de otros objetos que le ejerzan fuerzas)

Aplicando la técnica STA, al considerar los caminos levemente alejados del “camino clásico” $x_{\text{clas}}(t)$, los vectores amplitud asociados tendrán valores de acción muy distintos, y por lo tanto ángulos muy diferentes entre sí. Como consecuencia, se cancelarán al sumarlos. Solamente el vector amplitud asociado a $x_{\text{clas}}(t)$ contribuirá a la suma.

Entonces la suma de todos los vectores asociados se reduce a un UNICO vector, el correspondiente a aquella $x(t)$ cuyo valor de acción S es **Mínimo**, que hemos llamado $x_{\text{clas}}(t)$. Interpretamos esto de la siguiente forma: el movimiento de una partícula de **masa macroscópica libre** que pasa de un estado inicial $(t_i; x_i)$ a otro final $(t_f; x_f)$ queda descrito por un movimiento rectilíneo uniforme. Por lo tanto, conociendo la función $x(t)$ que describe un movimiento, si queremos saber en que lugar se encuentra una partícula en determinado tiempo, simplemente evaluamos la función. Por ejemplo, en nuestra simulación, la función es $x(t) = 0.02 t$. Así, en el tiempo $t = 1$ seg, una partícula libre sabremos que estará en la posición $x = 0.02$ metros.

No es de extrañar que obtengamos esto con la técnica STA, después de todo coincide con lo que ya sabemos de la física de años anteriores: “Si no se ejercen fuerzas sobre un cuerpo su velocidad se mantiene constante” (Primera Ley de Newton). Es decir, **para objetos macroscópicos las leyes de la física cuántica dan los mismos resultados que los de la física clásica**

La Física que habíamos estudiado hasta ahora es la mecánica de Newton, que pasó a llamarse Física Clásica, para poder diferenciarla de esta nueva física, que rige el comportamiento del mundo microscópico, la Física cuántica.

¿Qué sucede a medida que nos vamos adentrando en el mundo microscópico a nivel atómico, donde el valor de la masa es muy pequeño? ¿Hay algún cambio respecto de la descripción del movimiento del electrón?

B) SISTEMAS CUÁNTICOS LIBRES como el electrón aislado

Aplicando la técnica STA, como en el caso anterior, los vectores asociados a las $x(t)$ que estén lejos de la $x_{clas}(t)$ tienen ángulos muy distintos entre sí y entonces se anulan (y por lo tanto no cuentan en la suma). Pero, a diferencia de las partículas macroscópicas, hay un conjunto de caminos $x(t)$ alrededor del camino clásico $x_{clas}(t)$ cuyos valores de acción (y por lo tanto de ángulos del vector asociado a cada una) no son muy diferentes que el vector del camino clásico, y entonces, estos sí aportan a la suma, y por lo tanto deben considerarse.

El vector resultante de la suma entonces, es un número de veces –llamémoslo **N**– la amplitud correspondiente a $x_{clas}(t)$:

$$\vec{\text{Amplitud total (I} \rightarrow \text{F)}} = N (1 ; (S_{cl} / \hbar))$$

El valor de N “contabiliza” ese conjunto de caminos que hay que considerar cercanas al camino clásico.

$$\text{Amplitud total (I} \rightarrow \text{F)} = N \cdot (\cos (S_{cl} / \hbar) ; \text{sen} (S_{cl} / \hbar))$$

Escrito el vector en forma de componentes

Recordemos que S_{cl} es el valor de la acción para la $x_{clas}(t)$:

$$S = E_{c_{media}} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot m_e v^2 \cdot t$$

Entonces la expresión de la amplitud de probabilidad total queda:

$$\vec{\text{Amplitud total (I} \rightarrow \text{F)}} = N \cdot (\cos (\frac{1}{2} \cdot \frac{m_e v^2 t}{\hbar}) ; \text{sen} (\frac{1}{2} \cdot \frac{m_e v^2 t}{\hbar}))$$

¿Cómo interpretamos esto?

En el cálculo de la amplitud de probabilidad total hay que considerar no sólo el camino clásico sino **todo un conjunto de caminos cercanos alrededor de él**. Como en el dominio atómico como no hay una función $x(t)$ definida que describa el movimiento del electrón, no podremos preguntarnos dónde estará en determinado tiempo...deberemos contentarnos con conocer la probabilidad de encontrarlo en ese lugar. **Ésta es la diferencia radical entre el mundo clásico y el mundo cuántico**

C) SISTEMAS CUÁNTICOS NO LIBRES como por ejemplo, el caso de un electrón en un átomo, que sienta la fuerza que ejercen los protones del núcleo atómico y los demás electrones.

Aplicando la técnica STA en general todos los caminos deben considerarse en la suma. En este caso, el cálculo es muy complicado y los físicos recurren a métodos complejos que no podemos estudiar ahora.

Situación 5

Reconstruyendo el diagrama de la EDR con electrones

Ahora volvamos a nuestra experiencia de las rendijas con electrones. Recordemos cómo era la curva de probabilidad que obtuvimos cuando utilizamos electrones:

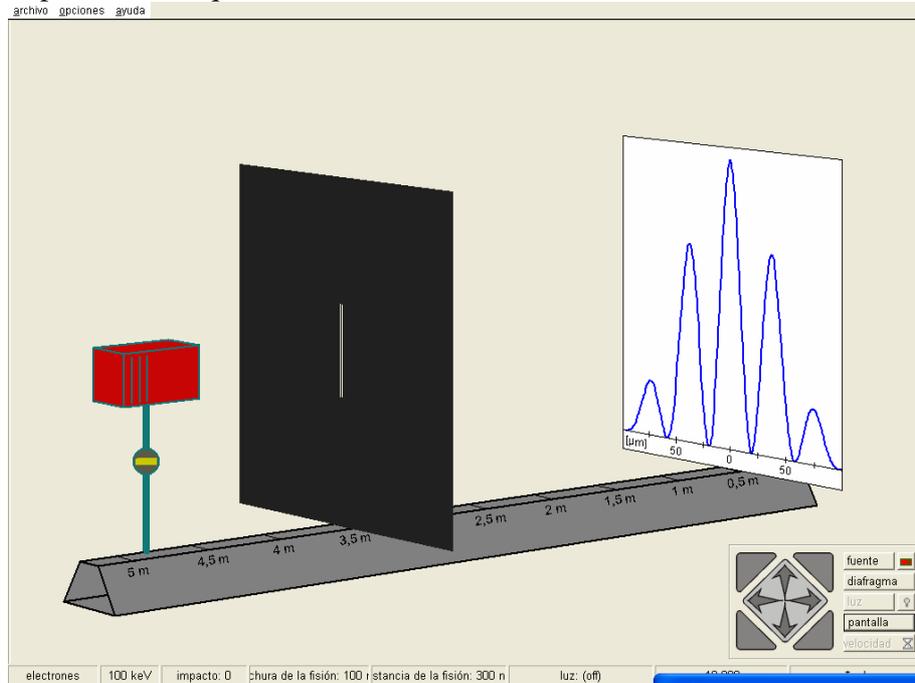


Figura: Resultado experimental de la EDR con electrones

Ahora apliquemos la STA que antes estudiamos para el caso de un electrón libre, moviéndose en una sola dirección, con el software Modellus. Ahora nuestro objetivo es reconstruir el diagrama obtenido en la pantalla, y la curva de probabilidad $P(x)$.

Este es un esquema de la experiencia, vista lateralmente:

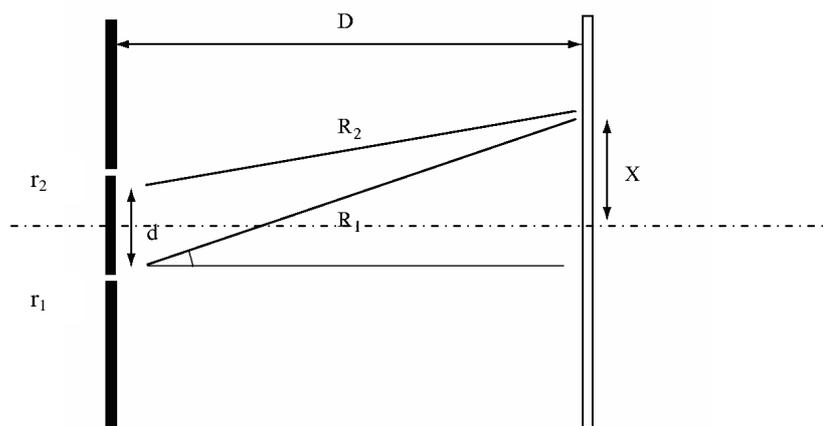


Figura: Ilustración esquemática de la EDR

Con r_2 y r_1 representamos las rendijas inferior y superior respectivamente.

Aquí el instante y la posición inicial serán cuando los electrones están aún en la fuente disparadora, y el tiempo y la posición final serán cuando el electrón llega a la pared colectora.

Nuestra pregunta clave aquí es:

¿Cual es la probabilidad que el electrón arribe a cierta distancia x del centro de la pantalla?

Hasta que el electrón que llega al punto x puede considerarse “libre” en el sentido que su energía potencial es cero. Por lo tanto lo único que contribuye al valor de acción es su energía cinética. Esto hace posible que podamos aplicar los resultados que encontramos antes. Por lo tanto, el vector asociado a cada una de las trayectorias R1 y R2 que pudo haber seguido el electrón para llegar a la pantalla a cierta distancia x tiene componentes:

$$\vec{A}_{\text{Amplitud}}(r_1 \rightarrow x) = N \left(1 ; (S_{cl}[r_1 \rightarrow x] / \hbar) \right)$$

Análogamente para la otra rendija:

$$\vec{A}_{\text{Amplitud}}(r_2 \rightarrow x) = N \left(1 ; (S_{cl}[r_2 \rightarrow x] / \hbar) \right)$$

De acuerdo a los principios de la mecánica cuántica, la **Amplitud total** de arribar a la pantalla a cierta distancia x del centro de la pantalla, $A_{\text{total}}(x)$, **es la suma de arribar a esa x pasando por una u otra rendija, es decir**

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\text{total}}(x) &\sim \vec{A}_{\text{Amplitud}}(r_1 \rightarrow x) + \vec{A}_{\text{Amplitud}}(r_2 \rightarrow x) \\ &\sim N \left(\cos(S_{cl}[r_1 \rightarrow x] / \hbar) ; \sin(S_{cl}[r_1 \rightarrow x] / \hbar) \right) \\ &+ \\ &\quad \left(N \cos(S_{cl}[r_2 \rightarrow x] / \hbar) ; \sin(S_{cl}[r_2 \rightarrow x] / \hbar) \right) \end{aligned}$$

La acción clásica es $S = E_{c\text{media}} \cdot T$ Aquí T es el tiempo empleado para el viaje de los electrones, entre ambas pantallas. En este caso,

$$S_{cl}[r_1 \rightarrow x] = \frac{1}{2} m \frac{(R_1)^2}{(T)}, \text{ y según el esquema de la figura 2, } (R_1)^2 = (x + d/2)^2 + D^2$$

$$S_{cl}[r_2 \rightarrow x] = \frac{1}{2} m \frac{(R_2)^2}{(T)}, \text{ y según el esquema de la figura 2, } (R_2)^2 = (x - d/2)^2 + D^2$$

Siguiendo el procedimiento de STA para encontrar una expresión para la probabilidad (o sea, **sumar los dos vectores y elevar al cuadrado el módulo**) se llega a la expresión de la **probabilidad de que un electrón impacte a una distancia x del centro de la pantalla colectora:**

$$P(x) \sim \cos^2 \left(\frac{m d}{2 \hbar T} x \right)$$

- 1- a) ¿Puedes deducir sin graficar, a partir de la expresión algebraica que forma tendrá esta $P(x)$? ¿Puede ésta tomar valores negativos? ¿Por qué?
- b) ¿Qué valores dependen del diseño experimental?
- c) Dejando fijos los parámetros relacionados con el diseño experimental, ¿de qué depende la probabilidad?
- 2- a) ¿Cómo resulta la expresión de $P(x)$ si se consideran como parámetros experimentales $d = 10^{-6} \text{m}$, masa del electrón $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$, y un intervalo de tiempo $T = 5 \times 10^{-4} \text{seg.}$?
- c) Utilizando software de graficación, dibuja la curva de $P(x)$. *Descríbela matemáticamente*

d) ¿Qué puedes concluir acerca de lo obtenido aplicando la STA de la Mecánica Cuántica respecto de lo que obtuvimos cuando simulamos la EDR con electrones en el software Dopplespalt?

Situación 6

Queda ahora una cuestión muy importante por resolver:

Si la técnica STA de la Mecánica Cuántica es aplicable a todos los sistemas, sean microscópicos (como el electrón) o macroscópicos (como las bolillas) ¿Por qué cuando simulamos la EDR con bolillas la curva de probabilidad $P(x)$ no presentaba máximos y mínimos?

3- Para estudiar de que forma influye el aumento de la masa en el cálculo de la probabilidad en función de x , debemos analizar el cociente que se encuentra en el argumento de la función $P(x)$ hallada en el ítem 2 a).

a) Hagamos que m tome el valor de 1.000.000 de veces la masa de un electrón y evalúa la función $P(x)$ obtenida en 1) ¿Cómo es la expresión de $P(x)$ ahora?

b) ¿Cuál será el efecto en la gráfica de $P(x)$ si dejamos la misma escala que antes? Intenta graficar de forma muy aproximada a la nueva $P(x)$

c) Como consecuencia de la forma de la curva de $P(x)$ ¿Cómo se distribuirán estas partículas -cuya masa es mayor que la de los electrones- en la pantalla colectora de la EDR?

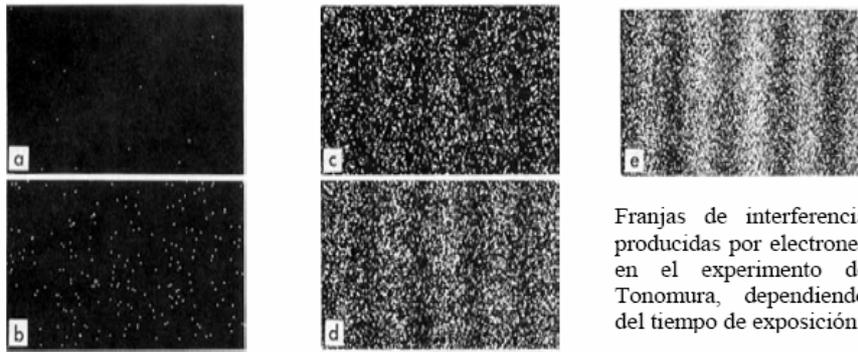
Síntesis: El comportamiento de los electrones en la EDR

Hemos llegado a nuestro problema original: explicar cómo es posible que si los electrones llegan de a uno a la pantalla, (como si fueran “pequeñísimas” bolillas), se forma una distribución en la cual en ciertos lugares hay muchos y en otro ninguno.

Las dos rendijas hacen que cada electrón tenga dos formas o caminos alternativos de llegar a la pantalla. Según el Principio Fundamental de la Mecánica Cuántica, cada uno de estas alternativas contribuye con una cierta “**amplitud a la probabilidad**”, representada por un **vector**. Para obtener la probabilidad de encontrar al electrón a determinada distancia del centro de la pantalla, se deben **sumar** las dos amplitudes, esto es sumar los dos vectores. Como se trata de sumar vectores puede ocurrir que en ciertos lugares la suma sea nula, y en otros sea máxima. Esto es, puede ocurrir que las amplitudes se cancelen o se refuercen, dando de esta forma una probabilidad cero o una probabilidad máxima.

Luego de haber obtenido la suma de amplitudes, siguiendo la técnica STA, se debe tomar el cuadrado del módulo del vector amplitud total (la suma de los vectores), para obtener la curva de probabilidad. En este caso se encontró una función periódica (coseno) que tiene máximos y mínimos. Eligiendo una posición cualquiera del centro de la pantalla, -un determinado x - esta expresión da la probabilidad de que allí impacte un electrón. Esto explica que la simulación de la experiencia muestre en la pantalla colectora ciertos lugares que no tiene ningún electrón, porque allí la probabilidad es nula, mientras que en otros lugares de la pantalla había muchísimos, donde la probabilidad es máxima. Llamamos a esta sucesión de máximos y mínimos en la pantalla colectora, “**patrón de interferencia**”.

Aquí se presenta una serie de fotografías que muestran cómo se va formando el patrón de Interferencia de los electrones, a medida que van llegando a la pantalla, conforme transcurre el tiempo. Esta experiencia que se simuló en este estudio, se hizo por primera vez en un laboratorio real hace apenas 34 años.



Franjas de interferencia producidas por electrones en el experimento de Tonomura, dependiendo del tiempo de exposición.

Como los electrones llegan de a uno a la pantalla pero arman un patrón de interferencia, los físicos tuvieron un gran desconcierto a comienzos del siglo pasado. ¡No era lógico que los electrones -considerados como pequeñísimas partículas materiales- mostraran un comportamiento que era típico de las ondas, como la interferencia! Hubo que cambiar la pregunta de qué son electrones, porque no podían ser descriptos como partículas, ni como ondas...sino como algo completamente nuevo, que mostraba características de unas y de otras:

De partícula: llegar en unidades enteras, tener masa, etc.

De onda: formar un “patrón de interferencia” en la EDR, y entonces tener asociada una

“longitud de onda λ ” definida como $\lambda = \frac{h}{\text{masa} \cdot \text{rapidez}}$

1- ¿Podrías calcular la longitud de onda para un electrón que tenga una rapidez de 10^{-7} m/seg.?

2- Si los electrones tienen asociada una longitud de onda...las partículas también tendrán una λ ? Por ejemplo, una partícula de masa de 5 g ($5 \cdot 10^{-3}$ kg) con la misma rapidez que en el inciso 1) ¿que longitud de onda tiene asociada?

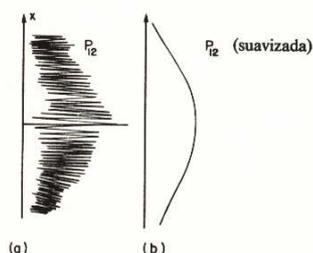
Los científicos propusieron entonces que “**Toda la materia tiene una longitud de onda asociada**” Pero si las bolillas tienen su λ ...¿**Por qué no se observa interferencia en la EDR?** Para contestar esta pregunta, tendremos que relacionar la longitud de onda asociada λ con la forma de la curva de $P(x)$:

Para los electrones, debido a la **pequeñez de la masa del electrón y la pequeñez de la constante de Planck**, la longitud de onda que se obtiene al hacer el cociente resulta suficientemente grande como para que se forme un patrón de interferencia, y se puedan diferenciar los máximos y los mínimos de la curva de $P(x)$. Es decir, se pueden detectar lugares donde hay muchos electrones y otras zonas de la pantalla que no habrá ninguno.

En cambio, para partículas de **masa mayor**, como las bolillas, **el cociente entre la masa y la constante de Planck es extremadamente pequeño, debido a la pequeñez de h**. Por lo tanto la longitud de onda asociada es demasiado pequeña, y la curva $P(x)$ tiene los máximos y mínimos demasiado “apretados”, al punto de no poder distinguirlos: lo que se observa en la pantalla es una curva promedio, que es la curva clásica, que “copia” la forma de la rendija. Tiene un máximo central y luego decrece suavemente hacia los costados.

Para ayudarte a entender esto, te presentamos en la figura siguiente, esquemáticamente lo que sucede con los objetos en gran escala. La parte (a) muestra la curva $P(x)$ que se obtendría en teoría para las bolillas. Las oscilaciones tan rápidas de la curva se deben a la

longitud de onda extremadamente pequeña que tienen asociadas las partículas de masa grande. Experimentalmente, como cualquier detector físico abarca varias oscilaciones de la curva de probabilidad, las medidas nos dan la curva suave dibujada en la parte (b) de la figura siguiente. Es la curva que nos mostraba la simulación con bolillas.



Curva de $P(x)$ en la EDR con bolillas (a) Esquema de $P(x)$ predicho por la mecánica cuántica (b) Diagrama observado experimentalmente

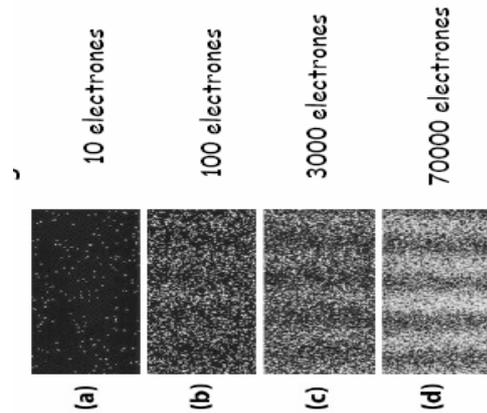
Conclusión Final

Si bien con la Mecánica Clásica, que dominó la Física hasta el siglo XX, se logró una muy buena descripción de la naturaleza a gran escala como por ejemplo el movimiento de los planetas, con las leyes de la Mecánica Cuántica recién se pudo describir lo que ocurre en el dominio atómico, y lo que se obtuvo es que en el micromundo las cosas ocurren de forma **muy diferente** de como ocurren con las cosas del mundo macroscópico, es decir con objetos grandes. ¿Grande o pequeño respecto a qué? La constante fundamental en la naturaleza que **fija el tamaño en el que el comportamiento cuántico se hace evidente en las experiencias físicas, es la CONSTANTE DE PLANCK, $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J.s.**

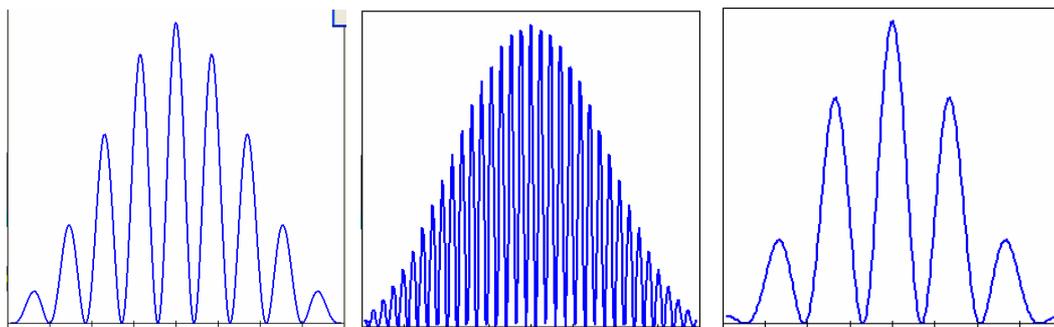
Cuando el valor de masa es cercana al valor de h los efectos cuánticos se hacen notar, (y por eso obtuvimos el patrón de interferencia en la EDR con electrones) y cuando el valor de la masa es muy grande respecto a esta constante, no notamos ninguna diferencia con respecto de lo que esperaríamos encontrar en el comportamiento de los objetos macroscópicos (y por eso se obtiene la curva continua de la figura anterior).

Evaluación de la replicación

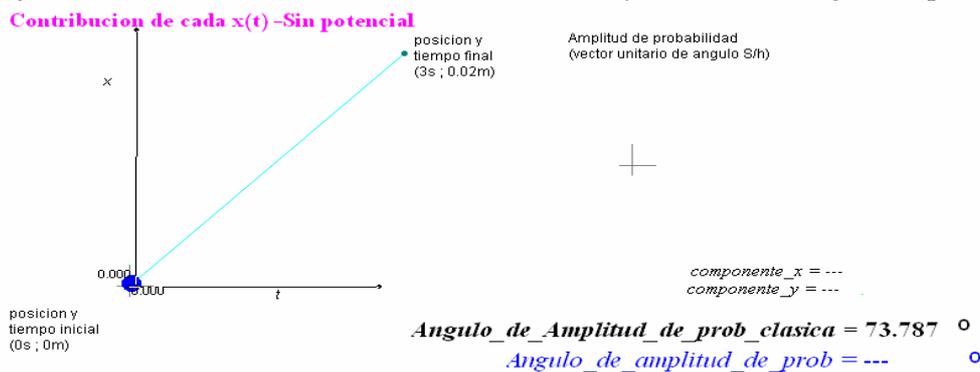
- 1- Describir las siguientes fotografías. Algunas preguntas que pueden orientar tu descripción: ¿A qué corresponden? ¿Qué muestran las zonas claras y oscuras respecto de la naturaleza cuántica de los electrones? ¿Y los puntos individuales? ¿Cómo se puede justificar que corresponde a electrones y no a bolillas?



2- Las siguientes son representaciones aproximadas de la curva de $P(x)$ resultante de la EDR con ambas rendijas abiertas y con **poca separación entre ellas**, utilizando como proyectiles libres de diferente masa: con electrones, con partículas alfa (2 neutrones y dos protones) y con espray de color. Decide cuál podría ser el gráfico de cada proyectil, justificando la respuesta.



3- Se ejecuta una simulación con el software Modellus, y se obtiene la siguiente pantalla:



- No se sabe si está modelizando al comportamiento de un electrón o una partícula libre. ¿Podrías averiguarlo?
- A partir de lo contestado en a), ¿podrías predecir que ocurrirá al correr la simulación?

4- ¿Qué establece el principio de mínima acción? ¿En qué dominio de la física se cumple? Ejemplificar

5- ¿Qué es lo esencialmente diferente del mundo clásico respecto del mundo cuántico, y qué importancia tiene la constante de Planck para la Física?

2- Las situaciones de la adaptación

La secuencia de situaciones implementada como adaptación de la secuencia original tal cual se presentó a los estudiantes:

La Experiencia de la Doble Rendija (EDR)

Imaginemos una experiencia como la que muestra esquemáticamente la siguiente figura.

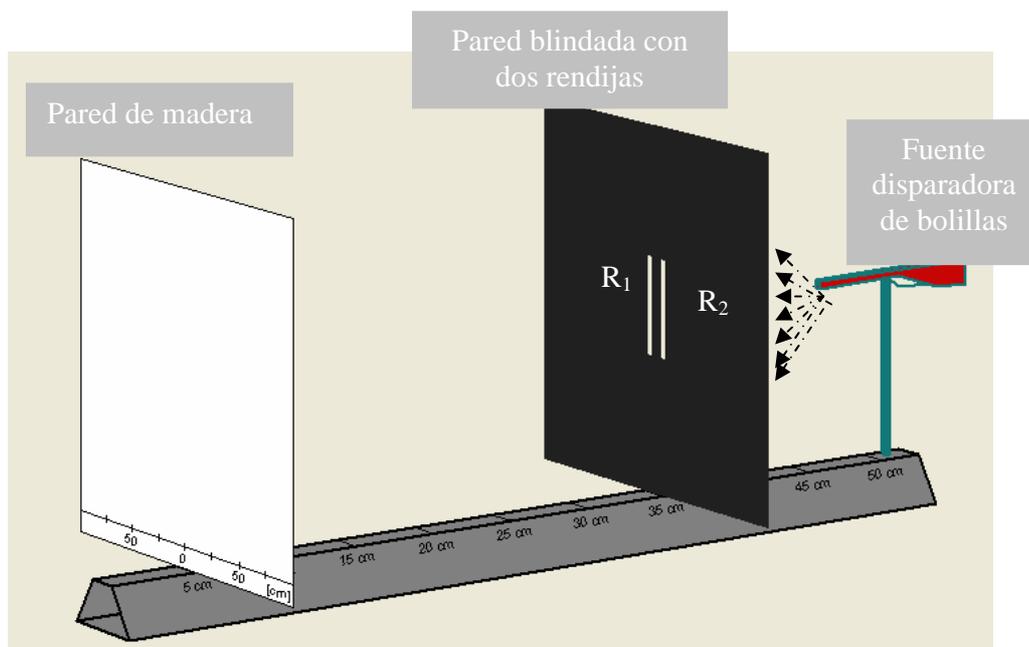


Figura 1: Esquema de la disposición experimental de la doble rendija con bolillas

En la derecha, está representado un disparador de bolillas de acero, que no está bien sujeta, y se puede mover en todas las direcciones. A cierta distancia de la fuente, (por ejemplo 15 cm.) se encuentra una pared blindada con dos ranuras de tamaño tal que las bolillas pasan sin que quede trabada ninguna en la rendija. Supongamos que las rendijas tienen un ancho de 10 mm., separadas a 10 mm. Las bolillas pueden rebotar en la primera pared, o bien pasar e ir a parar a la segunda pared, que supongamos sea de madera, y allí quedan incrustadas. Observa que en la pared donde se incrustan las bolillas, se colocó un eje horizontal, con una escala. El cero 0 representa el centro de la pantalla, y se corresponde en línea recta con el medio de las dos rendijas. Llamaremos a este eje horizontal equis (x). Además vamos a suponer que:

- Las bolillas que salen de la fuente son indestructibles, y entonces llegan en unidades enteras a la pared de madera.
- Salen disparadas de a una, a iguales intervalos de tiempo, y todas con la misma rapidez.

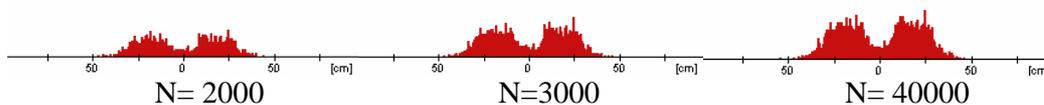
Se pone en funcionamiento la fuente disparadora durante un buen tiempo, por ejemplo media hora.

- 1- ¿Cómo se distribuirán las bolillas que logren pasar por las rendijas y lleguen a la pared de madera? ¿Habrá más en algún lugar? ¿Por qué?
- 2- Realiza un bosquejo de lo que consideres que tendrá la pared de madera, al cabo de ese tiempo, colocando el eje horizontal x representando la distancia al centro.

Cuando la máquina disparadora se para, contamos cuántas bolillas en total impactaron en la pared de madera, y llamamos a este número N . También contamos cuántas bolillas hay en cada posición x respecto del centro 0. Calculamos para cada distancia la fracción

$$\frac{N^\circ \text{ de bolillas que impactan a una distancia "x" del centro de la pared}}{N}$$

No podemos decir de antemano *exactamente* en que lugar de la pared incidirá una bolilla determinada, porque una bolilla que se dirige hacia una de las rendijas puede que pase y siga derecho, o bien que rebote en el borde con un cierto ángulo, pero logre pasar... Al realizar la experiencia tomando sucesivos intervalos de tiempo, iremos obteniendo gráficos de frecuencias relativas, según x . Estos gráficos se llaman *histogramas*. Por ejemplo con la separación y el ancho que le dimos antes, tomando tres intervalos de tiempo distintos, vamos obteniendo la siguiente distribución de bolillas según la distancia al centro:



Ahora, supongamos que dejamos la máquina disparadora prendida durante un tiempo muy grande, una hora por ejemplo. Eso significa que la máquina disparará muchísimas bolillas, (es decir hacemos a N infinitamente grande), entonces en este límite, la fracción representa la “probabilidad” que una bolilla caiga a cierta **distancia del centro de la pantalla**. El histograma entonces, se vuelve una función, que llamaremos “curva de probabilidad $P(x)$ ”. Si a cierta distancia x del centro 0 se encuentran incrustadas muchas bolillas, la probabilidad en esa x será alta. Por el contrario, si hay pocas bolillas, diremos que en esa x la probabilidad es baja.

- 3- a) ¿Podrías dibujar aquí de forma aproximada la curva que se obtendría?
 b) Describe aquí la forma de la curva que dibujaste en a)
- 4- Ahora imaginemos que en la experiencia anterior tapamos una de las rendijas y realizamos la experiencia. Luego, tapamos esa rendija y abrimos la otra. ¿Podrías dibujar, cómo se distribuirán las bolillas en la pared de madera y cómo será la curva de probabilidad?
- 5- Si sumaras la curva que se obtiene al cerrar la rendija izquierda con la curva que se obtiene al cerrar la derecha, ¿qué curva se obtendría?
- 6- ¿Los electrones son pequeñísimas bolillas de carga eléctrica? ¿Te parece que se comportarán de la misma forma que ellos?

Simulación de la EDR con software

- 3- Simula la experiencia seleccionando bolillas, y ambas rendijas a la vez, con un ancho de 10mm y una distancia entre las rendijas de 20mm. Enciende la fuente.
- d) ¿Coinciden los resultados mostrados en la simulación en relación a la distribución de bolillas en la pared respecto a tus predicciones? Describe las similitudes y/o diferencias.
- e) Obtén la curva de probabilidad, y transcríbela en tu carpeta.

2- Ahora mantén fijo el ancho de las rendijas en 10mm, y comienza a disminuir gradualmente la distancia entre las rendijas, hasta 10mm.

- a) ¿Cómo se distribuyen ahora los impactos en la pantalla?
- b) Describe la forma de la curva de probabilidad en este caso
- c) ¿Cómo se relaciona la cercanía de las rendijas con la forma de la curva?
- d) ¿Qué es lo que hace que la curva tenga esa forma?

3- Dejando el ancho y la separación fijos, cierra una de las rendijas dejando los demás parámetros constantes y corre la simulación.

- a) Dibuja la curva de probabilidad. Cierra la otra rendija y dibuja la curva.
- b) ¿Cómo podrían relacionarse matemáticamente la curva de probabilidad cuando están ambas rendijas abiertas con cada una de las curvas por separado?

4- Ahora reemplacemos las bolillas por electrones cuya energía sea de 100Kev, adecuando las dimensiones de la simulación: un ancho de rendijas de 100nm, y una distancia entre los puntos medios de las rendijas de 600nm.

- a) Describe cómo resultó la distribución de los electrones en la pantalla colectora
- b) Reproduce aquí de manera aproximada como resulta la gráfica de la curva de probabilidad, y describe su forma.
- c) ¿En qué cambió la curva respecto a la que se obtuvo con bolillas?

5- Cierra una de las rendijas, y enciende la fuente disparadora de electrones, dejando todos los anteriores parámetros iguales. Luego, abre esa rendija, y cierra la otra.

- a) ¿Cómo se distribuyen los electrones en la pantalla?
- b) ¿Cómo son las curvas de probabilidad en cada caso? Dibuja las dos.
- c) ¿Se parecen estas curvas a las curvas obtenidas con las bolillas?
- d) Con las curvas obtenidas para los electrones, ¿se cumple la misma relación matemática que con bolillas?

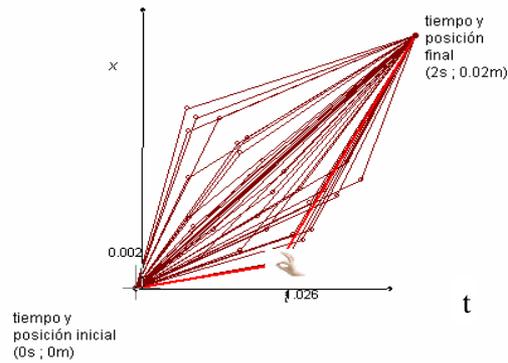
¿Qué modelo permite explicar a la curva $P(x)$ de la EDR con electrones?

Nos preguntamos: ¿Cual es la probabilidad P de que un electrón pase de un estado inicial I a un estado final F ?

$$P [(t_i; x_i) \rightarrow (t_f; x_f)]$$

Supongamos que el estado inicial I está caracterizado por una determinada **posición inicial** $x_i = 0$ y un **tiempo inicial**, $t_i = 0$ y el estado final F caracterizado por **una posición final** x_f y un **tiempo final** T . Esto es, en el instante $t = 0$ seg la posición $x = 0m$, y en el instante final T , está en x . La técnica o método para calcular la probabilidad se llama: **Suma de Todas las Alternativas** (abreviado **STA**) y consiste los siguientes cuatro “pasos”:

I- Considerar que no hay una única, sino múltiples formas de conectar el estado inicial I con el final F , -con diversas $x(t)$ – todas igualmente posibles.



Luego, cada $x(t)$ posible, tiene asociado un **valor numérico** llamado ACCION (S) que se calcula como la diferencia entre la **energía cinética promedio** y potencial promedio, multiplicada por el tiempo transcurrido:

$$S = (E_{\text{cinética promedio}} - E_{\text{potencial promedio}}) \cdot \text{tiempo}$$

Si la partícula está “libre” es decir no está en presencia de otros cuerpos que puedan ejercer ningún tipo de fuerzas, tendrá energía potencial nula. Entonces, la acción S queda directamente:

$$S = E_{\text{cinética promedio}} \cdot t \quad \rightarrow \quad S = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{promedio}}^2 \cdot t$$

Las unidades de acción son las unidades de Energía por tiempo, J.s en el sistema MKS.

2- Con esta acción S se construye un **vector** en el plano cartesiano llamado “**vector asociado a cada función $x(t)$** ” que tiene **módulo uno** y **ángulo de medida S/\hbar** (con respecto al eje x positivo), donde \hbar (se lee “hache barra”) $h/2\pi$, y $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J.s es una constante **fundamental** para la física, denominada “**constante de Planck**”

Es decir:

Cada $x(t)$ tiene un valor de Acción $S(x(t))$

con esta S se construye un vector



3- Se suman **todos** los vectores asociados a las diferentes funciones que conectan ambos estados inicial y final. Este vector, se llama “**Vector suma**”

4- Se calcula el **módulo del “Vector suma”**, que es su longitud, y se eleva al cuadrado. El resultado de estas operaciones matemáticas, dan la **probabilidad de arribar al estado final F , habiendo partido del estado inicial I** :

$$P [(t_i; x_i) \rightarrow (t_f; x_f)]$$

1- Entre todas las funciones $x(t)$ que es posible seleccionar para conectar el estado inicial con el final, observa que una de ellas es una línea recta:

- ¿Qué tipo de movimiento representa esta función?
- Suponiendo un tiempo y posición inicial en cero, y un tiempo y posición final, (2s.; 0,02m) Calcula el ángulo que forma el vector asociado respecto al eje horizontal, y luego dibújalo.
- Las funciones que no son lineales, ¿que tipos de movimiento describen? ¿Cómo son sus velocidades?
- En este último caso, ¿los valores de acción serían mayores o menores que en la función lineal? ¿Por qué?

2- Abre el archivo “Simulación 1”, activa el control del tiempo y elige distintas funciones $x(t)$ que conecten el estado inicial con el final (son funciones compuestas por dos trozos de funciones lineales). Observa lo que ocurre con los vectores asociados a cada una de ellas, respecto al vector asociado a la función lineal.

- Si seleccionas funciones **cercanas** a la función lineal, ¿cómo son los vectores asociados respecto al vector asociado a la función lineal?
- Ahora selecciona funciones que se encuentren **alejadas** de la función lineal. ¿Cómo son ahora los vectores asociados?
- Selecciona algunas funciones cercanas y otras alejadas a la función lineal, y para cada una de ellas calcula el valor de Acción **S** a partir del ángulo del vector asociado. Compara los valores obtenidos, respecto al valor de acción de la función lineal.

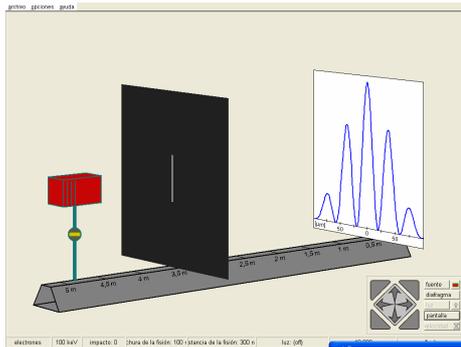
3- Este software nos permite ejecutar la técnica STA hasta el paso 2. En el paso 3, nos encontramos con el problema de tener que sumar **TODOS** los vectores de amplitud según nos indica la técnica STA. Pero ¿Cómo es posible considerar TODAS las $x(t)$? Para poder pensar sobre esto, a continuación te presentamos una tabla extraída de la simulación. En ella se muestran los valores de t , y de $x(t)$ que corresponden al punto de “quiebre” de las funciones. En la última columna se muestra **el ángulo** del vector asociado a cada una (recuerda que éste corresponde al valor S/\hbar). Este ángulo es respecto del eje x .

Tiempo (seg.)	$x(t)$ (metros)	Ángulo del vector asociado (en grados)
0.38	0.011	90
0.243	0.011	140
0.279	0.019	230
0.303	0.018	270
0.018	0.015	320
0.126	0.02	50
0.486	0.03	51
1.296	0.01	53
1	0.01	49.5° (corresponde a $x(t)$ lineal)
0.882	0.011	52
1.775	0.002	320
1.746	0.003	270
1.854	0.006	230
1.422	0.002	140
1.03	0.001	90

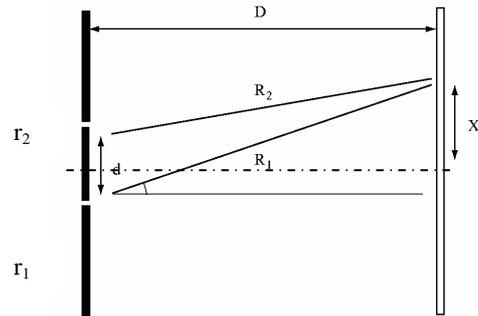
- Dibuja de forma aproximada los vectores en el plano, colocando uno a continuación del otro. Considera que el módulo (longitud) debe ser uno, en la escala que elijas, y que el ángulo de la última columna es el ángulo del vector con respecto al eje horizontal. Para obtener el Vector Suma, deberás conectar el origen del primer vector con el final del último.
- Analiza la contribución a la Suma de los vectores asociados a funciones alejadas de la función lineal, y la de los vectores asociados a funciones cercanas. ¿Es posible reducir la suma de TODOS los vectores solamente a un conjunto de ellos? Formula conclusiones acerca de cuáles vectores asociados hay que considerar al sumar.

Reconstruyendo el diagrama de la EDR con electrones

Volvamos a nuestra experiencia de las rendijas con electrones. Recordemos cómo era la curva de probabilidad que obtuvimos cuando utilizamos electrones. En la derecha se representa un esquema de la experiencia, vista desde arriba:



Resultado experimental de la EDR con electrones



Esquema de la EDR

Ahora apliquemos la STA que antes estudiamos para el caso de un electrón libre, moviéndose en una sola dirección, con el software Modellus. Ahora nuestro objetivo es reconstruir el diagrama obtenido en la pantalla, y la curva de probabilidad $P(x)$. Con r_1 y r_2 representamos las rendijas inferior y superior respectivamente. Aquí el instante y la posición inicial serán cuando los electrones están aún en la fuente disparadora, y el tiempo y la posición final serán cuando el electrón llega a la pared colectora.

A continuación, haremos una serie de pasos matemáticos, para encontrar qué predice la aplicación de los resultados para un electrón libre, ahora en la Experiencia de la Doble rendija. Podemos hacer esto porque consideraremos que cada electrón que llega al punto x puede considerarse “libre” (su energía potencial es cero, porque son expulsados uno a uno de la máquina tal que no son afectados por la presencia del otro, y la fuerza gravitatoria es despreciable también). Por lo tanto lo único que contribuye al valor de acción es su energía cinética.

Así, el vector asociado a cada una de las trayectorias R_1 y R_2 posibles para el electrón para llegar a la pantalla a cierta distancia x tiene componentes:

$$\vec{V}_1(r_1 \rightarrow x) = (N \cos (S_{cl}[r_1 \rightarrow x] / \hbar) ; N \sen (S_{cl}[r_1 \rightarrow x] / \hbar))$$

Análogamente para la otra rendija:

$$\vec{V}_2(r_2 \rightarrow x) = (N \cos (S_{cl}[r_2 \rightarrow x] / \hbar) ; N \sen (S_{cl}[r_2 \rightarrow x] / \hbar))$$

El Vector suma (x) , es la suma de arribar a esa x pasando por una u otra rendija, es decir

$$\begin{aligned} \vec{\text{Vector suma}}(x) &= \vec{V}_1(r_1 \rightarrow x) + \vec{V}_2(r_2 \rightarrow x) \\ &= (N \cos (S_{cl}[r_1 \rightarrow x] / \hbar) ; N \sen (S_{cl}[r_1 \rightarrow x] / \hbar)) + \\ &\quad + \\ &\quad (N \cos (S_{cl}[r_2 \rightarrow x] / \hbar) ; N \sen (S_{cl}[r_2 \rightarrow x] / \hbar)) \end{aligned}$$

Ahora bien, la acción clásica es $S = E_{c\text{media}} * T$. Aquí T es el tiempo empleado para el viaje de los electrones, entre ambas pantallas. En este caso, haremos las siguientes consideraciones geométricas utilizando el teorema de Pitágoras:

$$S_{cl}[r_1 \rightarrow x] = \frac{1}{2} m \frac{(R_1)^2}{(T)}, \text{ y según el esquema de la experiencia, } (R_1)^2 = (x + d/2)^2 + D^2$$

$$S_{cl}[r_2 \rightarrow x] = \frac{1}{2} m \frac{(R_2)^2}{(T)}, \text{ y segun el esquema de la experiencia, } (R_2)^2 = (x - d/2)^2 + D^2$$

Sigamos el procedimiento de STA para encontrar una expresi3n para la probabilidad (recordemos que eran cuatro "pasos" hasta llegar a la probabilidad)

II) Sumemos ambos vectores, (uno para cada rendija) componente a componente:

$$\begin{aligned} \text{Vector suma } (x) = & \left[N \cos\left(\frac{S_{clas}[r_1 \rightarrow x]}{\hbar}\right) + N \cos\left(\frac{S_{clas}[r_2 \rightarrow x]}{\hbar}\right) ; \right. \\ & \left. N \operatorname{sen}\left(\frac{S_{clas}[r_1 \rightarrow x]}{\hbar}\right) + N \operatorname{sen}\left(\frac{S_{clas}[r_2 \rightarrow x]}{\hbar}\right) \right] \end{aligned}$$

Primera componente del vector

Segunda componente del vector

Reemplazando $S_{cl}[r_1 \rightarrow x] = \frac{1}{2} m \frac{(R_1)^2}{(T)}$ y $S_{cl}[r_2 \rightarrow x] = \frac{1}{2} m \frac{(R_2)^2}{(T)}$, y sacando N de factor com3n, la expresi3n anterior queda

$$\text{Vector suma } (x) = N \left(\cos\left(\frac{mR_1^2}{2\hbar T}\right) + \cos\left(\frac{mR_2^2}{2\hbar T}\right) ; \operatorname{sen}\left(\frac{mR_1^2}{2\hbar T}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{mR_2^2}{2\hbar T}\right) \right)$$

Llamemos a los argumentos de las funciones trigonom3tricas:

$$a = \frac{mR_1^2}{2\hbar T} \quad \text{y} \quad b = \frac{mR_2^2}{2\hbar T} \quad (*)$$

Es decir, tenemos que el vector suma total es

$$\text{Vector suma } (x) = N \left(\cos[a] + \cos[b] ; \operatorname{sen}[a] + \operatorname{sen}[b] \right)$$

Esta expresi3n puede resolverse utilizando las relaciones trigonom3tricas:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Entonces queda

$$\text{Vector suma } (x) = N \left(2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) ; 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \right)$$

II) La t3cnica indica que ahora calculemos el **m3dulo** del vector suma y luego **elevemos al cuadrado**, que es lo mismo que sumar los cuadrados de los componentes, directamente:

$$|\text{Vector suma } (x)|^2 \sim 4 \cos^2\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right) + 4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Si sacamos factor común $\cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right)$:

$$|\text{Vector suma}(x)|^2 \sim \cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \underbrace{\left[\cos^2\left(\frac{a+b}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}_{= 1 \text{ (identidad trigonométrica)}}$$

Como $P(x) \sim |\text{Vector suma}(x)|^2$ llegamos a que $P(x) \sim \cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Y volviendo a los valores de a y b que habíamos reemplazado (*) para facilitar los cálculos:

$$P(x) \sim \cos^2\left[\frac{\frac{mR_1^2}{2\hbar T} - \frac{mR_2^2}{2\hbar T}}{2}\right] \quad \text{ó} \quad P(x) \sim \cos^2\left(\frac{m(R_1^2 - R_2^2)}{4\hbar T}\right)$$

Por último, de la disposición experimental habíamos dicho que:

$$(R_1)^2 = (x + d/2)^2 + D^2 \quad \text{y} \quad (R_2)^2 = (x - d/2)^2 + D^2$$

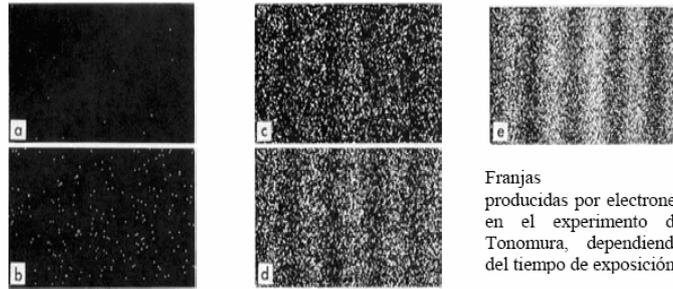
Restando ambos, se obtiene que $(R_1^2 - R_2^2) = 2dx$

Reemplazando esto en la ecuación de $P(x)$ llegamos a la expresión:

$$P(x) \sim \cos^2\left(\frac{m \cdot 2d}{4\hbar T} x\right) \sim \cos^2\left(\frac{m \cdot d}{2\hbar T} x\right)$$

Esta es la probabilidad que predice la Suma de Todas las Alternativas (STA) para que un electrón impacte a una distancia x del centro de la pantalla colectora.

- 1- a) ¿Qué tipo de función matemática se obtiene? ¿Qué características tendría su gráfico?
 - b) ¿Qué valores dependen del diseño experimental? ¿De qué depende la probabilidad?
 - c) Realiza un gráfico cuantitativo de esta función
 - d) ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras entre este gráfico y el gráfico que mostraba el software cuando se simulaba la experiencia con electrones?
- 2- Aquí se presenta una serie de fotografías que muestran cómo se va formando la distribución de los electrones, a medida que van llegando a la pantalla, conforme transcurre el tiempo. Explica la relación entre la forma de la distribución de los electrones mostrada y la gráfica predicha por la STA, que graficaste en 1c)



Franjas producidas por electrones en el experimento de Tonomura, dependiendo del tiempo de exposición.

Estudio de la transición cuántica-clásica

a) Desde la EDR

1- a) ¿Cómo es la expresión de $P(x)$ si se aumenta la masa 1000 veces, 10.000 veces, 1.000.000 de veces? Considera que el tiempo T y la distancia d son fijos.

b) ¿Podrías describir la forma de las distintas funciones $P(x)$ anteriores? Realiza un gráfico **aproximado** de cada una de ellas, como lo hiciste para el electrón. ¿En qué se diferencian las curvas?

2- Ejecuta la Simulación 2, con el software Modellus, selecciona distintos “casos”, que es como si se simulara la EDR con distintos valores de masa.

a) Transcribe y comenta el esquema de la experiencia en tu carpeta, y analiza la relación entre la curva que se va dibujando con los vectores y escribe conclusiones.

b) Ejecuta la simulación para todos los “casos”. Transcribe las distintas curvas obtenidas.

c) Escribe conclusiones respecto a que sucede con las funciones a medida que aumenta el valor de la masa. Esto es, la transición de la mecánica cuántica a la mecánica clásica.

3- a) Según las respuestas anteriores ¿Cómo sería el gráfico de $P(x)$ en la EDR realizada con bolillas?

b) ¿Se observa esto con el software de la doble rendija? Justifica tu respuesta

c) ¿Podría concluirse que la técnica STA explica los fenómenos macroscópicos y microscópicos? ¿Por qué?

b) Del electrón a la partícula libre

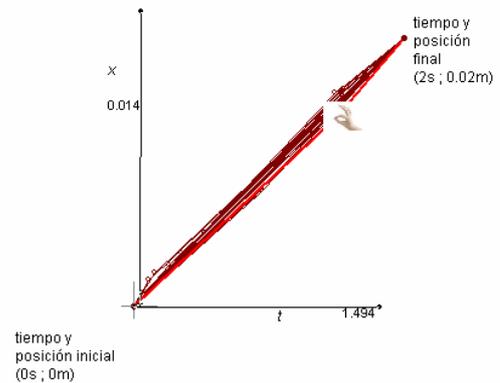
4- Dejemos la EDR, y volvamos a la técnica STA para el caso de electrones y partículas libres. Analicemos cómo son los vectores asociados a las distintas funciones cuando se trata de una partícula libre de masa mayor al electrón. Por ejemplo, supongamos las siguientes condiciones:

- tiempo y posición inicial en cero, y un tiempo y posición final, (2s.; 0,02m)
- $m = 100.000 \cdot m_e$ (cien mil veces la masa del electrón)

a) Calcula el valor de acción y el ángulo del vector asociado ($\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$ J.s; $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg)

b) La siguiente tabla muestra algunas funciones “cercanas” a la función clásica y los valores de los ángulos asociados a cada una. (Las funciones alejadas de la función clásica no están, porque antes habíamos concluido que no debían considerarse debido a que los vectores se cancelaban en la suma).

Tiempo (seg.)	x(t) (metros)	Ángulo del vector (en grados)	Ángulo reducido al 1º cuadrante
0.630	0.007	49.270.000	40
0.783	0.008	49.260.000	220
0.774	0.009	50.010.000	100
0.774	0.010	51.410.000	280
1,00	0,01	49.710.909	210($x_{clas}(t)$)
1,13	0.012	49.600.000	20
1,24	0.013	49.700.000	200
1,27	0.014	49.810.000	220
1,43	0.015	49.780.000	40



- c) Dibuja uno a continuación del otro como hiciste en el caso anterior. ¿La suma total se obtiene uniendo el origen del primero con el extremo del último. ¿Qué sucede al intentar sumarlos? ¿Se mantiene la regularidad que tenía la suma para electrones?
- d) ¿Qué podrías concluir acerca de cuáles funciones hay que considerar para calcular la Probabilidad en el caso de masas macroscópicas?
- e) ¿Es posible conocer el estado de una partícula macroscópica con certeza? ¿Y para los electrones?

Síntesis

La Ley Universal es:

Considerar *todas* las *alternativas* en que eso puede suceder. A cada una de ellas, hay que asociarle un **vector**. Luego se deben *sumar todos* los vectores, y la probabilidad es el resultado de *elevant al cuadrado el módulo* de este vector suma.

Casos “particulares” al aplicarla a electrones y a bolillas:

a) **SISTEMAS CUÁNTICOS LIBRES** como el electrón aislado

Aplicando la técnica STA, habíamos concluido que los vectores asociados a las $x(t)$ que estén lejos de $x_{clas}(t)$ tienen ángulos muy distintos entre sí y entonces se anulan (y por lo tanto no cuentan en la suma). Hay un conjunto de funciones $x(t)$ alrededor de la función clásica $x_{clas}(t)$ cuyos valores de acción (y por lo tanto de ángulos del vector asociado a cada una) no son muy diferentes que el vector asociado clásico, y entonces, como aportan a la suma deben considerarse en el cálculo de probabilidad. El vector resultante de la suma entonces, es un número de veces el vector correspondiente a $x_{clas}(t)$. Es decir, para describir el movimiento de los electrones hay que considerar un conjunto de funciones cercanas a la función clásica. Como en el dominio atómico no hay una función $x(t)$ definida que describa el movimiento del electrón, no podremos preguntarnos dónde estará en determinado tiempo, sino sólo es posible calcular la probabilidad de encontrarlo en ese lugar.

b) **PARTÍCULA MACROSCÓPICA LIBRE** como bolillas o cualquier objeto macroscópico que sigamos considerando “libre” (lejos de otros objetos que ejerzan fuerzas sobre ésta)

Los vectores asociados tendrán valores de acción muy distintos, y por lo tanto ángulos muy diferentes entre sí. Como consecuencia, se cancelarán al sumarlos. Solamente el vector asociado a $x_{clas}(t)$ contribuirá a la suma. Entonces, la suma de todos los vectores asociados se reduce a un ÚNICO vector, el correspondiente a aquella $x(t)$ cuyo valor de acción **S** es **Mínimo**, que hemos llamado $x_{clas}(t)$.

Interpretamos esto de la siguiente forma: el movimiento de una partícula de *masa macroscópica libre* que pasa de un estado inicial $(t_i ; x_i)$ a otro final $(t_f ; x_f)$ queda descrito por un movimiento rectilíneo uniforme. Por lo tanto, conociendo la función $x(t)$ que describe un movimiento, si queremos saber en que lugar se encuentra una partícula en determinado tiempo, simplemente evaluamos la función. Por ejemplo, en nuestra simulación, la función es $x(t) = 0.02 t$. Así, en el tiempo $t = 1$ seg, una partícula libre sabremos que estará en la posición $x = 0.02$ metros.

No es de extrañar que obtengamos esto con la técnica STA, después de todo coincide con lo que ya sabemos de la física de años anteriores: “Si no se ejercen fuerzas sobre un cuerpo su velocidad se mantiene constante” (Primera Ley de Newton). Es decir, **para objetos macroscópicos las leyes de la física cuántica dan los mismos resultados que los de la física clásica**. La Física que habíamos estudiado hasta ahora es la mecánica de Newton, que pasó a llamarse Física Clásica, para poder diferenciarla de esta nueva física, que rige el comportamiento del mundo microscópico, la Física Cuántica.

Si bien con la Mecánica Clásica, que dominó la Física hasta el siglo XX, se logró una muy buena descripción de la naturaleza a gran escala como, por ejemplo, el movimiento de los planetas, con las leyes de la Mecánica Cuántica recién se pudo describir lo que ocurre en el dominio atómico, y lo que se obtuvo es que en el micromundo las cosas ocurren de forma *muy diferente* de como ocurren con las cosas del mundo macroscópico, es decir con objetos grandes. ¿Grande o pequeño respecto a qué?

La constante fundamental en la naturaleza que **fija el tamaño en el que el comportamiento cuántico** se hace evidente en las experiencias físicas, es **la CONSTANTE DE PLANCK, $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J.s.**

Cuando el valor de masa es cercana al valor de h los efectos cuánticos se hacen notar, (y por eso obtuvimos máximos y mínimos en la curva) y cuando el valor de la masa es muy grande respecto a esta constante, no notamos ninguna diferencia con respecto de lo que esperaríamos encontrar en el comportamiento de los objetos macroscópicos (y por eso se obtiene la curva continua con uno o dos máximos).