Álgebra y Ecuaciones Diferenciales
Capítulo 1: Nociones Básicas

José Javier Relancio Martínez

Universidad de Burgos

2026

Índice

Definiciones Básicas

Ecuación Lineal

Una ecuación lineal en n variables $x_1, \ldots, x_n$ es de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

donde a_i (coeficientes) y b (término independiente) son constantes reales.

Ejemplos

- **Lineal:** $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2$
- **NO Lineal:** $x_1x_2 = 4$ (producto de variables) o $x^2 + y = 1$ (potencia).

Sistema de Ecuaciones (SEL)

Un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas. Su solución es una sucesión de números $(s_1, \ldots, s_n)$ que satisface todas las ecuaciones simultáneamente.

Representación Matricial

Un sistema se puede escribir de forma compacta como $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A\text{:Matriz coef.}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X\text{:Incógnitas}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B\text{:Térm. Indep.}}$$

Matriz Ampliada $(A|B)$**:** Es la matriz que incluye los términos independientes. Es la que usaremos para operar:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Clasificación de Sistemas

Según el número de soluciones, un sistema puede ser:

- **Compatible (tiene solución):**
  - **Determinado (S.C.D.):** Solución única.
  - **Indeterminado (S.C.I.):** Infinitas soluciones.
- **Incompatible (S.I.):** No tiene solución.

Interpretación Geométrica (2D)

Dos rectas en el plano pueden:

1. Cortarse en un punto (**S.C.D.**).
2. Ser paralelas no coincidentes (**S.I.**).
3. Ser la misma recta (**S.C.I.**).

Operaciones Elementales

Para resolver un sistema, lo transformamos en uno equivalente (mismas soluciones) más simple mediante **operaciones elementales** en las filas:

1. $F_i \leftrightarrow F_j$ (Intercambiar dos filas).
2. kF_i con $k \neq 0$ (Multiplicar una fila por un número).
3. $F_i + kF_j$ (Sumar a una fila un múltiplo de otra).

Objetivo: Matriz Escalonada

Llegar a una forma donde cada fila tenga su primer elemento no nulo (**1 principal**) a la derecha del **1 principal** de la fila anterior.

Tipos de Variables

Una vez escalonada la matriz:

- **Variables Principales:** Aquellas que corresponden a una columna con un **1 principal**.
- **Variables Secundarias (o libres):** Aquellas que no tienen 1 principal en su columna.

Clasificación tras Gauss

- **S.I.:** Aparece una fila del tipo $(0, 0, \ldots, 0|k)$ con $k \neq 0$.
- **S.C.D.:** Todas las variables son principales.
- **S.C.I.:** Existe al menos una variable secundaria.

Ejemplo: Operaciones en un Sistema (1/4)

Reducir la matriz del sistema (Ejemplo apuntes):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Ejemplo: Operaciones en un Sistema (1/4)

Reducir la matriz del sistema (Ejemplo apuntes):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

1. **Intercambio:** $F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Ejemplo: Operaciones en un Sistema (1/4)

Reducir la matriz del sistema (Ejemplo apuntes):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

1. **Intercambio:** $F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

2. **Escalado:** $\frac{1}{2}F_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Ejemplo: Operaciones en un Sistema (2/4)

Continuamos con la matriz anterior:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

3. **Suma:** $F_3 - 2F_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right)$$

Ejemplo: Operaciones en un Sistema (3/4)

4. **Escalado:** $-\frac{1}{2}F_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right)$$

Ejemplo: Operaciones en un Sistema (3/4)

4. **Escalado:** $-\frac{1}{2}F_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right)$$

5. **Suma:** $F_3 - 5F_2$ y **Escalado:** $2F_3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Estado Final

Matriz escalonada. Variables principales: x_1, x_3, x_5.

Ejemplo: Resolución Final (4/4)

Asignamos parámetros a variables secundarias: $x_2 = \mu, x_4 = \lambda$.

- $F_3 \implies \mathbf{x_5} = \mathbf{2}$
- $F_2 \implies x_3 - \frac{7}{2}(2) = -6 \implies x_3 - 7 = -6 \implies \mathbf{x_3} = \mathbf{1}$
- $F_1 \implies x_1 + 2\mu - 5(1) + 3\lambda + 6(2) = 14$

$$x_1 + 2\mu - 5 + 3\lambda + 12 = 14 \implies \mathbf{x_1} = \mathbf{7} - \mathbf{2}\mu - \mathbf{3}\lambda$$

Solución General (S.C.I.)

$$(7 - 2\mu - 3\lambda, \mu, 1, \lambda, 2) \quad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

Sistemas Homogéneos

Un sistema es **homogéneo** si todos sus términos independientes son cero ($AX = 0$).

- Siempre son **compatibles**. La solución $(0, \ldots, 0)$ se llama **solución trivial**.
- Si tienen más incógnitas que ecuaciones ($n > m$), siempre son **indeterminados** (tienen soluciones no triviales).

Matrices: Definiciones y Tipos

- **Tamaño:** m filas $\times$ n columnas ($A \in M_{m\times n}$).
- **Matriz Cuadrada:** $m = n$ (posee diagonal principal).
- **Matrices Especiales:**
  - **Identidad (I_n):** 1s en la diagonal, ceros en el resto.
  - **Diagonal:** Ceros fuera de la diagonal principal.
  - **Cero (0):** Todos sus elementos son nulos.

Matrices: Definiciones y Tipos

- **Tamaño:** m filas $\times$ n columnas ($A \in M_{m\times n}$).
- **Matriz Cuadrada:** $m = n$ (posee diagonal principal).
- **Matrices Especiales:**
  - **Identidad (I_n):** 1s en la diagonal, ceros en el resto.
  - **Diagonal:** Ceros fuera de la diagonal principal.
  - **Cero (0):** Todos sus elementos son nulos.

Ejercicio 1

Si $A \in M_{m\times n}$, demostrar que:

1. $AI_n = I_m A = A$
2. El producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal.

Suma y Producto por Escalar

- **Suma ($A + B$):** Se suman elemento a elemento. Requiere el mismo tamaño.
- **Producto por escalar (λA):** Se multiplica cada elemento de A por λ.

Producto de Matrices (AB)

El número de columnas de A debe coincidir con el de filas de B.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

¡CUIDADO!

El producto de matrices **NO es conmutativo** en general: $AB \neq BA$.

Ejercicio Propuesto: Propiedades Básicas

Ejercicio

Sean $A, B \in M_{m\times n}$ y 0 la matriz nula. Comprobar que:

1. $A + 0 = 0 + A = A$
2. $A - A = 0$
3. $(-1) \cdot A = -A$
4. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

Matrices Especiales y Traspuesta

Matriz Traspuesta (A^t)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$. Su **matriz traspuesta** $A^t \in M_{n\times m}$ se obtiene intercambiando filas por columnas:

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- **Matriz Identidad (I):** Unos en la diagonal, ceros fuera ($AI = IA = A$).
- **Matriz Simétrica:** $A = A^t$.
- **Matriz Antisimétrica:** $A^t = -A$.

Propiedades de la Traspuesta (A^t)

1. $(A^t)^t =$

Matrices Especiales y Traspuesta

Matriz Traspuesta (A^t)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$. Su **matriz traspuesta** $A^t \in M_{n\times m}$ se obtiene intercambiando filas por columnas:

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- **Matriz Identidad (I):** Unos en la diagonal, ceros fuera ($AI = IA = A$).
- **Matriz Simétrica:** $A = A^t$.
- **Matriz Antisimétrica:** $A^t = -A$.

Propiedades de la Traspuesta (A^t)

1. $(A^t)^t = A$

Matrices Especiales y Traspuesta

Matriz Traspuesta (A^t)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$. Su **matriz traspuesta** $A^t \in M_{n \times m}$ se obtiene intercambiando filas por columnas:

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- **Matriz Identidad (I):** Unos en la diagonal, ceros fuera ($AI = IA = A$).
- **Matriz Simétrica:** $A = A^t$.
- **Matriz Antisimétrica:** $A^t = -A$.

Propiedades de la Traspuesta (A^t)

1. $(A^t)^t = A$

Matrices Especiales y Traspuesta

Matriz Traspuesta (A^t)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$. Su **matriz traspuesta** $A^t \in M_{n\times m}$ se obtiene intercambiando filas por columnas:

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- **Matriz Identidad (I):** Unos en la diagonal, ceros fuera ($AI = IA = A$).
- **Matriz Simétrica:** $A = A^t$.
- **Matriz Antisimétrica:** $A^t = -A$.

Propiedades de la Traspuesta (A^t)

1. $(A^t)^t = A$

Matrices Especiales y Traspuesta

Matriz Traspuesta (A^t)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$. Su **matriz traspuesta** $A^t \in M_{n \times m}$ se obtiene intercambiando filas por columnas:

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- **Matriz Identidad (I):** Unos en la diagonal, ceros fuera ($AI = IA = A$).
- **Matriz Simétrica:** $A = A^t$.
- **Matriz Antisimétrica:** $A^t = -A$.

Propiedades de la Traspuesta (A^t)

1. $(A^t)^t = A$

Matrices Especiales y Traspuesta

Matriz Traspuesta (A^t)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$. Su **matriz traspuesta** $A^t \in M_{n\times m}$ se obtiene intercambiando filas por columnas:

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- **Matriz Identidad (I):** Unos en la diagonal, ceros fuera ($AI = IA = A$).
- **Matriz Simétrica:** $A = A^t$.
- **Matriz Antisimétrica:** $A^t = -A$.

Propiedades de la Traspuesta (A^t)

1. $(A^t)^t = A$

Matrices Especiales y Traspuesta

Matriz Traspuesta (A^t)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$. Su **matriz traspuesta** $A^t \in M_{n \times m}$ se obtiene intercambiando filas por columnas:

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- **Matriz Identidad (I):** Unos en la diagonal, ceros fuera ($AI = IA = A$).
- **Matriz Simétrica:** $A = A^t$.
- **Matriz Antisimétrica:** $A^t = -A$.

Propiedades de la Traspuesta (A^t)

1. $(A^t)^t = A$

Matrices Especiales y Traspuesta

Matriz Traspuesta (A^t)

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$. Su **matriz traspuesta** $A^t \in M_{n\times m}$ se obtiene intercambiando filas por columnas:

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- **Matriz Identidad (I):** Unos en la diagonal, ceros fuera ($AI = IA = A$).
- **Matriz Simétrica:** $A = A^t$.
- **Matriz Antisimétrica:** $A^t = -A$.

Propiedades de la Traspuesta (A^t)

1. $(A^t)^t = A$

Ejercicio Propuesto: Simetría

Ejercicio

Poner ejemplos concretos de matrices simétricas ($A^t = A$) y antisimétricas ($A^t = -A$) de orden 2.

Ejercicio Propuesto: Simetría

Ejercicio

Poner ejemplos concretos de matrices simétricas ($A^t = A$) y antisimétricas ($A^t = -A$) de orden 2.

Solución

- **Simétrica:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- **Antisimétrica:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

Teorema: Unicidad de la Inversa

Si una matriz A tiene inversa, ésta es **única**.

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

Teorema: Unicidad de la Inversa

Si una matriz A tiene inversa, ésta es **única**.

Propiedades de la Inversa (A^{-1})

1. $(A^{-1})^{-1} =$

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

Teorema: Unicidad de la Inversa

Si una matriz A tiene inversa, ésta es **única**.

Propiedades de la Inversa (A^{-1})

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

Teorema: Unicidad de la Inversa

Si una matriz A tiene inversa, ésta es **única**.

Propiedades de la Inversa (A^{-1})

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} =$

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

Teorema: Unicidad de la Inversa

Si una matriz A tiene inversa, ésta es **única**.

Propiedades de la Inversa (A^{-1})

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (¡El orden se invierte!)

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

Teorema: Unicidad de la Inversa

Si una matriz A tiene inversa, ésta es **única**.

Propiedades de la Inversa (A^{-1})

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (¡El orden se invierte!)
3. $(\lambda A)^{-1} =$

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

Teorema: Unicidad de la Inversa

Si una matriz A tiene inversa, ésta es **única**.

Propiedades de la Inversa (A^{-1})

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (¡El orden se invierte!)
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ $(\lambda \neq 0)$

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

Teorema: Unicidad de la Inversa

Si una matriz A tiene inversa, ésta es **única**.

Propiedades de la Inversa (A^{-1})

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (¡El orden se invierte!)
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1} \quad (\lambda \neq 0)$
4. $(A^n)^{-1} =$

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

Teorema: Unicidad de la Inversa

Si una matriz A tiene inversa, ésta es **única**.

Propiedades de la Inversa (A^{-1})

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (¡El orden se invierte!)
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ $(\lambda \neq 0)$
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

Teorema: Unicidad de la Inversa

Si una matriz A tiene inversa, ésta es **única**.

Propiedades de la Inversa (A^{-1})

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (¡El orden se invierte!)
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ $(\lambda \neq 0)$
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
5. $(A^t)^{-1} =$

La Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A es **inversible** si existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cálculo por Gauss-Jordan

Planteamos $(A|I)$ y operamos hasta obtener $(I|A^{-1})$.

Teorema: Unicidad de la Inversa

Si una matriz A tiene inversa, ésta es **única**.

Propiedades de la Inversa (A^{-1})

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (¡El orden se invierte!)
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ $(\lambda \neq 0)$
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
5. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Ejercicio: Cálculo de la Inversa (1/2)

Calcular A^{-1} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ planteando $(A|I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ejercicio: Cálculo de la Inversa (1/2)

Calcular A^{-1} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ planteando $(A|I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ejercicio: Cálculo de la Inversa (1/2)

Calcular A^{-1} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ planteando $(A|I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ejercicio: Cálculo de la Inversa (2/2)

Continuamos operando para obtener I a la izquierda:

3. $F_3 \leftarrow -\frac{1}{2}F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Ejercicio: Cálculo de la Inversa (2/2)

Continuamos operando para obtener I a la izquierda:

3. $F_3 \leftarrow -\frac{1}{2}F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

4. $F_1 \leftarrow F_1 - F_3$ y $F_2 \leftarrow F_2 - F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Ejercicio: Cálculo de la Inversa (2/2)

Continuamos operando para obtener I a la izquierda:

3. $F_3 \leftarrow -\frac{1}{2}F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

4. $F_1 \leftarrow F_1 - F_3$ y $F_2 \leftarrow F_2 - F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Resultado

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Definición y Reglas de Cálculo

El determinante es un número asociado a toda matriz cuadrada.

- **2x2:** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$
- **3x3 (Regla de Sarrus):** Suma de productos de la diagonal principal y sus paralelas, menos la diagonal secundaria y las suyas.

Propiedades de los Determinantes (1/2)

Propiedades de los Determinantes (1/2)

1. Traspuesta: $\det(A^t) = \det(A)$

Propiedades de los Determinantes (1/2)

Propiedades de los Determinantes (1/2)

1. Traspuesta: $\det(A^t) = \det(A)$
2. Inversa: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Propiedades de los Determinantes (1/2)

Propiedades de los Determinantes (1/2)

1. Traspuesta: $\det(A^t) = \det(A)$
2. Inversa: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
3. Múltiplo Escalar: $\det(kA) = k^n \det(A)$

Propiedades de los Determinantes (1/2)

Propiedades de los Determinantes (1/2)

1. Traspuesta: $\det(A^t) = \det(A)$
2. Inversa: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
3. Múltiplo Escalar: $\det(kA) = k^n \det(A)$
4. Linealidad (Fila): $\det(\ldots, kF_i, \ldots) = k \cdot \det(\ldots, F_i, \ldots)$

Propiedades de los Determinantes (1/2)

Propiedades de los Determinantes (1/2)

1. Traspuesta: $\det(A^t) = \det(A)$
2. Inversa: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
3. Múltiplo Escalar: $\det(kA) = k^n \det(A)$
4. Linealidad (Fila): $\det(\ldots, kF_i, \ldots) = k \cdot \det(\ldots, F_i, \ldots)$

Propiedades de los Determinantes (1/2)

1. Traspuesta: $\det(A^t) = \det(A)$
2. Inversa: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
3. Múltiplo Escalar: $\det(kA) = k^n \det(A)$
4. Linealidad (Fila): $\det(\ldots, kF_i, \ldots) = k \cdot \det(\ldots, F_i, \ldots)$

Teorema: Producto de Determinantes

El determinante del producto es el producto de los determinantes:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

Propiedades de los Determinantes (2/2)

Propiedades de los Determinantes (2/2)

1. Si una fila es suma, el det. se descompone en suma de dos det.

Propiedades de los Determinantes (2/2)

1. Si una fila es suma, el det. se descompone en suma de dos det.
2. Fila de ceros o dos filas iguales (o proporcionales) $\Longrightarrow$

Propiedades de los Determinantes (2/2)

Propiedades de los Determinantes (2/2)

1. Si una fila es suma, el det. se descompone en suma de dos det.
2. Fila de ceros o dos filas iguales (o proporcionales) $\implies \det(A) = 0$

Propiedades de los Determinantes (2/2)

1. Si una fila es suma, el det. se descompone en suma de dos det.
2. Fila de ceros o dos filas iguales (o proporcionales) $\implies \det(A) = 0$
3. Intercambiar dos filas $\implies$

Propiedades de los Determinantes (2/2)

Propiedades de los Determinantes (2/2)

1. Si una fila es suma, el det. se descompone en suma de dos det.
2. Fila de ceros o dos filas iguales (o proporcionales) $\Longrightarrow$ $\det(A) = 0$
3. Intercambiar dos filas $\Longrightarrow$ Cambio de signo

Propiedades de los Determinantes (2/2)

Propiedades de los Determinantes (2/2)

1. Si una fila es suma, el det. se descompone en suma de dos det.
2. Fila de ceros o dos filas iguales (o proporcionales) $\implies \det(A) = 0$
3. Intercambiar dos filas $\implies$ Cambio de signo
4. Sumar múltiplo de otra fila $(F_i + kF_j) \implies$

Propiedades de los Determinantes (2/2)

Propiedades de los Determinantes (2/2)

1. Si una fila es suma, el det. se descompone en suma de dos det.
2. Fila de ceros o dos filas iguales (o proporcionales) $\Longrightarrow$ $\det(A) = 0$
3. Intercambiar dos filas $\Longrightarrow$ Cambio de signo
4. Sumar múltiplo de otra fila $(F_i + kF_j)$ $\Longrightarrow$ No varía

Propiedades de los Determinantes (2/2)

Propiedades de los Determinantes (2/2)

1. Si una fila es suma, el det. se descompone en suma de dos det.
2. Fila de ceros o dos filas iguales (o proporcionales) $\implies$ $\det(A) = 0$
3. Intercambiar dos filas $\implies$ Cambio de signo
4. Sumar múltiplo de otra fila $(F_i + kF_j)$ $\implies$ No varía
5. Triangular o Diagonal $\implies$

Propiedades de los Determinantes (2/2)

Propiedades de los Determinantes (2/2)

1. Si una fila es suma, el det. se descompone en suma de dos det.
2. Fila de ceros o dos filas iguales (o proporcionales) $\implies \det(A) = 0$
3. Intercambiar dos filas $\implies$ Cambio de signo
4. Sumar múltiplo de otra fila $(F_i + kF_j) \implies$ No varía
5. Triangular o Diagonal $\implies \prod$ diag. principal

Ejercicio Propuesto: Determinantes

Demostraciones

Demostrar razonadamente las siguientes propiedades:

1. Si A es inversible, entonces $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
2. Si $A, B \in M_{n\times n}$, se cumple que $|AB| = |BA|$

Menores y Adjuntos

Menor de un elemento (m_{ij})

Es el determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j de A.

Menores y Adjuntos

Menor de un elemento (m_{ij})

Es el determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j de A.

Adjunto de un elemento (α_{ij})

Es el menor con un signo determinado por su posición:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

Menores y Adjuntos

Menor de un elemento (m_{ij})

Es el determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j de A.

Adjunto de un elemento (α_{ij})

Es el menor con un signo determinado por su posición:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

Matriz Adjunta

La matriz formada por todos los adjuntos de A se denota por $\mathrm{adj}(A)$.

Desarrollo por Adjuntos (Laplace)

El determinante de una matriz $n \times n$ se puede calcular sumando los elementos de una línea multiplicados por sus adjuntos correspondientes.

Desarrollo por la fila i

$$|A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\alpha_{in}$$

Desarrollo por Adjuntos (Laplace)

El determinante de una matriz $n \times n$ se puede calcular sumando los elementos de una línea multiplicados por sus adjuntos correspondientes.

Desarrollo por la fila i

$$|A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\alpha_{in}$$

Desarrollo por la columna j

$$|A| = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \ldots + a_{nj}\alpha_{nj}$$

Desarrollo por Adjuntos (Laplace)

El determinante de una matriz $n \times n$ se puede calcular sumando los elementos de una línea multiplicados por sus adjuntos correspondientes.

Desarrollo por la fila i

$$|A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\alpha_{in}$$

Desarrollo por la columna j

$$|A| = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \ldots + a_{nj}\alpha_{nj}$$

Propiedad Importante

La suma de los elementos de una línea por los adjuntos de **otra** paralela es siempre **0**.

Inversa mediante Determinantes

Además del método de Gauss-Jordan, los determinantes nos dan una fórmula directa para la matriz inversa:

Cálculo de la Inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\mathrm{adj}(A))^t$$

Inversa mediante Determinantes

Además del método de Gauss-Jordan, los determinantes nos dan una fórmula directa para la matriz inversa:

Cálculo de la Inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\mathrm{adj}(A))^t$$

Pasos:

1. Calcular $|A|$ (debe ser $\neq 0$).
2. Calcular todos los adjuntos y formar la matriz $\mathrm{adj}(A)$.
3. Trasponer la matriz adjunta.
4. Multiplicar por $1/|A|$.

Regla de Cramer

Es un método para resolver sistemas S.C.D. ($|A| \neq 0$) usando determinantes.

Teorema (Regla de Cramer)

Sea $AX = B$ un sistema con A inversible. La solución única viene dada por:

$$x_i = \frac{|A_i^*|}{|A|}$$

donde A_i^* es la matriz obtenida al sustituir la columna i de A por la columna de términos independientes B.

Regla de Cramer

Es un método para resolver sistemas S.C.D. ($|A| \neq 0$) usando determinantes.

Teorema (Regla de Cramer)

Sea $AX = B$ un sistema con A inversible. La solución única viene dada por:

$$x_i = \frac{|A_i^*|}{|A|}$$

donde A_i^* es la matriz obtenida al sustituir la columna i de A por la columna de términos independientes B.

Ventaja

Permite hallar una incógnita específica sin necesidad de resolver todo el sistema.

Inversibilidad y Determinantes

Un resultado fundamental conecta todos estos conceptos:

Teorema de Inversibilidad

A es inversible $\iff \det(A) \neq 0$

Equivalencias para una matriz $n \times n$ (T. de la Matriz Inversible)

Inversibilidad y Determinantes

Un resultado fundamental conecta todos estos conceptos:

Teorema de Inversibilidad

A es inversible $\iff \det(A) \neq 0$

Equivalencias para una matriz $n \times n$ (T. de la Matriz Inversible)

- A es **inversible** (A^{-1} existe).

Inversibilidad y Determinantes

Un resultado fundamental conecta todos estos conceptos:

Teorema de Inversibilidad

A es inversible $\iff$ $\det(A) \neq 0$

Equivalencias para una matriz $n \times n$ (T. de la Matriz Inversible)

- A es **inversible** (A^{-1} existe).
- $\det(A) \neq 0$.

Inversibilidad y Determinantes

Un resultado fundamental conecta todos estos conceptos:

Teorema de Inversibilidad

A es inversible $\iff$ $\det(A) \neq 0$

Equivalencias para una matriz $n \times n$ (T. de la Matriz Inversible)

- A es **inversible** (A^{-1} existe).
- $\det(A) \neq 0$.
- El **rango** de A es n.

Inversibilidad y Determinantes

Un resultado fundamental conecta todos estos conceptos:

Teorema de Inversibilidad

A es inversible $\iff$ $\det(A) \neq 0$

Equivalencias para una matriz $n \times n$ (T. de la Matriz Inversible)

- A es **inversible** (A^{-1} existe).
- $\det(A) \neq 0$.
- El **rango** de A es n.
- Reducible por filas a la **Identidad** (I_n).

Inversibilidad y Determinantes

Un resultado fundamental conecta todos estos conceptos:

Teorema de Inversibilidad

A es inversible $\iff$ $\det(A) \neq 0$

Equivalencias para una matriz $n \times n$ (T. de la Matriz Inversible)

- A es **inversible** (A^{-1} existe).
- $\det(A) \neq 0$.
- El **rango** de A es n.
- Reducible por filas a la **Identidad** (I_n).
- El sistema homogéneo $AX = 0$ solo tiene la **solución trivial**.

Inversibilidad y Determinantes

Un resultado fundamental conecta todos estos conceptos:

Teorema de Inversibilidad

A es inversible $\iff \det(A) \neq 0$

Equivalencias para una matriz $n \times n$ (T. de la Matriz Inversible)

- A es **inversible** (A^{-1} existe).
- $\det(A) \neq 0$.
- El **rango** de A es n.
- Reducible por filas a la **Identidad** (I_n).
- El sistema homogéneo $AX = 0$ solo tiene la **solución trivial**.
- El sistema $AX = B$ tiene **solución única** para cualquier B.

Rango de una Matriz

Definición (vía Determinantes)

El **rango** de una matriz A es el orden de la mayor submatriz cuadrada con determinante no nulo.

Rango de una Matriz

Definición (vía Determinantes)

El **rango** de una matriz A es el orden de la mayor submatriz cuadrada con determinante no nulo.

Propiedades Generales

- $\mathrm{rg}(A) \leq \text{mín}(m, n)$ para $A \in M_{m\times n}$.
- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t)$.
- El rango es el número de filas no nulas tras aplicar Gauss.

Ejercicio Propuesto: Inversibilidad y Rango

Ejercicio 1

Demostrar que si $A, B \in M_{n\times n}$ cumplen que $AB = I_n$, entonces A es inversible y $B = A^{-1}$.

Ejercicio Propuesto: Inversibilidad y Rango

Ejercicio 1

Demostrar que si $A, B \in M_{n\times n}$ cumplen que $AB = I_n$, entonces A es inversible y $B = A^{-1}$.

Ejercicio 2

Demostrar que:

1. $A \in M_{m\times n} \implies \mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{mín}(m, n)$.
2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t)$.

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea un sistema $AX = B$ con m ecuaciones y n incógnitas.

Teorema

El sistema es **compatible** (tiene solución) $\iff$ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$.

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea un sistema $AX = B$ con m ecuaciones y n incógnitas.

Teorema

El sistema es **compatible** (tiene solución) $\iff$ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$.

- **Sistema Incompatible (S.I.):**

$$\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A \mid B)$$

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea un sistema $AX = B$ con m ecuaciones y n incógnitas.

Teorema

El sistema es **compatible** (tiene solución) $\iff$ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$.

- **Sistema Incompatible (S.I.):**

$$\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A \mid B)$$

- **Sistema Compatible Determinado (S.C.D.):**

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B) = n \quad \text{(Sol. única)}$$

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea un sistema $AX = B$ con m ecuaciones y n incógnitas.

Teorema

El sistema es **compatible** (tiene solución) $\iff$ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$.

- **Sistema Incompatible (S.I.):**

$$\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A \mid B)$$

- **Sistema Compatible Determinado (S.C.D.):**

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B) = n \quad \text{(Sol. única)}$$

- **Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.):**

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid B) < n \quad \text{(Infinitas sol.)}$$

Ejemplo: Discusión por Rangos

Estudiar el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-y+z=1 \end{array}\right.$

Ejemplo: Discusión por Rangos

Estudiar el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-y+z=1 \end{array}\right.$ Escalonamos la matriz ampliada $(A|B)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1}$$

Ejemplo: Discusión por Rangos

Estudiar el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-y+z=1 \end{array}\right.$ Escalonamos la matriz ampliada $(A|B)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2}$$

Ejemplo: Discusión por Rangos

Estudiar el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-y+z=1 \end{array}\right.$ Escalonamos la matriz ampliada $(A|B)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ejemplo: Discusión por Rangos

Estudiar el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ Escalonamos la matriz ampliada $(A|B)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

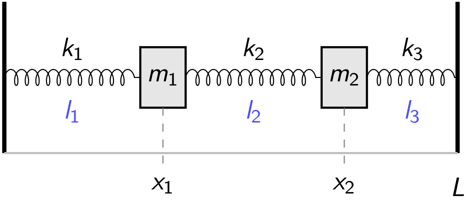
- $\text{rg}(A) = 2$ (filas no nulas en la parte de coeficientes).
- $\text{rg}(A|B) = 2$ (filas no nulas en toda la matriz).
- $n = 3$ incógnitas.

Conclusión

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2 < 3$, el sistema es **Compatible Indeterminado**.

Consideramos dos masas conectadas por 3 muelles entre dos paredes rígidas ($x = 0$ y $x = L$).

- Constantes: k_1, k_2, k_3
- Longitudes reposo: l_1, l_2, l_3
- Posiciones: x_1, x_2



Planteamiento (Ley de Hooke)

Establecemos el equilibrio de fuerzas ($\sum F = 0$) para cada masa:

- **Masa 1 (x_1):** $F_{\text{muelle 1}} + F_{\text{muelle 2}} = 0$

$$-k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2) = 0$$

$$-(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 = -k_1 l_1 + k_2 l_2$$

Planteamiento (Ley de Hooke)

Establecemos el equilibrio de fuerzas ($\sum F = 0$) para cada masa:

- **Masa 1 (x_1):** $F_{\text{muelle 1}} + F_{\text{muelle 2}} = 0$

$$-k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2) = 0$$

$$-(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 = -k_1 l_1 + k_2 l_2$$

- **Masa 2 (x_2):** $F_{\text{muelle 2}} + F_{\text{muelle 3}} = 0$

$$-k_2(x_2 - x_1 - l_2) + k_3(L - x_2 - l_3) = 0$$

$$k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 = -k_2 l_2 - k_3 L + k_3 l_3$$

Planteamiento (Ley de Hooke)

Establecemos el equilibrio de fuerzas ($\sum F = 0$) para cada masa:

- **Masa 1 (x_1):** $F_{\text{muelle 1}} + F_{\text{muelle 2}} = 0$

$$-k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2) = 0$$

$$-(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 = -k_1 l_1 + k_2 l_2$$

- **Masa 2 (x_2):** $F_{\text{muelle 2}} + F_{\text{muelle 3}} = 0$

$$-k_2(x_2 - x_1 - l_2) + k_3(L - x_2 - l_3) = 0$$

$$k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 = -k_2 l_2 - k_3 L + k_3 l_3$$

Sistema Matricial ($AX = B$)

Multiplicando por -1 y agrupando términos:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 l_1 - k_2 l_2 \\ k_2 l_2 + k_3 L - k_3 l_3 \end{pmatrix}$$

Desarrollo de la Solución (Cálculo de A^{-1})

Para resolver $\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B$, calculamos la inversa:

1. **Determinante:** $|A| = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - (-k_2)^2 = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2^2 + k_2 k_3 - k_2^2 = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3$.

Desarrollo de la Solución (Cálculo de A^{-1})

Para resolver $\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B$, calculamos la inversa:

1. **Determinante:** $|A| = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - (-k_2)^2 = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2^2 + k_2 k_3 - k_2^2 = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3$.
2. **Matriz de Adjuntos y Traspuesta:** Como la matriz es 2×2 y simétrica: $(\mathrm{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} k_2 + k_3 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}$

Desarrollo de la Solución (Cálculo de A^{-1})

Para resolver $\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B$, calculamos la inversa:

1. **Determinante:** $|A| = (k_1+k_2)(k_2+k_3) - (-k_2)^2 = k_1k_2 + k_1k_3 + k_2^2 + k_2k_3 - k_2^2 = k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3$.
2. **Matriz de Adjuntos y Traspuesta:** Como la matriz es 2×2 y simétrica: $(\mathrm{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} k_2+k_3 & k_2 \\ k_2 & k_1+k_2 \end{pmatrix}$
3. **Inversa Final:** $A^{-1} = \frac{1}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}\begin{pmatrix} k_2+k_3 & k_2 \\ k_2 & k_1+k_2 \end{pmatrix}$

Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Un sistema con más incógnitas que ecuaciones siempre tiene solución.**

Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Un sistema con más incógnitas que ecuaciones siempre tiene solución.** **FALSO**.
   Puede ser incompatible. Si es compatible, entonces sí será indeterminado.

2. **Si A y B son inversibles, entonces $A + B$ es inversible.**

Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Un sistema con más incógnitas que ecuaciones siempre tiene solución.** **FALSO**.
   Puede ser incompatible. Si es compatible, entonces sí será indeterminado.

2. **Si A y B son inversibles, entonces $A + B$ es inversible.** **FALSO**.
   Ejemplo: I y $-I$ son inversibles, pero $I + (-I) = 0$ no lo es.

3. **El determinante de una matriz antisimétrica 3×3 siempre es 0.**

Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Un sistema con más incógnitas que ecuaciones siempre tiene solución.** **FALSO**.
   Puede ser incompatible. Si es compatible, entonces sí será indeterminado.

2. **Si A y B son inversibles, entonces $A + B$ es inversible.** **FALSO**.
   Ejemplo: I y $-I$ son inversibles, pero $I + (-I) = 0$ no lo es.

3. **El determinante de una matriz antisimétrica 3×3 siempre es 0.** **VERDADERO**.
   Para antisimétricas: $\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. *Si* $n = 3$, $\det(A) = -\det(A) \implies \det(A) = 0$.

Cálculo Mental: Matrices y Determinantes

Ejercicio 1

Si $\det(A) = 5$ y A es 2×2, ¿cuánto vale $\det(2A)$?

Cálculo Mental: Matrices y Determinantes

Ejercicio 1

Si $\det(A) = 5$ y A es 2×2, ¿cuánto vale $\det(2A)$?

Solución: $\det(2A) = 2^2 \cdot \det(A) = 4 \cdot 5 = 20$.

Ejercicio 2

Si A es una matriz tal que $A^2 = A$ (idempotente) y $A \neq I$, ¿cuánto puede valer su determinante?

Cálculo Mental: Matrices y Determinantes

Ejercicio 1

Si $\det(A) = 5$ y A es 2×2, ¿cuánto vale $\det(2A)$?

Solución: $\det(2A) = 2^2 \cdot \det(A) = 4 \cdot 5 = 20$.

Ejercicio 2

Si A es una matriz tal que $A^2 = A$ (idempotente) y $A \neq I$, ¿cuánto puede valer su determinante?

Solución: $\det(A^2) = \det(A) \implies (\det(A))^2 = \det(A)$. Esto implica $\det(A) = 0$ o $\det(A) = 1$. *(Si fuera inversible, $A = I$, por lo que si $A \neq I$ suele ser 0).*

Reto Conceptual: El Método de Gauss

¿Qué pasa si al aplicar Gauss a un sistema 3×3 obtenemos esto?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Reto Conceptual: El Método de Gauss

¿Qué pasa si al aplicar Gauss a un sistema 3×3 obtenemos esto?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- **Tipo de Sistema:** Compatible Indeterminado (S.C.I.).
- **Variables Principales:** x_1, x_3 (donde están los 1).
- **Variable Secundaria:** x_2.
- **Solución:** Dependerá de un parámetro λ para x_2.

Fin del Capítulo 1