

Álgebra y Ecuaciones Diferenciales

Capítulo 2: Espacios Vectoriales

José Javier Relancio Martínez

Universidad de Burgos

2026

- 1 Espacios Vectoriales Reales
- 2 Subespacios Vectoriales
- 3 Bases y Dimensión
- 4 Coordenadas y Cambio de Base
- 5 Espacios Vectoriales Euclídeos
- 6 Aplicación: Relojes Digitales

Definición de Espacio Vectorial (I)

Un **Espacio Vectorial** $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un conjunto de elementos (vectores) con dos operaciones:

1. Suma (+)

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \implies \vec{u} + \vec{v} \in V.$$

- Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Elemento neutro ($\vec{0}$): $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- Elemento opuesto ($-\vec{u}$): $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Definición de Espacio Vectorial (II)

2. Producto por Escalar (\cdot)

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in V$:

- Distributiva (I): $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- Distributiva (II): $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- Asociativa mixta: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
- Elemento unidad: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Ejemplo: Propiedades de la Suma en \mathbb{R}^2

Sean $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (4, 1)$ y $\vec{w} = (1, -2)$ en \mathbb{R}^2 .

- **Conmutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$$(2, 3) + (4, 1) = (6, 4) \quad \text{y} \quad (4, 1) + (2, 3) = (6, 4)$$

- **Asociativa:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$$\underbrace{((2, 3) + (4, 1))}_{(6,4)} + (1, -2) = (7, 2)$$

$$(2, 3) + \underbrace{((4, 1) + (1, -2))}_{(5,-1)} = (7, 2)$$

- **Elemento Neutro:** $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

$$(2, 3) + (0, 0) = (2, 3)$$

- **Elemento Opuesto:** $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

$$(2, 3) + (-2, -3) = (0, 0)$$

Ejemplo: Propiedades del Producto por Escalar en \mathbb{R}^2

Sean $\alpha = 2, \beta = 3 \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = (2, 4), \vec{v} = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$.

- **Distributiva 1:** $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

$$2((2, 4) + (1, -1)) = 2(3, 3) = (6, 6)$$

$$2(2, 4) + 2(1, -1) = (4, 8) + (2, -2) = (6, 6)$$

- **Distributiva 2:** $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

$$(2 + 3)(2, 4) = 5(2, 4) = (10, 20)$$

$$2(2, 4) + 3(2, 4) = (4, 8) + (6, 12) = (10, 20)$$

- **Asociativa Mixta:** $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

$$2(3(2, 4)) = 2(6, 12) = (12, 24) \quad \text{y} \quad (2 \cdot 3)(2, 4) = 6(2, 4) = (12, 24)$$

- **Elemento Unidad:** $1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \implies 1(2, 4) = (2, 4)$

Ejemplo 2: Espacio de Matrices $M_{2 \times 2}$

El conjunto de matrices 2×2 es un espacio vectorial.

Operaciones

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

- **Suma:** $A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+0 \\ 0+1 & -1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$
- **V. Cero:** $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies A + \vec{0} = A$
- **Prod. escalar ($\alpha = 2$):** $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3: Espacio de Polinomios $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Polinomios de grado menor o igual a 2: $ax^2 + bx + c$.

- **Suma:** $(x^2 + 1) + (2x - 3) = x^2 + 2x - 2$.
- **Neutro:** El polinomio cero $0x^2 + 0x + 0$.

¡Cuidado!

¿Es el conjunto de polinomios de **grado exactamente 2** un espacio vectorial?

Ejemplo 3: Espacio de Polinomios $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Polinomios de grado menor o igual a 2: $ax^2 + bx + c$.

- **Suma:** $(x^2 + 1) + (2x - 3) = x^2 + 2x - 2$.
- **Neutro:** El polinomio cero $0x^2 + 0x + 0$.

¡Cuidado!

¿Es el conjunto de polinomios de **grado exactamente 2** un espacio vectorial? **NO**.

$$(x^2 + x) + (-x^2 + 1) = x + 1$$

La suma de dos polinomios de grado 2 puede resultar en uno de grado 1.
No es cerrado para la suma.

Ejemplo: Espacio de Funciones Reales $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

El conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ forma un espacio vectorial con las operaciones:

- **Suma:** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Producto:** $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$
- **Vector Cero:** Función $n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- **Vector Opuesto:** Función $-f$ tal que $(-f)(x) = -f(x)$.

Ejemplo: Espacio de Funciones Reales $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

El conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ forma un espacio vectorial con las operaciones:

- **Suma:** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Producto:** $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$
- **Vector Cero:** Función $n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- **Vector Opuesto:** Función $-f$ tal que $(-f)(x) = -f(x)$.

Ejemplo con funciones concretas

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = \text{sen}(x)$.

- **Suma:** $(f + g)(x) = x^2 + \text{sen}(x)$.
- **Producto por $\alpha = 3$:** $(3f)(x) = 3x^2$.

Ejemplo: Espacio de Funciones Reales $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

El conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ forma un espacio vectorial con las operaciones:

- **Suma:** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Producto:** $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$
- **Vector Cero:** Función $n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- **Vector Opuesto:** Función $-f$ tal que $(-f)(x) = -f(x)$.

Ejemplo con funciones concretas

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = \text{sen}(x)$.

- **Suma:** $(f + g)(x) = x^2 + \text{sen}(x)$.
- **Producto por $\alpha = 3$:** $(3f)(x) = 3x^2$.

La suma sigue siendo una función real del mismo espacio.

Desarrollo de Propiedades en $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Las propiedades de la suma se demuestran a partir de las propiedades de \mathbb{R} :

① **Conmutativa:** $f + g = g + f$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \underbrace{=}_{\text{en } \mathbb{R}} g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

Desarrollo de Propiedades en $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Las propiedades de la suma se demuestran a partir de las propiedades de \mathbb{R} :

① **Conmutativa:** $f + g = g + f$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \underbrace{=}_{\text{en } \mathbb{R}} g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

② **Asociativa:** $(f + g) + h = f + (g + h)$

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &\underbrace{=}_{\text{en } \mathbb{R}} f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x) \end{aligned}$$

Preguntas de Concepto (Espacios Vectoriales)

¿Son los siguientes conjuntos Espacios Vectoriales sobre \mathbb{R} ?

- **1. El conjunto de números reales \mathbb{R} con la suma usual.**

Preguntas de Concepto (Espacios Vectoriales)

¿Son los siguientes conjuntos Espacios Vectoriales sobre \mathbb{R} ?

- **1. El conjunto de números reales \mathbb{R} con la suma usual.**
→ **SÍ.** Es el caso $n = 1$.
- **2. El intervalo cerrado $[0, 1]$.**

Preguntas de Concepto (Espacios Vectoriales)

¿Son los siguientes conjuntos Espacios Vectoriales sobre \mathbb{R} ?

- **1. El conjunto de números reales \mathbb{R} con la suma usual.**
→ **SÍ.** Es el caso $n = 1$.
- **2. El intervalo cerrado $[0, 1]$.**
→ **NO.** Falla la suma cerrada ($0,8 + 0,5 = 1,3 \notin [0, 1]$).
- **3. El intervalo $[0, \infty)$.**

Preguntas de Concepto (Espacios Vectoriales)

¿Son los siguientes conjuntos Espacios Vectoriales sobre \mathbb{R} ?

- **1. El conjunto de números reales \mathbb{R} con la suma usual.**
→ **SÍ.** Es el caso $n = 1$.
- **2. El intervalo cerrado $[0, 1]$.**
→ **NO.** Falla la suma cerrada ($0,8 + 0,5 = 1,3 \notin [0, 1]$).
- **3. El intervalo $[0, \infty)$.**
→ **NO.** Falla el elemento opuesto (no hay negativos).
- **4. El conjunto \mathbb{Z}^2 (coordenadas enteras).**

Preguntas de Concepto (Espacios Vectoriales)

¿Son los siguientes conjuntos Espacios Vectoriales sobre \mathbb{R} ?

- **1. El conjunto de números reales \mathbb{R} con la suma usual.**
→ **SÍ.** Es el caso $n = 1$.
- **2. El intervalo cerrado $[0, 1]$.**
→ **NO.** Falla la suma cerrada ($0,8 + 0,5 = 1,3 \notin [0, 1]$).
- **3. El intervalo $[0, \infty)$.**
→ **NO.** Falla el elemento opuesto (no hay negativos).
- **4. El conjunto \mathbb{Z}^2 (coordenadas enteras).**
→ **NO.** Falla producto por escalar ($0,5 \cdot (1, 1) = (0,5, 0,5) \notin \mathbb{Z}^2$).
- **5. Polinomios con término independiente 1 ($p(0) = 1$).**

Preguntas de Concepto (Espacios Vectoriales)

¿Son los siguientes conjuntos Espacios Vectoriales sobre \mathbb{R} ?

- **1. El conjunto de números reales \mathbb{R} con la suma usual.**
→ **SÍ.** Es el caso $n = 1$.
- **2. El intervalo cerrado $[0, 1]$.**
→ **NO.** Falla la suma cerrada ($0,8 + 0,5 = 1,3 \notin [0, 1]$).
- **3. El intervalo $[0, \infty)$.**
→ **NO.** Falla el elemento opuesto (no hay negativos).
- **4. El conjunto \mathbb{Z}^2 (coordenadas enteras).**
→ **NO.** Falla producto por escalar ($0,5 \cdot (1, 1) = (0,5, 0,5) \notin \mathbb{Z}^2$).
- **5. Polinomios con término independiente 1 ($p(0) = 1$).**
→ **NO.** No contiene al vector cero ($p(x) = 0 \implies p(0) = 0 \neq 1$).

Subespacios Vectoriales

$S \subseteq V$ es subespacio si es e.v. con las operaciones de V .

Caracterización

S es subespacio \iff :

- 1 $S \neq \emptyset$.
- 2 $\vec{u}, \vec{v} \in S \implies \vec{u} + \vec{v} \in S$.
- 3 $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{u} \in S \implies \alpha\vec{u} \in S$.

Subespacios Vectoriales

$S \subseteq V$ es subespacio si es e.v. con las operaciones de V .

Caracterización

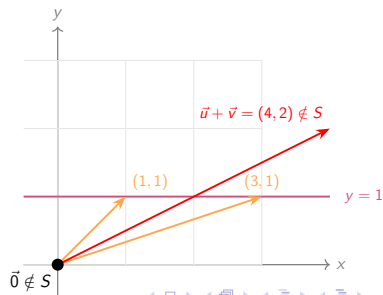
S es subespacio \iff :

- 1 $S \neq \emptyset$.
- 2 $\vec{u}, \vec{v} \in S \implies \vec{u} + \vec{v} \in S$.
- 3 $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{u} \in S \implies \alpha\vec{u} \in S$.

¿Por qué vectores de la forma $(x, 1)$ no forman un subespacio?

- **No contiene el cero:** El origen $\vec{0} = (0, 0)$ no cumple la condición $y = 1$.
- **No es cerrada para la suma:**
 $(1, 1) + (3, 1) = (4, 2) \notin S$.

Vectores de la forma $(x, 0)$ sí forman un subespacio.



Ejemplo Geométrico: Planos en \mathbb{R}^3

Caso A: $S_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$

Ejemplo Geométrico: Planos en \mathbb{R}^3

Caso A: $S_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$

Es el plano XY.

- Contiene al $(0, 0, 0)$.
- Suma: $(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$. La tercera comp. sigue siendo 0.
- **Es Subespacio.**

Ejemplo Geométrico: Planos en \mathbb{R}^3

Caso A: $S_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$

Es el plano XY.

- Contiene al $(0, 0, 0)$.
- Suma: $(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$. La tercera comp. sigue siendo 0.
- **Es Subespacio.**

Caso B: $S_2 = \{(x, y, z) \mid z = 1\}$

Ejemplo Geométrico: Planos en \mathbb{R}^3

Caso A: $S_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$

Es el plano XY.

- Contiene al $(0, 0, 0)$.
- Suma: $(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$. La tercera comp. sigue siendo 0.
- **Es Subespacio.**

Caso B: $S_2 = \{(x, y, z) \mid z = 1\}$

Es un plano elevado.

- **No** contiene al $(0, 0, 0)$ (pues $0 \neq 1$).
- Suma: $(0, 0, 1) + (0, 0, 1) = (0, 0, 2)$. ¡Salimos del plano!
- **No es Subespacio.**

Ejemplo Analítico: Matrices Simétricas

Sea $V = M_{2 \times 2}$. Sea S el conjunto de matrices simétricas ($A = A^T$).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

- 1 La matriz nula es simétrica.
- 2 Suma: Si A, B son simétricas:

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$$

$\implies A + B$ es simétrica.

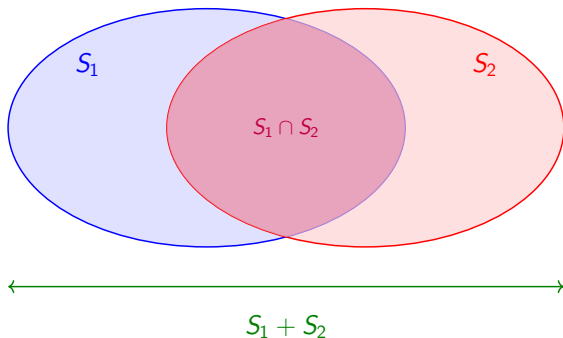
- 3 Escalar: $(\alpha A)^T = \alpha(A^T) = \alpha A$.

Conclusión: Las matrices simétricas forman un subespacio vectorial.

Intersección y Suma de Subespacios

Sean S_1, S_2 subespacios de V .

- **Intersección:** $S_1 \cap S_2$. Es siempre subespacio.
- **Suma:** $S_1 + S_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid \vec{u}_1 \in S_1, \vec{u}_2 \in S_2\}$. Es el mínimo subespacio que los contiene.



Preguntas de Concepto (Subespacios)

¿Son los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 subespacios?

- **1. Una recta que pasa por el origen ($y = 2x$).**

Preguntas de Concepto (Subespacios)

¿Son los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 subespacios?

- **1. Una recta que pasa por el origen ($y = 2x$).**
→ **SÍ.** Cerrado para suma y producto.
- **2. Una recta que NO pasa por el origen ($y = 2x + 1$).**

Preguntas de Concepto (Subespacios)

¿Son los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 subespacios?

- **1. Una recta que pasa por el origen ($y = 2x$).**
→ **SÍ.** Cerrado para suma y producto.
- **2. Una recta que NO pasa por el origen ($y = 2x + 1$).**
→ **NO.** No contiene al vector $\vec{0}$.
- **3. La unión de los ejes X e Y ($xy = 0$).**

Preguntas de Concepto (Subespacios)

¿Son los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 subespacios?

- **1. Una recta que pasa por el origen ($y = 2x$).**
→ **SÍ.** Cerrado para suma y producto.
- **2. Una recta que NO pasa por el origen ($y = 2x + 1$).**
→ **NO.** No contiene al vector $\vec{0}$.
- **3. La unión de los ejes X e Y ($xy = 0$).**
→ **NO.** $(1, 0) \in S, (0, 1) \in S$ pero $(1, 1) \notin S$.
- **4. Soluciones de un sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.**

Preguntas de Concepto (Subespacios)

¿Son los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 subespacios?

- **1. Una recta que pasa por el origen ($y = 2x$).**
→ **SÍ.** Cerrado para suma y producto.
- **2. Una recta que NO pasa por el origen ($y = 2x + 1$).**
→ **NO.** No contiene al vector $\vec{0}$.
- **3. La unión de los ejes X e Y ($xy = 0$).**
→ **NO.** $(1, 0) \in S, (0, 1) \in S$ pero $(1, 1) \notin S$.
- **4. Soluciones de un sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.**
→ **SÍ.** Es el núcleo de la matriz.
- **5. Soluciones de $A\vec{x} = \vec{b}$ con $\vec{b} \neq \vec{0}$.**

Preguntas de Concepto (Subespacios)

¿Son los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 subespacios?

- **1. Una recta que pasa por el origen ($y = 2x$).**
→ **SÍ.** Cerrado para suma y producto.
- **2. Una recta que NO pasa por el origen ($y = 2x + 1$).**
→ **NO.** No contiene al vector $\vec{0}$.
- **3. La unión de los ejes X e Y ($xy = 0$).**
→ **NO.** $(1, 0) \in S, (0, 1) \in S$ pero $(1, 1) \notin S$.
- **4. Soluciones de un sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.**
→ **SÍ.** Es el núcleo de la matriz.
- **5. Soluciones de $A\vec{x} = \vec{b}$ con $\vec{b} \neq \vec{0}$.**
→ **NO.** No contiene al vector cero (sistema no homogéneo).

Dependencia e Independencia Lineal

Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\} \subset V$.

- **L.I.:** $\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0} \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i$.
- **L.D.:** Algún vector depende de los demás.

Ejemplo

Demostrar que $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, -1)$ son L.I.

Dependencia e Independencia Lineal

Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\} \subset V$.

- **L.I.:** $\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0} \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i$.
- **L.D.:** Algún vector depende de los demás.

Ejemplo

Demostrar que $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, -1)$ son L.I. Combinación lineal nula:

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, -1) = (0, 0, 0) \implies \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Dependencia e Independencia Lineal

Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\} \subset V$.

- **L.I.:** $\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0} \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i$.
- **L.D.:** Algún vector depende de los demás.

Ejemplo

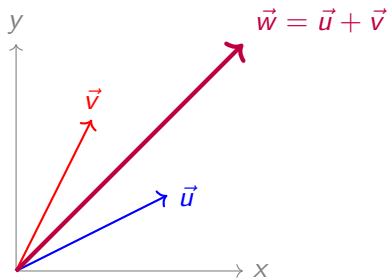
Demostrar que $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, -1)$ son L.I. Combinación lineal nula:

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, -1) = (0, 0, 0) \implies \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

La única solución es $\alpha = \beta = 0 \implies$ son **L.I.**

Dependencia Lineal: Ejemplo Visual

En \mathbb{R}^3 , tres vectores son **Linealmente Dependientes** si son coplanarios (están en el mismo plano).



\vec{w} no aporta nueva dimensión.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es un **Sistema Generador** de V si cualquier vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de ellos:

$$V = L\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es un **Sistema Generador** de V si cualquier vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de ellos:

$$V = L\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

Características:

- Un sistema generador “rellena” todo el espacio.
- **Redundancia:** Puede tener vectores de más (linealmente dependientes).
- Al quitar los vectores redundantes, el espacio generado no cambia.

Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es un **Sistema Generador** de V si cualquier vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de ellos:

$$V = L\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

Características:

- Un sistema generador “rellena” todo el espacio.
- **Redundancia:** Puede tener vectores de más (linealmente dependientes).
- Al quitar los vectores redundantes, el espacio generado no cambia.

Ejemplo en \mathbb{R}^2

Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es un **Sistema Generador** de V si cualquier vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de ellos:

$$V = L\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

Características:

- Un sistema generador “rellena” todo el espacio.
- **Redundancia:** Puede tener vectores de más (linealmente dependientes).
- Al quitar los vectores redundantes, el espacio generado no cambia.

Ejemplo en \mathbb{R}^2

$\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ es sistema generador de \mathbb{R}^2 , pero tiene un vector más de los necesarios $((1, 1))$.

Definición de Base

Una **Base** es un sistema generador “eficiente” (sin redundancias). Debe cumplir:

- 1 **Sistema Generador:** Todo vector del espacio vectorial es combinación lineal de los vectores de la base.
- 2 **Linealmente Independiente:** No sobra ningún vector (tiene los vectores mínimos necesarios).

Base y Dimensión

Definición de Base

Una **Base** es un sistema generador “eficiente” (sin redundancias). Debe cumplir:

- 1 **Sistema Generador:** Todo vector del espacio vectorial es combinación lineal de los vectores de la base.
- 2 **Linealmente Independiente:** No sobra ningún vector (tiene los vectores mínimos necesarios).

Diferencia clave

- **Sistema Generador:** Basta con que los vectores “cubran” todo el espacio (pueden sobrar).
- **Base:** Es el conjunto **mínimo** de vectores que genera el espacio.

Dimensión: Número de elementos de cualquier base de V .

Bases Canónicas (Ejemplos de Referencia)

Es fundamental conocer las bases estándar (canónicas) de los espacios más comunes:

\mathbb{R}^3 (Dimensión 3)

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ (Dimensión 3)

$$B = \{1, x, x^2\}$$

Cualquier $p(x) = a + bx + cx^2$ es combinación lineal de estos.

$M_{2 \times 2}$ (Dimensión 4)

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio en Clase: Cálculo de Base

Problema: Hallar una base para el subespacio

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}.$$

Solución:

- **1. Despejar variables:** De la ecuación implícita, $z = x + y$.
- **2. Vector Genérico:** Sustituimos z en el vector (x, y, z) :

$$(x, y, x + y)$$

- **3. Descomposición:** Separamos los parámetros libres (x e y):

$$(x, 0, x) + (0, y, y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$$

- **4. Base:** Los vectores obtenidos son L.I. (uno no es múltiplo del otro).

$$B_W = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

Dimensión: 2 (Es un plano que pasa por el origen).

Fórmula de Grassmann

Relaciona las dimensiones de la suma e intersección de subespacios:

Teorema de Grassmann

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$$

Nota: Si $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$, se dice que la suma es **directa** ($S_1 \oplus S_2$).

Preguntas de Concepto (Dimensión)

- 1. En \mathbb{R}^3 , ¿puede un conjunto de 4 vectores ser base?

Preguntas de Concepto (Dimensión)

- **1. En \mathbb{R}^3 , ¿puede un conjunto de 4 vectores ser base?**
→ **NO**. Son L.D. (Teorema: $m > n \implies$ L.D.).
- **2. En \mathbb{R}^3 , ¿puede un conjunto de 2 vectores ser base?**

Preguntas de Concepto (Dimensión)

- **1. En \mathbb{R}^3 , ¿puede un conjunto de 4 vectores ser base?**
→ **NO**. Son L.D. (Teorema: $m > n \implies$ L.D.).
- **2. En \mathbb{R}^3 , ¿puede un conjunto de 2 vectores ser base?**
→ **NO**. No generan todo \mathbb{R}^3 .
- **3. ¿Cuál es la dimensión de $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$?**

Preguntas de Concepto (Dimensión)

- **1. En \mathbb{R}^3 , ¿puede un conjunto de 4 vectores ser base?**
→ **NO**. Son L.D. (Teorema: $m > n \implies$ L.D.).
- **2. En \mathbb{R}^3 , ¿puede un conjunto de 2 vectores ser base?**
→ **NO**. No generan todo \mathbb{R}^3 .
- **3. ¿Cuál es la dimensión de $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$?**
→ **6**. Base canónica tiene 6 elementos (\mathcal{E}_{ij}).
- **5. Si quitamos un vector a una base, ¿sigue generando el espacio?**

Preguntas de Concepto (Dimensión)

- **1. En \mathbb{R}^3 , ¿puede un conjunto de 4 vectores ser base?**
→ **NO**. Son L.D. (Teorema: $m > n \implies$ L.D.).
- **2. En \mathbb{R}^3 , ¿puede un conjunto de 2 vectores ser base?**
→ **NO**. No generan todo \mathbb{R}^3 .
- **3. ¿Cuál es la dimensión de $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$?**
→ **6**. Base canónica tiene 6 elementos (\mathcal{E}_{ij}).
- **5. Si quitamos un vector a una base, ¿sigue generando el espacio?**
→ **NO**. Faltaría “dirección” para cubrir todo el espacio.

Coordenadas y Bases

Un mismo espacio vectorial puede tener **infinitas bases** distintas. El vector es un objeto geométrico único, pero su “nombre” (coordenadas) depende de la base elegida.

Invarianza de la Dimensión

Aunque existan muchas bases, todas ellas tienen siempre el **mismo número de elementos**. Este número es la **dimensión** del espacio.

Coordenadas y Bases

Un mismo espacio vectorial puede tener **infinitas bases** distintas. El vector es un objeto geométrico único, pero su “nombre” (coordenadas) depende de la base elegida.

Invarianza de la Dimensión

Aunque existan muchas bases, todas ellas tienen siempre el **mismo número de elementos**. Este número es la **dimensión** del espacio.

- **Coordenadas:** Son los escalares $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ que permiten expresar al vector como combinación lineal de la base: $\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$.
- **Cambio de Base:** Es el proceso de transformar las coordenadas de un vector al pasar de una referencia a otra.

Un mismo espacio vectorial puede tener **infinitas bases** distintas. El vector es un objeto geométrico único, pero su “nombre” (coordenadas) depende de la base elegida.

Invarianza de la Dimensión

Aunque existan muchas bases, todas ellas tienen siempre el **mismo número de elementos**. Este número es la **dimensión** del espacio.

- **Coordenadas:** Son los escalares $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ que permiten expresar al vector como combinación lineal de la base: $\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$.
- **Cambio de Base:** Es el proceso de transformar las coordenadas de un vector al pasar de una referencia a otra.

Idea clave: Al cambiar la base, cambiamos el sistema de referencia, pero el vector sigue siendo el mismo.

La Matriz de Cambio de Base

Para pasar de las coordenadas en una base B' a las de una base B , utilizamos una matriz $P_{BB'}$ denominada **matriz de cambio de base**:

Relación entre coordenadas

$$[\vec{v}]_{B'} = P_{BB'} \cdot [\vec{v}]_B$$

La Matriz de Cambio de Base

Para pasar de las coordenadas en una base B' a las de una base B , utilizamos una matriz $P_{BB'}$ denominada **matriz de cambio de base**:

Relación entre coordenadas

$$[\vec{v}]_{B'} = P_{BB'} \cdot [\vec{v}]_B$$

- **Construcción:** Las columnas de la matriz P son las coordenadas de los vectores de la base B' expresados en la base B .
- **Inversibilidad:** Estas matrices son siempre cuadradas y su determinante es no nulo ($|P| \neq 0$), por lo que:

$$[\vec{v}]_B = (P_{BB'})^{-1} \cdot [\vec{v}]_{B'}$$

La Matriz de Cambio de Base

Para pasar de las coordenadas en una base B' a las de una base B , utilizamos una matriz $P_{BB'}$ denominada **matriz de cambio de base**:

Relación entre coordenadas

$$[\vec{v}]_{B'} = P_{BB'} \cdot [\vec{v}]_B$$

- **Construcción:** Las columnas de la matriz P son las coordenadas de los vectores de la base B' expresados en la base B .
- **Inversibilidad:** Estas matrices son siempre cuadradas y su determinante es no nulo ($|P| \neq 0$), por lo que:

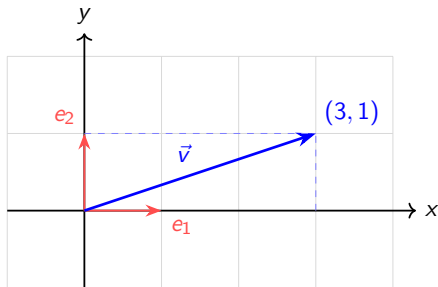
$$[\vec{v}]_B = (P_{BB'})^{-1} \cdot [\vec{v}]_{B'}$$

Nota: Si la base B es la canónica, la matriz es muy fácil de construir (solo hay que poner los vectores de B' en columnas).

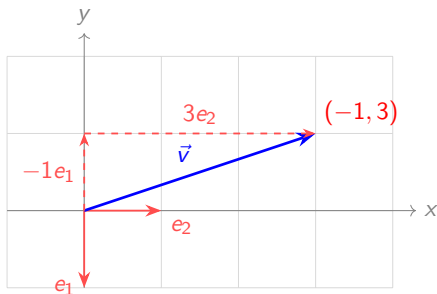
Ejemplo Cambio de Base

Sea $\vec{v} = (3, 1)_C$ en la base canónica. Queremos sus coordenadas en $B = \{e_1 = (0, -1), e_2 = (1, 0)\}$.

Canónica $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$



Base B $= \{(0, -1), (1, 0)\}$



Observamos que: $\vec{v} = 3(1, 0) + 1(0, 1) = (-1)(0, -1) + 3(1, 0)$.

Cálculo Matricial del Cambio de Base

Para hallar $[\vec{v}]_B$ usando matrices: $[\vec{v}]_B = P_{CB}[\vec{v}]_C$.

① **Construir** P_{BC} : (Columnas de B en función de C)

$$B = \{(0, -1), (1, 0)\} \implies P_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo Matricial del Cambio de Base

Para hallar $[\vec{v}]_B$ usando matrices: $[\vec{v}]_B = P_{CB}[\vec{v}]_C$.

- ① **Construir** P_{BC} : (Columnas de B en función de C)

$$B = \{(0, -1), (1, 0)\} \implies P_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ② **Calcular** P_{CB} : (La inversa de P_{BC})

$$P_{CB} = (P_{BC})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo Matricial del Cambio de Base

Para hallar $[\vec{v}]_B$ usando matrices: $[\vec{v}]_B = P_{CB}[\vec{v}]_C$.

- ① **Construir** P_{BC} : (Columnas de B en función de C)

$$B = \{(0, -1), (1, 0)\} \implies P_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ② **Calcular** P_{CB} : (La inversa de P_{BC})

$$P_{CB} = (P_{BC})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ③ **Multiplicar:**

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Conclusión

El resultado coincide con la inspección visual: las coordenadas en la nueva base son $(-1, 3)$.

Ejemplo Numérico: Coordenadas

Sea la base $B = \{\vec{u}_1 = (1, 1), \vec{u}_2 = (1, -1)\}$ de \mathbb{R}^2 . Hallar las coordenadas del vector $\vec{v} = (5, 1)$ en la base B .

Buscamos α, β tales que:

$$(5, 1) = \alpha(1, 1) + \beta(1, -1)$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones: $2\alpha = 6 \implies \alpha = 3$.

Restando: $2\beta = 4 \implies \beta = 2$.

Las coordenadas son $[\vec{v}]_B = (3, 2)$.

Comprobación: $3(1, 1) + 2(1, -1) = (3, 3) + (2, -2) = (5, 1)$.

Matriz de Cambio de Base (Ejemplo 2 \rightarrow 2)

Si tenemos coordenadas en la base B y queremos volver a la Canónica C :

$$[\vec{v}]_C = P_{CB} \cdot [\vec{v}]_B$$

Usando el ejemplo anterior ($B = \{(1, 1), (1, -1)\}$):

$$P_{CB} = \text{Colocamos los vectores de } B \text{ en columnas} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$

Recuperamos el vector original correctamente.

Preguntas de Concepto Finales

- **1. Si cambiamos de base, ¿cambia la dimensión del espacio?**

Preguntas de Concepto Finales

- **1. Si cambiamos de base, ¿cambia la dimensión del espacio?**
→ **NO**. La dimensión es intrínseca al espacio.
- **2. ¿La matriz de cambio de base es siempre invertible?**

Preguntas de Concepto Finales

- **1. Si cambiamos de base, ¿cambia la dimensión del espacio?**
→ **NO**. La dimensión es intrínseca al espacio.
- **2. ¿La matriz de cambio de base es siempre invertible?**
→ **SÍ**. Transforma una base en otra (ambas L.I.).
- **3. ¿Qué relación hay entre $P_{BB'}$ y $P_{B'B}$?**

Preguntas de Concepto Finales

- **1. Si cambiamos de base, ¿cambia la dimensión del espacio?**
→ **NO**. La dimensión es intrínseca al espacio.
- **2. ¿La matriz de cambio de base es siempre invertible?**
→ **SÍ**. Transforma una base en otra (ambas L.I.).
- **3. ¿Qué relación hay entre $P_{BB'}$ y $P_{B'B}$?**
→ **Son inversas** ($P_{BB'} = (P_{B'B})^{-1}$).
- **4. ¿Si cambiamos el orden de los vectores de la base, cambian las coordenadas?**

Preguntas de Concepto Finales

- **1. Si cambiamos de base, ¿cambia la dimensión del espacio?**
→ **NO**. La dimensión es intrínseca al espacio.
- **2. ¿La matriz de cambio de base es siempre invertible?**
→ **SÍ**. Transforma una base en otra (ambas L.I.).
- **3. ¿Qué relación hay entre $P_{BB'}$ y $P_{B'B}$?**
→ **Son inversas** ($P_{BB'} = (P_{B'B})^{-1}$).
- **4. ¿Si cambiamos el orden de los vectores de la base, cambian las coordenadas?**
→ **SÍ**. Las coordenadas dependen del orden.
- **5. ¿De qué tamaño es la matriz de cambio de base si $\dim V = n$?**

Preguntas de Concepto Finales

- **1. Si cambiamos de base, ¿cambia la dimensión del espacio?**
→ **NO**. La dimensión es intrínseca al espacio.
- **2. ¿La matriz de cambio de base es siempre invertible?**
→ **SÍ**. Transforma una base en otra (ambas L.I.).
- **3. ¿Qué relación hay entre $P_{BB'}$ y $P_{B'B}$?**
→ **Son inversas** ($P_{BB'} = (P_{B'B})^{-1}$).
- **4. ¿Si cambiamos el orden de los vectores de la base, cambian las coordenadas?**
→ **SÍ**. Las coordenadas dependen del orden.
- **5. ¿De qué tamaño es la matriz de cambio de base si $\dim V = n$?**
→ **Cuadrada** $n \times n$.

Producto Interno

Un **Producto Interno** en un e.v. V es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple:

Axiomas

- 1 **Positividad:** $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ y $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.
- 2 **Simetría:** $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.
- 3 **Aditividad:** $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$.
- 4 **Homogeneidad:** $\langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

El Producto Escalar Usual en \mathbb{R}^n

En \mathbb{R}^n , el producto interno habitual (producto escalar) se define como:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Ejemplo

Sean $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (3, 0, 4)$ en \mathbb{R}^3 .

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 = 3 + 0 - 4 = -1$$

Norma (Longitud)

Fijado un producto interno, la **norma** de un vector es:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Distancia

La **distancia** entre dos vectores \vec{u} y \vec{v} es:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle}$$

En \mathbb{R}^n coincide con la noción métrica usual.

Ángulo entre Vectores

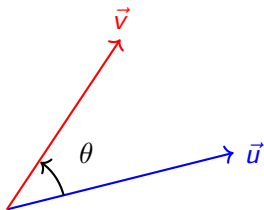
Utilizando el producto interno y las normas, definimos el ángulo θ entre dos vectores \vec{u} , $\vec{v} \neq \vec{0}$:

Fórmula

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Esto es una consecuencia de la **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$



Definition

Dos vectores \vec{u}, \vec{v} son **ortogonales** ($\vec{u} \perp \vec{v}$) si su producto interno es nulo:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

- Geométricamente, $\vec{u} \perp \vec{v}$ significa que forman un ángulo de 90° .
- **Conjunto Ortonormal:** Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ es ortonormal si todos son unitarios ($\|\vec{u}_i\| = 1$) y ortogonales entre sí ($\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$).

Definition

Dos vectores \vec{u}, \vec{v} son **ortogonales** ($\vec{u} \perp \vec{v}$) si su producto interno es nulo:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

- Geométricamente, $\vec{u} \perp \vec{v}$ significa que forman un ángulo de 90° .
- **Conjunto Ortonormal:** Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ es ortonormal si todos son unitarios ($\|\vec{u}_i\| = 1$) y ortogonales entre sí ($\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$).

Ejemplo

La base canónica de \mathbb{R}^n es un conjunto ortonormal.

Complemento Ortogonal

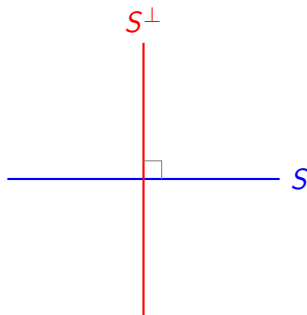
Definition

Sea S un subespacio de V . El **complemento ortogonal** de S , denotado por S^\perp , es el conjunto de todos los vectores de V que son ortogonales a todo vector de S :

$$S^\perp = \{\vec{u} \in V \mid \langle \vec{u}, \vec{s} \rangle = 0, \forall \vec{s} \in S\}$$

Propiedades

- S^\perp es un subespacio vectorial de V .
- $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$.
- $\dim(S) + \dim(S^\perp) = \dim(V)$.



Ejemplo en \mathbb{R}^3 : Complemento Ortogonal

Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Consideremos el subespacio S formado por el **plano XY**:

$$S = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Cualquier vector \vec{u} ortogonal a S debe ser ortogonal a sus vectores de la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Ejemplo en \mathbb{R}^3 : Complemento Ortogonal

Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Consideremos el subespacio S formado por el **plano XY**:

$$S = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Cualquier vector \vec{u} ortogonal a S debe ser ortogonal a sus vectores de la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Cálculo de S^\perp

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 0, 0) = 0 \implies u_1 = 0$$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (0, 1, 0) = 0 \implies u_2 = 0$$

Ejemplo en \mathbb{R}^3 : Complemento Ortogonal

Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Consideremos el subespacio S formado por el **plano XY**:

$$S = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Cualquier vector \vec{u} ortogonal a S debe ser ortogonal a sus vectores de la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Cálculo de S^\perp

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 0, 0) = 0 \implies u_1 = 0$$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (0, 1, 0) = 0 \implies u_2 = 0$$

Resultado: El complemento ortogonal es el **eje Z**:

$$S^\perp = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Cumple: $\dim(S) + \dim(S^\perp) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Preguntas de Repaso (Espacios Euclídeos I)

- **1. Si $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 4$, ¿cuál es la norma de \vec{u} ?**

Preguntas de Repaso (Espacios Euclídeos I)

- **1. Si $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 4$, ¿cuál es la norma de \vec{u} ?**
→ **2** ($\|\vec{u}\| = \sqrt{4}$).
- **2. ¿Qué ángulo forman dos vectores si su producto interno es negativo?**

Preguntas de Repaso (Espacios Euclídeos I)

- **1. Si $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 4$, ¿cuál es la norma de \vec{u} ?**
→ **2** ($\|\vec{u}\| = \sqrt{4}$).
- **2. ¿Qué ángulo forman dos vectores si su producto interno es negativo?**
→ **Obtuso** ($> 90^\circ$, pues $\cos \theta < 0$).
- **3. Si los vectores \vec{u} y \vec{v} son ortogonales, ¿cuánto vale $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$?**

Preguntas de Repaso (Espacios Euclídeos I)

- **1. Si $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 4$, ¿cuál es la norma de \vec{u} ?**
→ **2** ($\|\vec{u}\| = \sqrt{4}$).
- **2. ¿Qué ángulo forman dos vectores si su producto interno es negativo?**
→ **Obtuso** ($> 90^\circ$, pues $\cos \theta < 0$).
- **3. Si los vectores \vec{u} y \vec{v} son ortogonales, ¿cuánto vale $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$?**
→ $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (Teorema de Pitágoras).
- **4. ¿Es posible que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$?**

Preguntas de Repaso (Espacios Euclídeos I)

- **1. Si $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 4$, ¿cuál es la norma de \vec{u} ?**
→ **2** ($\|\vec{u}\| = \sqrt{4}$).
- **2. ¿Qué ángulo forman dos vectores si su producto interno es negativo?**
→ **Obtuso** ($> 90^\circ$, pues $\cos \theta < 0$).
- **3. Si los vectores \vec{u} y \vec{v} son ortogonales, ¿cuánto vale $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$?**
→ $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (Teorema de Pitágoras).
- **4. ¿Es posible que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$?**
→ **SÍ**. Si son proporcionales y del mismo sentido ($\theta = 0^\circ$).

- 5. ¿Toda base ortogonal es ortonormal?

Preguntas de Repaso (Espacios Euclídeos II)

- **5. ¿Toda base ortogonal es ortonormal?**
→ **NO**. Falta que los vectores sean unitarios.
- **6. Si $\dim(V) = 5$ y $\dim(S) = 2$, ¿cuál es la dimensión de S^\perp ?**

Preguntas de Repaso (Espacios Euclídeos II)

- **5. ¿Toda base ortogonal es ortonormal?**
→ **NO**. Falta que los vectores sean unitarios.
- **6. Si $\dim(V) = 5$ y $\dim(S) = 2$, ¿cuál es la dimensión de S^\perp ?**
→ **3** ($5 - 2 = 3$).
- **7. ¿Qué vector pertenece siempre a $S \cap S^\perp$?**

Preguntas de Repaso (Espacios Euclídeos II)

- **5. ¿Toda base ortogonal es ortonormal?**
→ **NO**. Falta que los vectores sean unitarios.
- **6. Si $\dim(V) = 5$ y $\dim(S) = 2$, ¿cuál es la dimensión de S^\perp ?**
→ **3** ($5 - 2 = 3$).
- **7. ¿Qué vector pertenece siempre a $S \cap S^\perp$?**
→ **El vector nulo $\vec{0}$.**

Relojes Digitales y Grupos Cíclicos

Para entender este ejemplo, introducimos el concepto de **Grupo Cíclico**.

- **Reloj Analógico (\mathbb{Z}_{12}):** Las horas van del 1 al 12. Al sumar una hora a las 12, volvemos a la 1. Es una suma módulo 12.
- **Grupo \mathbb{Z}_2 :** Es el grupo cíclico de orden dos, con elementos $\{0, 1\}$.

Suma Módulo 2

+	0	1
0	0	1
1	1	0

\implies Representa lógica: 0=Falso, 1=Verdadero.

Podemos construir un **espacio vectorial** donde los componentes de los vectores pertenezcan a \mathbb{Z}_2 .

Representación LED de 7 Segmentos

Consideramos un reloj digital LED de 7 componentes. Cada LED que esté encendido se representará con 1 y será 0 cuando esté apagado.

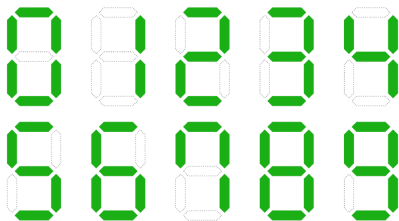


Figura: Los 10 números de un reloj digital.

Cada número se representa como un vector $\vec{v} \in (\mathbb{Z}_2)^7$.

Suma de Números Digitales

Podemos realizar sumas de vectores (números) aplicando la suma módulo 2 componente a componente.

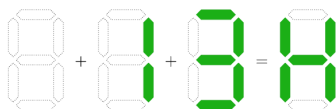


Figura: Ejemplos de suma de números LED.

- Si ambos LEDs están encendidos ($1 + 1$), el resultado es apagado (0).
- Si uno está encendido y otro apagado ($1 + 0$), el resultado es encendido (1).

Verificación como Espacio Vectorial

Este sistema forma un espacio vectorial de **dimensión 7** sobre el cuerpo \mathbb{Z}_2 .

Propiedades de la Suma:

- **Conn. y Asoc.:** Heredadas de \mathbb{Z}_2 .
- **E. Neutro:** Vector apagado.
- **E. Opuesto:** $v + v = \vec{0}$.

Prod. Escalar:

- **Distr. y Asoc.:** Propiedades del grupo.
- **E. Unidad:** $1 \cdot v = v$.

Preguntas Finales de Repaso (1/4)

- 1. ¿Cuál es la dimensión de las matrices diagonales 3×3 ?

Preguntas Finales de Repaso (1/4)

- **1. ¿Cuál es la dimensión de las matrices diagonales 3×3 ?**
→ **3.** Tienen 3 elementos libres en la diagonal.
- **2. ¿Pueden dos bases distintas tener distinto número de elementos?**

Preguntas Finales de Repaso (1/4)

- **1. ¿Cuál es la dimensión de las matrices diagonales 3×3 ?**
→ **3**. Tienen 3 elementos libres en la diagonal.
- **2. ¿Pueden dos bases distintas tener distinto número de elementos?**
→ **NO**. Todas las bases de un mismo espacio tienen el mismo cardinal (dimensión).
- **3. Si $\det(P_{BC}) \neq 0$, ¿es B una base válida?**

Preguntas Finales de Repaso (1/4)

- **1. ¿Cuál es la dimensión de las matrices diagonales 3×3 ?**
→ **3**. Tienen 3 elementos libres en la diagonal.
- **2. ¿Pueden dos bases distintas tener distinto número de elementos?**
→ **NO**. Todas las bases de un mismo espacio tienen el mismo cardinal (dimensión).
- **3. Si $\det(P_{BC}) \neq 0$, ¿es B una base válida?**
→ **SÍ**. Si la matriz de cambio es regular, los vectores son L.I.
- **4. ¿Es el conjunto vacío linealmente independiente?**

Preguntas Finales de Repaso (1/4)

- **1. ¿Cuál es la dimensión de las matrices diagonales 3×3 ?**
→ **3.** Tienen 3 elementos libres en la diagonal.
- **2. ¿Pueden dos bases distintas tener distinto número de elementos?**
→ **NO.** Todas las bases de un mismo espacio tienen el mismo cardinal (dimensión).
- **3. Si $\det(P_{BC}) \neq 0$, ¿es B una base válida?**
→ **SÍ.** Si la matriz de cambio es regular, los vectores son L.I.
- **4. ¿Es el conjunto vacío linealmente independiente?**
→ **SÍ.** Por convención.

Preguntas Finales de Repaso (2/4)

- **5. ¿Es $W = \{(x, y) : x \geq 0\}$ un subespacio?**

Preguntas Finales de Repaso (2/4)

- **5. ¿Es $W = \{(x, y) : x \geq 0\}$ un subespacio?**
→ **NO**. No existe el elemento opuesto (si $v = (1, 0)$,
 $-v = (-1, 0) \notin W$).
- **6. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{0}$?**

Preguntas Finales de Repaso (2/4)

- **5. ¿Es $W = \{(x, y) : x \geq 0\}$ un subespacio?**
→ **NO**. No existe el elemento opuesto (si $v = (1, 0)$, $-v = (-1, 0) \notin W$).
- **6. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{0}$?**
→ **Siempre $\mathbf{0}$** en cualquier base.
- **7. Si $S \subset W$ son subespacios, ¿siempre $\dim(S) < \dim(W)$?**

Preguntas Finales de Repaso (2/4)

- **5. ¿Es $W = \{(x, y) : x \geq 0\}$ un subespacio?**
→ **NO**. No existe el elemento opuesto (si $v = (1, 0)$, $-v = (-1, 0) \notin W$).
- **6. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{0}$?**
→ **Siempre 0** en cualquier base.
- **7. Si $S \subset W$ son subespacios, ¿siempre $\dim(S) < \dim(W)$?**
→ **NO**. Puede ser \leq . Si son iguales, la dimensión es la misma.

- 8. ¿El conjunto de polinomios de grado exactamente 3 es E.V.?

Preguntas Finales de Repaso (3/4)

- **8. ¿El conjunto de polinomios de grado exactamente 3 es E.V.?**
→ **NO**. No es cerrado para la suma ($x^3 + (-x^3 + x) = x$).
- **9. ¿La intersección de dos planos por el origen en \mathbb{R}^3 es siempre una recta?**

Preguntas Finales de Repaso (3/4)

- **8. ¿El conjunto de polinomios de grado exactamente 3 es E.V.?**
→ **NO**. No es cerrado para la suma ($x^3 + (-x^3 + x) = x$).
- **9. ¿La intersección de dos planos por el origen en \mathbb{R}^3 es siempre una recta?**
→ **NO**. Si son el mismo plano, la intersección es el propio plano.
- **10. ¿Puede un conjunto de 4 vectores en \mathbb{R}^3 ser L.I.?**

Preguntas Finales de Repaso (3/4)

- **8. ¿El conjunto de polinomios de grado exactamente 3 es E.V.?**
→ **NO**. No es cerrado para la suma ($x^3 + (-x^3 + x) = x$).
- **9. ¿La intersección de dos planos por el origen en \mathbb{R}^3 es siempre una recta?**
→ **NO**. Si son el mismo plano, la intersección es el propio plano.
- **10. ¿Puede un conjunto de 4 vectores en \mathbb{R}^3 ser L.I.?**
→ **NO**. En \mathbb{R}^n , cualquier conjunto de $m > n$ vectores es L.D.

Preguntas Finales de Repaso (4/4)

- **11. Si un vector es ortogonal a una base de un subespacio S , ¿lo es también a todo vector de S ?**

Preguntas Finales de Repaso (4/4)

- **11. Si un vector es ortogonal a una base de un subespacio S , ¿lo es también a todo vector de S ?**
→ **SÍ.** Por la propiedad distributiva del producto interno.
- **12. Si el producto interno de dos vectores es cero, ¿significa necesariamente que uno de ellos es el vector nulo?**

Preguntas Finales de Repaso (4/4)

- **11. Si un vector es ortogonal a una base de un subespacio S , ¿lo es también a todo vector de S ?**
→ **SÍ.** Por la propiedad distributiva del producto interno.
- **12. Si el producto interno de dos vectores es cero, ¿significa necesariamente que uno de ellos es el vector nulo?**
→ **NO**, pueden ser perpendiculares (ortogonales).
- **13. ¿Cuál es el complemento ortogonal de todo el espacio V ? ¿Y el del subespacio $\{\vec{0}\}$?**

Preguntas Finales de Repaso (4/4)

- **11. Si un vector es ortogonal a una base de un subespacio S , ¿lo es también a todo vector de S ?**
→ **SÍ**. Por la propiedad distributiva del producto interno.
- **12. Si el producto interno de dos vectores es cero, ¿significa necesariamente que uno de ellos es el vector nulo?**
→ **NO**, pueden ser perpendiculares (ortogonales).
- **13. ¿Cuál es el complemento ortogonal de todo el espacio V ? ¿Y el del subespacio $\{\vec{0}\}$?**
→ $V^\perp = \{\vec{0}\}$ y $\{\vec{0}\}^\perp = V$.
- **14. Si conocemos las normas $\|\vec{u}\|$ y $\|\vec{v}\|$, ¿podemos calcular $\|\vec{u} + \vec{v}\|$?**

Preguntas Finales de Repaso (4/4)

- **11. Si un vector es ortogonal a una base de un subespacio S , ¿lo es también a todo vector de S ?**
→ **SÍ.** Por la propiedad distributiva del producto interno.
- **12. Si el producto interno de dos vectores es cero, ¿significa necesariamente que uno de ellos es el vector nulo?**
→ **NO**, pueden ser perpendiculares (ortogonales).
- **13. ¿Cuál es el complemento ortogonal de todo el espacio V ? ¿Y el del subespacio $\{\vec{0}\}$?**
→ $V^\perp = \{\vec{0}\}$ y $\{\vec{0}\}^\perp = V$.
- **14. Si conocemos las normas $\|\vec{u}\|$ y $\|\vec{v}\|$, ¿podemos calcular $\|\vec{u} + \vec{v}\|$?**
→ **NO directamente.** Necesitamos conocer también el ángulo o el producto interno entre ellos.

Fin del Capítulo 2