# Álgebra y Ecuaciones Diferenciales
# Capítulo 3: Aplicaciones Lineales

José Javier Relancio Martínez

Universidad de Burgos

2026

# Índice

# Definición de Aplicación Lineal

Una función $f : U \to V$ entre dos espacios vectoriales es una **Aplicación Lineal** si conserva las operaciones (suma y producto por escalar):

**Condiciones de Linealidad**

1. **Aditividad:** $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U.$
2. **Homogeneidad:** $f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in U.$

**Consecuencia inmediata:** $f(\vec{0}_U) = \vec{0}_V.$

- **Endomorfismo:** Si $U = V$.
- **Isomorfismo:** Si $f$ es biyectiva.

# Ejemplos Lineales (I): Matrices

## Producto Matriz-Vector

Toda matriz $A \in M_{m\times n}$ define una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mediante:

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

# Ejemplos Lineales (I): Matrices

## Producto Matriz-Vector

Toda matriz $A \in M_{m \times n}$ define una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mediante:

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

- Cumple $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$.
- Cumple $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$.

# Ejemplos Lineales (I): Matrices

## Producto Matriz-Vector

Toda matriz $A \in M_{m\times n}$ define una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mediante:

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

- Cumple $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$.
- Cumple $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$.

**Nota:** Este es el ejemplo más importante; en dimensiones finitas, **toda** aplicación lineal se puede representar por una matriz.

# Ejemplos Lineales (II): La Derivada

Sea $\mathbb{P}_3$ el espacio de polinomios de grado $\leq 3$. La aplicación derivada $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ es lineal:

$$D(p) = p'(x)$$

# Ejemplos Lineales (II): La Derivada

Sea $\mathbb{P}_3$ el espacio de polinomios de grado $\leq 3$. La aplicación derivada $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ es lineal:

$$D(p) = p'(x)$$

- **Suma:** $(p+q)' = p' + q'$.
- **Producto por escalar:** $(\alpha p)' = \alpha p'$.

# Ejemplos Lineales (II): La Derivada

Sea $\mathbb{P}_3$ el espacio de polinomios de grado $\leq 3$. La aplicación derivada $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ es lineal:

$$D(p) = p'(x)$$

- **Suma:** $(p+q)' = p' + q'$.
- **Producto por escalar:** $(\alpha p)' = \alpha p'$.

## Ejemplo de Linealidad

Sean $p(x) = x^2$ y $q(x) = x$. Si calculamos la derivada de $3p + 2q$:

- **Directamente:** $D(3x^2 + 2x) = 6x + 2$.
- **Por linealidad:** $3D(x^2) + 2D(x) = 3(2x) + 2(1) = 6x + 2$.

# Ejemplos Lineales (II): La Derivada

Sea $\mathbb{P}_3$ el espacio de polinomios de grado $\leq 3$. La aplicación derivada $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ es lineal:

$$D(p) = p'(x)$$

- **Suma:** $(p + q)' = p' + q'$.
- **Producto por escalar:** $(\alpha p)' = \alpha p'$.

## Ejemplo de Linealidad

Sean $p(x) = x^2$ y $q(x) = x$. Si calculamos la derivada de $3p + 2q$:

- **Directamente:** $D(3x^2 + 2x) = 6x + 2$.
- **Por linealidad:** $3D(x^2) + 2D(x) = 3(2x) + 2(1) = 6x + 2$.

¡El resultado es el mismo! Se cumple el principio de superposición.

# Ejemplos Lineales (III): La Integral

La integración definida es una aplicación lineal que transforma una función en un número:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$$

# Ejemplos Lineales (III): La Integral

La integración definida es una aplicación lineal que transforma una función en un número:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- **Linealidad de la integral:**

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$$

$$\int (\alpha f)\,dx = \alpha \int f\,dx$$

# ¿Cuándo NO es Lineal?

Para que sea lineal, la transformación debe ser "proporcional" y pasar por el origen.

# ¿Cuándo NO es Lineal?

Para que sea lineal, la transformación debe ser “proporcional” y pasar por el origen.

- **Traslaciones:** $f(x) = x + 1$

# ¿Cuándo NO es Lineal?

Para que sea lineal, la transformación debe ser "proporcional" y pasar por el origen.

- **Traslaciones:** $f(x) = x + 1 \to$ **NO**.
  $(f(0) = 1 \neq 0)$.
- **Potencias:** $f(x) = x^2$

# ¿Cuándo NO es Lineal?

Para que sea lineal, la transformación debe ser "proporcional" y pasar por el origen.

- **Traslaciones:** $f(x) = x + 1 \to$ **NO**.
  ($f(0) = 1 \neq 0$).
- **Potencias:** $f(x) = x^2 \to$ **NO**.
  ($(1+1)^2 = 4 \neq 1^2 + 1^2 = 2$).
- **Trigonométricas:** $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

# ¿Cuándo NO es Lineal?

Para que sea lineal, la transformación debe ser "proporcional" y pasar por el origen.

- **Traslaciones:** $f(x) = x + 1 \rightarrow$ **NO**.
  $(f(0) = 1 \neq 0)$.
- **Potencias:** $f(x) = x^2 \rightarrow$ **NO**.
  $((1+1)^2 = 4 \neq 1^2 + 1^2 = 2)$.
- **Trigonométricas:** $f(x) = \text{sen}(x) \rightarrow$ **NO**.
  $(\text{sen}(a+b) \neq \text{sen}(a) + \text{sen}(b))$.
- **Constantes no nulas:** $f(x) = 5$

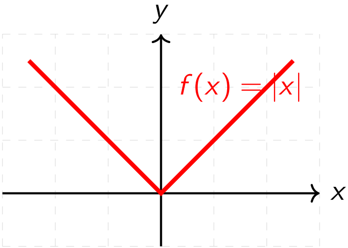
# ¿Cuándo NO es Lineal?

Para que sea lineal, la transformación debe ser "proporcional" y pasar por el origen.

- **Traslaciones:** $f(x) = x + 1 \to$ **NO**.
  $(f(0) = 1 \neq 0)$.
- **Potencias:** $f(x) = x^2 \to$ **NO**.
  $((1+1)^2 = 4 \neq 1^2 + 1^2 = 2)$.
- **Trigonométricas:** $f(x) = \operatorname{sen}(x) \to$ **NO**.
  $(\operatorname{sen}(a+b) \neq \operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b))$.
- **Constantes no nulas:** $f(x) = 5 \to$ **NO**.

# Contraejemplo: El Valor Absoluto

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.

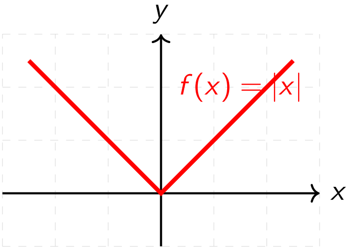



- Cumple $f(0) = 0$. (¡Cuidado, esto engaña!).
- **Falla la Suma:**

$$f(1 + (-1)) = |0| = 0 \quad \neq \quad f(1) + f(-1) = 1 + 1 = 2$$

# Contraejemplo: El Valor Absoluto

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.




- Cumple $f(0) = 0$. (¡Cuidado, esto engaña!).
- **Falla la Suma:**

$$f(1 + (-1)) = |0| = 0 \quad \neq \quad f(1) + f(-1) = 1 + 1 = 2$$

- **Falla el producto por escalar (negativo):**

$$f(-1 \cdot 5) = |-5| = 5 \quad \neq \quad -1 \cdot f(5) = -1 \cdot 5 = -5$$

# Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Es** $f(x, y) = (x + y, y + 1)$ **una aplicación lineal?**

# Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Es $f(x, y) = (x + y, y + 1)$ una aplicación lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. El término constante $+1$ impide que $f(0, 0) = (0, 0)$.

- **2. ¿Si $f(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces $f$ es lineal?**

# Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Es** $f(x, y) = (x + y, y + 1)$ **una aplicación lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. El término constante $+1$ impide que $f(0, 0) = (0, 0)$.
- **2. ¿Si** $f(\vec{0}) = \vec{0}$**, entonces** $f$ **es lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. Es condición necesaria, pero no suficiente (ej: $f(x) = |x|$).
- **3. ¿Es** $f(x, y) = (2x, y)$ **lineal?**

# Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Es $f(x, y) = (x + y, y + 1)$ una aplicación lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. El término constante $+1$ impide que $f(0, 0) = (0, 0)$.
- **2. ¿Si $f(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces $f$ es lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. Es condición necesaria, pero no suficiente (ej: $f(x) = |x|$).
- **3. ¿Es $f(x, y) = (2x, y)$ lineal?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Cada componente es lineal homogénea.
- **4. ¿Es la evaluación $f(p) = p(1)$ una aplicación lineal?**

# Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Es $f(x, y) = (x + y, y + 1)$ una aplicación lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. El término constante $+1$ impide que $f(0, 0) = (0, 0)$.
- **2. ¿Si $f(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces $f$ es lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. Es condición necesaria, pero no suficiente (ej: $f(x) = |x|$).
- **3. ¿Es $f(x, y) = (2x, y)$ lineal?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Cada componente es lineal homogénea.
- **4. ¿Es la evaluación $f(p) = p(1)$ una aplicación lineal?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. $(p + q)(1) = p(1) + q(1)$ y $(cp)(1) = c \cdot p(1)$.
- **5. ¿Es lineal una rotación en el plano centrada en el origen?**

# Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Es $f(x, y) = (x + y, y + 1)$ una aplicación lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. El término constante $+1$ impide que $f(0, 0) = (0, 0)$.
- **2. ¿Si $f(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces $f$ es lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. Es condición necesaria, pero no suficiente (ej: $f(x) = |x|$).
- **3. ¿Es $f(x, y) = (2x, y)$ lineal?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Cada componente es lineal homogénea.
- **4. ¿Es la evaluación $f(p) = p(1)$ una aplicación lineal?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. $(p + q)(1) = p(1) + q(1)$ y $(cp)(1) = c \cdot p(1)$.
- **5. ¿Es lineal una rotación en el plano centrada en el origen?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Conserva sumas y escalares.

# Ejemplo Geométrico: Rotación y Dilatación

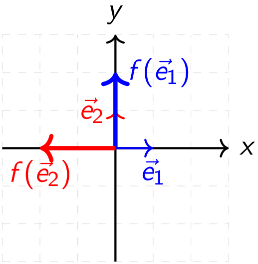
Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que rota un vector 90° en sentido antihorario y duplica su longitud.

$$f(x, y) = (-2y, 2x)$$

- Base Canónica: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.
- Transformación:

$$f(1, 0) = (0, 2)$$

$$f(0, 1) = (-2, 0)$$

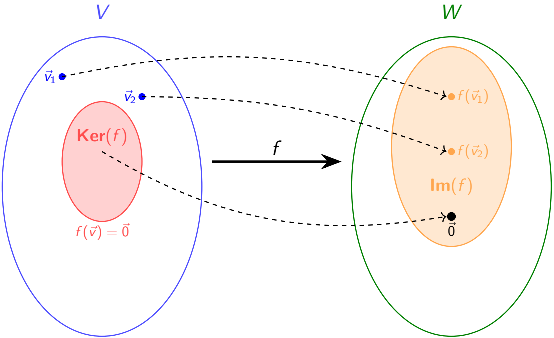



Matriz asociada: $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

# Imagen y Núcleo

**Núcleo (Ker$f$):** Subconjunto de $U$ que va al cero:
Ker $f = \{\vec{u} \in U \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$. ($f$ Inyectiva $\iff$ Ker $f = \{\vec{0}\}$).

**Imagen (Im$f$):** Subconjunto de $V$ alcanzado por $f$:
Im $f = \{f(\vec{u}) \mid \vec{u} \in U\}$. ($f$ Sobreyectiva $\iff$ Im $f = V$).



# Inyectividad, Sobreyectividad y Biyectividad

## Inyectiva (Monomorfismo)

Cada elemento de la imagen proviene de un **único** elemento del origen.

$$\text{inyectiva} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$$

# Inyectividad, Sobreyectividad y Biyectividad

## Inyectiva (Monomorfismo)

Cada elemento de la imagen proviene de un **único** elemento del origen.

$$\text{inyectiva} \iff \operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$$

## Sobreyectiva (Epimorfismo)

La imagen coincide con todo el espacio de llegada. No “sobran” vectores en $V$.

$$\text{sobreyectiva} \iff \operatorname{Im}(f) = V \iff \dim(\operatorname{Im}\ f) = \dim(V)$$

# Inyectividad, Sobreyectividad y Biyectividad

## Inyectiva (Monomorfismo)

Cada elemento de la imagen proviene de un **único** elemento del origen.

$$\text{inyectiva} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$$

## Sobreyectiva (Epimorfismo)

La imagen coincide con todo el espacio de llegada. No "sobran" vectores en $V$.

$$\text{sobreyectiva} \iff \mathrm{Im}(f) = V \iff \dim(\mathrm{Im}\ f) = \dim(V)$$

## Biyectiva (Isomorfismo)

Es inyectiva y sobreyectiva a la vez. Establece una correspondencia 1 a 1 perfecta.

$$\text{biyectiva} \implies \dim(U) = \dim(V)$$

# Ejemplos de Clasificación

Sea $f : U \to V$:

- **Solo Inyectiva:** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $f(x, y) = (x, y, 0)$. Todo vector de $\mathbb{R}^2$ va a un sitio distinto, pero nunca cubrimos los vectores con $z \neq 0$.

# Ejemplos de Clasificación

Sea $f : U \to V$:

- **Solo Inyectiva:** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $f(x, y) = (x, y, 0)$. Todo vector de $\mathbb{R}^2$ va a un sitio distinto, pero nunca cubrimos los vectores con $z \neq 0$.
- **Solo Sobreyectiva:** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x, y, z) = (x, y)$. Cubrimos todo el plano $\mathbb{R}^2$, pero muchos vectores (toda la recta $Z$) van al $(0, 0)$.

# Ejemplos de Clasificación

Sea $f : U \to V$:

- **Solo Inyectiva:** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $f(x, y) = (x, y, 0)$. Todo vector de $\mathbb{R}^2$ va a un sitio distinto, pero nunca cubrimos los vectores con $z \neq 0$.
- **Solo Sobreyectiva:** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x, y, z) = (x, y)$. Cubrimos todo el plano $\mathbb{R}^2$, pero muchos vectores (toda la recta $Z$) van al $(0, 0)$.
- **Biyectiva (Isomorfismo):** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x, y) = (x + y, x - y)$. No se pierde información y el sistema es siempre resoluble de forma única.

# Ejemplo Analítico: Operadores en Polinomios

Sea $V = \mathbb{P}_2[x]$ (polinomios de grado $\leq 2$). Definimos $f : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ como:

$$f(p(x)) = p(x) - x \cdot p'(x)$$

## Comprobación con un caso

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Derivada: $p'(x) = 2ax + b$.
2. Operación:

$$f(p) = (ax^2 + bx + c) - x(2ax + b)$$

$$f(p) = ax^2 + bx + c - 2ax^2 - bx = -ax^2 + c$$

**Análisis:**

- **Núcleo:** ¿Cuándo $f(p) = 0$? $\implies -ax^2 + c = 0 \implies a = 0, c = 0$.
- El núcleo son los polinomios de grado 1 puros: $p(x) = bx$.

# Teorema de la Dimensión

Para toda aplicación lineal $f : U \to V$:

**Fórmula Fundamental**

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$$

**Interpretación:** La dimensión del espacio de salida se "reparte" entre los que mueren (núcleo) y los que sobreviven (imagen).

# Ejemplo: Proyección Ortogonal en $\mathbb{R}^3$

$f(x, y, z) = (x, y, 0)$

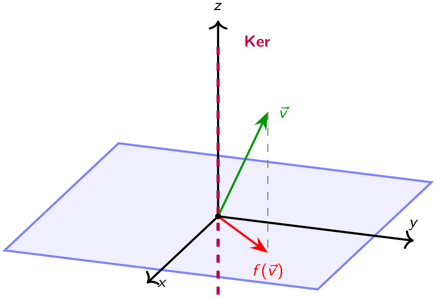
## Núcleo e Imagen

- **Llegada:** Plano $Z = 0$ (subespacio de $\mathbb{R}^3$, isomorfo a $\mathbb{R}^2$, $\dim = 2$).
- **Ker $f$:** Eje $Z$. $(\dim = 1)$
- **Im $f$:** Plano $XY$. $(\dim = 2)$

## Clasificación

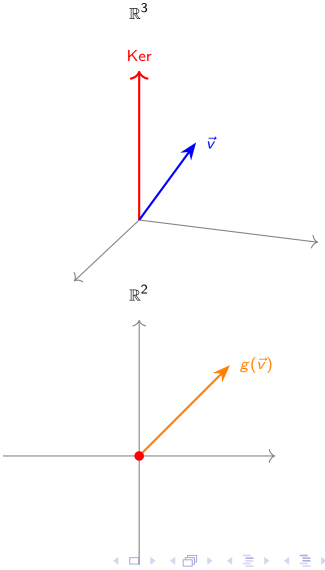
- Sobreyectiva: **NO** ($\mathrm{Im} \neq \mathbb{R}^3$).
- Inyectiva: **NO** ($\mathrm{Ker} \neq \{\vec{0}\}$).

$\dim(U) = 3 = 1(\mathrm{Ker}) + 2(\mathrm{Im})$



# Ejemplo: Proyección de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$

$g(x, y, z) = (x, y)$




## Diferencia

- **Llegada:** $\mathbb{R}^2$ (dim $= 2$).
- **Ker** $g$**:** Eje $Z$ (dim $= 1$).
- **Im** $g$**:** Todo $\mathbb{R}^2$ (dim $= 2$).

## Clasificación

- Sobreyectiva: **SÍ** (Im $= \mathbb{R}^2$).
- Inyectiva: **NO** (Ker $\neq \{\vec{0}\}$).

$\dim(U) = 3 = 1(\text{Ker}) + 2(\text{Im})$

# Ejemplo: La Traza como Aplicación Lineal

Sea $f : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definida por la traza de la matriz:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathrm{tr}(A) = a + d$$

- **Linealidad:** $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ y $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$.
- **Espacio de llegada:** $\mathbb{R}$ (Dimensión 1).
- **Espacio de salida:** $M_{2\times 2}$ (Dimensión 4).

### Pregunta

¿Cuál es la dimensión del Núcleo?

$$\dim(\mathrm{Ker}) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}) = 4 - 1 = 3$$

El núcleo son todas las matrices con traza nula ($a = -d$, $b$ y $c$ son libres).

# Preguntas de Concepto (Núcleo e Imagen)

- **1. ¿Es el Núcleo un subespacio vectorial?**

# Preguntas de Concepto (Núcleo e Imagen)

- **1. ¿Es el Núcleo un subespacio vectorial?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Siempre, del espacio de partida.
- **2. Si** $\dim(\textbf{Ker } f) = 0$**, ¿cómo es** $f$**?**

# Preguntas de Concepto (Núcleo e Imagen)

- **1. ¿Es el Núcleo un subespacio vectorial?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Siempre, del espacio de partida.

- **2. Si** $\dim(\textbf{Ker } f) = 0$**, ¿cómo es** $f$**?**
  $\rightarrow$ **Inyectiva**. Solo el cero va al cero.

- **3. Si** $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$**, ¿puede ser inyectiva?**

# Preguntas de Concepto (Núcleo e Imagen)

- **1. ¿Es el Núcleo un subespacio vectorial?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Siempre, del espacio de partida.
- **2. Si** $\dim(\textbf{Ker } f) = 0$**, ¿cómo es** $f$**?**
  $\rightarrow$ **Inyectiva**. Solo el cero va al cero.
- **3. Si** $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$**, ¿puede ser inyectiva?**
  $\rightarrow$ **NO**. $\dim(\text{Ker}) \geq 5 - 3 = 2$.
- **4. Si** $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ **tiene** $\dim(\textbf{Im}) = 3$**, ¿es inyectiva?**

# Preguntas de Concepto (Núcleo e Imagen)

- **1. ¿Es el Núcleo un subespacio vectorial?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Siempre, del espacio de partida.
- **2. Si** $\dim(\textbf{Ker } f) = 0$**, ¿cómo es** $f$**?**
  $\rightarrow$ **Inyectiva**. Solo el cero va al cero.
- **3. Si** $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$**, ¿puede ser inyectiva?**
  $\rightarrow$ **NO**. $\dim(\text{Ker}) \geq 5 - 3 = 2$.
- **4. Si** $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ **tiene** $\dim(\textbf{Im}) = 3$**, ¿es inyectiva?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Por el teorema de la dimensión, $\dim(\text{Ker}) = 0$.
- **5. ¿Puede la imagen ser más grande que el espacio de llegada?**

# Preguntas de Concepto (Núcleo e Imagen)

- **1. ¿Es el Núcleo un subespacio vectorial?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Siempre, del espacio de partida.
- **2. Si** $\dim(\textbf{Ker } f) = 0$**, ¿cómo es** $f$**?**
  $\rightarrow$ **Inyectiva**. Solo el cero va al cero.
- **3. Si** $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$**, ¿puede ser inyectiva?**
  $\rightarrow$ **NO**. $\dim(\text{Ker}) \geq 5 - 3 = 2$.
- **4. Si** $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ **tiene** $\dim(\textbf{Im}) = 3$**, ¿es inyectiva?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Por el teorema de la dimensión, $\dim(\text{Ker}) = 0$.
- **5. ¿Puede la imagen ser más grande que el espacio de llegada?**
  $\rightarrow$ **NO**. $\text{Im } f \subseteq V$.

# Matriz Asociada a una Aplicación Lineal

Dadas bases $B = \{\vec{u}_j\}$ de $U$ y $B' = \{\vec{v}_i\}$ de $V$.
La matriz asociada $A = [f]_B^{B'}$ cumple:

$$[f(\vec{u})]_{B'} = A \cdot [\vec{u}]_B$$

## Construcción por Columnas

La columna $j$-ésima de $A$ contiene las coordenadas de la imagen del vector $j$-ésimo de la base $B$ ($f(\vec{u}_j)$) expresadas en la base $B'$.

$$\mathrm{Col}_j(A) = [f(\vec{u}_j)]_{B'}$$

# Ejemplo: Construcción de la Matriz

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,0) = (1,1)$ y $f(0,1) = (-1,2)$.

Imagen de la base canónica:

- $f(\vec{e}_1) = (1,1) \implies \mathrm{Col}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $f(\vec{e}_2) = (-1,2) \implies \mathrm{Col}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

# Ejemplo: Construcción de la Matriz

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,0) = (1,1)$ y $f(0,1) = (-1,2)$.

Imagen de la base canónica:

- $f(\vec{e}_1) = (1,1) \implies \text{Col}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $f(\vec{e}_2) = (-1,2) \implies \text{Col}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$[f]_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular la imagen de $(2,3)$:

$$f(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

# Cambio de Base (Teorema de Semejanza)

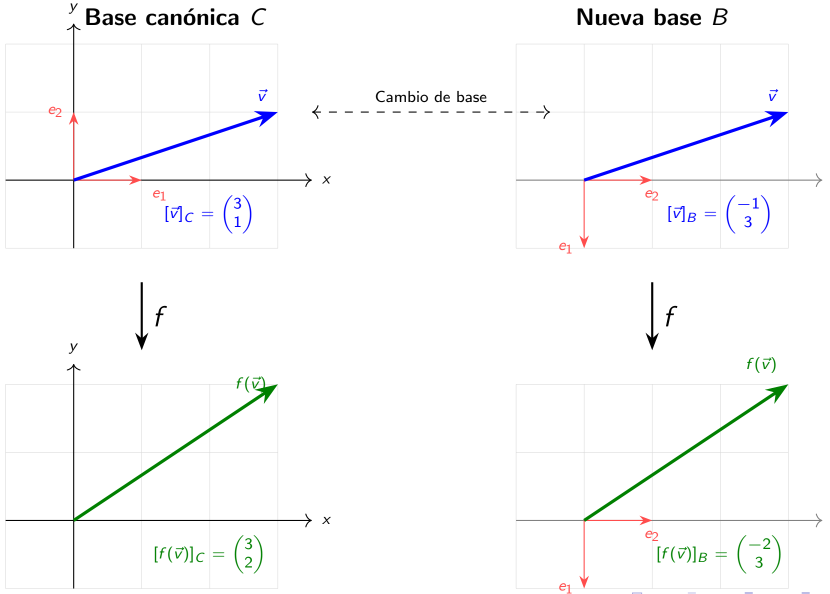
Si cambiamos las bases en los espacios, la matriz cambia. Para endomorfismos ($f : V \to V$):

$$[f]_{B'} = P_{B'B} \cdot [f]_B \cdot P_{BB'} = P^{-1}AP$$

$$\begin{tikzcd}
V_B \arrow[r, "{[f]_B}"] \arrow[d, "P_{BB'}"'] & V_B \arrow[d, "P_{BB'}"] \\
V_{B'} \arrow[r, "{[f]_{B'}}"'] & V_{B'}
\end{tikzcd}$$

Dos matrices $A$ y $B$ que representan la misma aplicación en bases distintas se llaman **Semejantes**. Tienen el mismo determinante, traza y rango.

# Ejemplo Visual: $f(x, y) = (x, 2y)$ en dos bases



# Detalle del Cambio de Base (Paso a Paso)

En el ejemplo anterior, la aplicación en la base canónica es: $[f]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**1. Matriz de paso $P$ (de $B$ a $C$):** Las columnas de $P$ son los vectores de la base $B$ expresados en $C$:

$$\vec{b}_1 = (0, -1)_C, \quad \vec{b}_2 = (1, 0)_C \implies P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Detalle del Cambio de Base (Paso a Paso)

En el ejemplo anterior, la aplicación en la base canónica es: $[f]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**1. Matriz de paso $P$ (de $B$ a $C$):** Las columnas de $P$ son los vectores de la base $B$ expresados en $C$:

$$\vec{b}_1 = (0, -1)_C, \quad \vec{b}_2 = (1, 0)_C \implies P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**2. Matriz inversa $P^{-1}$ (de $C$ a $B$):**

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Detalle del Cambio de Base (Paso a Paso)

En el ejemplo anterior, la aplicación en la base canónica es: $[f]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**1. Matriz de paso $P$ (de $B$ a $C$):** Las columnas de $P$ son los vectores de la base $B$ expresados en $C$:

$$\vec{b}_1 = (0, -1)_C, \quad \vec{b}_2 = (1, 0)_C \implies P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**2. Matriz inversa $P^{-1}$ (de $C$ a $B$):**

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**3. Aplicación del teorema de semejanza:**

$$[f]_B = P^{-1} \cdot [f]_C \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Resultado:** En la base $B$, la aplicación simplemente intercambia los factores de escala de los ejes originales.

## Preguntas de Concepto (Matrices y Cambio de Base)

- **1. ¿De qué tamaño es la matriz si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?**

# Preguntas de Concepto (Matrices y Cambio de Base)

- **1. ¿De qué tamaño es la matriz si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?**
  $\to 2 \times 3$. (2 filas, 3 columnas).
- **2. ¿Si $A$ y $B$ son semejantes, tienen el mismo determinante?**

# Preguntas de Concepto (Matrices y Cambio de Base)

- **1. ¿De qué tamaño es la matriz si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?**
  $\to 2 \times 3$. (2 filas, 3 columnas).

- **2. ¿Si $A$ y $B$ son semejantes, tienen el mismo determinante?**
  $\to$ **SÍ**. $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$.

- **3. ¿Qué representan las columnas de la matriz asociada?**

# Preguntas de Concepto (Matrices y Cambio de Base)

- **1. ¿De qué tamaño es la matriz si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?**
  $\to 2 \times 3$. (2 filas, 3 columnas).
- **2. ¿Si $A$ y $B$ son semejantes, tienen el mismo determinante?**
  $\to$ **SÍ**. $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$.
- **3. ¿Qué representan las columnas de la matriz asociada?**
  $\to$ Las **imágenes de la base** de partida.
- **4. ¿Si la matriz es la identidad, qué aplicación es?**

# Preguntas de Concepto (Matrices y Cambio de Base)

- **1. ¿De qué tamaño es la matriz si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?**
  $\to 2 \times 3$. (2 filas, 3 columnas).
- **2. ¿Si $A$ y $B$ son semejantes, tienen el mismo determinante?**
  $\to$ **SÍ**. $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$.
- **3. ¿Qué representan las columnas de la matriz asociada?**
  $\to$ Las **imágenes de la base** de partida.
- **4. ¿Si la matriz es la identidad, qué aplicación es?**
  $\to$ La **Identidad** (si la base es la misma en salida y llegada).
- **5. ¿Cómo podemos saber la dimensión de la imagen de una aplicación lineal?**

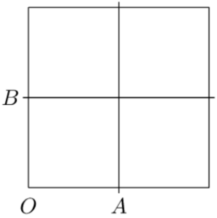
# Preguntas de Concepto (Matrices y Cambio de Base)

- **1. ¿De qué tamaño es la matriz si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?**
  $\to 2 \times 3$. (2 filas, 3 columnas).
- **2. ¿Si $A$ y $B$ son semejantes, tienen el mismo determinante?**
  $\to$ **SÍ**. $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$.
- **3. ¿Qué representan las columnas de la matriz asociada?**
  $\to$ Las **imágenes de la base** de partida.
- **4. ¿Si la matriz es la identidad, qué aplicación es?**
  $\to$ La **Identidad** (si la base es la misma en salida y llegada).
- **5. ¿Cómo podemos saber la dimensión de la imagen de una aplicación lineal?**
  $\to$ Calculando el **rango** de su matriz asociada: $\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg}(A)$.

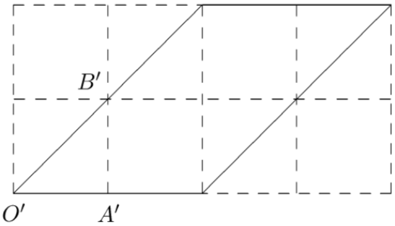
# Deformación de una Armadura Metálica

En el diseño de una armadura metálica se desea transformar una pieza de la forma original a una deformada:

**Estado Inicial**




**Estado Deformado**




¿Cuál es la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que realiza este cambio?

# Cálculo de la Aplicación Lineal

Analizando el movimiento de los puntos clave (base canónica):

- El punto $(1, 0)$ permanece fijo: $f(1, 0) = (1, 0)$.
- El punto $(0, 1)$ se desplaza al $(1, 1)$: $f(0, 1) = (1, 1)$.

# Cálculo de la Aplicación Lineal

Analizando el movimiento de los puntos clave (base canónica):

- El punto $(1, 0)$ permanece fijo: $f(1, 0) = (1, 0)$.
- El punto $(0, 1)$ se desplaza al $(1, 1)$: $f(0, 1) = (1, 1)$.

## Expresión Matricial

Colocando las imágenes como columnas de la matriz asociada:

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Cálculo de la Aplicación Lineal

Analizando el movimiento de los puntos clave (base canónica):

- El punto $(1, 0)$ permanece fijo: $f(1, 0) = (1, 0)$.
- El punto $(0, 1)$ se desplaza al $(1, 1)$: $f(0, 1) = (1, 1)$.

## Expresión Matricial

Colocando las imágenes como columnas de la matriz asociada:

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Predicción de nuevos puntos:** Por linealidad, podemos conocer el destino de cualquier punto, p.ej. $(2, 2)$:

$$f(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Una traslación en el plano es lineal?**

# Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Una traslación en el plano es lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. No fija el origen ($f(\vec{0}) \neq \vec{0}$).

- **2. ¿La proyección ortogonal sobre un plano es lineal?**

# Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Una traslación en el plano es lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. No fija el origen ($f(\vec{0}) \neq \vec{0}$).

- **2. ¿La proyección ortogonal sobre un plano es lineal?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Es un ejemplo visto anteriormente.

- **3. ¿Si conoces $f$ en la base, conoces $f$ en todo vector?**

# Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Una traslación en el plano es lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. No fija el origen ($f(\vec{0}) \neq \vec{0}$).
- **2. ¿La proyección ortogonal sobre un plano es lineal?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Es un ejemplo visto anteriormente.
- **3. ¿Si conoces $f$ en la base, conoces $f$ en todo vector?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Por linealidad, se extiende a todo el espacio.
- **4. ¿Es la matriz de una proyección siempre invertible?**

# Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Una traslación en el plano es lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. No fija el origen ($f(\vec{0}) \neq \vec{0}$).
- **2. ¿La proyección ortogonal sobre un plano es lineal?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Es un ejemplo visto anteriormente.
- **3. ¿Si conoces $f$ en la base, conoces $f$ en todo vector?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Por linealidad, se extiende a todo el espacio.
- **4. ¿Es la matriz de una proyección siempre invertible?**
  $\rightarrow$ **NO**. Proyectar pierde información (tiene núcleo no nulo).
- **5. ¿Puede una aplicación lineal curvar una recta?**

# Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Una traslación en el plano es lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. No fija el origen ($f(\vec{0}) \neq \vec{0}$).
- **2. ¿La proyección ortogonal sobre un plano es lineal?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Es un ejemplo visto anteriormente.
- **3. ¿Si conoces $f$ en la base, conoces $f$ en todo vector?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Por linealidad, se extiende a todo el espacio.
- **4. ¿Es la matriz de una proyección siempre invertible?**
  $\rightarrow$ **NO**. Proyectar pierde información (tiene núcleo no nulo).
- **5. ¿Puede una aplicación lineal curvar una recta?**
  $\rightarrow$ **NO**. Rectas van a rectas (o puntos).

# Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Si $f(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces $f$ es obligatoriamente lineal.**

# Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Si $f(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces $f$ es obligatoriamente lineal.** **FALSO**.
   *Contraejemplo:* $f(x) = x^2$ *cumple* $0^2 = 0$ *pero no es lineal.*

2. **El núcleo de una transformación lineal es siempre un subespacio del dominio (espacio de partida).**

# Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Si $f(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces $f$ es obligatoriamente lineal.** **FALSO**.
   *Contraejemplo: $f(x) = x^2$ cumple $0^2 = 0$ pero no es lineal.*
2. **El núcleo de una transformación lineal es siempre un subespacio del dominio (espacio de partida).** **VERDADERO**.
3. **Una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ nunca puede ser inyectiva.**

# Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Si $f(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces $f$ es obligatoriamente lineal.** **FALSO**.
   *Contraejemplo:* $f(x) = x^2$ *cumple* $0^2 = 0$ *pero no es lineal.*

2. **El núcleo de una transformación lineal es siempre un subespacio del dominio (espacio de partida).** **VERDADERO**.

3. **Una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ nunca puede ser inyectiva.**
   **VERDADERO**.
   *Por el T. de la Dimensión:* $3 = \dim(Im) + \dim(Ker)$. *Como máx* $\dim(Im) = 2$, $\dim(Ker)$ *debe ser al menos 1.*

4. **Si la matriz asociada $A$ tiene determinante 0, la aplicación no es biyectiva.**

# Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Si $f(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces $f$ es obligatoriamente lineal.** **FALSO**.
   *Contraejemplo:* $f(x) = x^2$ *cumple* $0^2 = 0$ *pero no es lineal.*

2. **El núcleo de una transformación lineal es siempre un subespacio del dominio (espacio de partida).** **VERDADERO**.

3. **Una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ nunca puede ser inyectiva.** **VERDADERO**.
   *Por el T. de la Dimensión:* $3 = \dim(Im) + \dim(Ker)$*. Como máx* $\dim(Im) = 2$, $\dim(Ker)$ *debe ser al menos 1.*

4. **Si la matriz asociada $A$ tiene determinante 0, la aplicación no es biyectiva.** **VERDADERO**.
   *Determinante 0 implica que el núcleo no es solo el vector cero.*

# El Juego de las Dimensiones (I)

**Escenario:** Tenemos una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$.

$$\dim(U) = 5, \quad \dim(V) = 3$$

## Pregunta 1

¿Cuál es la dimensión **máxima** posible de la Imagen?

# El Juego de las Dimensiones (I)

**Escenario:** Tenemos una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$.

$$\dim(U) = 5, \quad \dim(V) = 3$$

## Pregunta 1

¿Cuál es la dimensión **máxima** posible de la Imagen?

$$\dim(\mathrm{Im}\ f) \leq 3$$

*(No puedes cubrir más espacio del que tienes en la llegada).*

# El Juego de las Dimensiones (I)

**Escenario:** Tenemos una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$.

$$\dim(U) = 5, \quad \dim(V) = 3$$

## Pregunta 1

¿Cuál es la dimensión **máxima** posible de la Imagen?

$$\dim(\mathrm{Im}\ f) \leq 3$$

*(No puedes cubrir más espacio del que tienes en la llegada).*

## Pregunta 2

Si la imagen tiene dimensión 3 (es sobreyectiva), ¿cuánto vale la dimensión del Núcleo?

# El Juego de las Dimensiones (I)

**Escenario:** Tenemos una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$.

$$\dim(U) = 5, \quad \dim(V) = 3$$

## Pregunta 1

¿Cuál es la dimensión **máxima** posible de la Imagen?

$$\dim(\text{Im } f) \leq 3$$

*(No puedes cubrir más espacio del que tienes en la llegada).*

## Pregunta 2

Si la imagen tiene dimensión 3 (es sobreyectiva), ¿cuánto vale la dimensión del Núcleo?

$$5 = \dim(\text{Ker}) + 3 \implies \dim(\text{Ker}) = 2$$

# El Juego de las Dimensiones (II)

Continuamos con el escenario anterior: $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$.

## Pregunta 3

¿Es posible que $\dim(\text{Ker}) = 0$?

# El Juego de las Dimensiones (II)

Continuamos con el escenario anterior: $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$.

## Pregunta 3

¿Es posible que $\dim(\mathrm{Ker}) = 0$? **NO**. Por el Teorema de la Dimensión:

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker}) + \dim(\mathrm{Im})$$

$$5 = 0 + \dim(\mathrm{Im} f) \implies \dim(\mathrm{Im} f) = 5$$

Lo cual es **imposible**, ya que la imagen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y su dimensión máxima es 3.

# Reto Visual: Geometría y Matrices

Identifica la transformación geométrica asociada a estas matrices en $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# Reto Visual: Geometría y Matrices

Identifica la transformación geométrica asociada a estas matrices en $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Respuesta:** Reflexión respecto al eje
$X$.

- $(1, 0) \to (1, 0)$
- $(0, 1) \to (0, -1)$

# Reto Visual: Geometría y Matrices

Identifica la transformación geométrica asociada a estas matrices en $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Respuesta:** Reflexión respecto al eje
$X$.

- $(1,0) \to (1,0)$
- $(0,1) \to (0,-1)$

# Reto Visual: Geometría y Matrices

Identifica la transformación geométrica asociada a estas matrices en $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Respuesta:** Reflexión respecto al eje $X$.

- $(1,0) \to (1,0)$
- $(0,1) \to (0,-1)$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Respuesta:** Homotecia (Escalado) de factor 3.

- Triplica el tamaño de cualquier vector sin rotarlo.

# Reto Visual: Geometría y Matrices

Identifica la transformación geométrica asociada a estas matrices en $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Respuesta:** Reflexión respecto al eje $X$.

- $(1,0) \to (1,0)$
- $(0,1) \to (0,-1)$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Respuesta:** Homotecia (Escalado) de factor 3.

- Triplica el tamaño de cualquier vector sin rotarlo.

**Pregunta final:** ¿Cuál es el núcleo de $B$?

# Reto Visual: Geometría y Matrices

Identifica la transformación geométrica asociada a estas matrices en $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Respuesta:** Reflexión respecto al eje $X$.

- $(1,0) \to (1,0)$
- $(0,1) \to (0,-1)$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Respuesta:** Homotecia (Escalado) de factor 3.

- Triplica el tamaño de cualquier vector sin rotarlo.

**Pregunta final:** ¿Cuál es el núcleo de $B$?
Solo el vector $\vec{0}$ (Es inyectiva).

# Reto: En busca del Isomorfismo

¿Cuál de estas aplicaciones puede ser un **Isomorfismo**? *(Pista: Deben tener la misma dimensión en salida y llegada y ser lineales)*.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x, y, 0)$.

# Reto: En busca del Isomorfismo

¿Cuál de estas aplicaciones puede ser un **Isomorfismo**? *(Pista: Deben tener la misma dimensión en salida y llegada y ser lineales)*.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x, y, 0)$. **NO**.
   *No es sobreyectiva (nunca llegamos a puntos con $z \neq 0$).*
2. $g : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(ax^2 + bx + c) = (a, b, c)$.

# Reto: En busca del Isomorfismo

¿Cuál de estas aplicaciones puede ser un **Isomorfismo**? *(Pista: Deben tener la misma dimensión en salida y llegada y ser lineales)*.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x, y, 0)$. **NO**.
   *No es sobreyectiva (nunca llegamos a puntos con $z \neq 0$).*
2. $g : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(ax^2 + bx + c) = (a, b, c)$. **SÍ**.
   *Es biyectiva y conserva la estructura. $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}^3$ son "el mismo espacio" con distintos nombres.*
3. $h : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ definida por $h(p(x)) = p'(x)$.

# Reto: En busca del Isomorfismo

¿Cuál de estas aplicaciones puede ser un **Isomorfismo**? *(Pista: Deben tener la misma dimensión en salida y llegada y ser lineales)*.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x, y, 0)$. **NO**.
   *No es sobreyectiva (nunca llegamos a puntos con $z \neq 0$).*

2. $g : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(ax^2 + bx + c) = (a, b, c)$. **SÍ**.
   *Es biyectiva y conserva la estructura. $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}^3$ son "el mismo espacio" con distintos nombres.*

3. $h : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ definida por $h(p(x)) = p'(x)$. **NO**.
   *Es lineal, pero no inyectiva (el núcleo son las constantes, $\dim(Ker) = 1$), por lo que no puede ser un isomorfismo.*

# Fin del Capítulo 3