UNIVERSIDAD DE BURGOS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER:

ACTIVIDADES INTRODUCTORIAS DE LOS GRAFOS EN LAS MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

CURSO 2019- 2020

GUTIÉRREZ MAZORRA, ESTHER

ESPECILIDAD: MATEMÁTICAS

DIRECTORA: ELENA CEBRIÁN DE BARRIO

Resumen

Este trabajo fin de máster recoge una propuesta didáctica para introducir conceptos de la teoría de grafos en las asignaturas de matemáticas del tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Actualmente, los grafos son un contenido matemático que no se contempla formalmente en la enseñanza de educación obligatoria en España, sin embargo, son muchos los autores que basando sus argumentos en investigaciones y experiencias educativas (talleres) valoran positivamente la introducción de estos. Asimismo, el auge de esta teoría en los últimos años, consecuencia de su desarrollo en el campo de la informática, muestra la relevancia de esta teoría. Esta propuesta didáctica se estructura en tres módulos de contenidos que se implementan gradualmente a lo largo de un curso académico a través del modelo pedagógico del aula invertida junto con estrategias de aprendizaje cooperativo.

Palabras clave

Teoría de grafos, enseñanza secundaria obligatoria, aula invertida, aprendizaje cooperativo

Abstract

This project includes a didactic proposal to introduce concepts of graph theory in the mathematics subjects of the third year of the General Compulsory Secondary Education (GCSE). Currently, graphs are a mathematical content that is not formally contemplated in compulsory education teaching in Spain, however, many authors basing their arguments on research and educational experiences (workshops) positively value the introduction of these. Likewise, the rise of this theory in recent years, as a consequence of its development in the field of computing, shows the relevance of this theory. This didactic proposal is structured in three content modules that are gradually implemented throughout an academic year through the pedagogical model of the inverted classroom along with cooperative learning strategies.

Keywords

Graph theory, General Compulsory Secondary Education, flipped classroom, cooperative learning strategies

Índice

1. Introducción

El propósito de este trabajo fin de máster (TFM) es introducir conceptos propios de la Teoría de Grafos en las asignaturas de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas y Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas del tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Estos conceptos se introducen a lo largo del curso académico mediante la combinación del modelo pedagógico del aula invertida y la metodología activa del aprendizaje cooperativo.

1.1 Justificación

La Teoría de Grafos es considerada una de las más bellas áreas de las Matemáticas, sin embargo, es una gran desconocida para la mayoría del alumnado de educación secundaria. Los aspectos por los cuales considero que la Teoría de Grafos es un contenido apto para impartirse en la etapa de educación secundaria son los siguientes:

Flexibilidad y adecuación de los contenidos a las necesidades del alumnado.

La multitud de conceptos que abarca esta teoría posibilita la adecuación de estos en función de las necesidades de aprendizaje y capacidades del alumnado. Estos conceptos se pueden relacionar con contenidos que actualmente están recogidos en el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, favoreciendo así la adquisición de los contenidos y el desarrollo de las competencias y habilidades estipuladas para cada etapa.

Herramienta de resolución de problemas.

La utilización de los grafos como herramienta de resolución de problemas permite el diseño de actividades contextualizadas en la vida cotidiana de los alumnos, acercando así las matemáticas a su contexto inmediato y favoreciendo su desarrollo personal y social, la capacidad de reflexionar y la formación integral del alumnado.

Es una teoría relativamente moderna.

La Teoría de Grafos tiene su origen en 1735 fruto del conocido *Problema de los Puentes de Königsberg*, propuesto a Leonhard Euler (1707-1783) y por el cual se le conoce como el *"padre de la Teoría de Grafos"* (Canto, Valdés y Cabello, 2007). Se trata de un área en continua investigación, siendo algunas: *La conjetura de los Cuatro Colores*, formulada por Francis Guthrie en el año 1840 y demostrada por Appel y Haken en 1976, (Stadler, 2006); la *Paradoja de la Amistad*, formulada por el sociólogo Scott L. Feld en 1991 (Feld, 1991) tras varios análisis de redes sociales.

Presencia de la Teoría de Grafos en el Sistema Educativo Español.

Los grafos están contemplados formalmente por el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, en la asignatura de Matemáticas II del segundo curso del bachillerato en la modalidad de Ciencias. Concretamente en el bloque de contenidos 2. Números y álgebra: "Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos".

Sin embargo, los grafos no están recogidos en la asignatura de Matemáticas I del primer curso del bachillerato de esa misma modalidad, así como en las dos materias de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales (CCSS) I y II y en toda la etapa de ESO. De acuerdo con el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, la Teoría de Grafos tampoco está presente en esta etapa. No sucede lo mismo en los estudios de grado universitarios, según González, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2019), esta teoría está presente en 87 asignaturas, de un total de 231 guías docentes analizadas de distintos grados universitarios de carácter científico-técnico. No es de extrañar dadas las numerosas aplicaciones que tiene dentro de disciplinas como la investigación operativa, la química, la genética, el arte, la arquitectura, el psicoanálisis, el dibujo computacional, la electrónica, la económica, la programación, la salud, el estudio de redes, entre otras (Merayo 2004).

Estos datos sustentan la relevancia que tiene este tema en la actualidad y la necesidad de introducir estos contenidos de forma adecuada y gradual en las etapas preuniversitarias con el objetivo de proporcionar a los alumnos un abanico de herramientas que les permitan afrontar situaciones futuras de forma más eficiente.

Formación continua y completa.

Asimismo, considero que como docentes debemos buscar temas diferentes, atractivos y que completen la formación de los alumnos. Para ello tenemos que dejarnos guiar por la curiosidad y contemplar la posibilidad de innovar, de investigar, de introducir nuevos conceptos en el aula dando la oportunidad a los alumnos de investigar y generar su propio conocimiento. Debemos investigar nosotros para que ellos lo puedan hacer: “investigar para investigar”, transmitiendo el gusto por lo desconocido y por las matemáticas.

Como conclusión me permito citar las palabras de Coriat, Sancho, Marín y Gonzalvo (1989):

“No es tan importante ‘saber muchas cosas’ como ‘saber cómo aprender nuevas cosas’; saber dónde encontrar la información adecuada; saber cómo seleccionarla de manera significativa (…), saber cómo aproximar situaciones totalmente nuevas; en definitiva, saber cómo continuar aprendiendo” (p.11).

1.2. Objetivos generales

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato señala: “El rol del docente es fundamental, pues debe ser capaz de diseñar tareas o situaciones de aprendizaje que posibiliten la resolución de problemas, la aplicación de los conocimientos aprendidos y la promoción de la actividad de los estudiantes”.

De acuerdo con lo expuesto, el presente TFM consiste en el diseño de actividades introductorias de conceptos propios de la Teoría de Grafos dentro del ámbito de las matemáticas del tercer curso de la ESO. Para ello he aplicado los conocimientos que he adquirido en las diferentes asignaturas del Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

En el desarrollo de la propuesta didáctica de este TFM he tenido en cuenta los siguientes objetivos:

- Acercar conceptos de la Teoría de Grafos y sus aplicaciones al alumnado de una manera atractiva, dinámica y creativa.

- Diseñar y adecuar actividades de aprendizaje que favorezcan la capacidad del alumnado para aprender por sí mismo, trabajar en equipo y crear conexiones entre los conocimientos que ya tenían y los nuevos aprendizajes.
- Incluir el uso de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) en el aula, a través de la utilización del software GeoGebra, favoreciendo la adquisición y el desarrollo de la competencia digital.

1.3. La enseñanza y la Teoría de Grafos

Coriat, et al. (1989) señalan las ventajas que supondrían la inclusión de los grafos en el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria. Estos autores describían los grafos como "una herramienta para aprender a pensar" sin la necesidad de ser un experto en la materia. Hacían referencia a la utilización de los grafos como una posible solución al problema de "aprender a aprender" dado que la sencillez de esta herramienta a la hora de resolver problemas cotidianos despertaba el interés de los alumnos por las matemáticas. En aquellos tiempos el marco legislativo del Sistema Educativo Español no reconocía el concepto "aprender a aprender" como una competencia clave, sin embargo, Coriat et. al (1989) ya hacían referencia a esta capacidad y destacaban la importancia su desarrollo en el área de las matemáticas.

Otros autores como Rosenstein, J., Franzblau, D. y Roberts, F. (1997, p.23) presentan argumentos a favor de incluir contenidos de Matemática Discreta y Teoría de Grafos en el currículo de educación secundaria:

- Referido a la aplicabilidad: la matemática discreta tiene numerosas aplicaciones debido a sus múltiples usos, ya sea como herramienta para la resolución de problemas, como para la creación de modelos en múltiples áreas.
- Referido a la accesibilidad: para entender muchas de las aplicaciones de las matemáticas discretas no se requieren conocimientos superiores a los básicos de aritmética y de álgebra elemental.
- Referido a la atracción: algunos problemas de la matemática discreta resultan atractivos e interesantes para los alumnos ya que tras enunciados sencillos se esconden verdaderos desafíos que permiten a los estudiantes explorar y descubrir.

- Referido a la adecuación: la matemática discreta ofrece un nuevo comienzo a aquellos estudiantes que normalmente no han tenido éxito con las matemáticas. Por otro lado, suponen nuevos retos y desafíos para aquellos alumnos acostumbrados a tener éxito en las matemáticas y que tienen la intención de cursar estudios universitarios en el campo de las ciencias.

Artículos más recientes concretan dentro de la Matemática Discreta la importancia de la Teoría de Grafos en relación con las características notables que puede ofrecer su presencia en las aulas de educación secundaria. Nuñez et al. (2016, p. 201) señalan:

- Su gran sencillez en cuanto a los elementos que utiliza: puntos y líneas. Este hecho facilita a los alumnos comprender el concepto de grafo sin la necesidad de poseer conocimientos teóricos previos.
- Es muy intuitiva.
- Facilita procedimientos algorítmicos fáciles de comprender por los alumnos.
- Relaciona diversas áreas de las Matemáticas que se imparten actualmente en Secundaria y/o Bachillerato como la combinatoria, el álgebra, la probabilidad, la geometría y la aritmética, entre otras.
- La multitud de aplicaciones que tienen en otras disciplinas, tanto científicas, como de la salud, humanas o sociales.

La utilización de los grafos como herramienta de resolución de problemas es una estrategia adoptada por distintos autores. Canto, Valdés, y Cabello (2007) señalan las ventajas que ofrece la Teoría de Grafos para resolver problemas clásicos de las matemáticas frente a los métodos ordinarios de resolución, ensayo-error o "*la cuenta de la vieja*". Núñez, R., Núñez, J., Paluzo y Salguero (2016), tras una breve introducción de contenido teórico (recorridos eulerianos, recorridos hamiltonianos, árboles, planaridad y coloreado de grafos) llevan a cabo la resolución de problemas aparentemente sencillos y de índole cotidiano. Autores como Braicovich (2013) optan por abordar la resolución de problemas sin impartir conocimientos previos con el objetivo de que los alumnos sean los encargados de elaborar su propia estrategia de abordaje. Asimismo, esta autora considera interesante que el alumnado de educación secundaria halle la relación entre grafos y poliedros trabajando así con distintas representaciones. Otra actividad que considera interesante esta autora es la elaboración de algoritmos, para ello indica que actividades como hallar el coloreo óptimo o recorridos eulerianos son adecuadas (Braicovich, 2010).

Con relación a las actividades que implican el coloreo optimo, el Teorema de los Cuatro Colores ha sido durante las últimas décadas un recurso educativo utilizado por distintos autores para introducir los grafos en distintas etapas educativas. Stadler describe este teorema en una conferencia en el año 2006, como un *juego de niños*, un problema sin ninguna utilidad práctica aparente más que ser un reto para la razón humana siendo ese aspecto donde precisamente radica su potencial educativo: tras un enunciado aparentemente sencillo su demostración involucra técnicas matemáticas completas (Stadler, 2006). La sencillez del teorema permite que sea un recurso adecuado en las distintas etapas educativas, experiencias con alumnado entre 5 y 14 años muestran que a partir de los 12 años los alumnos son capaces de entender los conceptos, trabajar de manera reflexiva, realizar deducciones lógicas (a través de la formulación de hipótesis y algoritmos) y manejar distintas construcciones mentales (Braicovich y Cognigni, 2011).

La cantidad de recursos educativos con relación a los grafos para la etapa de educación secundaria es reducida y se podría decir que es realmente escasa si se tratan de actividad introductorias de estos contenidos en el aula a través de herramientas computacionales (Braicovich, 2020). Esto supone la necesidad de crear nuevos contenidos que acerquen conceptos como los diagramas de Voronoi a las aulas de educación secundaria (Soto y Castro, 2016).

Autores como Fraile, Lastra y Orden (2013) realizaron un taller orientado al alumnado de educación secundaria, a docentes en activo y en formación, y al público en general, en el cual mostraban la relación existente entre los grafos, la geometría y la vida real, todo ello usando como herramienta de modelización el software GeoGebra. Algunas de las actividades propuestas se basaban en la construcción del diagrama Voronoi para determinar la localización de puntos estratégicos, el estudio de optimización de rutas y la colocación de cámaras de vigilancia. Pese a la innovadora propuesta de los autores, estos señalan que la experiencia no fue satisfactoria para el alumnado de educación secundaria fruto de la falta de implicación por parte de los docentes, la falta de interés por parte del alumnado y la larga duración del taller (3 horas) con respecto a sus horarios habituales en el centro educativo.

La implicación por parte del profesorado es esencial cuando se busca introducir nuevos conceptos en las aulas. Señal de esto es la propuesta de Braicovich, Caro y Yobrán (2016) que llevaron a cabo un taller orientado a docentes de matemáticas. A través de esta propuesta, las autoras buscaban despertar el interés de los docentes por introducir el Diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay, dada su relación con la geometría, en las aulas de educación secundaria. Como herramienta TIC utilizaron el software libre GeoGebra ya que posee distintos comandos de grafos y su utilización está ampliamente instaurada en las aulas.

En relación con la formación que poseen los docentes sobre la Teoría de Grafos, distintos profesionales han impartido talleres y cursos orientados a docentes en activo y a estudiantes en formación de profesorado en la especialidad de matemáticas. El objetivo principal de estos talleres es transferir conceptos de grafos haciendo referencia a la didáctica y a la metodología adecuada para la puesta en práctica en las distintas etapas educativas. Este tipo de formación busca que los asistentes sean los encargados de construir su propio conocimiento, mediante la realización de actividades previamente diseñadas, con el fin de generar en ellos la motivación necesaria para que en el futuro investiguen y profundicen sus conocimientos sobre los grafos (Cognigni, Braicovich, y Reyes,2009; Braicovich, 2013; Braicovich, Cognigni, Almeira y Nayen, 2018).

La investigadora T.C. Braicovich, directora del Proyecto de Investigación “Teoría de Grafos”, ha dedicado más de dos décadas a investigar la factibilidad de incluir la Teoría de Grafos en los distintos niveles educativos. A modo de síntesis ha publicado recientemente un artículo destancado los aspectos más relevantes de su investigación educativa incluyendo un apartado dedicado a los docentes de matemáticas (Braicovich, 2020).

Por último, referente a la presencia de la Teoría de Grafos en educación secundaria, el Proyecto de Estimulación del Talento Matemático, reconocido nacionalmente como Estalmat, incluye un gran abanico de contenido sobre grafos dentro de sus recursos educativos (ESTALMAT, 2019).

Dada la ausencia de los grafos en la ESO se ha llevado a cabo una revisión bibliográfica sobre las metodologías que se utilizan en estudios superiores para impartir esta teoría. En el caso de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Informática de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV) Lluch, Peñalver y Codesal (2014) señalan lo siguiente: “la teoría de grafos necesita la introducción de mucha terminología sencilla de comprender, que expuesta en clase puede resultar tediosa, por lo que hemos escogido como metodología la educación inversa" (p.13). Asimismo, las autoras concluyen: “con esta metodología conseguimos profundizar en la teoría de grafos de una manera más aplicada que con la clase tradicional” (p. 14).

El modelo pedagógico del aula invertida se trata de un nuevo enfoque del proceso enseñanza-aprendizaje que modifica el orden metodológico tradicional (Sierra y Espinosa, 2019). Los alumnos adquieren conocimientos teóricos a través del uso de distintos medios tecnológico en sus hogares para posteriormente emplear el tiempo del aula en poner en práctica esos conocimientos trabajando cooperativamente con sus compañeros mientras el docente actúa de manera más personalizada y guía el aprendizaje (Martínez, Esquivel-Gámez y Martínez-Castillo, 2014; Arellano, Aguirre y Rosas, 2015; Sierra y Espinosa, 2019).

Experiencias en el aula de Matemáticas hacen referencia a los beneficios que ofrece este modelo, como es el caso de Hernández (2018) que tras poner en práctica este modelo en el curso de 4º ESO señala lo siguiente: “El modelo flipped classroom (..) convierte el aula en un espacio en el que los estudiantes puedan aprender matemáticas no solo ellos mismos, sino también con compañeros y con el profesor. Es un modelo pedagógico más social, más inclusivo y personal” (p. 76). Este autor destaca como una de las ventajas que ofrece este nuevo enfoque el poder llevar al aula las técnicas de aprendizaje cooperativo:

> Cada alumno aprende a cooperar con el resto de los compañeros. Todos los compañeros trabajan para un fin común y no individual. Promueve la ayuda en beneficio del grupo. Adquieren un tipo de responsabilidad no individual, sino grupal. Aprenden que una actividad de aprendizaje cooperativo es una actividad evaluable. (Hernández, 2018, p.71)

Aspecto en el cual coincide García y Llongarriu, (2018) destacando los beneficios que ofrece este modelo en el curso de 3º ESO junto con la metodología de aprendizaje cooperativo: “el aprendizaje cooperativo es una metodología que se integra dentro del espacio de la clase cuando se implementa este modelo de enseñanza” (p. 100).

En el aprendizaje cooperativo el alumnado adopta un papel activo y autónomo en las clases lo que permite al docente observar los diferentes ritmos de aprendizaje de cada alumno, las dificultades, el funcionamiento de los distintos grupos de trabajo. A nivel grupal el docente puede emplear el tiempo en el aula para realizar preguntas sencillas, comentarios, reflexiones que incentiven la participación de todos los alumnos favoreciendo la retroalimentación (Arellano et al, 2015).

2. Propuesta didáctica

2.1. Descripción

Esta propuesta didáctica se diseña para introducir contenidos de la Teoría de Grafos en la etapa de ESO, concretamente en el tercer curso de ESO en las materias de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas y Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. De este modo, la introducción de los grafos en este curso permite establecer una base de conocimientos para continuar gradualmente impartiendo contenidos sobre grafos de mayor complejidad en los cursos posteriores.

De acuerdo la orden EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, el currículo de las materias de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas y Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas del tercer curso de la ESO de matemáticas se divide en cinco bloques de contenido. Estos contenidos se agrupan en bloques de la siguiente forma:

- Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Bloque 2. Números y álgebra
- Bloque 3. Geometría
- Bloque 4. Funciones
- Bloque 5. Estadística y probabilidad

Se propone la inclusión de los grafos de manera gradual a lo largo de todo el curso académico, de modo que en ocasiones se relacionan los grafos con contenido curricular, permitiendo a los alumnos afianzar y ampliar contenidos, y en otras ocasiones se utilizan a modo de estrategia para captar la atención del alumnado e incentivar su interés por las matemáticas. Autores como Núñez et al. (2016) recomiendan esta forma de abordaje indicando lo siguiente:

> La Teoría de Grafos (..) resulta ser una herramienta muy sencilla y adecuada para abordar problemas, que pueden ser propuestos por el profesor bien de una forma continuada en sus clases, o bien para romper determinados momentos de "aburrimiento" de los alumnos, períodos finales de trimestre con la teoría ya explicada o simplemente en cualquier otro momento que el profesor crea que le pueden servir para conseguir de nuevo la atención de los alumnos o para

> motivarlos a la hora de introducir nuevos conceptos teóricos del contenido habitual de la asignatura. (Núñez et al., 2016, p. 189)

Uno de los objetivos de este TFM es que los alumnos creen conexiones entre los conocimientos que ya tenían y los nuevos aprendizajes (grafos). Para ello se va a utilizar el modelo pedagógico del aula invertida que permite a los alumnos adquirir conocimientos a través de distintas metodologías, como se mencionó anteriormente, en este caso concreto mediante el aprendizaje cooperativo, y el uso de recursos tecnológicos.

2.2. Metodología

Esta propuesta didáctica se diseña bajo las líneas generales del modelo pedagógico del aula invertida. Este nuevo enfoque además de ofrecer grandes ventajas, como se ha mencionado anteriormente, permite optimizar el número de sesiones y el tiempo en el aula. Dado que este TFM propone introducir contenidos nuevos en las sesiones ordinarias del curso académico, es esencial hacerlo a través de un método que garantice una enseñanza de calidad sin interrumpir el ritmo habitual de las clases y sin impedir que se cubra el temario curricular.

De acuerdo con este modelo pedagógico se estructuran los contenidos sobre grafos en tres módulos formados cada uno de ellos por la visualización de un video y la realización de distintas actividades, previamente adecuadas a los objetivos específicos de cada módulo. El desarrollo de cada módulo se realiza de acuerdo con la siguiente dinámica:

Trabajo fuera del aula:

Adquisición de contenidos teóricos mediante la visualización de un video y la realización de una actividad complementaria. Esta primera toma de contacto va acompañada de técnicas de aprendizaje: toma de notas, anotación de dudas o búsqueda de información complementaria vía Web. Este trabajo individual fuera del aula permite establecer una base de partida para realizar en el aula actividades de mayor dificultad (Arellano et al. 2015).

El entorno virtual que se utiliza para facilitar el video al alumnado es la plataforma Edpuzzle (https://edpuzzle.com/). "Edpuzzle es una herramienta favorecedora del aprendizaje activo y autoaprendizaje" (Sierra y Espinosa, 2019, p.

27). La visualización de los videos a través de esta plataforma se puede realizar desde ordenadores, tablets y dispositivos móviles, facilitando el acceso a los alumnos. Asimismo, esta plataforma permite comprobar si los alumnos han visualizado el video, aspecto evaluable. El empleo de este tipo de recursos tecnológicos se adapta a las necesidades y ritmos de aprendizaje de cada alumno, ya que es posible ver los videos numerosas veces, pararlo e incluso visualizarlo (individualmente) de nuevo en el aula al mismo tiempo que se realizan las actividades (Sierra y Espinosa, 2019; Martínez et al., 2014).

En el caso de que un alumno no tenga acceso a internet o a dispositivos electrónicos que le permitan visualizar el video fuera del aula, se le podría facilitar una memoria externa o bien un dispositivo electrónico del centro educativo (préstamo), que le permita seguir la dinámica del aula.

Trabajo dentro del aula:

Se dedica el inicio de la sesión a la clarificación de dudas, revisión de contenidos, reflexiones comunes y a la resolución conjunta de la actividad complementaria.

Una vez resuelta las dudas se llevan a cabo actividades para consolidar los contenidos. En general, estas actividades se realizan en grupos de trabajo cooperativo de manera que los alumnos puedan aplicar y practicar los conocimientos adquiridos fuera del aula, mientras el docente guía el proceso educativo solventando dudas que puedan surgir en el trabajo individual o grupal y que no han podido ser resueltas por los propios alumnos (Sierra y Espinosa, 2019). Asimismo, esta dinámica permite al docente emplear mayor cantidad de tiempo en ayudar a aquellos alumnos que presenten necesidades especiales o dificultades (atención a la diversidad) (García y Llongarriu, 2018).

Estrategias de aprendizaje cooperativo

Durante las sesiones de aula los alumnos trabajan en grupos de aprendizaje cooperativo. El aprendizaje cooperativo se define como:

> El aprendizaje cooperativo es una forma de trabajo en grupo basado en la construcción colectiva del conocimiento y el desarrollo de habilidades mixtas (aprendizaje y desarrollo personal y social), donde

> cada miembro del grupo es responsable tanto de su aprendizaje como del de los restantes miembros del grupo. (Gil. C., Baños, Alías, & Gil. D., 2007, p.7)

Emplear estrategias de aprendizaje cooperativo en el aula permite a los alumnos adoptar un papel activo en su propio aprendizaje. A través del trabajo en grupos reducidos los alumnos trabajan de manera cooperativa para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás miembros del grupo (Hernández, 2018).

El número de miembros de cada grupo de trabajo se especifica en cada una de las actividades. Estos grupos de trabajo poseen los siguientes rasgos comunes (Martínez et al., 2014; García y Llongarriu, 2018):

- El docente es el encargado de formar estos grupos de trabajo de manera heterogénea en cuanto a las habilidades personales, los conocimientos matemáticos y los ritmos de trabajo del alumnado.
- Con el objetivo de optimizar el tiempo en el aula, los grupos se realizan previamente a las sesiones.
- En relación con la organización interna del grupo, no existe diferenciación ni un rol determinado para cada alumno: todos trabajan cooperativamente por igual y asumen la responsabilidad de dirigir el proceso.
- Los grupos de trabajo no se mantienen estables a lo largo de todo el curso académico de manera que trabajen con el mayor número posible de compañeros.

Rol del docente

El papel que desarrolla el docente como facilitador del aprendizaje es fundamental. A rasgos generales las funciones del docente durante el proceso de enseñanza-aprendizaje son las siguientes (Arellano et al., 2015; García y Llongarriu, 2018; Hernández, 2018):

- Diseño o búsqueda de recursos didácticos que faciliten el logro de los objetivos. de aprendizaje marcados y la adquisición de competencias.
- Dotar al alumnado de autonomía para dirigir su propio proceso de aprendizaje.
- Crear ambientes de aprendizaje adecuados donde prime la capacidad creativa, la reflexión, la curiosidad, el análisis, la investigación, la comprensión escrita

y oral, el trabajo en equipo, las actitudes de respeto, la diversidad, el razonamiento matemático.

- Adaptar las actividades, los tiempos, los ritmos y los métodos de aprendizaje a las distintas necesidades educativas del alumnado.
- Orientar, guiar, aconsejar al alumnado a lo largo de la realización de las actividades, así como resolver las posibles dudas que se presenten.
- Solventar los posibles problemas que surjan en los grupos generando un clima de trabajo adecuado.
- Adoptar el rol de moderador durante los debates espontáneos que surjan en el aula.
- Impulsar la actitud crítica de los alumnos estableciendo tiempos de reflexión a nivel grupal o a nivel de aula.
- Evaluar el desarrollo de todo el proceso de enseñanza- aprendizaje.

2.3. Competencias clave

Dentro de las siete competencias clave (Orden ECD/65/2015 de 21 de enero, 2015) las que se trabajan a lo largo de esta propuesta didáctica son las siguientes:

- Competencia en comunicación lingüística (CCL): se desarrolla mediante la lectura y comprensión de las actividades, la exposición oral de las soluciones de las actividades, la comunicación intragrupo y con el resto de los compañeros, los debates en el aula y la utilización del lenguaje matemático. Asimismo, el desarrollo de esta competencia se ve favorecido por la adquisición de nuevo vocabulario relacionado con los grafos (alfabetización matemática).
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT): se desarrollan mediante la adquisición de nuevos contenidos matemáticos (grafos), la utilización de nuevas estrategias para la resolución y representación de problemas, la modelización matemática de situaciones que permiten describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto a través del software GeoGebra, la formulación de hipótesis y el uso del razonamiento matemático como base para elaborar argumentos e interpretar resultados.
- Competencia digital (CD): se desarrolla a través de las distintas estrategias propias del modelo del aula invertida y del uso de la plataforma Edpuzzle.

Asimismo, el alumnado desarrolla esta competencia clave mediante el uso del software GeoGebra como recurso básico para representar los grafos y modelizar los problemas y de un buscador de web para la búsqueda y selección crítica de información.

- Competencia para aprender a aprender (CAA): el modelo de aula invertida y la estrategia de trabajo cooperativo favorecen el desarrollo de esta competencia de modo que los alumnos son los protagonistas del proceso y del resultado de su propio aprendizaje desde dos modalidades: individual y grupal.
- Competencias sociales y cívicas (CSC): la realización de distintas actividades relacionadas con fenómenos sociales, optimización de transportes, el uso de medios de transporte saludables y el cuidado del medioambiente favorece el desarrollo de competencias sociales relacionadas con el bienestar personal y colectivo, propiciando la conciencia social. Asimismo, a través del trabajo cooperativo se desarrolla la tolerancia, la toma de decisiones, la escucha activa, la actitud crítica y la responsabilidad colectiva que favorecen el desarrollo de esta competencia.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIE): esta competencia se desarrolla mediante el trabajo autónomo, la búsqueda de información sobre grafos para autocorregir las actividades. Asimismo, trabajar la resolución de problemas favorece el desarrollo de esta competencia.

2.4. Evaluación

Considerando que la evaluación es un instrumento orientador de la práctica educativa, se propone una evaluación pre-formativa, formativa y continua.

Evaluación pre-formativa

El objetivo de llevar a cabo una evaluación pre-formativa es aumentar la implicación, compromiso y la responsabilidad del alumnado en relación con las tareas que realizan fuera del aula. El trabajo individual que los alumnos realizan fuera del aula es parte esencial del proceso enseñanza-aprendizaje, por tanto, mediante esta evaluación se valora el hecho de que los alumnos visualicen el video (dato que se puede obtener a través de la plataforma Edpuzzle) y realicen las actividades complementarias propuestas. Durante el tiempo que se dedica al comienzo de la sesión a resolver dudas y poner en común la experiencia individual fuera del aula, se lleva a cabo una observación directa sobre el grado de adquisición de los conceptos y sobre la necesidad de afianzar aquellos que no están claros antes de que se lleven a cabo las actividades siguientes.

Evaluación formativa y continua

Durante el proceso de aprendizaje, y más incluso cuando se introducen conceptos nuevos, es habitual cometer errores, por lo que es necesario crear un ambiente donde los alumnos sientan que los errores son parte del aprendizaje, una oportunidad para aprender y no una penalización. Para ello se lleva a cabo una evaluación formativa a lo largo de las distintas sesiones que permita a los alumnos extraer conclusiones sobre sus fortalezas y debilidades, de forma que puedan mejorar. Asimismo, esta evaluación permite al docente tomar nota del avance individual (grado de adquisición de los contenidos) y del proceso de enseñanza-aprendizaje (Martínez et al., 2015).

Instrumento de evaluación

Con el objetivo de llevar a cabo una evaluación integral y objetiva del desempeño cooperativo e individual, así como del proceso de enseñanza-aprendizaje a lo largo de cada uno de los módulos se recurre al uso de una tabla de evaluación. La elaboración de esta tabla está determinada previamente por el docente en base a los unos criterios de evaluación que faciliten la adquisición de las competencias específicas y el logro de los objetivos específicos de cada módulo. Esta tabla de evaluación se completa a lo largo del módulo mediante la observación sistemática en el aula, la realización de preguntas, la entrega de las actividades, la participación intra e intergrupal y las aportaciones de cada uno de los alumnos.

En el anexo V se encuentran las tablas de evaluación 10, 11 y 12 correspondientes a cada uno de los módulos.

Calificación

De acuerdo con el instrumento de evaluación cada uno de los módulos supone un 10% de la nota de cada uno de los trimestres.

Evaluación de la propuesta didáctica

Con el fin de promover la reflexión docente y la autoevaluación de la organización, realización y el desarrollo de esta propuesta didáctica, al finalizar cada módulo se realiza una serie de preguntas al alumnado que permitan evaluar el funcionamiento de lo programado dentro y fuera del aula, así como establecer estrategias de mejora para futuras propuestas didácticas. El instrumento de evaluación que se proporciona a los alumnos se recoge en la tabla 13 del Anexo VI. El método para completarla es mediante la Escala Likert del 1 al 5 (1 en total desacuerdo, 5 en total acuerdo).

Asimismo, al finalizar el curso, se evalúa la propuesta didáctica en su conjunto, lo que permite recoger y establecer mejoras en el futuro. Esta evaluación es completada por el docente, el instrumento de evaluación que se utiliza se recoge en la tabla 14 del Anexo VI.

2.5 Recursos didácticos

Videos

Tras una búsqueda exhaustiva sobre recursos multimedia con contenidos en grafos se decide utilizar los videos de la plataforma YouTube obra de Eduardo Sáenz de Cabezón, reconocido con el Premio Especial del Jurado «Ciencia en Acción» por su "destacada trayectoria en la divulgación y la comunicación de la ciencia, el fomento de las vocaciones científicas y por su afán de acercar la ciencia al gran público a través de una gran variedad de formatos" (Fundación Princesa de Girona, 2019). Dado el carácter interactivo de los videos, la creatividad, su adecuada duración, la calidad de las explicaciones y contenidos, la sencillez en cuanto al vocabulario utilizado y la muestra de aplicaciones corrientes de estos conceptos se considera que estos videos son adecuados para introducir los grafos en el tercer curso de la ESO.

Actividades

Las actividades tienen por objetivo captar la atención del alumnado, desafiar su mente y despertar su curiosidad de modo que su implicación a lo largo de todo el proceso sea alta. Para ello es necesario dotar de realidad la situación planteada, por lo que se diseñan actividades relacionadas con su contexto cercano y se complementan con materiales audiovisuales. Asimismo, las actividades poseen contenidos transversales asociados a problemáticas y retos sociales de los últimos años. Estos temas se tratan en el aula, incentivando a los alumnos a participar y expresar sus opiniones sobre estos fenómenos.

Estas actividades se han adecuado a las necesidades del alumnado del tercer curso de la ESO de acuerdo con las materias de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas y Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. Se plantean actividades para que de manera colaborativa realicen un análisis exhaustivo del problema, diseñen un plan de trabajo, ejecuten el mismo y finalmente elaboren una respuesta. Estas actividades han sido seleccionadas previamente, sin embargo, se incentiva a los alumnos a buscar otras actividades que presenten situaciones/problemas que consideren de su interés, siempre y cuando se verifique que son adecuadas y que se puede aplicar el mismo razonamiento que en las iniciales. En el diseño y temporalización de estas actividades se han considerado sesiones (clases) de 50 minutos de duración.

Módulos

La propuesta didáctica se estructura en módulos, de forma que se dota de continuidad a lo largo del curso académico. Cada módulo está formado por la visualización de un video y varías actividades. Las sesiones correspondientes a cada módulo son consecutivas.

Los módulos se estructuran a lo largo del curso académico de acuerdo con la tabla 1.

Tabla 1.

Descripción de los módulos

Módulo	Nombre	Recursos didácticos	Trimestre	Nº sesiones
1	Introducción de grafos	Video 1 Actividad 1 Actividad 2 Actividad 3	1º	3
2	Diagrama de Voronoi	Video 2 Actividad 4 Actividad 5	2º	1

3	Coloración de grafos	Video 3 Actividad 6 Actividad 7	3º	2

Elaboración propia.

En el Anexo IV de este documento se recoge una breve explicación teórica de los conceptos de grafos que se trabajan en los distintos módulos.

2.5.1 Módulo 1. Introducción de grafos

Descripción

El módulo 1 está formado por los siguientes recursos didácticos:

Video 1:

URL Video 1 (Derivando, 2017): https://www.youtube.com/watch?v=lp-1rvtRYQg&t=148s

Contenidos:

- Representación de un grafo: aristas y vértices
- Modelización de distintas situaciones mediante grafos
- Grado de un vértice
- Teorema de Euler

Actividad 1. Grafos:

La actividad 1 es una actividad de carácter complementario al material multimedia (video 1). Dado que se trata de la primera toma de contacto con los grafos se diseña una actividad sencilla, visual, creativa y dinámica. La actividad reta a los alumnos a trazar seis grafos sin levantar el lápiz del papel con la condición de no trazar dos veces la misma arista. El objetivo de esta actividad es introducir los elementos que forman un grafo (vértices y aristas) así como establecer la relación existente entre el grado de un vértice y los distintos caminos eulerianos: abiertos y cerrados.

Actividad 2. Grafos imposibles:

El objetivo de esta actividad es reforzar los contenidos teóricos introducidos en la actividad 1. Se propone a los alumnos crear un grafo conexo (si fuese no conexo la actividad no tendría dificultad) que sea imposible de trazar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista.

Actividad 3. Red de amistad:

Esta actividad se ha diseñado con el objetivo de acercar al alumnado situaciones corrientes del día a día que pueden ser resueltas de una manera sencilla, eficaz y visual mediante el uso de los grafos. La actividad presenta ocho antiguos compañeros de instituto que a través de las redes sociales quieren ponerse en contacto. Dado que los alumnos están familiarizados con el uso y funcionamiento de las redes sociales, para realizar este tipo de acciones se considera adecuado incluir la red social de Facebook. Los contenidos sobre grafos que recoge esta actividad son sencillos e intuitivos de forma que sirvan como base para la realización de los siguientes módulos.

Secuenciación temporal

Este módulo se lleva a cabo en el primer trimestre del curso académico de forma que posibilite la continuidad de la propuesta didáctica a lo largo del curso.

Conocimientos previos

Dado que este módulo se trata de la introducción de los grafos, no es necesario que los alumnos posean contenidos previos en relación con los grafos.

Objetivos específicos

Los objetivos específicos correspondientes a este módulo son los siguientes:

- Identificar los elementos que componen un grafo: aristas (conexiones) y vértices (nodos)
- Representar problemas sencillos mediante distintos tipos de grafos: conexos, no conexos.
- Relacionar el grado de un vértice con los caminos eulerianos: cerrados y abiertos

Temporalización

El plan de trabajo de este módulo se desarrolla de acuerdo con la tabla 2.

Tabla 2.

Plan de trabajo- temporalización del módulo 1.

Módulo 1	Plan de trabajo- Temporalización
Trabajo fuera del aula	· Visualización Video 1 · Toma de notas y listado de dudas de manera individual · Realización y autorresolución Actividad 1
Trabajo en el aula	1ª Sesión
	· Resolución de dudas, reflexiones comunes y resolución Actividad 1. 30 minutos · Formación y disposición en el aula de las parejas de trabajo. 5 minutos · Realización Actividad 2. 15 minutos
	2ª Sesión
	· Disposición en el aula de las parejas de trabajo. 5 minutos · Resolución Actividad 2. 45 minutos
	3ª Sesión
	· Formación y disposición en el aula de los grupos de trabajo. 5 minutos · Realización Actividad 3. 40 minutos · Entrega resolución Actividad 3. 5 minutos

Elaboración propia.

Metodología

Trabajo fuera del aula

De manera previa a la 1ª sesión de este módulo, se indica como tarea fuera del aula la visualización del video 1, a través de la plataforma Edpuzzle, junto con la realización autocorrección de la actividad 1. La ficha correspondiente a la actividad 1 es la siguiente:

Identifica cuál de los siguientes grafos es posible dibujar de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista (conexiones). Justifica la respuesta gráficamente. Comprueba la solución mediante la búsqueda web.

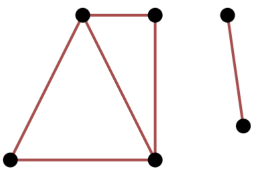

Figura 1. Grafo no conexo. Elaboración propia.

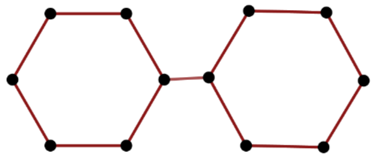

Figura 2. Grafo simple. Elaboración propia.

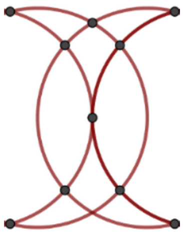

Figura 3. Grafo de la cimitarra. Elaboración propia.

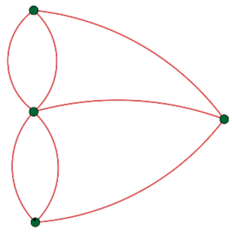

Figura 4. Grafo de los puentes de Königsberg. Elaboración propia.

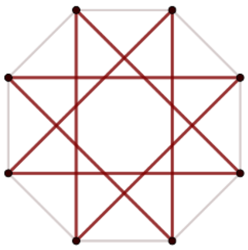

Figura 5. Grafo polígono estrellado 8/3. Elaboración propia.

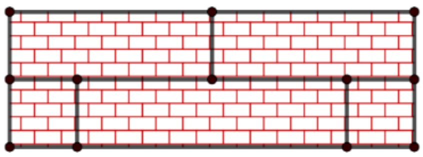

Figura 6. Grafo Clausen. Elaboración propia.

Esta actividad se resuelve dibujando los grafos en papel y justificando porque en cada caso es posible, o no, trazar el grafo de acuerdo con lo estipulado en el enunciado. El objetivo de esta actividad es que los alumnos pongan en práctica los conocimientos, referentes a grafos que han adquirido mediante la visualización del video 1, identificando sus propias fortalezas y debilidades. Asimismo, se busca que establezcan conclusiones relacionando el grado de cada vértice con el tipo de camino euleriano: abierto o cerrado. La autocorrección vía búsqueda web tiene por objetivo la indagación sobre los grafos adquiriendo nuevos conocimientos, desarrollando la curiosidad, destrezas digitales y la capacidad de detectar y corregir sus propios errores. No obstante, la resolución de esta actividad se pone en común en la 1ª sesión de forma que el docente explica aquellos conceptos teóricos que no se hayan comprendido de manera correcta o que generen dudas.

En el anexo I se encuentra la ficha que se entrega al alumnado y la resolución de esta actividad.

1ª Sesión

Al comienzo de la sesión se resuelven dudas, se comparten las primeras impresiones y se dan pequeñas explicaciones teóricas. Se lleva a cabo la resolución oral de la actividad 1, de modo que el docente pueda reforzar y resaltar aquellos contenidos de especial importancia valorando los conocimientos de partida de cada alumno. En este primer contacto con los grafos es esencial que los alumnos estén receptivos y sientan curiosidad por este nuevo concepto por lo que el papel del docente es esencial creando un ambiente adecuado y realizando preguntas que capten su atención. Para ello se utilizan los seis grafos que recoge la actividad 1, de modo que se pueda despertar la curiosidad del alumnado.

A continuación, se realiza la actividad 2 en parejas. Estas parejas las forma el docente previamente de acuerdo con los ritmos de trabajo de cada alumno, de modo que aquellos alumnos cuyo ritmo de trabajo sea alto puedan ayudar a otros compañeros cuyo ritmo de trabajo sea menor o que presenten dificultades. Esta actividad se realiza en pareja de forma que los dos integrantes de cada pareja participen activamente en la creación de un único grafo de manera cooperativa.

La ficha correspondiente a la actividad 2 es la siguiente:

Crea junto con tu compañero/a un grafo conexo que sea imposible de trazar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista.

Para incentivar la participación e implicación del alumnado, se propone una dinámica de resolución en la cual cada pareja reta a otra pareja a resolver el grafo que han creado:

- Se elige la primera pareja al azar
- Esta pareja dibuja en la pizarra el grafo y reta a otra pareja a resolverlo razonando la respuesta.
- Una vez que la pareja retada lo ha resuelto, dibuja su grafo retando a otra pareja a resolverlo y razonarlo.

- Se continua con esta dinámica de modo que todas las parejas participen, incluida la primera pareja elegida al azar.

Durante la realización de la actividad el docente observa los distintos razonamientos que emplean los alumnos para justificar las distintas creaciones, de modo que si observa una duda común la resuelve de manera global, de otro modo resuelve aquellas dudas puntuales que presente cada pareja. Mediante la creación de un grafo los alumnos ponen en práctica los conocimientos que han adquirido previamente. La resolución de la actividad 2 se lleva a cabo en la siguiente sesión.

2ª Sesión

Esta segunda sesión se dedica a la resolución de la actividad 2. Dado que los alumnos trabajan en parejas y siguen la dinámica mencionada anteriormente, es importante que dispongan del tiempo necesario para que todos puedan participar en la resolución de la actividad, por lo que se emplea una sesión completa. El objetivo de resolver esta tarea en la pizarra es que los alumnos desarrollen estrategias para trabajar en pareja, llegando a un acuerdo sobre que grafo dibujar y que pareja retar, y busquen estrategias para trazar el grafo en la pizarra de forma que no sea evidente si es posible o no trazarlo sin levantar, en este caso, la tiza. Además, a través de la resolución de esta actividad en la pizarra todos los alumnos se benefician del razonamiento de sus compañeros y de la resolución de posibles dudas. Durante el desarrollo de esta dinámica el docente da las explicaciones necesarias para que los alumnos adquieran los conocimientos de manera correcta, reforzando aquellos contenidos que no hayan sido interpretados correctamente.

En el anexo I se encuentra la ficha que se entrega al alumno junto con las propiedades con las cuales deben jugar los alumnos para crear el grafo.

3ª Sesión

En esta sesión se lleva a cabo la realización de la actividad 3 para la cual los alumnos trabajan en grupos de aprendizaje cooperativos de tres miembros. Dado que para realizarla disponen de un tiempo estimado de 40 minutos, se forman grupos con un número pequeño de miembros posibilitando una dinámica ágil y productiva de trabajo. Estos grupos son formados por el docente previamente a la sesión de forma que se optimiza el tiempo de trabajo del aula.

Una vez que los alumnos se han colocado junto con sus compañeros se entrega la ficha correspondiente a la actividad 3:

Años después de finalizar el instituto Laura quiere organizar una reunión con ocho de sus antiguos compañeros de clase, sin embargo, no tiene el número de teléfono de ninguno de ellos. Recurre a Facebook donde encuentra el perfil de Carla, a partir de la cual establece las siguientes conexiones:

- ***Carla es amiga de Sergio y de Lidia.***
- ***Lidia es amiga a su vez de Carmen y Andrés.***
- ***Sergio es hermano de Julia; Julia y Andrés son pareja, por lo que los tres son amigos en Facebook.***
- ***Carmen es amiga de Carlos y de Andrés, Carlos no es amigo de nadie más.***
- ***María no tiene perfil en Facebook***

Figura 7. Profesiones personas, actividad 3.
Fuente imágenes: https://www.domestika.org/es/blog/2985-iconos-gratuitos-para-redefinir-a-las-mujeres-profesionales

a) Para ayudar a Laura, representad mediante un grafo esta red de amistades.

b) ¿Cuántos amigos tienen cada uno en Facebook dentro de esta red de amistades?

c) Supongamos que los que <u>NO</u> son actualmente amigos en Facebook se quisieran agregar, exceptuando a María, ¿Cuántas solicitudes de amistad se mandarían en total?, ¿Quién tendría que agregar a un menor número de amigos?, ¿Por qué?

d) Representad mediante un grafo la situación hipotética del apartado c.

Una vez que los alumnos disponen del enunciado de la actividad 3, se dan las indicaciones necesarias para la correcta realización de la actividad resaltando la realización de esta de forma cooperativa (participación de todos los miembros del grupo de trabajo) y el modelo de evaluación (participación, actitud, comportamiento, implicación, trabajo en grupo, así como el uso de los grafos junto con otras estrategias para resolver la actividad). Durante el proceso de realización de la actividad el docente actúa de guía, ayudando a aquellos grupos que soliciten ayuda o que presenten dudas. En caso de que fuese necesario, se representa en la pizarra el grafo correspondiente al primer apartado (apartado a) de modo que los alumnos puedan continuar con la realización de la actividad. Al finalizar la sesión, cada grupo de trabajo entrega una copia de la resolución de la actividad 3.

a) Para ayudar a Laura, representad mediante un grafo esta red de amistades.

Tras la interpretación del enunciado, se dibuja el grafo correspondiente a las relaciones de amistad establecidas en el enunciado. Dado que el vértice María no se encuentra dentro de la red de amistades se trata de un vértice aislado por lo que este grafo se trata de un grafo no conexo. Durante la realización de este apartado, se señala que la disposición de los vértices en el papel y su representación no es única, mientras que el grado y la relación entre los vértices se mantiene.

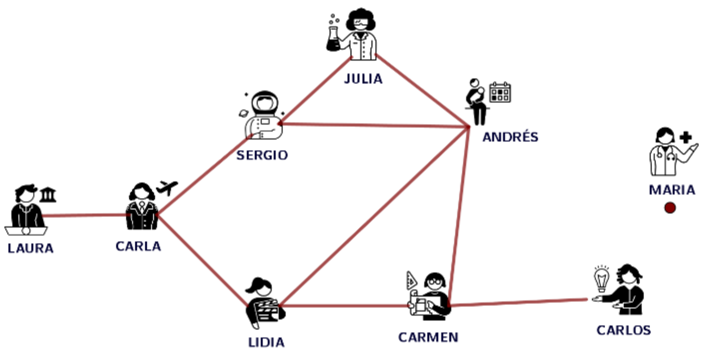

Figura 8. Grafo representativo apartado a, actividad 3. Construcción mediante el software GeoGebra. Fuente imágenes: https://www.domestika.org/es/blog/2985-iconos-gratuitos-para-redefinir-a-las-mujeres-profesionales

b) ¿Cuántos amigos tienen cada uno de estos nueve amigos en Facebook dentro de esta red de amistades?

Una vez representado el grafo es trivial identificar el número de amigos que tiene cada uno, basta con contar el número de aristas que inciden en cada vértice, es decir, el grado de cada vértice. Se debe incluir el vértice María dado que el enunciado indica "nueve amigos".

c) ***Supongamos que los que <u>no</u> son actualmente amigos en Facebook se quisieran agregar, exceptuando a María, ¿Cuántas solicitudes de amistad se mandarían en total?***

Para resolver este apartado existen diferentes estrategias: mediante el número total de aristas, el grado total del grafo o gráficamente. Todas las formas de abordar este problema son válidas, sin embargo, mediante la representación gráfica se resuelve este apartado y el siguiente de una manera sencilla y visual.

d) ***Representad mediante un grafo la situación hipotética del apartado c.***

La representación de esta nueva situación se trata de un grafo no conexo: el vértice María continúa siendo un vértice aislado. Mediante la realización de este apartado se puede llevar a cabo la corrección del apartado anterior, dado que el número nuevo de aristas que se añaden es el número de solicitudes o nuevas amistades que se producen en total.

En el anexo I se encuentra la ficha correspondiente a la actividad 3 junto con su resolución.

2.5.2 Módulo 2. Diagramas de Voronoi

Descripción

El módulo 2 está formado por los siguientes recursos didácticos:

Video 2. Diagramas de Voronoi

URL Video 2 (Derivando, 2018): https://www.youtube.com/watch?v=wCmwBHfiIxQ

Contenidos:

- Concepto de región de Voronoi
- Construcción del Diagrama de Voronoi
- Aplicaciones del Diagrama de Voronoi

Actividad 4. Voronoi jugaba al baloncesto

Esta actividad es una actividad complementaria a la visualización del video 2. Su realización se lleva a cabo fuera del aula y de manera individual, base para la realización de la actividad 5 en el aula. El objetivo de esta actividad es introducir el Diagrama de Voronoi a través del deporte relacionando contenidos de la Teoría de Grafos con la geometría en el plano. Para su realización es necesario usar el software GeoGebra, ya que este software incorpora un comando que permite dividir una red de puntos en regiones de Voronoi. Sin embargo, esta actividad recoge una explicación teórica en la cual se detalla cómo se realiza el Diagrama de Voronoi mediante mediatrices.

Actividad 5. Voronoi y las bicicletas

Esta actividad se diseña con el objetivo de mostrar las ventajas y propiedades del Diagrama de Voronoi como herramienta de resolución de problemas. La actividad recoge dos apartados: planteando en primer lugar cual es la estación de alquiler de bicicletas más cercana a una localización determinada y en segundo lugar situando la localización óptima para una nueva estación de alquiler de bicicletas. Las actividades se han diseñado con un número reducido de puntos de forma que su realización en GeoGebra resulte una tarea sencilla. Basándonos en la experiencia de Fraile et al. (2013) se ha diseñado una actividad atractiva, cuya duración no supera el tiempo ordinario de una sesión y cuyos elementos son cercanos al alumnado.

Secuenciación temporal

Este módulo se lleva a cabo en segundo trimestre del curso académico de forma que posibilite la continuidad de la propuesta didáctica a lo largo del curso. El objetivo de impartir este módulo en este espacio temporal es introducir el bloque 3 de Geometría, dada la relación que guarda este módulo con la geometría en el plano.

Conocimientos previos

- Nociones básicas de uso del software GeoGebra (adquirido en la asignatura de Matemáticas, 1º y 2ºESO)
- Construcciones geométricas sencillas: mediatriz (adquirido en las asignaturas de Matemáticas y Educación Plástica y Visual, ambas en 1º ESO)

- Lugar geométrico (adquirido en la asignatura de Matemáticas en el curso de 1º ESO)

Objetivos específicos

Los objetivos específicos correspondientes a este módulo son los siguientes:

- Introducir conceptos de la Teoría de Grafos a través del Diagrama de Voronoi
- Utilizar el Diagrama de Voronoi para resolver situaciones de la vida cotidiana
- Emplear el software GeoGebra para la creación del Diagrama de Voronoi
- Reforzar contenido referente a la geometría en el plano

Temporalización

El plan de trabajo de este módulo se desarrolla de acuerdo con la tabla 3.

Tabla 3.

Plan de trabajo- temporalización módulo 2.

Módulo 2	Plan de trabajo- temporalización
Trabajo fuera del aula	· Visualización video 2 · Toma de notas y listado de dudas de manera individual · Realización y entrega Actividad 4
Trabajo en el aula	1ª Sesión
	· Resolución de dudas y reflexiones comunes. 10 minutos · Comunicación y disposición de las parejas. 5 minutos · Realización Actividad 5. 30 minutos · Entrega de la Actividad 5. 5 minutos

Fuente: Elaboración propia

Metodología

Trabajo fuera del aula

De manera previa a la 1ª sesión de este módulo, se indica como tarea fuera del aula la visualización del video 2, a través de la plataforma Edpuzzle, junto con la realización de la actividad 4. Como se indica en la ficha del alumno, se sube el archivo GeoGebra a la plataforma virtual del centro educativo.

La ficha correspondiente a la actividad 4 es la siguiente:

Consideremos que estamos jugando al baloncesto. Los jugadores de nuestro equipo están representados por los puntos rojos mientras que el punto azul representa a un jugador del equipo contrario (se mantiene estático). ¿Cómo podemos representar la zona que debe defender cada jugador de nuestro equipo?

Caso 1: Dos jugadores.

Para saber qué zona debe defender cada jugador basta con trazar la mediatriz del segmento $\overline{FC}$, que une el jugador F con el jugador C, dividiendo la cancha en dos regiones.

Figura 9. Mediatriz, dos jugadores.[1]

Caso 2: Tres jugadores.

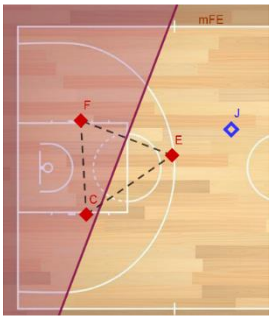

Figura 10[1]. ***Para calcular la zona de defensa del jugador F realizamos la mediatriz del segmento $\overline{FE}$ que divide la cancha en dos regiones Nos quedamos con el semiplano formado por los puntos más cercanos al jugador F (zona rosa).***

Figura 11[1]. ***Trazamos la mediatriz del segmento $\overline{FC}$. Nos quedamos con el semiplano de los puntos más cercanos al jugador F que al jugador C (zona verde).***

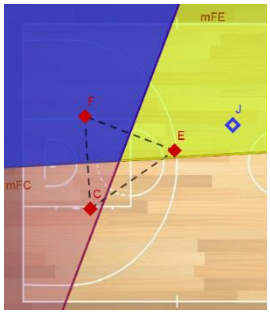

Figura 12[1]. ***La intersección de los dos semiplanos es la región de defensa del jugador F. Esta región se conoce como la región de Voronoi del jugador F (zona azul).***

---

[1] Construcción mediante el software GeoGebra.
Fuente imagen de fondo: https://sp.depositphotos.com/20076521/stock-photo-basketball-court-floor-plan-on.html

Se repite el mismo proceso con el jugador E y el jugador C, obteniendo las regiones de Voronoi de cada jugador.

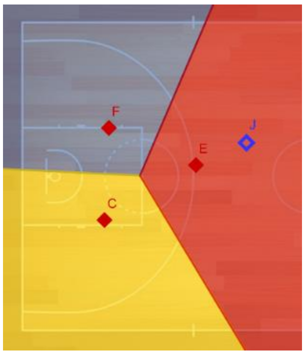

Figura 13[1]. Diagrama de Voronoi, tres jugadores.

Figura 14[1]. Intersección de 3 puntos *no* alineados.

¿Cómo se llama el punto O donde se cortan las mediatrices de 3 puntos no alineados?; ¿Y la circunferencia cuyo centro es O?

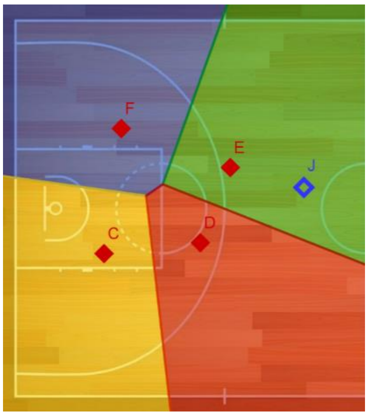

Figura 15[1]. Diagrama de Voronoi, cuatro jugadores.

Caso 3: Cuatro jugadores.

La dinámica es la misma que se ha realizado con tres jugadores, pero esta vez con cuatro.

Caso 4. Cinco jugadores

- ***Entrad en la carpeta compartida: Bloque3Geometría***
- ***Abrid el archivo basket.ggb desde el software GeoGebra.***
- ***En el archivo original encontrareis cuatro jugadores, añadid uno más (se puede llamar G) y realizad el diagrama de Voronoi utilizando el siguiente comando:***

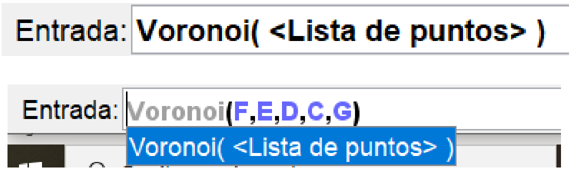

Figura 16. Comando Voronoi. Fuente: GeoGebra

- ***Utilizad el comando de Voronoi añadiendo jugadores hasta formar dos equipos completos (10 jugadores en total). Reflexiona sobre las estrategias y tácticas que pueden suceder en un partido de baloncesto dinamizando el movimiento de los puntos a través del GeoGebra.***
- ***Subid el archivo en la extensión ".ggb" a la carpeta de tareas.***

Si representamos los jugadores sobre la cancha como puntos sobre un plano, se puede asignar a cada uno de ellos su región de Voronoi de forma que se recojan los puntos más cercanos a cada jugador que del resto. Para la explicación teórica se ha supuesto que el jugador del equipo contrario se mantenía estático. Evidentemente, en la realidad los jugadores están en continuo movimiento por lo que este diagrama se modifica con el tiempo permitiéndonos conocer en cada instante que equipo está mejor posicionado en la cancha de baloncesto. Asimismo, mediante el Diagrama de Voronoi se puede observar cuál de los dos equipos ocupa la mayor región del campo y si las regiones correspondientes a los jugadores de cada equipo están conectadas, favoreciendo el pase entre los jugadores de ese equipo.

La ficha correspondiente esta actividad, así como algunos ejemplos de posibles posiciones se encuentran recogidas en el anexo II.

1ª Sesión

Al comienzo de la sesión se resuelven dudas y se dan pequeñas explicaciones sobre los contenidos referentes al video 2 y la resolución de la actividad 4, de modo que se pueda realizar la actividad 5 de manera adecuada.

A continuación, se realiza la actividad 5. Para la realización de esta actividad es necesario el uso del software GeoGebra por lo que la actividad se realiza en el aula (en el caso de que el centro disponga de dispositivos electrónicos) o en el aula de informática. Se facilita a los alumnos el archivo GeoGebra donde se recogen los elementos necesarios para realizar la actividad.

Esta actividad se realiza en parejas de modo que la participación de los dos miembros del grupo sea alta durante todo el proceso conjugando el trabajo individual fuera del aula con el trabajo grupal dentro del aula. Estas parejas las forma el docente previamente, de acuerdo con los criterios mencionados anteriormente.

Una vez que los alumnos se han colocado por parejas se entrega la ficha correspondiente a la actividad 5, se dan las pautas para descargar el archivo de GeoGebra y se explicar el modelo de evaluación (participación, actitud, comportamiento, implicación, trabajo en grupo, así como el uso de los grafos junto con otras estrategias para resolver la actividad):

Caso1.

Supongamos que una persona está en la calle Madrid, centro de la ciudad de Burgos, y desea utilizar el servicio de alquiler de bicicletas "Bicibur" del Ayuntamiento de Burgos. De acuerdo con la figura 17, los puntos rojos son las estaciones automáticas de préstamo ubicadas en la zona y la cruz verde es esa persona. ¿A cuál de las siete estaciones debe acudir si quiere utilizar la más cercana a su posición?

Figura 17. Representación enunciado caso 1, Actividad 5. Construcción mediante el software GeoGebra. Fuente imagen de fondo: https://bicibur.es/red-vias-ciclistas/

Caso 2.

Supongamos que el Ayuntamiento de Burgos quiere añadir una nueva estación automática de préstamo de bicicletas "Bicibur" en el área coloreada de morado en la figura 18. Se quiere colocar la estación de forma que este en el punto más alejado de las estaciones actuales y lo más céntrico posible. ¿Dónde se podría colocar la estación? ¿Por qué?

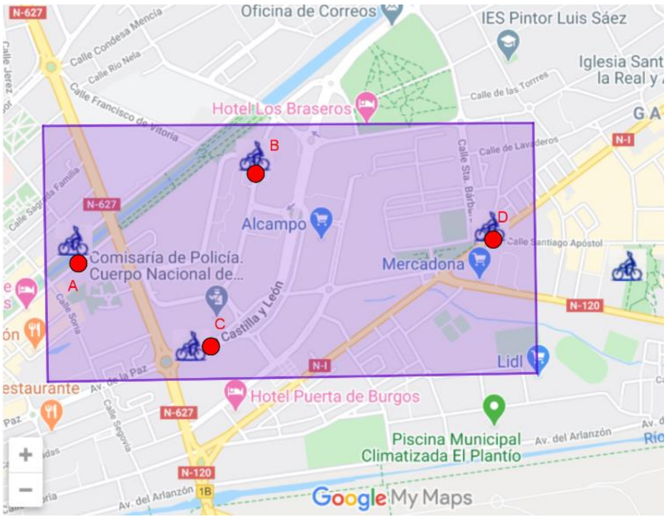

Figura 18. Representación enunciado caso 2, Actividad 5. Construcción mediante el software GeoGebra. Fuente imagen de fondo: https://bicibur.es/red-vias-ciclistas/

Mediante el diagrama de Voronoi podemos dividir el plano en tantas regiones como elementos tengamos, de modo que a cada elemento se le asocian aquellos puntos del plano que están más cerca suyo que de los demás elementos. En el caso 1 para identificar cuál es la estación más cercana basta con construir el diagrama de Voronoi dividiendo el plano en tantas regiones como estaciones hay. La estación más cercana a esta persona es aquella que se encuentra en la misma región que ella. No es necesario realizar el Diagrama de Voronoi con las siete estaciones, dado que a simple vista se observa que los puntos 1 y 4 están muy alejados. No obstante, en caso de realizar el diagrama con los siete puntos, la solución no varía.

Interpretando el enunciado del caso 2, la localización óptima de la nueva estación se trata del punto más alejados de las estaciones actuales dentro del área morada. Mediante el Diagrama de Voronoi podemos definir el área geográfica de influencia de cada estación. A continuación, los puntos donde confluyen estas regiones son los puntos más alejados de cada una de ellas, equidistantes. En este caso, existen dos puntos. Sin embargo, uno de ellos es más adecuado que el otro geográficamente, dado que es el centro del mayor círculo vacío de estaciones que podamos dibujar dentro del área morada. Los puntos que se sitúen sobre grafo de Voronoi equidistan la misma distancia de cada elemento y esta distancia es la más alejada de cada uno ellos.

Durante el desarrollo de esta actividad se realizan preguntas a las distintas parejas de forma que se puedan poner en común las posibles soluciones, el proceso y las estrategias de resolución mediante el uso del Diagrama de Voronoi. Al finalizar la sesión cada pareja sube un archivo de GeoGebra que recoja la resolución de la actividad a la plataforma virtual.

En el anexo II se encuentra la ficha que se entrega al alumnado y la resolución de esta actividad.

2.5.3 Módulo 3. Coloración de grafos

Descripción

El módulo 3 está formado por los siguientes recursos didácticos:

Video 3. Teorema de los cuatro colores

URL Video 3 (Derivando, 2017): https://www.youtube.com/watch?v=Rv6r5K9con8

Contenidos:

- Teorema de los Cuatro Colores: historia y definición

Actividad 6. Coloreando

Esta actividad se ha diseñado de modo que sea una actividad complementaria a la visualización del video 3. Su realización se lleva a cabo fuera del aula de manera individual como base para la realización del resto de actividades que componen el módulo 3. Esta actividad introduce el Teorema de los Cuatro Colores a través del coloreo de una figura plana. A simple vista parece una tarea muy sencilla para el alumnado del tercer curso de la ESO, sin embargo, la complejidad de esta actividad radica en colorear la figura utilizando el menor número de colores de forma que las zonas que comparten frontera no estén coloreadas del mismo color (si dos zonas se tocan en un único punto se entiende que no tienen frontera común). Además, se debe anotar el proceso seguido para colorear la figura. El objetivo de esta actividad es mostrar al alumnado la eficacia y sencillez del coloreo utilizando los grafos, para ello se busca que coloreen la figura utilizando sus propias estrategias para luego en el aula mostrar cómo se realiza utilizando los grafos.

Actividad 7. Incendios, transporte y grafos

El objetivo de esta actividad es mostrar la aplicación del coloreo de grafos en la resolución de problemas sencillos. Esta actividad es una adaptación de la actividad de Cognigni et al. (2009) *"Las jaulas y el zoológico"*. En este caso, el enunciado resalta la labor de rescatar animales ante amenazas externas, como sucedió en los incendios de Australia el pasado invierno (2019). La actividad recoge siete animales autóctonos de Australia que ante los incendios se ven amenazados. Para transportarlos a zonas más seguras existe una restricción de tamaño por lo que son necesarios distintos tipos de transportes. A través del coloreo de grafos se averigua cuántos transportes son necesarios.

Actividad 8. Mujeres matemáticas y grafos

Esta actividad se trata de una adaptación de la actividad Cine y Matemáticas de Nuñez et al. (2016). En este caso, mediante el coloreo de grafos se averigua el número de sesiones necesarias para organizar las presentaciones expositivas de quince alumnos. La comprensión e interpretación del enunciado es vital para poder llevar a cabo la actividad con éxito. El grado de dificultad de esta actividad es superior a la actividad 7, por lo que se decide que su realización sea posterior.

Secuenciación temporal

Este módulo se lleva a cabo en el tercer trimestre del curso académico de forma que posibilite la continuidad de la propuesta didáctica a lo largo del curso.

Conocimientos previos

- Nociones básicas de uso del software GeoGebra (adquirido en la asignatura de Matemáticas, 1º y 2ºESO)
- Modelización de distintas situaciones mediante grafos (Módulo 1. Introducción de grafos)
- Grado de un vértice (Módulo 1. Introducción de grafos)

Objetivos específicos

Los objetivos específicos correspondientes a este módulo son los siguientes:

- Introducir conceptos de la Teoría de Grafos a través del Teorema de los Cuatro Colores
- Utilizar el coloreo de grafos para resolver problemas sencillos
- Emplear una secuencia para el coloreo de grafos

Temporalización

El plan de trabajo de este módulo se desarrolla de acuerdo con la tabla 4.

Tabla 4.

Plan de trabajo- temporalización módulo 3.

Módulo 3	Plan de trabajo-temporalización
Trabajo fuera del aula	· Visualización video 3 · Toma de notas y listado de dudas de manera individual · Realización Actividad 6
Trabajo en el aula	1ª Sesión
	· Resolución de dudas, reflexiones comunes y resolución Actividad 6. 30 minutos · Formación y disposición en el aula de las parejas de trabajo. 5 minutos · Realización Actividad 7. 15 minutos
	2ª Sesión
	· Resolución actividad 7. 10 minutos · Realización Actividad 8. 35 minutos · Entrega Actividad 8. 5 minutos

Elaboración propia

Metodología

Trabajo fuera del aula

De manera previa a la 1ª sesión de este módulo, se indica como tarea fuera del aula la visualización del video 3, a través de la plataforma Edpuzzle, junto con la realización de la actividad 6.

La ficha correspondiente a la actividad 6 es la siguiente:

Colorea la figura 19 utilizando el mínimo número de colores posibles, con la condición de que zonas con frontera común tengan colores distintos.

Toma nota del criterio y proceso utilizado para colorear la figura.

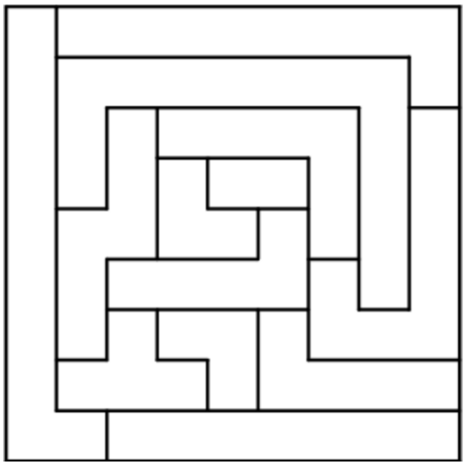

Figura 19. Actividad 6. Elaboración propia.

1ª Sesión

Al comienzo de esta sesión se resuelven dudas y se dan pequeñas explicaciones sobre los contenidos referentes al video 3. Se realiza una puesta en común los criterios y el número de colores utilizados para colorear la actividad 6.

A continuación, se explica el coloreo de grafos utilizando la figura correspondiente a la actividad 6. Dado que los alumnos poseen conocimientos previos sobre grafos, adquiridos en los módulos anteriores, el docente guía la explicación del procedimiento para colorear el grafo mientras los alumnos participan activamente aportando ideas, afianzando conocimientos, compartiendo opiniones, estableciendo conclusiones y coloreando la figura de manera individual. El objetivo de realizar de nuevo la actividad 6 es mostrar la transición entre el coloreo de una figura y el coloreo de un grafo comparando los resultados. Asimismo, una vez coloreado el grafo se realizan preguntas acerca de si es posible colorear el grafo con un número inferior de colores, de forma que los alumnos muestren argumentos y realicen comprobaciones.

En el anexo III se encuentra la ficha correspondiente a la actividad 6 junto con la explicación detallada.

Una vez explicada esta nueva técnica, se realiza la actividad 7 en parejas de modo que la participación de los dos miembros del grupo sea alta durante todo el proceso convergiendo el trabajo individual (realización actividad 6) con el trabajo grupal. Estas parejas las forma el docente previamente, de acuerdo con los criterios mencionados anteriormente.

Se dota a los alumnos de la autonomía de decidir la modalidad de trabajo: realizar la actividad en papel o mediante el software GeoGebra, por lo que se entrega la ficha en los dos formatos. La ficha correspondiente a la actividad 7 es la siguiente:

Supongamos que una organización de voluntarios está rescatando animales heridos que habitan en un área de Australia gravemente afectada por los incendios. Los traslados de los animales a zonas más seguras, donde se les proporcionara alimento y cuidados médicos, se van a realizar en distintos tipos de transporte en función del tamaño de cada animal, siendo las restricciones las siguientes:

- ***Los canguros no se pueden transportar con los quokkas, koalas ni quols tigre.***
- ***Los numbats no se pueden transportar con los emús, wallabis ni canguros.***
- ***Los wallabis no se pueden transportar con los koalas, quokkas ni quols tigre.***
- ***Los emús no se pueden transportar con los quokkas, koalas ni con los quol tigres.***

¿Cuál será el número mínimo de tipos de transportes necesarios para transportar estos animales de acuerdo con las restricciones de tamaño?

***Consejo: Los nombres de los animales no son familiares, quizás sería más sencillo si fuesen leones, cebras, jirafas…Probad a designar a cada animal por una letra o un número. Por ejemplo*:**

Tabla 5.

Simplificación del enunciado, actividad 7.

Canguros	Quokkas	Koalas	Quols Tigre	Emús	Wallabis	Numbats
C	Q	K	QT	E	W	N

Elaboración propia.

Para llevar a cabo la realización de esta actividad mediante el coloreo de grafos se representa un grafo de acuerdo con las restricciones de tamaño: los vértices del grafo corresponden a los animales de modo que aquellos que no puedan compartir transporte se unen mediante una arista. A continuación, se colorea el grafo siguiendo el procedimiento utilizado en la actividad 6. Como resultado, el número mínimo de colores necesario para colorear el grafo corresponde al número mínimo de tipos de transportes que son necesarios para transportar los animales. Una vez coloreado el grafo se realizan preguntas acerca de si es posible colorear el grafo con un número inferior de colores, de forma que los alumnos muestren argumentos y realicen comprobaciones.

Durante el desarrollo de esta actividad se realizan preguntas a las distintas parejas de forma que se puedan poner en común las posibles soluciones, el proceso y las estrategias de resolución mediante la coloración de grafos.

En el anexo III se encuentra la ficha correspondiente a la actividad 7 junto con su resolución detallada.

2ª Sesión

Al comienzo de esta sesión se lleva a cabo la resolución de la actividad 7, se resuelven dudas, se realizan reflexiones comunes y se llevan a cabo las explicaciones que sean necesarias.

A continuación, se realiza la actividad 8. De igual modo que en la actividad 7, se realiza en parejas de trabajo y se dota a los alumnos de la autonomía de decidir la modalidad de trabajo. La ficha correspondiente a la actividad 8 es la siguiente:

Con motivo del Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia el departamento de matemáticas ha decidido hacer un homenaje a las siguientes mujeres matemáticas que han marcado la historia de las matemáticas (Alic, 2005):

(T) Teáno de Crotona, primera mujer matemática.

(H) Hypatia de Alejandría, primera mujer astrónoma.

(A) María Gaetana de Agnesi, primera profesora de universidad.

(S) Sophie Germaine, la mejor matemática de la historia según Carl Friedrich Gauss.

(L) Ada Lovelace, la primera persona programadora.

(N) Emmy Noether, fundadora del álgebra moderna.

(M) Maryam Mirzakhani, primera mujer en recibir la medalla Fields.

(K) Sonia Kovalévskaya, primera mujer que se doctoró en Matemáticas.

Se propone a los alumnos hacer una presentación oral sobre la vida de estas ocho mujeres matemáticas, así como de sus aportaciones a las matemáticas y aquellos aspectos que consideren interesantes, durante la semana de la ciencia en las horas lectivas de la asignatura.

Cada alumno elige dos mujeres matemáticas distintas de entre las ocho propuestas. Las elecciones de los alumnos de 2º ESO que cursan "Conocimiento de las Matemáticas" han sido las siguientes:

Elecciones: {(H, T), (M, S), (A, N), (T, A), (H, M), (N, S), (T, A), (L, N), (L, K), (K, A), (K, S), (T, N), (M, N), (H, S) y (L, N)}.

Los alumnos se agruparán en función de a qué mujer matemática han elegido y de acuerdo con la siguiente condición:

- *Un mismo alumno no puede presentar dos trabajos el mismo día.*

Ayuda a los docentes a resolver las siguientes cuestiones:

- *¿Cuál es el mínimo número de días necesarios para realizar las presentaciones?*
- *¿Hay algún grupo formado por más de cinco alumnos?*

Nota:

El número de elecciones es igual al número de alumnos: 15 alumnos total.

Comienza designando a cada alumno como A1, A2…hasta A15 y relacionando a cada alumno con su elección:

A1(H, T); A2(M, S); A3(A, N); A4(T, A); A5(H, M); A6(N, S); A7(T, A); A8(L, N); A9(L, K); A10(K, A); A11(K, S); A12(T, N); A13(M, N); A14(H, S); A15(L, N)

Tras la entrega y primera lectura individual del enunciado se resuelven dudas y se dan las pautas necesarias para realizar la actividad de manera adecuada. Asimismo, se comunica a los alumnos que la resolución de esta actividad se recoge al finalizar la sesión. Una vez coloreado el grafo se realizan preguntas acerca de si es posible colorear el grafo con un número inferior de colores, de forma que los alumnos muestren argumentos y realicen comprobaciones, y sobre la existencia y la influencia de las aristas múltiples (se introduce este concepto teórico).

En el anexo III se encuentra la ficha correspondiente a la actividad 8 junto con su resolución detallada.

3. Conclusiones

Fruto de la curiosidad y de las ganas de aprender surge la línea de este TFM. La Teoría de Grafos, un área de las matemáticas ausente en mi trayectoria educativa, presenta un contenido matemático intuitivo y sencillo de comprender de manera autónoma a nivel básico.

La ausencia de recursos didácticos de grafos adecuados para la etapa de educación secundaria obligatoria ha derivado en la necesidad de adecuar actividades de etapas educativas superiores (grados universitarios) a las características específicas del alumnado del tercer curso de la ESO y a los objetivos de este TFM. No obstante, el proceso de búsqueda, diseño y adaptación de actividades ha sido la parte más enriquecedora de este trabajo, ya que me ha permitido desarrollar mi capacidad de síntesis, análisis, creatividad, reflexión, revisión crítica, búsqueda exhaustiva, trabajo autónomo entre otras.

Al igual que la metodología de esta propuesta, la adquisición de los contenidos teóricos se ha realizado de manera autónoma, lo que ha facilitado la planificación del proceso de enseñanza de una manera objetiva y práctica. Mediante esta propuesta el aula se convierte en un lugar de aprendizaje activo, donde los alumnos son los responsables de su aprendizaje mientras el docente guía el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En cuanto a las actividades que recogen los distintos módulos son actividades aparentemente muy sencillas que suponen un reto cuando no se consiguen realizar con éxito. Han sido diseñadas con el objetivo de introducir contenido referente a grafos, sin embargo, también se ha tenido en cuenta que se puedan realizar mediante otras estrategias, sin la necesidad de usar los grafos. De esta forma se dota a los alumnos de autonomía para valorar que herramientas/estrategias utilizar en base a la eficacia, al tiempo disponible y a los resultados.

Una de las dificultades que supone introducir contenidos extracurriculares dentro del curso académico, es la temporalización. Dado que nos encontramos ante un currículo cerrado que abarca una gran cantidad de contenidos evaluables se ha diseñado esta propuesta de forma que para su impartición en el aula sean necesarias el mínimo número de sesiones garantizando que se logran los objetivos y una enseñanza de calidad. Asimismo, emplear un número reducido de sesiones propicia que la responsabilidad, implicación, compromiso y actitud tanto del alumnado y del docente a lo largo de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje que abarca esta propuesta sea alta. Este hecho favorece el logro de los objetivos específicos de cada módulo en el tiempo estimado y la adquisición de las competencias.

Para poder establecer conclusiones objetivas acerca de la factibilidad de esta propuesta surge la necesidad de ponerla en práctica. Llevar a cabo la propuesta didáctica permite valorar si la planificación de la propuesta (recursos didácticos, temporalización, determinación de los conocimientos previos, metodología, objetivos específicos, evaluación) han sido adecuados o es necesario llevar a cabo correcciones, mejoras y/o ajustes de temporalización y del grado de dificultad. Asimismo, de acuerdo con el apartado *2.4 Evaluación* que recoge este TFM, los alumnos toman parte en la evalúan de cada uno de los módulos (anexo VI, tabla 13). De modo que, en caso de poner esta propuesta en práctica, las aportaciones y percepciones del alumnado permiten una mejora y perfección de esta.

Se concluye este TFM indicando que, pese a que la propuesta didáctica no se ha llevado a cabo en el aula, se ha diseñado para tal propósito recogiendo un conjunto de actividades que permitan a los alumnos adquirir nuevos conocimientos, aprender, continuar formándose y sobre todo disfrutar de las matemáticas.

4. Referencias bibliográficas

Alic, M. (2005). *El legado de Hipatia: historia de las mujeres en la ciencia desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX*. Siglo XXI.

Arellano, N. M., Aguirre, J. F., & Rosas, M. V. (2015). Clase invertida: una experiencia en la enseñanza de la programación. *X Congreso sobre Tecnología en Educación & Educación en Tecnología (TE & ET),* 538-546.

Barrows, H. S. (1986). Una taxonomía de los métodos de aprendizaje basados en problemas. *Educación médica*, *20* (6), 481-486.

Braicovich, T. C. (2020). Grafos y su enseñanza. *Números*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 103,* 7-11.

Braicovich, T., Cognigni, R., Almeira, L. A., & Nayen, Y. (2018). La evaluación en curso de teoría de grafos en formación docente. *CDD 371.1*, 160.

Braicovich, T., Caro, P., y Nayén, Y. (2016). Grafos con GeoGebra. *Actas del 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática ISSN, 1688*(9886), 133-137

Braicovich, T., & Cognigni, R. (2011). Coloreando la geografía desde el plano al toroide. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *76*, 135-148.

Braicovich, T. C. (2010). Grafos y su potencial educativo. *Enseñanza de las matemáticas V Coloquio Internacional,* 293-304.

Burgos, J. M. (2012). *Números y Grafos.* García Maroto Editores.

Canto Martín, F., Valdés, J. N., & Cabello, S. R. (2007). ¿Conocía Sherlock Holmes la Teoría de Grafos?. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (10), 37-51.

Cognigni, R. M., Braicovich, T., & Reyes, C. (2009). Recorriendo grafos a lo largo de la Educación General Básica. *Revista de educación matemática de la Unión Matemática Argentina, 23,* 109-125.

Coriat, M., Sancho, J., Marín, A., y Gonzalvo, P. (1989). Nudos y nexos. Redes en la escuela. Madrid, España: Síntesis.

Derivando. (4 de enero de 2017). *Teorema de los cuatro colores.* [Archivo de Video]. YouTube. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=Rv6r5K9con8

Derivando. (2 de noviembre de 2017). *¿Qué tienen que ver Andrés Iniesta, Tyrion Lannister y tus amigos de Facebook? | Teoría de Grafos.* [Archivo de Video]. YouTube. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=lp-1rvtRYQg&t=148s

BICIBUR: Bicicletas públicas de Burgos. (2020). *Red de vías ciclistas*. [Figura]. Recuperado de: https://bicibur.es/red-vias-ciclistas/

Derivando. (21 de febrero de 2018). *¿Dónde está la pizzería más cercana?*. [Archivo de Video]. YouTube. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=wCmwBHfiIxQ

Eduardo Sáenz de Cabezón, Premio Especial del Jurado ‘Ciencia en Acción”. (2019). Girona: *Fundación Princesa de Girona*. Recuperado de: https://es.fpdgi.org/actualidad/noticias/1336-eduardo-saenz-de-cabezon-premio-especial-del-jurado-ciencia-en-accion/

Luque, B. (2020). Diagramas de Voronoi. Barcelona: *INVESTIGACIÓN Y CIENCIA.* Recuperado de: https://www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/el-nuevocoronavirus-796/diagramas-de-voroni-18477

ESTALMAT. (2019). Estímulo del Talento Matemático. *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología. Ministerio de Ciencia, Innovación e Universidades.* Recuperado de http://www.estalmat.org/.

Feld, S. L. (1991). Why your friends have more friends than you do. *American Journal of Sociology*, *96*(6), 1464-1477.

Fraile, A., Lastra, A., & Orden, D. (2014). Una experiencia docente en el taller de geometría y grafos en el mundo real. *Sociedad de la Información 47*, 1-7.

García, M. D. C. R., & Llongarriu, A. P. (2018). Implementación del modelo flipped classroom para la enseñanza de matemáticas en educación secundaria obligatoria. *Innovaciones educativas motivadoras del conocimiento de las matemáticas y las ciencias*, *26(*1*)*, 97-113.

González, A., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2019). Presencia de la teoría de grafos en la enseñanza de grado en España. *Investigación en Educación Matemática XXII*, 622.

Hernández, J. (2018). Ejemplos de proyectos flipped en matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *97*, 69-82.

Jordan Lluch, C., Pérez Peñalver, M. J., & Sanabria Codesal, E. (2014). Investigación del impacto en un aula de matemáticas al utilizar flip education. *Pensamiento matemático*, *4*(2), 9-22.

Kittichai. (2013). *Baloncesto corte plano sobre fondo entarimado*. [Figura]. Recuperado de: https://sp.depositphotos.com/20076521/stock-photo-basketball-court-floor-plan-on.html

Martínez Olvera, W., Esquivel-Gámez, I., & Martínez-Castillo, J. (2014). Aula o modelo invertidos de aprendizaje: Origen, sustento e implicaciones. *Los Modelos Tecno-Educativos, revolucionando el aprendizaje del siglo XXI*, 143-160.

Merayo, F. G. (2004). La magia de los grafos. *Manual formativo de ACTA*, (34), 31-47.

Noun Project. (2011). *Íconos gratuitos para redefinir a las mujeres profesionales*. [Figura]. Recuperado de: https://www.domestika.org/es/blog/2985-iconos-gratuitos-para-redefinir-a-las-mujeres-profesionales

Núñez Santiago, R., Núñez Valdés, J., Paluzo Hidalgo, E., & Salguero Quirós, E. (2016). Jugueteando con grafos. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática, 46, 188-204.*

Núñez Valdés, J., Alfonso Pérez, M., Bueno Guillén, S., Diánez del Valle, M. D. R., & Elías Olivenza, M. D. C. D. (2004). Siete puentes, un camino: Königsberg. *Suma: revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, 45, 69-78.*

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 25, 29 de enero de 2015, pp. 6986-7003. Recuperado de: https://www.boe.es/eli/es/o/2015/01/21/ecd65

Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León*, núm.

86, 8 de mayo de 2015, pp. 32051-32480. Recuperado de: https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/orden-edu-362-2015-4-mayo-establece-curriculo-regula-implan

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 3, 3 de enero de 2015, pp. 169-456. Recuperado de: https://www.boe.es/eli/es/rd/2014/12/26/1105/con.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 52, 1 de marzo de 2014, pp. 1-58. Recuperado de: https://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-2222-consolidado.pdf

Rosentein, J., Franzblau, D., Roberts, f. Editores 1997. *"Discrete Mathematics in the Schools; An Opportunity to Revitalize School Mathematics".* Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.

Ross, K. A., Wright, C. R., & Ma. de la Luz De Teresa de Oteyza. (1990). *Matemáticas discretas*. Prentice-Hall Hispanoamericana.

Sierra, G. H., & Espinosa, M. P. P. (2019). Implementación y análisis del método de aula invertida: un estudio de caso en Bachillerato. *Innoeduca: international journal of technology and educational innovation*, *5*(1), 24-33.

Soto, Y., & Castro, C. (2016). Aproximación a los grafos de Voronoi y diagramas de Delaunay. *Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM*, 2, 420-422.

Stadler, M. M. (2006). Mapas, colores y números. *Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas*, 1-23.

UBUinvestiga. (18 de marzo de 2020). *Las mates en la catedral de Burgos | Loco de remates | CIEN&CIA 4 x10.* [Archivo de Video]. YouTube. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=1kzR5bQmd5w

5. Anexos

Anexo I. Módulo 1. Actividades y soluciones

ACTIVIDAD 1. GRAFOS

Identifica cuál de los siguientes grafos es posible dibujar de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista. Justifica la respuesta gráficamente.

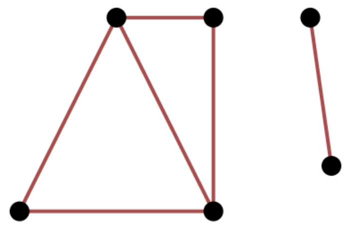

Figura 20. Grafo no conexo. Elaboración propia

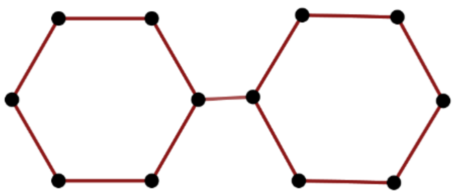

Figura 21. Grafo simple. Elaboración propia

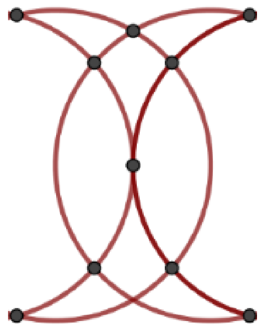

Figura 22. Grafo de la cimitarra. Elaboración propia.

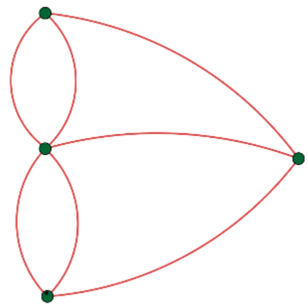

Figura 23. Grafo de los puentes de Königsberg. Elaboración propia

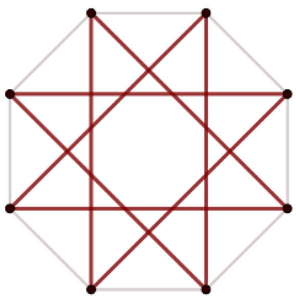

Figura 24. Grafo polígono estrellado 8/3. Elaboración propia

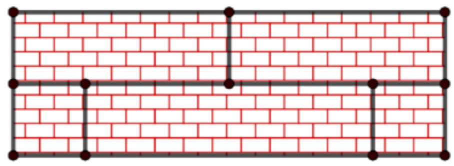

Figura 25. Grafo Clausen. Elaboración propia

SOLUCIÓN ACTIVIDAD 1. GRAFOS

Identifica cuál de los siguientes grafos es posible dibujar de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista. Justifica la respuesta gráfica y teóricamente.

En la figura 26 se observa a simple vista que es imposible trazarla sin levantar el lápiz del papel, por lo tanto, se descarta que sea posible trazar estos caminos cuando el grafo no es conexo. A través de este grafo se introduce el concepto de grafo conexo y grafo no conexo.

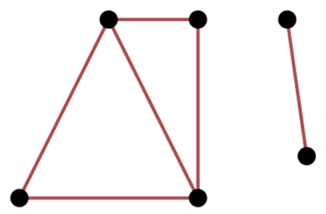

Figura 26. Grafo no conexo. Elaboración propia.

El siguiente grafo se trata de un grafo simple. Este grafo está formado por diez vértices de grado par y dos vértices de grado impar. Es posible recorrer este grafo sin pasar dos veces por la misma arista siempre y cuando el trazo comience en uno de los vértices de grado impar y termine en el otro: camino euleriano abierto.

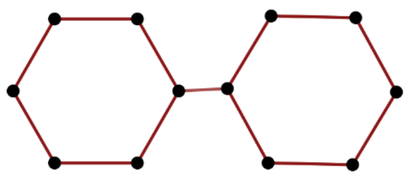

Figura 27. Grafo simple. Elaboración propia.

De acuerdo con Merayo (2004) el grafo de la figura 28 se corresponde con la firma (dos medias lunas opuestas) que trazaba *Mohamet* con el extremo de su cimitarra *(sable)* sobre la arena. Es posible realizar tal firma sin levantar la cimitarra del suelo ya que sus once vértices son todos de grado par: camino euleriano cerrado.

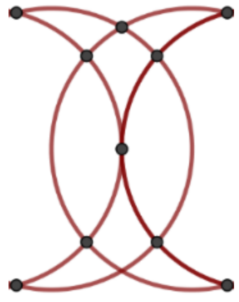

Figura 28. Grafo de la Cimitarra. Elaboración propia.

El problema de los puentes de Königsberg plantea si es posible dar un paseo por la antigua ciudad de Königsberg y regresar al punto de partida cruzando cada puente una sola vez. En 1736 el matemático Leonhard Euler resolvió el problema: construyo el grafo de la figura 29 reemplazando la tierra firme por vértices y los puentes por aristas (Ross, Wright y Oteyza, 1990). Este problema es considerado el origen de la Teoría de Grafos (Merayo, 2004). No es posible trazar este grafo de un solo trazo sin trazar dos veces la misma arista puesto que los cuatro vértices son de grado impar.

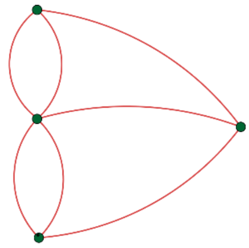

Figura 29. Grafo de los puentes de Kônigsberg. Elaboración propia.

El grafo de la figura 30 se corresponde a un polígono conexo el cual es posible trazarlo pasando por todas las aristas una sola vez ya que el grado de todos los vértices es par.
Podemos encontrar este tipo de polígono en la Catedral de Burgos, https://www.youtube.com/watch?v=1kzR5bQmd5w, (UBUinvestiga, 2020).

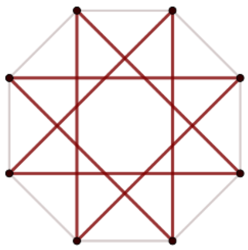

Figura 30. Grafo polígono estrellado 8/3. Elaboración propia.

El grafo de la figura 31 fue estudiado y expuesto por el astrónomo y matemático Tomas Clausen. Este grafo representa un fragmento de un muro de una fábrica. Dado que ocho de sus doce vértices son de grado impar, para recorrerlo es necesario realizar cuatro tramos continuos distintos. (Merayo, 2004).

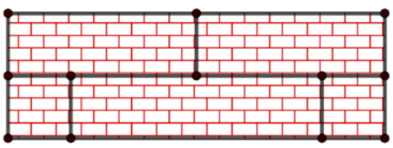

Figura 31. Grafo Clausen. Elaboración propia

ACTIVIDAD 2. GRAFOS IMPOSIBLES

Crea junto con tu compañero/a un grafo conexo que sea imposible de trazar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista.

SOLUCIÓN ACTIVIDAD 2. GRAFOS IMPOSIBLES

Las propiedades con las cuales deben jugar los alumnos para crear el grafo son las siguientes:

- Si todos los vértices de un grafo conexo son pares, el grafo se puede dibujar de un solo trazo.
- Si el grafo conexo posee un máximo de dos vértices de grado impar, el grafo se puede se trazar de un solo trazo: comenzando el trazo en uno de los vértices de grado impar y terminando en el otro. En este caso, se trata de un camino euleriano abierto.
- Si en un grafo conexo, existen más de dos vértices de grado impar, no es posible realizar el grafo de un solo trazo.

ACTIVIDAD 3. RED DE AMISTADES

Años después de finalizar el instituto Laura quiere organizar una reunión con ocho de sus antiguos compañeros de clase, sin embargo, no tiene el número de teléfono de ninguno de ellos. Recurre a Facebook donde encuentra el perfil de Carla, a partir de la cual establece las siguientes conexiones:

- Carla es amiga de Sergio y de Lidia.
- Lidia es amiga a su vez de Carmen y Andrés.
- Sergio es hermano de Julia; Julia y Andrés son pareja, por lo que los tres son amigos en Facebook.
- Carmen es amiga de Carlos y de Andrés, Carlos no es amigo de nadie más.
- María no tiene perfil en Facebook

Figura 32. Profesiones personas, actividad 3. Fuente imágenes: https://www.domestika.org/es/blog/2985-iconos-gratuitos-para-redefinir-a-las-mujeres-profesionales

a) Para ayudar a Laura, representad mediante un grafo esta red de amistades.

b) ¿Cuántos amigos tienen cada uno en Facebook dentro de esta red de amistades?

c) Supongamos que los que no son actualmente amigos en Facebook se quisieran agregar, exceptuando a María, ¿Cuántas solicitudes de amistad se mandarían en total?

d) Representad mediante un grafo la situación hipotética del apartado c.

SOLUCIÓN ACTIVIDAD 3. RED DE AMISTADES

a) Grafo:

Los vértices representan a cada uno de los amigos. Vértices: {Laura, Carla, Sergio, Julia, Andrés, Lidia. Carmen, Carlos, María}

Las aristas representan la amistad en Facebook. Amistades: {(Laura, Carla), (Carla, Sergio), (Sergio, Julia), (Sergio, Andrés), (Julia, Andrés), (Andrés, Carmen), (Carmen, Lidia), (Lidia, Andrés), (Carla, Lidia), (Carmen, Carlos}

Ser amigos en Facebook es una acción reciproca, por lo tanto, es lo mismo decir que Laura y Carla son amigas que Carla y Laura son amigas.

El vértice María es un vértice aislado (se introduce este concepto).

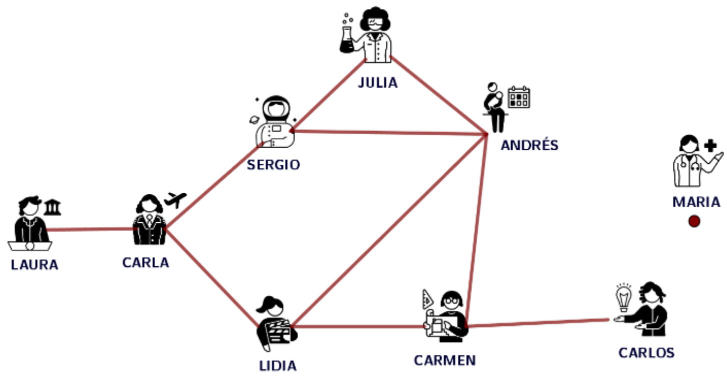

Figura 33. Grafo representativo apartado a, actividad 3. Elaboración propia. Fuente imágenes: https://www.domestika.org/es/blog/2985-iconos-gratuitos-para-redefinir-a-las-mujeres-profesionales

b) El número de amistades se corresponde al número de aristas que inciden en cada vértice, es decir el grado de cada vértice. Una forma de indicar el grado de cada vértice es a través de una tabla como la siguiente:

Tabla 6.

Grado correspondiente a cada vértice.

Vértice	Grado de cada vértice
Laura	1
Carla	3
Sergio	3

Julia	2
Andrés	4
Lidia	3
Carmen	3
Carlos	1
María	0

Elaboración propia.

c) Esta red de amistad concreta está formada por un total de nueve amigos. Dado que el vértice María no tiene Facebook, se descarta quedando un total de ocho amigos.

De acuerdo con el enunciado, en el momento que todos sean amigos de todos en Facebook cada uno de ellos tendrá siete amigos (no se incluye a sí mismo), por lo que el grado de cada vértice será siete. A diferencia de otras redes sociales (Twitter, Instagram) Facebook mantiene la reciprocidad de la amistad, de forma que si una persona manda una solicitud de amistad (lo que se conoce como "agregar") y es aceptada, automáticamente ambos pasan a ser amigos en Facebook. Por ejemplo, si Laura manda una solicitud de amistad a Sergio, y este ultimo la acepta, no es necesario que Sergio mande una solicitud a Laura.

Tres formas distintas de abordar este apartado:

Mediante el grado del grafo:

- Grafo inicial:

  Grado del grafo inicial: 20 (suma del grado de cada vértice, tabla 6)
- Grafo final:

  Número de vértices del grafo: 8

  Grado máximo de cada vértice: 7

  Grado del grafo final: 56
- Resultado:

  $$56 - 20 = 36$$

  $36/2 = 18$ solicitudes nuevas en total. (se divide entre dos, se trata de una acción reciproca).

Mediante el número de aristas total:

De acuerdo con lo mencionado anteriormente y dado que cada arista representa el hecho de ser amigos en Facebook, el total de amistades o aristas es igual a:

$$(8\, x\, (8\ -1))\ /\ 2\ =\ 28$$

Si tenemos en cuenta el número de aristas en el grafo inicial: 10 (Se pueden contar en el grafo de la figura 33.

Resultado: 28 -10= 18 solicitudes nuevas en total.

Gráficamente:

Una vez que se representa el grafo de la situación inicial (figura 34) el número de aristas que se añaden hasta completar el grafo es el número de solicitudes de amistad que se mandan en total.

El grafo de la figura 34 representa la situación inicial.

El número de aristas inicial (rojas) es 10

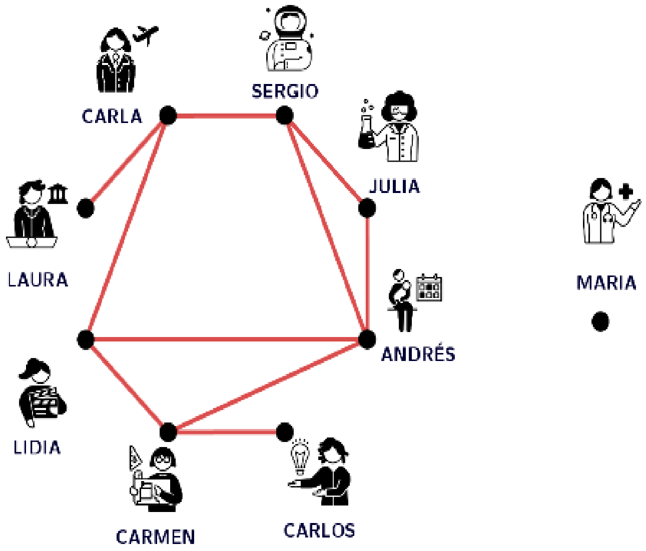

Figura 34. Grafo representativo situación inicial. Elaboración propia. Fuente imágenes: https://www.domestika.org/es/blog/2985-iconos-gratuitos-para-redefinir-a-las-mujeres-profesionales

Completando el grafo, el número de aristas añadidas (azules) es de 18.

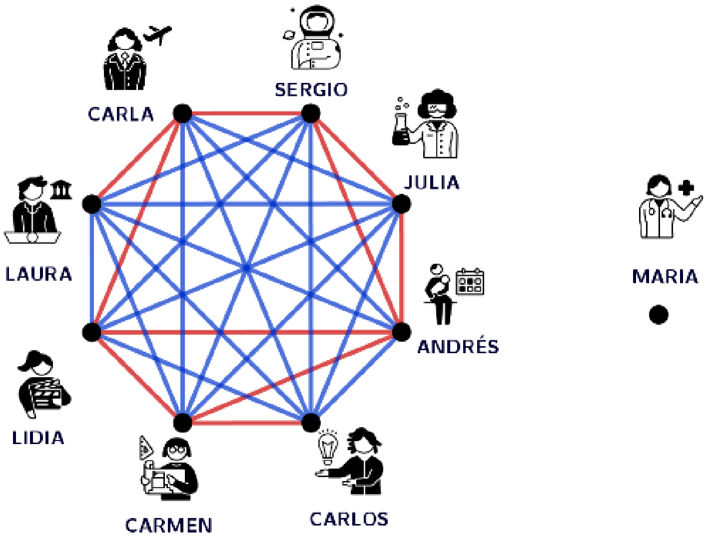

Figura 35. Grafo representativo situación final. Elaboración propia. Fuente imágenes: https://www.domestika.org/es/blog/2985-iconos-gratuitos-para-redefinir-a-las-mujeres-profesionales

Asimismo, la figura 35 es la solución del apartado d.

d) El grafo que representa la nueva red de amistades es la siguiente:

Dado que no han podido ponerse en contacto con María, el vértice María sigue siendo un vértice aislado.

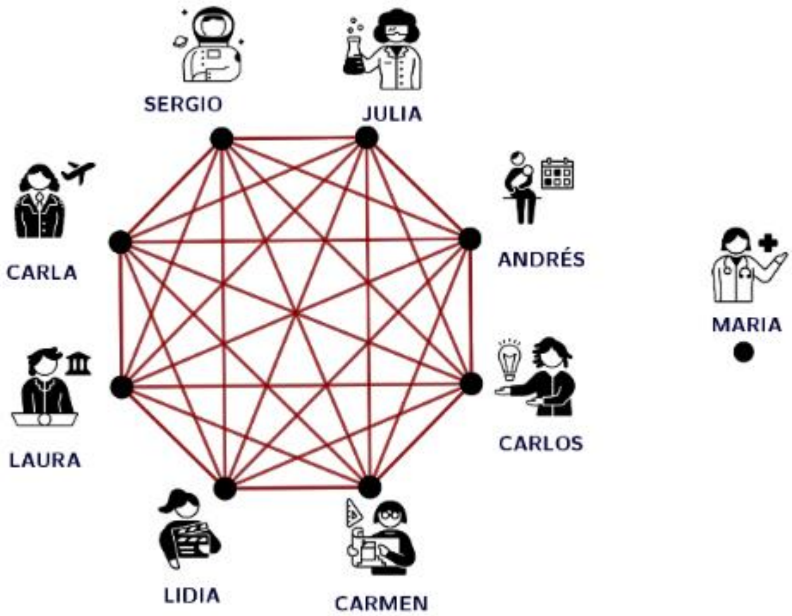

Figura 36. Grafo representativo apartado d, actividad 3. Elaboración propia. Fuente imágenes: https://www.domestika.org/es/blog/2985-iconos-gratuitos-para-redefinir-a-las-mujeres-profesionales

Anexo II. Módulo 2. Actividades y soluciones

ACTIVIDAD 4. VORONOI JUGABA AL BALONCESTO

Consideremos que estamos jugando al baloncesto. Los jugadores de nuestro equipo están representados por los puntos rojos mientras que el punto azul representa a un jugador del equipo contrario (se mantiene estático). ¿Cómo podemos representar la zona que debe defender cada jugador de nuestro equipo?

Caso 1: Dos jugadores.

Para saber qué zona debe defender cada jugador basta con trazar la mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{FC}}$, que une el jugador F con el jugador C, dividiendo la cancha en dos regiones.

Figura 37[2]. Mediatriz, dos jugadores.

Caso 2: Tres jugadores.

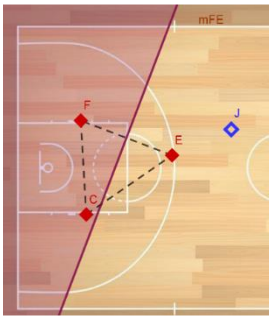

Figura 38[2]. Para calcular la zona de defensa del jugador F realizamos la mediatriz del segmento $\overline{FE}$ que divide la cancha en dos regiones Nos quedamos con el semiplano formado por los puntos más cercanos al jugador F (zona rosa).

Figura 39[2]. Trazamos la mediatriz del segmento $\overline{FC}$. Nos quedamos con el semiplano de los puntos más cercanos al jugador F que al jugador C (zona verde).

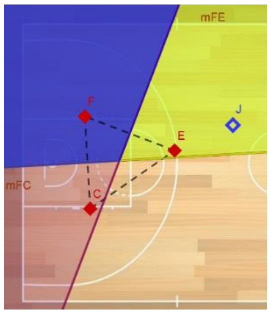

Figura 40[2]. La intersección de los dos semiplanos es la región de defensa del jugador F. Esta región se conoce como la región de Voronoi del jugador F (zona azul).

[2] Construcción mediante el software GeoGebra.
Fuente imagen de fondo: https://sp.depositphotos.com/20076521/stock-photo-basketball-court-floor-plan-on.html

Se repite el mismo proceso con el jugador E y el jugador C, obteniendo las regiones de Voronoi de cada jugador, figura 41.

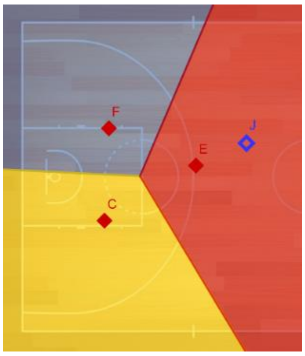

Figura 41[2]. Diagrama de Voronoi, tres jugadores.

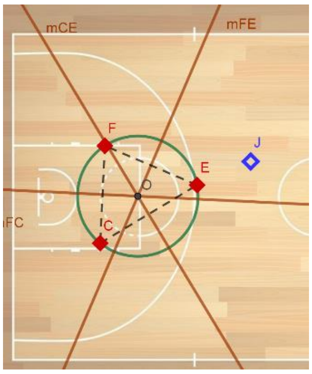

Figura 42[2]. Intersección de 3 puntos no alineados.

¿Cómo se llama el punto O donde se cortan las mediatrices de tres puntos no alineados?; ¿Y la circunferencia cuyo centro es O?

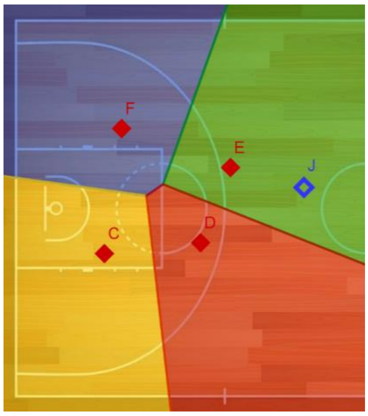

Figura 43[2]. Diagrama de Voronoi, cuatro jugadores.

Caso 3: Cuatro jugadores

La dinámica es la misma que se ha realizado con tres jugadores, pero esta vez con cuatro, figura 43.

Caso 4. Cinco jugadores

- Entrad en la carpeta compartida: Bloque3Geometría
- Abrid el archivo basket.ggb desde el software GeoGebra.
- En el archivo original encontrareis cuatro jugadores, añadid uno más (se puede llamar G) y realizad el diagrama de Voronoi utilizando el siguiente comando:

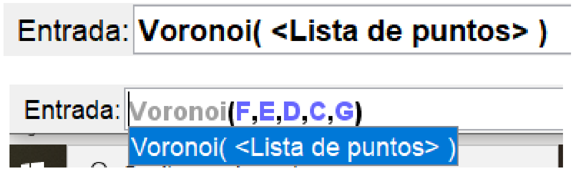

Figura 44. Comando Voronoi. Fuente: GeoGebra

- Utilizad el comando de Voronoi añadiendo jugadores hasta formar dos equipos completos (10 jugadores en total). Reflexiona sobre las estrategias y tácticas que pueden suceder en un partido de baloncesto dinamizando el movimiento de los puntos a través del GeoGebra.
- Subid el archivo en la extensión ".ggb" a la carpeta de tareas.

SOLUCIÓN ACTIVIDAD 4. VORONOI JUGABA AL BALONCESTO

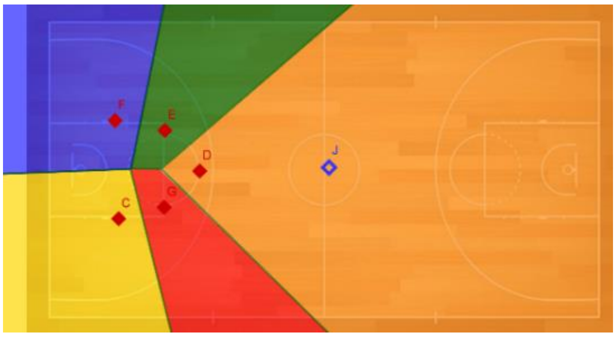

Figura 45[2]. Diagrama de Voronoi con 5 jugadores.

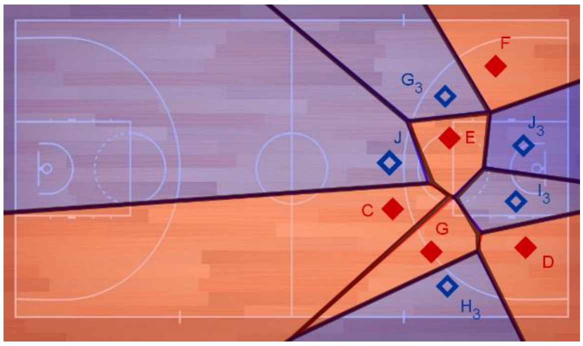

Figura 46[2]. Diagrama de Voronoi con 10 jugadores.

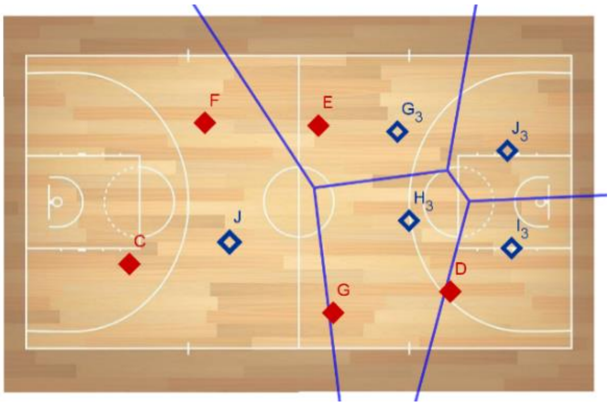

Figura 47[2]. Diagrama de Voronoi con 5 jugadores del equipo azul

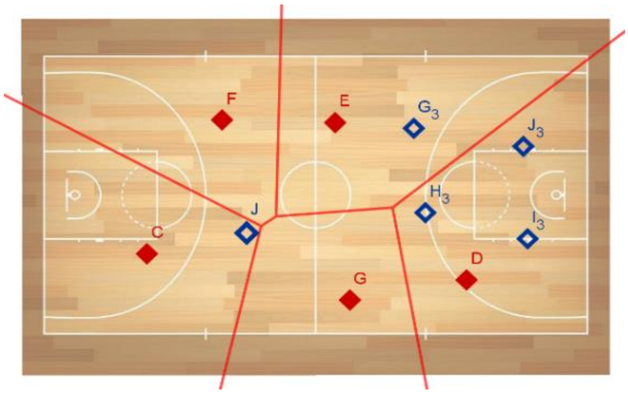

Figura 48[2]. Diagrama de Voronoi con 5 jugadores del equipo rojo.

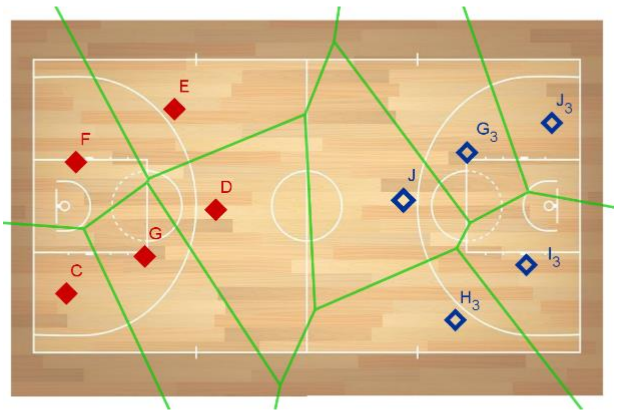

Figura 49[2]. Diagrama de Voronoi con 10 jugadores en la posición de ataque.

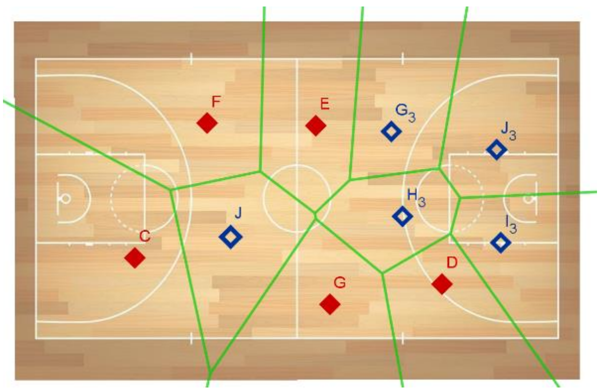

Figura 50[2]. Diagrama de Voronoi con 10 jugadores.

ACTIVIDAD 5. VORONOI Y LAS BICICLETAS

Caso1.

Supongamos que una persona está en la calle Madrid, Burgos, y desea utilizar el servicio de alquiler de bicicletas “Bicibur”, servicio de alquiler de bicicletas del Ayuntamiento de Burgos. De acuerdo con la figura 51, los puntos rojos son las estaciones automáticas de préstamo ubicadas en la zona que se encuentra y la cruz verde es esa persona. ¿A cuál de las siete estaciones debe acudir si quiere utilizar la más cercana a su posición?

Figura 51. Representación enunciado caso 1, Actividad 5. Construcción mediante el software GeoGebra. Fuente imagen de fondo: https://bicibur.es/red-vias-ciclistas/

Caso 2.

Supongamos que el Ayuntamiento de Burgos quiere añadir una nueva estación automática de préstamo de bicicletas “Bicibur” en el área coloreada de morado en la figura 52. Se quiere colocar la estación de forma que esté en el punto más alejado de las estaciones actuales y lo más céntrico posible. ¿Dónde se podría colocar la estación? ¿Por qué?

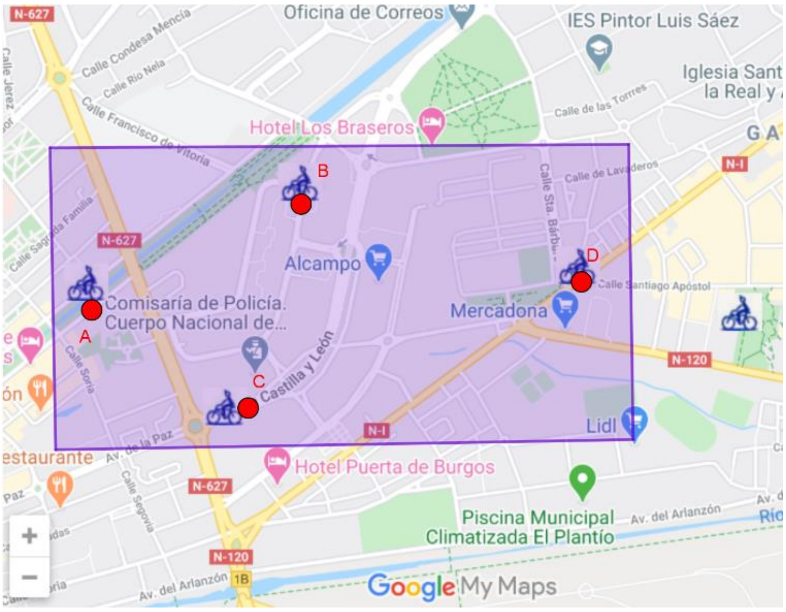

Figura 52. Representación enunciado caso 2, Actividad 5. Construcción mediante el software GeoGebra. Fuente imagen de fondo: https://bicibur.es/red-vias-ciclistas/

SOLUCIÓN ACTIVIDAD 5. VORONOI Y LAS BICLETAS

Caso 1. La resolución de esta actividad se realiza a través del software GeoGebra.

No es necesario realizar el Diagrama de Voronoi con las siete estaciones (puntos rojos), dado que a simple vista se observa que los puntos 1 y 4 están muy alejados de la persona (cruz verde). No obstante, en caso de realizar el diagrama con los siete puntos, la solución no varía.

Figura 53. Delimitación del área próxima. Caso 1, actividad 5. Construcción mediante el software GeoGebra. Fuente imagen de fondo: https://bicibur.es/red-vias-ciclistas/

Se realiza el Diagrama de Voronoi utilizando el comando <Voronoi>, y los puntos *2, 3, 5, 6, 7*. Como resultado, figura 54, se observa cómo se divide el plano en tantas regiones como elementos tengamos, de modo que a cada elemento se le asocian aquellos puntos del plano que están más cerca suyo que de los demás elementos. En este caso, esta persona está más cerca de la estación 7 que de cualquier otra.

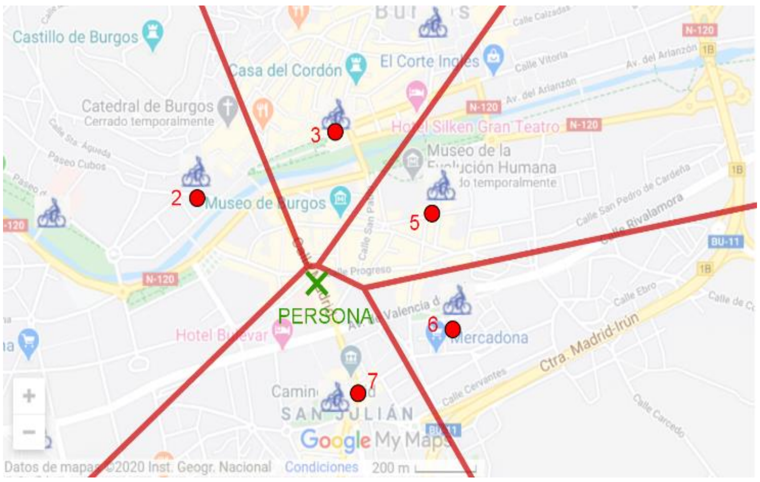

Figura 54. Diagrama de Voronoi, caso 1, actividad 5. Construcción mediante el software GeoGebra. Fuente imagen de fondo: https://bicibur.es/red-vias-ciclistas/

Caso 2. La resolución de esta actividad se realiza a través del software GeoGebra.

La localización óptima de la nueva estación se trata del punto más alejados de las estaciones actuales dentro del área morado.

Mediante el Diagrama de Voronoi podemos definir el área geográfica de influencia de cada estación. A continuación, los puntos donde confluyen estas regiones son los puntos más alejados de cada una de ellas, equidistantes (figura 55).

Figura 55. Vértices diagrama de Voronoi, caso 2, actividad 5. Construcción mediante el software GeoGebra. Fuente imagen de fondo: https://bicibur.es/red-vias-ciclistas/

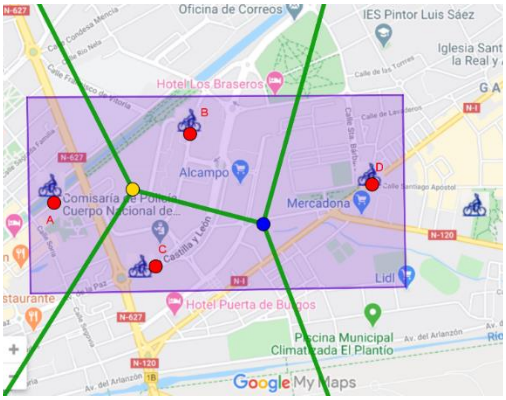

Figura 56. Circunferencias, caso 2, actividad 5. Construcción mediante el software GeoGebra. Fuente imagen de fondo: https://bicibur.es/red-vias-ciclistas/

En este caso, existen dos puntos los cuales se representan en la figura 56 de color amarillo y azul.

Uno de ellos es más adecuado que el otro geográficamente, dado que es el centro del mayor círculo vacío de estaciones que podamos dibujar dentro del área morada. Como se observa en la figura 57 la localización optima corresponde al punto azul.

Figura 57. Diagrama de Voronoi, caso 2, actividad 5. Construcción mediante el software GeoGebra. Fuente imagen de fondo: https://bicibur.es/red-vias-ciclistas/

Anexo III. Módulo 3. Actividades y soluciones

ACTIVIDAD 6. COLOREANDO

Colorea la figura 58 utilizando el mínimo número de colores posibles, con la condición de que zonas con frontera común tengan colores distintos.

Toma nota del criterio y proceso utilizado para colorear la figura.

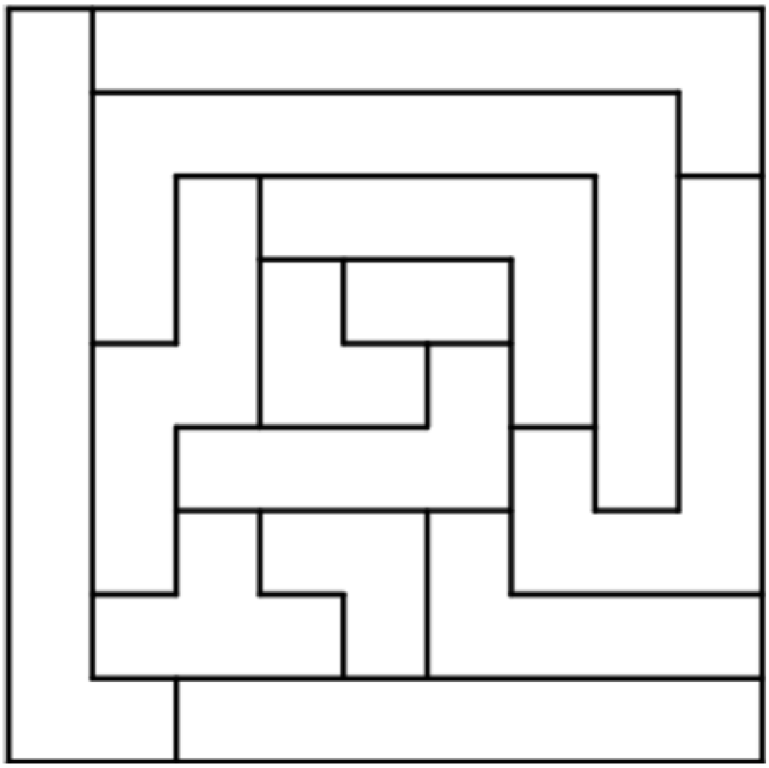

Figura 58. Actividad 6. Elaboración propia.

SOLUCIÓN ACTIVIDAD 6. COLOREANDO

Para llevar a cabo la introducción y la explicación del coloreo de grafos se sigue el procedimiento propuesto por Braicovich, y Cognigni, (2011): "Algoritmo 1: Ante un grafo, empezar pintando el vértice más concurrido (de mayor grado) y luego, del mismo color, todos los que no se relacionan con él. Después, de entre los que quedan sin pintar, elegir nuevamente el más concurrido y repetir el proceso hasta terminar" (p. 147). A continuación, se muestra el procedimiento de manera gráfica:

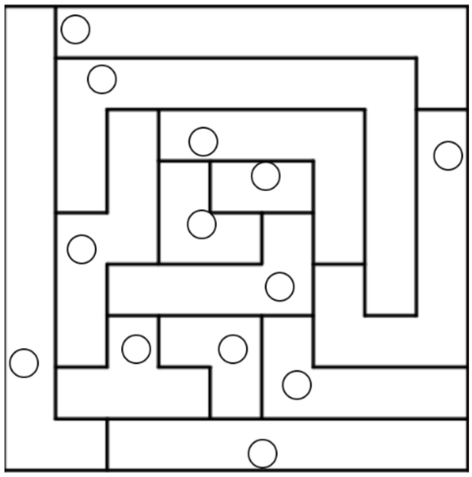

Figura 59. Se asigna a cada zona de la figura un vértice. Elaboración propia.

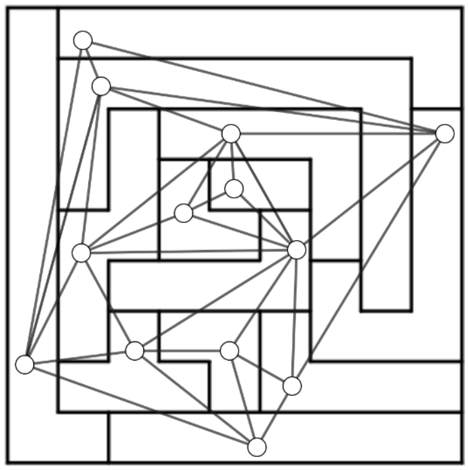

Figura 60. Se unen mediante aristas aquellos vértices que representan regiones adyacentes. Como resultado se crea el grafo asociado a esta figura. Elaboración propia.

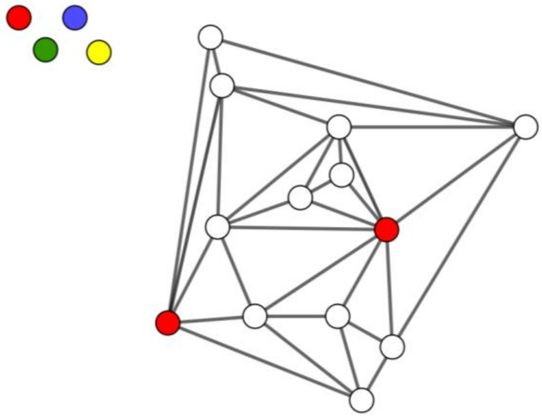

Figura 61. Se establece un conjunto ordenado de colores: *rojo, verde, azul* y *amarillo,* de modo que se comienza colorando de rojo, y se sigue el orden establecido.

Se colorea de rojo uno de los vértices de mayor grado. Se colorean de rojo todos los vértices de mayor grado que no estén coloreados y que no sean adyacentes del vértice anterior ni entre ellos. Elaboración propia.

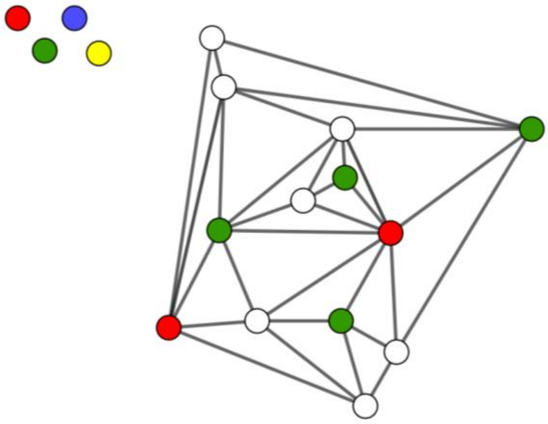

Figura 62. Se colorea de verde uno de los vértices de mayor grado que permanezca aún sin colorear.

Se colorean de verde todos los vértices de mayor grado que no estén coloreados y que no sean adyacentes del vértice anterior ni entre ellos mismos. Elaboración propia.

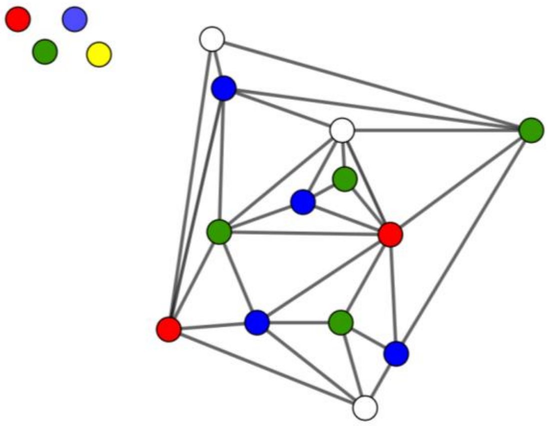

Figura 63. Se colorea de azul uno de los vértices de mayor grado que permanezca aún sin colorear.

Se colorean de azul todos los vértices de mayor grado que no estén coloreados y que no sean adyacentes del vértice anterior ni entre ellos mismos. Elaboración propia.

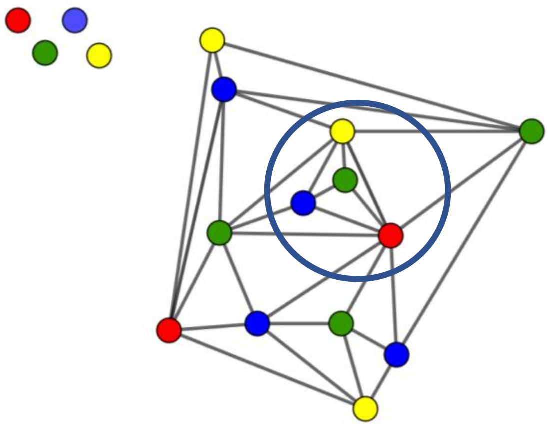

Figura 64. Se colorea de amarillo uno de los vértices de mayor grado que permanezca aún sin colorear.

Se colorean de amarillo todos los vértices de mayor grado que no estén coloreados y que no sean adyacentes del vértice anterior ni entre ellos mismos. En esta figura se observa un subgrafo completo de cuatro vértices (círculo azul), de forma que se comprueba que el número cromático no puede ser menor que cuatro. Elaboración propia.

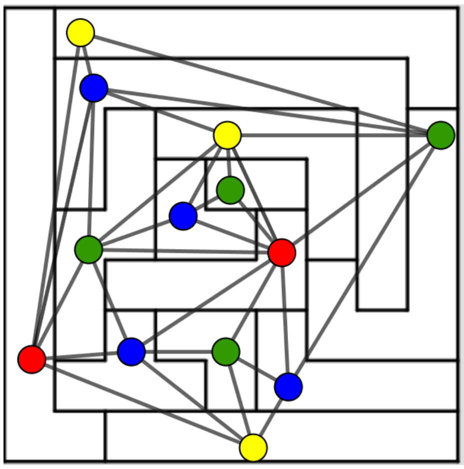

Figura 65. Coloreado de la totalidad de los vértices.

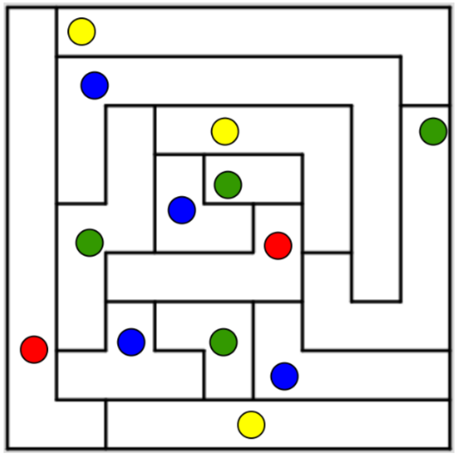

Figura 66. Transición del coloreo de vértices al coloreo de la figura. Cada región se colorea del color correspondiente al vértice. El número cromático de esta figura es 4. Elaboración propia.

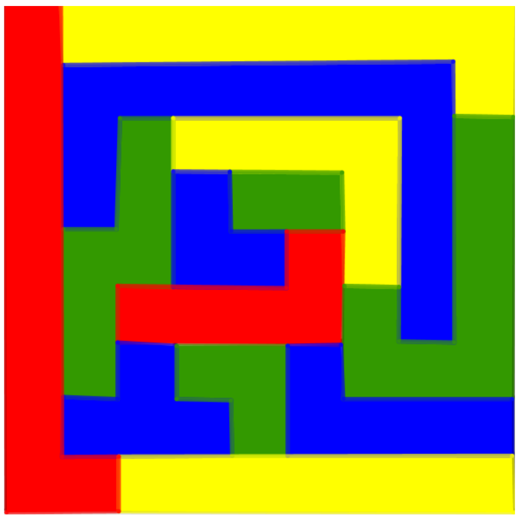

Figura 67. Coloreo figura, resultado final. Elaboración propia.

ACTIVIDAD 7. INCENDIOS, TRANSPORTE Y GRAFOS

Supongamos que una organización de voluntarios está rescatando animales heridos que habitan en un área de Australia gravemente afectada por los incendios. Los traslados de los animales a zonas más seguras, donde se les proporcionara alimento y cuidados médicos, se van a realizar en distintos tipos de transporte en función del tamaño de cada animal, siendo las restricciones las siguientes:

- Los canguros no se pueden transportar con los quokkas, koalas ni quols tigre.
- Los numbats no se pueden transportar con los emús, wallabis ni canguros.
- Los wallabis no se pueden transportar con los koalas, quokkas ni quols tigre.
- Los emús no se pueden transportar con los quokkas, koalas ni con los quol tigres.

¿Cuál será el número mínimo de tipos de transportes necesarios para transportar estos animales de acuerdo con las restricciones de tamaño?

Consejo: Los nombres de los animales no son familiares, quizás sería más sencillo si fuesen leones, cebras, jirafas…Probad a designar a cada animal por una letra o un número. Por ejemplo:

Tabla 7.
Simplificación del enunciado, actividad 7.

Canguros	Quokkas	Koalas	Quols Tigre	Emús	Wallabis	Numbats
C	Q	K	QT	E	W	N

Elaboración propia.

SOLUCIÓN ACTIVIDAD 7. INCENDIOS, TRANSPORTES Y GRAFOS

Representación del grafo:

Los vértices representan a cada uno de los animales. Vértices: {C, Q, K, QT, E, W, N}

Las aristas representan las restricciones de transporte de acuerdo con el enunciado.

La restricción es una acción reciproca, por lo tanto, si los koalas no se pueden transportar con los canguros, estos tampoco pueden ser transportados con los koalas.

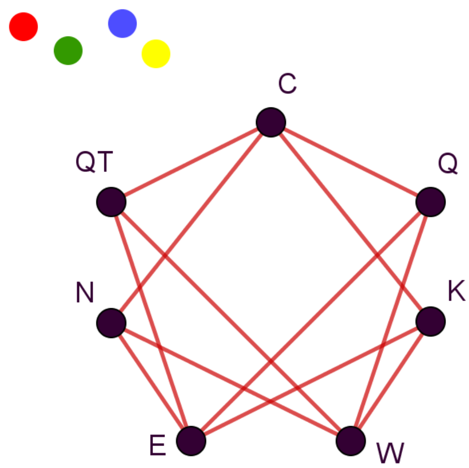

Figura 68. Grafo representativo enunciado actividad 7. Elaboración propia.

Una vez que se ha modelizado la situación mediante el grafo de la figura 68, se lleva a cabo la coloración:

- Se establece un conjunto ordenado de colores.
- Se comienza coloreando uno de los vértices de mayor grado según el conjunto ordenado de colores, en este caso se colorea el vértice *C* de rojo. A continuación, se colorean de ese mismo color todos los vértices que no sean adyacentes a este último ni entre ellos mismos, vértices *E* y *W*.
- De todos los vértices que estén sin colorear, se colorea el de mayor grado de acuerdo con la gama cromática, en este caso el vértice *QT* de color verde. Asimismo, se colorean los vértices restantes que no sean adyacentes a este último de verde, en este caso los vértices *Q*, *K* y *N*.

Una vez que se ha colorado el grafo por completo, se procede a responder la pregunta que formulaba el enunciado:

¿Cuál será el número mínimo de tipos de transportes necesarios para transportar estos animales de acuerdo con las restricciones de tamaño?

Tantos como colores sean necesarios para colorear el grafo, en este caso, dos tipos de transportes son suficientes para que se puedan transportar los animales de acuerdo con las restricciones de tamaño. En este caso, se observa que el número mínimo es óptimo, es imposible transportar los animales de acuerdo con las restricciones en un número menor de transportes.

Si interpretamos el grafo de la figura 69 los animales se pueden transportar de la siguiente forma:

Transporte tipo 1: {C, E, W}

Transporte tipo 2: {QT, Q, K, T}

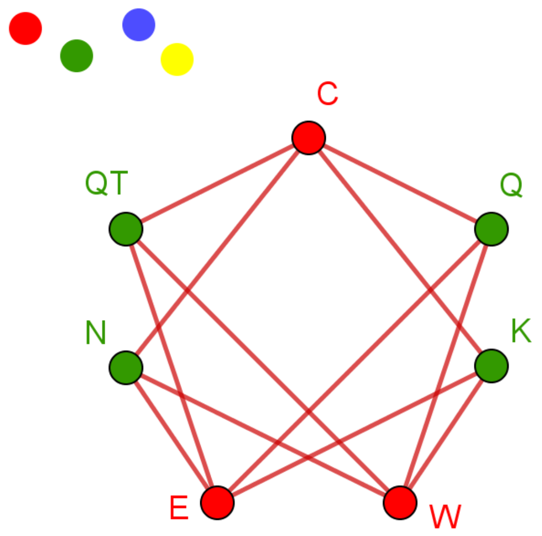

Figura 69. Grafo coloreado, solución actividad 7. Elaboración propia.

ACTIVIDAD 8. MUJERES MATEMÁTICAS Y GRAFOS

Con motivo del Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia el departamento de matemáticas ha decidido hacer un homenaje a las siguientes mujeres matemáticas que han marcado la historia de las matemáticas, (Alic, 2005):

(T) Teáno de Crotona, primera mujer matemática.

(H) Hypatia de Alejandría, primera mujer astrónoma.

(A) María Gaetana de Agnesi, primera profesora de universidad.

(S) Sophie Germaine, la mejor matemática de la historia según Carl Friedrich Gauss.

(L) Ada Lovelace, primera persona programadora.

(N) Emmy Noether, fundadora del algebra moderna.

(M) Maryam Mirzakhani, primera mujer en recibir la medalla Fields.

(K) Sonia Kovalévskaya, primera mujer que se doctoró en Matemáticas.

Se propone a los alumnos hacer una presentación oral sobre la vida de estas ocho mujeres matemáticas, así como de sus aportaciones a las matemáticas y aquellos aspectos que consideren interesantes, durante la semana de la ciencia en las horas lectivas de la asignatura.

Cada alumno elige dos mujeres matemáticas distintas de entre las ocho propuestas. Las elecciones de los alumnos de 2º ESO que cursan "Conocimiento de las Matemáticas" han sido las siguientes:

Elecciones: {(H, T), (M, S), (A, N), (T, A), (H, M), (N, S), (T, A), (L, N), (L, K), (K, A), (K, S), (T, N), (M, N), (H, S) y (L, N)}.

Los alumnos se agruparán en función de a qué mujer matemática han elegido y de acuerdo con la siguiente condición:

- Un mismo alumno no puede presentar dos trabajos el mismo día.

Podríais ayudar a los docentes a resolver las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es el mínimo número de días necesarios para realizar las presentaciones?
- ¿Hay algún grupo formado por más de cinco alumnos?

Nota:

El número de elecciones es igual al número de alumnos: 15 alumnos total.

Comienza designando a cada alumno como A1, A2…hasta A15 y relacionando a cada alumno con su elección:

A1(H, T); A2(M, S); A3(A, N); A4(T, A); A5(H, M); A6(N, S); A7(T, A); A8(L, N); A9(L, K); A10(K, A); A11(K, S); A12(T, N); A13(M, N); A14(H, S); A15(L, N)

SOLUCIÓN ACTIVIDAD 8. MUJERES MATEMÁTICAS Y GRAFOS

Para resolver este problema se utiliza la coloración de grafos, siendo el número mínimo de días el número mínimo de colores necesarios para colorear el grafo.

Para facilitar la interpretación entre las elecciones y los alumnos se crea la siguiente tabla:

Tabla 8.

Simplificación enunciado actividad 8.

	H	M	N	K	T	A	S	L
A1	X				X			
A2		X					X	
A3			X			X		
A4					X	X		
A5	X	X						
A6			X				X	
A7					X	X		
A8			X					X
A9				X				X
A10				X		X		
A11				X			X	
A12			X		X			
A13		X	X					
A14	X						X	
A15			X					X

Elaboración propia.

Mediante la construcción de la tabla se puede observar claramente cuántos alumnos han elegido a cada mujer matemática y como un grupo tiene más de cinco componentes, Noether: {A3, A6, A8, A12, A13, A15}, por lo que se puede responder a la pregunta que formulaba el enunciado*:*

¿Hay algún grupo formado por más de cinco alumnos?

Si, el grupo de alumnos que va a realizar la presentación sobre Noether está formado por seis alumnos.

Sin embargo, a través de la tabla no es posible identificar cuantos días son necesarios por lo cual se recurre a la coloración de grafos.

Representación del grafo:

Los vértices son las ocho mujeres matemáticas: Vértices {*Hypatia, Teáno, Agnesi, Sophie, Lovelace, Noether, Maryam, Kovaléskaya}*

Cada arista representa la elección de cada alumno: Aristas {*(H, T), (M, S), (A, N), (T, A), (H, M), (N, S), (T, A), (L, N), (L, K), (K, A), (K, S), (T, N), (M, N), (H, S), (L, N)}* o lo que sería lo mismo *{A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15}*.

Representación del grafo:

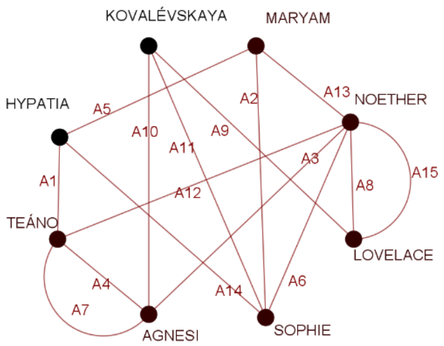

Figura 70. Grafo representativo enunciado actividad 8. Elaboración propia.

De acuerdo con el grafo de la figura 70 el grado de cada vértice se recoge en la siguiente Tabla:

Tabla 9.

Grado de cada vértice. Actividad 8.

	H	M	N	K	T	A	S	L
Grado	3	3	6	3	4	4	4	3

Elaboración propia.

El grado de cada vértice indica el número de alumnos que forman cada grupo. Antes de empezar a colorear el grafo es necesario establecer un conjunto ordenado de cuatros colores: *rojo, verde, azul* y *amarillo*. En caso de que fuese necesario se puede añadir otro color.

Se comienza coloreando uno de los vértices de mayor grado de color rojo, en este caso el vértice de mayor grado es el vértice *Noether* que tiene grado 6 (figura 71). A continuación, se colorean de rojo todos los vértices que no son adyacentes del vértice *Noether*: *Hypatia y Kovalévskaya* (figura 72).

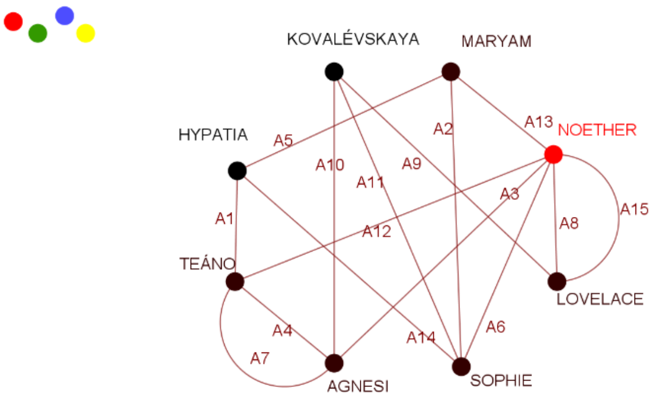

Figura 71. Coloración de rojo del vértice de mayor grado. Elaboración propia.

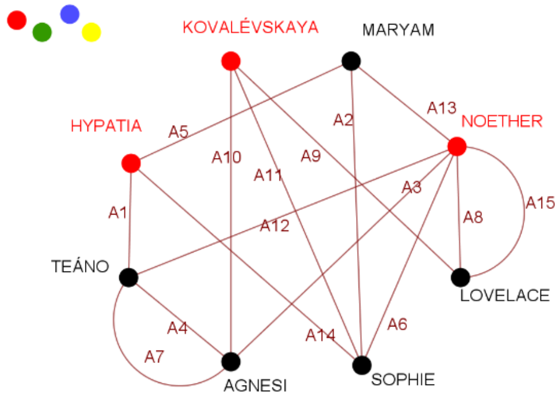

Figura 72. Coloración de rojo de los vértices no adyacentes al anterior. Elaboración propia.

Posteriormente, se colorea uno de los vértices de mayor grado que este aún sin colorear. En este caso son tres los vértices cuyo grado es 4, se elige uno de ellos, por ejemplo, *Sophie.* El color que corresponde a este vértice según el conjunto de colores ordenados es el verde (figura 73).

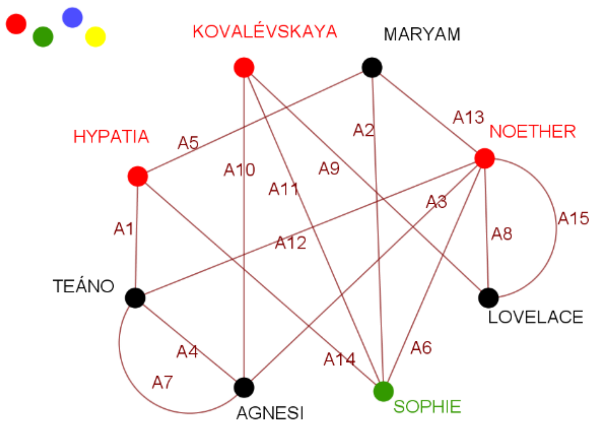

Figura 73. Coloración de verde de uno de los vértices sin colorear de mayor grado. Elaboración propia.

Se colorea de verde aquellos vértices que no sean adyacente al vértice *Sophie* ni entre sí, en este caso los vértices *Agnesi* y *Lovelace* (figura 74). *Teáno* no puede ser coloreado de verde porque es adyacente de *Agnesi*.

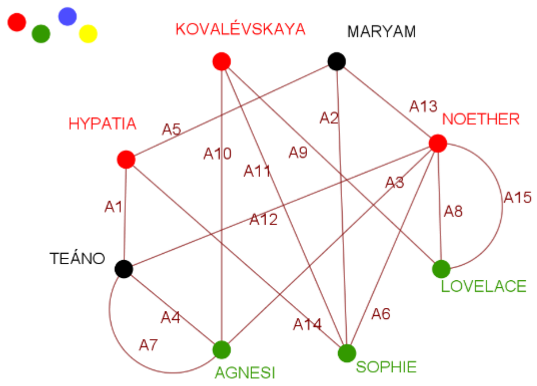

Figura 74. Coloración de verde de los vértices sin colorear no adyacentes del anterior. Elaboración propia.

Se colorea de verde uno de los vértices de mayor grado que permanece sin colorear, en este caso *Teáno*. Dado que este vértice es adyacente de vértices coloreados de rojo (*Hypatia*, *Noether)* y de verde (*Agnesi)*, coloreamos el vértice del siguiente color según el conjunto de colores, azul (figura 75).

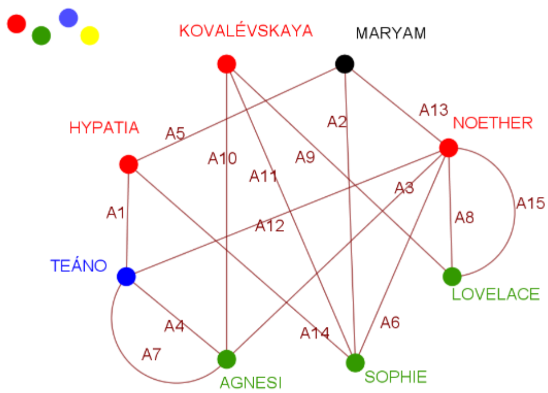

Figura 75. Coloración de azul de uno de los vértices de mayor grado sin colorear. Elaboración propia.

El único vértice que permanece sin colorear es *Maryam*. Este vértice es adyacente de dos vértices de color rojo (*Noether*, *Hypatia)* y de un vértice de color verde (*Sophie)*, sin embargo, no es adyacente del único vértice de color azul, *Teano*. Coloreamos de azul el vértice *Maryam*, y tenemos el grafo completamente coloreado (figura 76).

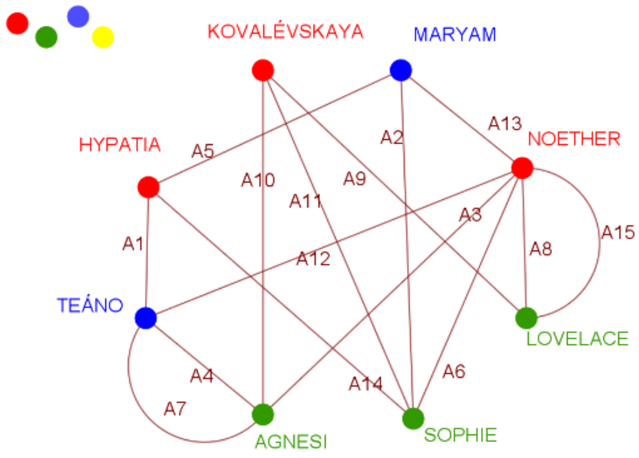

Figura 76. Coloración del grafo. Elaboración propia.

Una vez que se ha colorado el grafo por completo, se procede a responder la pregunta que formulaba el enunciado:

¿Cuántos días serán necesarios?

Tantos como colores son necesarios para colorear el grafo, en este caso, tres días son suficientes para que los alumnos puedan llevar a cabo la presentación sin exponer dos veces en el mismo día. En este caso, se comprueba que el número cromático es mínimo dado que existe un subgrafo triangular, como muestra el círculo azul de la figura 77.

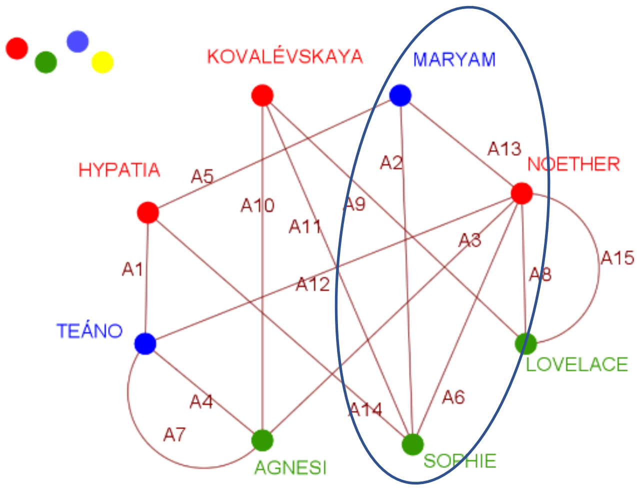

Figura 77. Subgrafo triangular. Elaboración propia.

Si interpretamos el grafo final, (figura 76), la solución del problema sería la siguiente:

Dia 1: Presentaciones: *Noether {A3, A6, A8, A12, A13, A15}*

Kovalèvskaya {A9, A10, A11}

Hypatia {A1, A5, A14}

Dia 2: Presentaciones: *Lovelace {A8, A9, A15}*

Sophie {A2, A6, A11, A14}

Agnesi {A3, A4, A7, A10}

Día 3: Presentaciones: *Teáno {A1, A4, A7, A12}*

Maryam {A2, A5, A13}

Aunque esta actividad se ha resuelto sin mencionar las aristas múltiples, tras su resolución se pregunta a los alumnos si creen que el número cromático se ve afectado por las aristas múltiples. Tras un intercambio de opiniones y reflexión común, se explica que las aristas múltiples no afectan al número cromático, ya que estas afectan al grado de cada vértice (número de integrantes de cada grupo) pero no al número de días que son necesarios. Como se puede observar en la resolución de la actividad, las aristas correspondientes a los A8 y A15 están juntos en las presentaciones de Noether en el día 1 y Lovelace en el día 2; así como se observa que las aristas correspondientes a los A4 y A7 están juntos en las presentaciones Agnesi en el día 2 y Teáno en el día 3.

Anexo IV. Conceptos sobre grafos

Dado que no existe una estandarización general en el lenguaje de grafos y para dotar de homogeneidad este TFM, se ha realizado una unificación de los conceptos teóricos extraídos del *Capítulo 0. Introducción a grafos y árboles,* Ross, Wright y Oteyza, (1990, p. 1-16), y del *Capítulo 2. GRAFOS*, Burgos, (2012, p. 31-67).

Grafo: conjunto de puntos, denominados **vértices** (nodos), unidos por un conjunto de líneas, denominadas **aristas** (conexiones).

Lazo: una arista es un lazo cuando une un vértice consigo mismo.

Aristas múltiples o paralelas: un grafo tiene aristas múltiples si dos vértices están unidos por más de una arista.

Grafo simple: un grafo es simple si no tiene lazos ni aristas múltiples. En caso contrario, se trata de un **multígrafo.**

Grado de un vértice: corresponde al número de aristas que confluyen en él.

Grado de un grafo: el grado de un grafo es igual a la suma de los grados de todos sus vértices. Este grado es igual al doble del número de aristas.

Grafo regular: un grafo es regular si todos los vértices tienen el mismo grado.

Vértice aislado: vértice que no está unido a otro vértice. Su grado es igual a cero.

Aristas adyacentes: dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común.

Vértices adyacentes: dos vértices son adyacentes si son extremos de una misma arista.

Grafo completo: un grafo es completo si es simple y si cada uno de los vértices es adyacente a los demás.

Camino*:* un camino es determinado por una sucesión de vértices unidos por aristas.

Camino cerrado: un camino es un camino cerrado si el primero y el último vértice de la sucesión de vértices son el mismo. En caso contrario, se trata de un **camino abierto**.

Ciclo: un camino cerrado es un ciclo si no se repiten aristas y en la sucesión de vértices todos son distintos, excepto el primero y el último. Un grafo es **acíclico** si no tiene ciclos.

Grafo conexo: un grafo es conexo si dos vértices cualesquiera están conectados por un camino. En caso contrario, se trata de un **grafo no conexo**.

Teorema de Euler: Si todos los vértices de un grafo conexo tienen grado par, entonces el grafo contiene un camino cerrado que pasa una y sólo una vez por cada una de las aristas y se denomina **ciclo euleriano (camino cerrado euleriano)**. En caso de tener exactamente 2 vértices de grado impar, existe un camino tal que empieza y acaba en cada uno de esos vértices que se denomina **camino euleriano abierto**.

Diagrama de Voronoi:

> Dado un conjunto cualquiera de puntos en un espacio, a los que denominaremos «puntos generadores», un diagrama de Voronói divide ese espacio asignando una región de influencia a cada uno de ellos de tal manera que todo punto de una zona está más cerca de su generador que de cualquier otro. (Luque, 2020)

Grafo plano: un grafo se dice que es plano si admite alguna representación gráfica, en el plano, en el que las aristas no se cruzan (dos aristas solo pueden intersecarse en un vértice, si son adyacentes).

Regiones adyacentes: son aquellas cuyos bordes tienen alguna arista en común. Si dos regiones se tocan en un único punto se entiende que no tienen frontera común.

Colorear un grafo: asignar colores a los vértices de un grafo de manera que, si dos vértices son adyacentes, entonces sus colores sean distintos.

Número cromático: menor número de colores que son necesarios para colorear un grafo.

Teorema de los Cuatro Colores: cualquier mapa (plano) formado por regiones (conexas) puede colorearse con cuatro colores de manera que dos regiones adyacentes tengan distinto color. Este teorema se puede enunciar también de la siguiente forma: el número cromático de cualquier grafo plano es menor o igual que cuatro.

Anexo V. Evaluación

Tabla 10.

Instrumento de evaluación por parte del docente del módulo 1.

Apartado/ Puntuación	Ítems de valoración	Puntuación
Trabajo individual (2 puntos)	Visualiza video 2	0,5
	Realiza y busca información acerca de la actividad 1	0,5
	Participa activamente en clase, preguntando dudas y aportando ideas, opiniones y argumentos justificados, con criterio y respeto	0,5
	Contesta con precisión a las preguntas y dudas planteadas por sus compañeros de clase	0,5
Trabajo en grupo (2 puntos)	Participa y contribuye activamente dentro del grupo de trabajo	0,5
	Contribuye al buen ambiente del grupo de trabajo	0,5
	Respeta, escucha y valora las aportaciones de sus compañeros	0,5
	Sus aportaciones son claves para el correcto desarrollo de las actividades	0,5
Expresión oral (1 punto)	Se expresa de forma clara y precisa	0,5
	Utiliza el lenguaje matemático correctamente	0,5
Objetivos específicos del módulo (3 puntos)	Identifica los elementos que componen un grafo: aristas y vértices	1
	Diferencia grafos conexos y no conexos	0,5
	Representa distintos sucesos mediante grafos	0,5
	Relaciona el grado de un vértice con los caminos eulerianos: cerrados y abiertos	1
Actividades (1 punto)	Entrega las actividades en el tiempo estimado, de manera ordenada, clara y organizada	0,5
	Utiliza los grafos junto con otras estrategias de resolución de problemas de manera adecuada	0,5
Comportamiento y actitud (1 punto)	Muestra una actitud positiva y un comportamiento correcto durante el desarrollo de las sesiones.	1

Elaboración propia

Tabla 11.

Instrumento de evaluación por parte del docente del módulo 2.

Apartado/ Puntuación	**Ítems de valoración**	**Puntuación**
Trabajo individual (2 puntos)	Visualiza video 2	0,5
	Realiza y entrega actividad 4	0,5
	Participa activamente en clase, preguntando dudas y aportando ideas, opiniones y argumentos justificados, con criterio y respeto	0,5
	Contesta con precisión a las preguntas y dudas planteadas por sus compañeros de clase	0,5
Trabajo en grupo (2 puntos)	Participa y contribuye activamente dentro del grupo de trabajo	0,5
	Contribuye al buen ambiente del grupo de trabajo	0,5
	Respeta, escucha y valora las aportaciones de sus compañeros	0,5
	Sus aportaciones son claves para el correcto desarrollo de las actividades	0,5
Expresión oral (1 punto)	Se expresa de forma clara y precisa	0,5
	Utiliza el lenguaje matemático correctamente	0,5
Objetivos específicos del módulo (3 puntos)	Identifica y comprende las características básicas del Diagrama de Voronoi	0,5
	Relaciona conceptos de la geometría en el plano con el Diagrama de Voronoi	0,5
	Utiliza de manera adecuada y con soltura el software GeoGebra y el comando correspondiente al Diagrama de Voronoi	1
	Emplea el Diagrama de Voronoi para resolver distintas situaciones	1
Actividades (1 punto)	Entrega las actividades en el tiempo estimado, de manera ordenada, clara y organizada	0,5
	Utiliza los grafos junto con otras estrategias de resolución de problemas de manera adecuada	0,5
Comportamiento y actitud (1 punto)	Muestra una actitud positiva y un comportamiento correcto durante el desarrollo de las sesiones.	1

Elaboración propia

Tabla 12.

Instrumento de evaluación por parte del docente del módulo 3.

Apartado/ Puntuación	**Ítems de valoración**	**Puntuación**
Trabajo individual (2 puntos)	Visualiza video 3	0,5
	Realiza actividad 6	0,5
	Participa activamente en clase, preguntando dudas y aportando ideas, opiniones y argumentos justificados, con criterio y respeto	0,5
	Contesta con precisión a las preguntas y dudas planteadas por sus compañeros de clase	0,5
Trabajo en grupo (2 puntos)	Participa y contribuye activamente dentro del grupo de trabajo	0,5
	Contribuye al buen ambiente del grupo de trabajo	0,5
	Respeta, escucha y valora las aportaciones de sus compañeros	0,5
	Sus aportaciones son claves para el correcto desarrollo de las actividades	0,5
Expresión oral (1 punto)	Se expresa de forma clara y precisa	0,5
	Utiliza el lenguaje matemático correctamente	0,5
Objetivos específicos del módulo (3 puntos)	Identifica y comprende las características básicas del Teorema de los Cuatro Colores	1
	Resuelve problemas sencillos mediante el coloreo de grafos	1
	Emplea la secuencia para la coloración de grafos de manera correcta, ordenada y eficaz	1
Actividades (1 punto)	Entrega las actividades en el tiempo estimado, de manera ordenada, clara y organizada	0,5
	Utiliza los grafos junto con otras estrategias de resolución de problemas de manera adecuada	0,5
Comportamiento y actitud (1 punto)	Muestra una actitud positiva y un comportamiento correcto durante el desarrollo de las sesiones.	1

Elaboración propia

Anexo VI. Evaluación de la propuesta didáctica

Tabla 13.

Evaluación por parte del alumnado de cada módulo.

Criterios para evaluar	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Los videos han sido accesibles y te han ayudado a comprender los contenidos teóricos					
El tiempo empleado para realizar las actividades fuera del aula ha sido adecuado					
Las sesiones empleadas en este módulo han sido suficientes					
Dedicar las sesiones a realizar actividades ha favorecido la adquisición de los contenidos					
El número de actividades ha sido adecuado					
La duración de las actividades ha sido adecuada					
El grado de dificultad de las actividades ha sido adecuado					
Trabajar de manera cooperativa ha sido fundamental para afianzar los contenidos					
La utilización del software GeoGebra ha sido útil					
La forma de evaluación ha sido clara y justa					

Elaboración propia.

Tabla 14.

Evaluación por parte del docente de la propuesta didáctica.

Criterios para evaluar	A destacar	A mejorar	Propuestas de mejora
¿La propuesta didáctica se ha realizado en el tiempo preestablecido?			
¿La secuencia temporal ha sido adecuada?			
¿Se han cumplido los objetivos?			
¿Se han identificado correctamente los conocimientos previos?			
¿Los alumnos han realizado las tareas en plazo?			
¿Tenían claro lo que se les estaba pidiendo?			
¿Las estrategias metodológicas seleccionadas han resultado útiles para que el alumnado aprendiera?			
¿Los recursos didácticos eran adecuados? ¿Tenían el nivel que demandaban los alumnos/as? ¿Había suficiente cantidad de material?			
¿Las herramientas de evaluación han sido adecuadas?			

Elaboración propia.