UNIVERSIDAD DE BURGOS

PROGRAMA INTERNACIONAL DE DOCTORADO
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

Departamento de Didácticas Específicas

TESIS DOCTORAL

USO DE TEXTOS DE APOYO COMO ORGANIZADOR PREVIO: MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA FUNDAMENTAL Y MEDIA

José Roberto da Silva

Burgos, febrero de 2009

UNIVERSIDAD DE BURGOS

PROGRAMA INTERNACIONAL DE DOCTORADO
EDUCACIÓN EN CIENCIAS

Departamento de Didácticas Específicas

Universidad de Burgos

Universidade Federal
do Rio Grande do Sul

USO DE TEXTOS DE APOYO COMO ORGANIZADOR PREVIO: MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA FUNDAMENTAL Y MEDIA

Tesis Doctoral realizada por **D. José Roberto** da Silva para optar al grado de Doctor por la Universidad de Burgos, bajo la dirección del **Dr. Marco Antonio Moreira** y la co-dirección de la **Dra. Fernanda Ostermann.**

JOSÉ ROBERTO DA SILVA

Burgos, febrero de 2009

A la memoria de mi abuela, Joana Maria da Conceição, que con su sabiduría popular, me hizo sentir la necesidad de conocer.

A mis padres, José Ferreira da Silva e Irene de Aquino Ferreira, en testimonio de mi estima y gratitud por todo lo que me proporcionaron.

Al profesor Dr. Marco Antonio Moreira por la confianza, apoyo y capacidad para dirigir trabajos en distintas áreas.

Al profesor Dr. José Alberto Miranda Poza por la calma y el empeño dedicado en la traducción de esta tesis.

Resumen

La primera etapa del estudio estaba centrada en la elaboración de cuatro textos de apoyo con la intención de que pudieran servir de organizadores-previos y/o seudo-organizadores, en el ámbito de las bases de las áreas matemáticas de **Álgebra**, **Combinatoria**, **Geometría Clásica** y **Lógica Matemática**. En la segunda, el objetivo era el empleo de esos textos en la Disciplina de Didáctica de las Matemáticas, que tuvo una duración de 60 horas dentro de un Curso de Especialización en Enseñanza de las Matemáticas para profesores de la *Enseñanza Fundamental y Media*, realizado en el período comprendido entre enero de 2006 y enero de 2007. El propósito de su elaboración y uso fue el de ayudar a los 32 alumnos participantes del curso, a adquirir una base inicial y/o profundizar en las ideas que ya poseían acerca de esas cuatro áreas de las matemáticas para posibilitar su trabajo de forma consistente en esos niveles de enseñanza. El fundamento teórico de cada texto en sí, además de su correspondiente base matemática específica según la necesidad de enfoque de cada una de las cuatro áreas, encuentran pedagógicamente, sus fundamentaciones en la teoría del Aprendizaje Significativo corroborada con las teorías de los Campos Conceptuales y de la Actividad. Cada texto posee una secuencia didáctica compuesta por tres situaciones didácticas que privilegian, respectivamente, las ideas matemáticas que fundamentan la estructuración del campo matemático referente a dichas ideas, y aplicaciones con la intención de establecer articulaciones que ayuden a comprender los aspectos evolutivos del campo, así como su interrelación para consigo y de él con las otras partes de la matemática. A tales situaciones están constituidas por **Actividades Didácticas**: **Ausubel, Vergnaud y Leontiev** (ADAVL) compuestas por acciones cuya finalidad es la de organizar las ideas matemáticas según las características subyacentes a los organizadores previos. Junto a ello, en tales estructuraciones se toman en consideración los propósitos conceptuales apuntados por Vergnaud, y también la articulación tratada por Leontiev entre la acción y el contenido de la acción con el fin de analizar el sentido atribuido por el individuo a partir de la actividad desarrollada. El estudio se enmarca metodológicamente en las llamadas investigaciones cualitativas, estando más centrado en el estudio de caso, y por el hecho de incidir en las representaciones singulares de la realidad educativa intentando generar cambios, se aproxima más al tipo investigación-acción. Las informaciones derivadas de las actividades realizadas en la disciplina de didáctica se tomaron a partir de las respuestas de los alumnos a los cuestionarios y mapas conceptuales elaborados por ellos, y fueron sistematizadas en forma de tablas y cuadros, lo que permite interpretaciones acerca de las concepciones de los alumnos participantes en este estudio. Los resultados obtenidos pudieron recopilarse atendiendo a los propósitos de las situaciones, donde se observó evolución en el ámbito de los tres privilegios apuntados en cada una de las cuatro secuencias didácticas. Pero, a pesar de no haber ocurrido esto de forma amplia, ni con la misma intensidad, ni en los 32 alumnos, cuando emplearon cada texto, y mucho menos en la esfera de los cuatro textos en sí, al menos se dio un avance en el desempeño de los alumnos con respecto a sus ideas matemáticas, donde la Combinatoria, sobresalió con relación a los otros tres campos. Los fragmentos que prueban este análisis interpretativo que alude al cambio evolutivo los hallamos tanto en la sistematización de los mapas conceptuales iniciales y finales como en las respuestas a los cuestionarios iniciales y finales, destacando en estos últimos la *atribución de sentido* a partir de la interrelación entre el *contenido* y el *motivo* de la acción.

Abstract

The study itself consists of two stages. The first one focused the elaboration of four support texts with the intention that they could attend a previous-organizer function and/or pseudo-organizer, exploring the bases of the fields of Mathematics: **Algebra, Combinatory, Classic Geometry** and **Mathematics Logics.** At the second moment, the focus was the use of those texts in a Mathematics Didactics discipline of 60 hours within a Specialization course in Mathematics Education for teachers of Elementary Teaching (ET) carried out from January, 2006 to January, 2007. The intention of such an elaboration and use was to assist 32 students (BT teachers) of this course to obtain a preliminary base and/or to deepen the previous ideas on those four Mathematics fields so the instructors could perform in a consistent way with those teaching levels. The theoretical ground of each text itself, besides their corresponding specific mathematical base in accordance with the focus necessity of each one of those four areas, is pedagogically grounded on the theory of the Meaningful Learning, in association with the Conceptual Fields Theory and the Activity Theory. Each text has a didactic sequence composed of three didactic situations that demonstrate respectively Mathematics ideas that establish the field, the field structure involving such ideas, and appliances with the purpose of establishing articulations that help the comprehension of the development aspects of the field, as well as its inner relations and with other Mathematics branches. Such situations were called Didactic Situations by: Ausubel, Vergnaud and Leontiev (SDAVL) and are made up of actions whose goal is to organize the Mathematics ideas in agreement with the subjacent characteristics to the previous organizers. Besides, in these structures are taken into consideration the conceptual purposes, as cited by Leontiev, between the action and action content with the purpose of exploring the meaning attached by the individual out of the performed activity. The research is methodologically a so-called qualitative investigation, close to the concept of case study, and, because it, covers a singular education reality representation in an attempt to produce changes, getting closer to a kind of action research. The information originated from the activities worked in the Didactics discipline were collected from the answers students offered to questionnaires and conceptual maps worked out by them, and was tidily arranged in tables and boards allowing interpretations about the conceptions of the students involved in this research. The obtained results, in a broad sense, were attained according to the purpose of the SDAVL, in which it was possible to observe the development in the scope of three privileges that were treated in each one of the four didactic sequences. Although it did not occur massively with the same intensity for the 32 students in the use of each text (nor in the sphere of the four texts themselves), there was advancement about the students' performance in their Mathematics ideas, Combinatory being the one which stood out if compared to the other three fields. The evidence pieces of this interpretative analysis that allude to development change situate both in the conceptual maps systematization beginnings and ends and in the answers to initial and final questionnaires, emphasizing in them the conference of meaning out of the inter-relation between the content and the cause of the action.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DOS CUADROS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN GENERAL

Las Matemáticas, así como la sociología, la astronomía, etc. forman parte del conocimiento producido por la humanidad, y, como tal, posee diversos registros históricos, muchos de los cuales permiten constatar que su constitución se llevó a cabo a partir de las relaciones que el hombre estableció con el mundo en la lucha por su supervivencia. Sin embargo, como en otras partes del conocimiento humano, no siempre se han conservado registros sobre todo, y, en ese sentido, por ejemplo, no se ha conseguido precisar si la Aritmética antecedió a la Geometría o fue la Geometría la que antecedió a la Aritmética.

Los registros históricos y/o cotidianos pueden contribuir en gran medida a hacer efectivos, con toda claridad, una determinada información que se desea comunicar. Por lo que se refiere a la contextualización acerca de la Geometría, podemos caracterizar que, en parte, su evolución se debe a la contemplación de la naturaleza por parte del hombre primitivo, que observó, sencillamente, las formas geométricas espaciales y planas. Esta consideración está respaldada en los trabajos de historiadores de las Matemáticas como Boyer (1996), quien refiere el sentimiento humano estético y placentero ante la belleza admirable de las formas como ejemplo de las relaciones que venimos mencionando, con estas palabras:

"*Podemos hacer conjeturas sobre lo que condujo a los hombres de la Edad de Piedra a contar, medir y dibujar. Es indudable que los comienzos de las Matemáticas son más antiguos que las más antiguas civilizaciones. Pretender ir más lejos e identificar categóricamente un origen determinado en el espacio y en el tiempo, sin embargo, sería confundir conjetura con historia"* (*op. cit.*, 1996, p. 5).

Queda claro, por tanto, que el hombre pasó a sentir la necesidad de convivir con determinadas nociones Matemáticas, esto es, siquiera ideas básicas, como números y formas geométricas. Caracterizar a partir de una tal necesidad su evolución y la estructuración de campos matemáticos en el ámbito de la conceptualización puede ayudar de un modo significativo a todo aquel se halle interesado por las Matemáticas, en el sentido de comprenderlas mucho mejor de lo que es habitual, esto es, si de lo que se trata es de profundizar más allá de la mera presentación de sus teoremas y teorías seguidas de la aplicación de ejercicios.

Por otro lado, a pesar de la incontestable diversidad de usos que el hombre ha desarrollado con relación al conocimiento matemático a lo largo de su existencia, no contamos con una visión unitaria que pueda responder inequívocamente a la pregunta: ¿qué son las Matemáticas? No obstante, como indican Vila y Callejo (2006), respuestas del tipo: "trabajar con números", "manipular estructuras" o resolver problemas, entre otras, apenas si revelan parcialmente un tipo de concepción acerca de esta ciencia o una forma de expresar una experiencia sobre ella, lo que no quita que, por otro lado, haya propiciado algunas formas aceptables para enfrentar y desarrollar actividades propias de las Matemáticas, haciendo uso y aplicando sus principios.

Ahora bien, como el objetivo real de la presente tesis doctoral, en términos de área específica, está centrado en las Matemáticas, en cuanto que disciplina, es oportuno ahora traer a colación una breve exégesis de su desarrollo a lo largo de la historia, mediante la caracterización y la perspectiva que le otorgaron algunas de sus figuras más ilustres, tal y como reflejan Vila y Callejo (*op. cit*. p. 42):

"*Aristóteles la describió como el estudio de la cantidad; R. Descartes como la ciencia del orden y de la medida; F. Klein la definió como la ciencia de las cosas que son evidentes por sí mismas; B. Russell la identificó con la lógica; D. Hilbert la describió como un juego formal sin significación; I. Lakatos como una actividad humana que encierra en sí misma una dialéctica de conjeturas, refutaciones y demostraciones, hasta llegar al establecimiento de la teoría o del resultado final; y G. Polya decía que la ciencia Matemática es saber/hacer antes que saber*".

En virtud de tales idealizaciones, es importante destacar que la perspectiva de I. Lakatos es la que parece más compatible con los propósitos educativos que se encuentran en los textos de apoyo que componen el Capítulo 4: Textos de Apoyo. En este momento, después de hacer hincapié en algunas argumentaciones que encierran cierta complejidad, se hace necesario indicar algunos otros aspectos también polémicos que deben ser considerados cuando se trata de la Didáctica, según se postula en Vergnaud, Holbwachs y Rouchier (1977, *apud* D'Amore, 2007, p. 31-32):

"*Es preciso descartar cualquier esquema reduccionista: la Didáctica no puede ser reducida al conocimiento de la disciplina, ni a la Psicología, ni a la Pedagogía, ni a la Historia, ni a la Epistemología. La Didáctica presupone todo eso, pero no puede reducirse tan sólo a eso; posee una identidad, plantea sus propios problemas, y sigue sus propios métodos. Y ésta es, en la actualidad, una cuestión aceptada por los investigadores que están comprometidos en esta línea de trabajo*".

Cabe resaltar que las investigaciones centradas en la Didáctica de las Ciencias, y, en particular, en la Didáctica de las Matemáticas, no deben restringirse a las contextualizaciones y al uso de recursos en sí, sino que deben ir más allá de las observaciones y de los análisis de los registros cotidianos de las aulas, toda vez que uno de los objetivos más importantes consiste en crear las condiciones que permitan al alumno la adquisición del saber; de donde se deduce la necesidad de que el profesor posea un amplio dominio de las actividades propuestas. Ello exige del docente cualidades que, para ser adquiridas, van más allá de una simple participación en la elaboración de sus actividades pedagógicas. Para alcanzar tales habilidades que le permitan analizarlas y/o crearlas, se necesita llevar a cabo un tipo de "esfuerzo epistemológico".

El discurso didáctico no debe confundirse con un factor de naturaleza inconsistente, con un simple juego de palabras relleno de ideas y teorías pedagógicas, sin relaciones consistentes entre sí, y, en la mayor parte de las veces, sin siquiera interrelación con el contenido y/o el área a la que se refiere. Hay quienes piensan que conocer el área, y, en concreto, un determinado asunto, es condición más que suficiente para saber exponerlo y explicarlo didácticamente de una forma adecuada. Paralelamente, no faltan quienes piensan que el estar pedagógicamente preparados, es algo que les cualifica para exponer didácticamente asuntos en las más diversas áreas. Estamos, por lo que parece, ante dos tipos de concepciones igualmente problemáticas.

Por un lado, podemos ejemplificar el primer tipo de concepción haciendo referencia a la respuesta dada por un matemático a una profesora de *Enseñanza Fundamental* (Enseñanza Primaria) acerca de un asunto relativo a una conceptualización. La profesora plantea la cuestión de la diferenciación entre circunferencia y círculo, distinción que aparece establecida en los libros de *Enseñanza Media* (Enseñanza Secundaria), mientras que en las guías curriculares se recomienda que tal distinción no se realice, argumentando que, tal vez, estamos ante un caso semejante al de los polígonos, en los que sucede algo semejante cuando se trata del perímetro y de su área.

La respuesta de Lima (1991) a la profesora Pozza, en síntesis, puede expresarse a partir de su experiencia personal, cuando en la *Enseñanza Fundamental* (Enseñanza Primaria) y en la *Enseñanza Media* (Enseñanza Secundaria) le enseñaron tal diferencia, pero que, cuando llegó a la universidad, y consultó libros más avanzados, tal diferencia prácticamente desapareció, pues la palabra círculo pasó a sustituir a circunferencia, y, como en el caso de los polígonos, se volvió ambigua. O sea, en una situación quiere decir curva y en otra, la región que está delimitada por esa curva.

A continuación, para intentar analizar tal ambigüedad, Lima (*op. cit.*, p. 157) recomienda la palabra *disco* para referirse a la región delimitada por una circunferencia, seguida del siguiente argumento:

"*[...] <u>Circunferencia</u> y disco son palabras de sentido bastante claro, cada una de las cuales con un único significado en lengua portuguesa. Por otro lado, <u>círculo</u> es una palabra que puede ser empleada tanto en el sentido de circunferencia como en el sentido de disco*".

En último término, recomienda aceptar que se debe acatar la terminología del libro o cambiar el libro, justificando a los alumnos que, por no tratarse de una nomenclatura universal, hay nombres que indican cosas diferentes.

La palabra, en el ámbito del lenguaje, en el contexto anterior, podría ser corroborada y contestada, por ejemplo, bajo la perspectiva de un mismo filósofo. El "primer Wittgenstein", en las proposiciones 116, 119 y 120, comienza indicando que los filósofos hacen uso de las palabras para aprender la esencia de las cosas, y, por eso, debemos estar atentos al hecho de si el uso de una determinada palabra es compatible con el lenguaje de que forma parte. A su lado, podemos destacar que la filosofía ha obtenido sus resultados gracias al descubrimiento de absurdos y equívocos detectados en los límites del lenguaje, cuando se está buscando su comprensión. Y, para complementar el enfoque que sobre la palabra se ofrece en esta primera concepción, podemos citar el siguiente fragmento, extraído del propio Wittgenstein (1996, p. 66):

"*Se dice que: no es la palabra lo que importa, sino su significación; y cuando se dice esto, se piensa en la significación como en algo de un género semejante a la palabra, si bien diferente de ella. Aquí, la palabra; aquí la significación. El dinero y la vaca que con él se puede comprar. (Pero, por otro lado: el dinero y su utilidad)*".

El "segundo Wittgenstein" edifica argumentos que, en cierto modo, difieren de la visión anterior que aquí hemos expuestos sobre el primer Wittgenstein. Se trata de la forma de la que se sirve para aclarar lo que él denominó "*experiencia de 'notar un aspecto*", explicando que las causas que provocan tales experiencias interesan a los psicólogos, mientras que para otros, como es el caso que nos ocupa, en virtud del interés de esta tesis, el objetivo se halla en el concepto y en su posición dentro de los conceptos de experiencias. En síntesis, con las cuatro citas (*ibid*) que hemos seleccionado a continuación pretendemos demostrar que la diversificación de la impresión adquirida acerca de una determinada figura se deriva tanto de la interpretación textual como de aspectos visuales de la propia figura.

"Lo que yo realmente veo, debe ser lo que se produce en mí por la acción del objeto'. *– Lo que se produce en mí es, entonces, una especie de copia, algo que se podría contemplar de nuevo, tener a la vista; casi como una materialización*" (*op. cit.,* p. 183).

"[...] Una clase de los aspectos podría denominarse como '*aspectos de la organización*'. *Si el aspecto cambia, partes de la figura, que anteriormente no formaban un conjunto, ahora pasan a formarlo*" (*op. cit.,* p. 189).

"*En el triángulo, en un momento se ve esto como vértice, aquello como base – en otro eso como vértice y aquello como base. – Está claro que para el alumno que comienza a tomar conocimiento de los conceptos de vértice, base etc., las palabras "veo esto ahora como vértice" aún no le dicen nada. Pero, no tengo eso en mente como frase de experiencia*" (*op. cit.,* p. 189-190).

"*Se diría que está en condición de establecer ciertos usos de la figura con familiaridad sólo aquel que ve ahora de este modo, y en otro momento de aquel otro modo*" (*op. cit.,* p. 190).

Luego, en virtud de la exposición filosófica presentada, teniendo en cuenta, además, que de igual modo hay ciertas restricciones al tratar las Matemáticas como ciencia, como cuando se tratan como tipo de lenguaje, desde la perspectiva didáctica la respuesta dada por Lima (1991) a la profesora Pozza necesita ser sensiblemente reformulada.

Por el momento, después de haber caracterizado la didáctica en cuanto que campo de estudio, es importante también destacar en qué parte se halla el centro de interés de este estudio dentro de ese campo. Y citando a D'Amore (2007) podemos encontrar una descripción general a título de primera aproximación de lo que hoy se entiende por investigación en Didáctica de las Matemáticas, según las dos hipótesis que reproducimos a continuación y que representan una doble forma de concebir la Didáctica de las Matemáticas:

"***A****: como divulgación de las ideas, fijando la atención en el ámbito de la enseñanza (**A** de **Ars**, en referencia a su traducción latina)*" (*op. cit*., p. 37).

"***B****: como investigación empírica, fijando la atención en el ámbito del aprendizaje (algo que más adelante definiremos mejor y a lo que podríamos denominar:* ***epistemología del aprendizaje de las Matemáticas****)*" (*ibid*).

La referida descripción, así como el presente trabajo, se insertan dentro de una perspectiva teórica que propone el desarrollo de un área de conocimiento relativamente

autónoma en el campo de las Didácticas Específicas, y que pasó a denominarse Didáctica de las Matemáticas. Su origen parte de la actividad desarrollada básicamente por matemáticos, en los institutos de investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM), creados en Francia inmediatamente después de la Reforma Educativa de finales de los años 60.

El IREM comienza con la formación Matemática complementaria de los profesores, atendiendo a su cualificación, entre aquellos que ya están en servicio, y también se dedica a los programas y a la preparación de nuevos profesores que trabajan en escuelas de enseñanza primaria. En términos de otras actividades prácticas, trató de la producción Matemática en diversas formas de recursos didácticos y producción de materiales, preliminarmente testados antes de ser utilizados didácticamente.

Uno de los investigadores que contribuy**ó** en gran medida en la promoción y desarrollo de este proyecto fue el profesor e investigador de Burdeos, Guy Brousseau. Él propuso el estudio de las condiciones en virtud de las cuales los conocimientos se constituyen, cuando, a partir del control de ellas se hace posible la reproducción y la mejora de los procesos adoptados para la adquisición del conocimiento escolar. Cierto control del fenómeno educativo con unas características tales, en su complejidad, pasa a ser teorizado como *Teoría de las Situaciones* por Brousseau (1986), y se incluye como objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas. Para él, el momento fundamental de la investigación en didáctica se constituye en el análisis a priori de la situación. De donde, la tarea del investigador, en didáctica, no es otra que la de prever los efectos de la situación por él mismo elaborada antes de hacer uso de ella en el aula.

Cabe indicar que hay una gran variedad de objetos y/o fenómenos que han sido calificados como innovaciones didácticas. En el ámbito educativo en general, se ha venido denominando a casi todo este tipo de alteraciones de las normas en voga como *innovación*, incluso si estas prácticas apenas se redujeron a una única apreciación, sin más apoyo que el prestigio social otorgado a su autor. No obstante, un término así, según Chevallard (1992), en el acto procesal de la actividad humana en la socialización de adquisiciones científicas y técnicas, puede ocasionar serios problemas. La causa de esta situación, en el medio educativo, la achaca a la no-existencia de factores internos que posibiliten reconstruir, aun cuando sea de una forma simple, sucesiones cronológicas de hechos, lo que significa una falta de tradición en la organización estructural y científica de los problemas.

Por lo tanto, como ya hemos señalado, la finalidad de la Didáctica de las Matemáticas radica en el conocimiento de los fenómenos y procesos relativos a la enseñanza de las Matemáticas con la finalidad de controlarlos, y, mediante ese control, perfeccionar el aprendizaje de los alumnos. No se postula, de forma alguna, promover a priori un determinado tipo de pedagogía, por cuestiones ideológicas, sin el aval de los resultados experimentales correspondientes. No obstante, las situaciones didácticas proyectadas y sometidas a experimentación obedecen a determinadas características en función de los presupuestos epistemológicos que identifican su producción. Para contemplar la complejidad de las finalidades didácticas, no debemos dejar de lado el postulado de que cualquier idealización humana está inmersa en un contexto sociocultural.

Considerando, pues, el intento de control didáctico con el fin de analizar el postulado anterior, entendiendo, además, que el conocimiento puede concebirse como una producción elaborada socialmente, surge la necesidad de elaborar una posible forma de analizar esta línea de trabajo. Por ello, se optó por profundizar en los significados que pueden ser construidos por parte de los alumnos tomando como base la atribución de sentidos emergentes de las acciones pedagógicas con la utilización de *actividades didácticas*, buscando amenizar la falta de tradición en la organización estructural y científica de los problemas ya considerados anteriormente por Chevallard (*op. cit.*). Y tanto para ayudar en la organización de los propósitos educativos como en la caracterización del tipo de conocimiento construido a partir de una actividad didáctica elaborada, se recurrió a la *Teoría de la Actividad* de Leontiev (1978a). En concreto, para ampliar la concepción de la doble función del lenguaje (comunicativa y medio del pensamiento) de Vygotsky como unidad de análisis, con el fin de establecer la relación entre la estructura de la actividad humana y la estructura de la conciencia humana.

Por otro lado, una vez contemplados con sus correspondientes idealizaciones, los postulados de Leontiev (*ibid*), para organizar tales actividades didácticas, aún se precisaba vencer las dificultades derivadas de lidiar con la conceptualización y/o adquisición adecuada de los objetos matemáticos. Para delimitar estas dificultades, se optó por adoptar la *Teoría de los Campos Conceptuales* de Vergnaud (1990a), si bien, en lugar de considerarla como una tríada $C = (S, I, R)$, según la propuesta original, donde S representa el Referente, I, el Significado, y R, el Significante, se intentó trabajar con las partes de C, con el propósito de corroborar tanto la elaboración de las actividades, como la obtención de los resultados derivados de su empleo.

De esta forma, didácticamente hablando, la referida integración se materializa mediante lo que vinimos a denominar en esta tesis como Actividades Didácticas: Ausubel, Vergnaud y Leontiev - *ADAVL*[1], que incorporan en sí mismas, inspiraciones profundas de la 'Teoría de la Actividad' de Leontiev y de la 'Teoría de los Campos Conceptuales' de Vergnaud (*ibid*), ambas comentadas anteriormente. Sin embargo, las sistematizaciones de tales idealizaciones se consolidan en el ámbito de la 'Teoría del Aprendizaje Significativo' de Ausubel (1978), en tanto que propósito para la adquisición de una nueva información y/o evolución cognitiva, profundizando de modo especial en la idea de *Organizador Previo*.

Las ADAVL se sistematizaron en forma de texto de apoyo, con la intención de que el mismo, en la esfera de la teoría ausubeliana, pudiera llegar a ser calificado como *Material Potencialmente Significativo*, cuya finalidad es la de servir como *Organizador Previo*. En el presente estudio se produjeron cuatro textos de apoyo con el fin de cumplir tales propósitos, así como para auxiliar a los profesores de la *Enseñanza Fundamental* y de la *Enseñanza Media* en la formación de una base conceptual general Matemática para resolver los problemas que la enseñanza de las Matemáticas plantea en esos niveles. En estos textos se busca hacer alusión conceptualmente y con la suficiente claridad a las bases Matemáticas que se hallan en el ámbito de los campos de la Combinatoria, el Álgebra, la Lógica Matemática y la Geometría Clásica.

La investigación, en síntesis, consta de dos partes. La primera se refiere a la elaboración de cada uno de los cuatro textos de apoyo, considerando el proceso de regulación de los mismos desde sus formas iniciales hasta la final. La segunda, por su parte, se dedica a investigar si tales materiales producidos podrían o no ser calificados como *Materiales Potencialmente Significativos*, según los propósitos educativos y las intenciones didácticas delineadas en cada uno de los cuatro textos utilizados.

La disertación de esta tesis fue organizada en siete capítulos. El primero de ellos, la Introducción General, trata de presentar, de forma abarcadora, las ideas que delinean el trabajo concebido como un todo.

[1] La denominación se deriva de la tesis de incidir en la producción y utilización de actividades con propósitos didácticos, y AVL corresponde a las iniciales de los nombres de los tres teóricos Ausubel, Vergnaud y Leontiev; por eso, dicha organización, en cuanto que Investigación en Didáctica de las Matemáticas fue rotulada como **Actividades Didácticas: Ausubel, Vergnaud y Leontiev** (**ADAVL**).

Ante la dificultad de trabajar con la comprensión y/o conceptualización de los objetos matemáticos, el Capítulo 2, Marco Teórico, tiene como meta puntualizar las ideas fundamentales de las teorías de Ausubel, Leontiev y Vergnaud, procurando destacar aquellas que más contribuyeron a favor de la elaboración de las llamadas ADAVL.

El Capítulo 3, Metodología General tiene como propósito caracterizar el Marco Metodológico, el Marco Didáctico y los Propósitos Intrínsecos a las enseñanzas propuestas así como los Instrumentos construidos para evaluar las enseñanzas propuestas.

El Capítulo 4, Textos de Apoyo, contiene los materiales producidos en este estudio conforme fue establecido en la parte de la fundamentación teórica presentada en el Capítulo 2 y en las bases metodológicas del Capítulo 3, lo que hizo posible la producción de cuatro textos de apoyo, ya referidos en esta misma introducción, que pretenden establecer la organización de una formación básica en Matemáticas para profesores de la *Enseñanza Fundamental* y *Enseñanza Media*.

Los textos de apoyo presentados en el mencionado Capítulo 4, tienen en cuenta los propósitos educativos delineados en cada uno de ellos, tras haber sido utilizados en la disciplina de Didáctica de las Matemáticas en un Curso de Especialización en Enseñanza de las Matemáticas y fueron objeto de una cuidadosa apreciación a lo largo del Capítulo 5, titulado: Análisis y Discusión de los Resultados.

Por su parte, en el último de los capítulos, el sexto, Consideraciones Conclusivas: Específicas y Generales, se buscó llevar a cabo una selección de aquellos aspectos considerados como relevantes después de haber efectuado un análisis identificativo, tanto durante el tiempo dedicado a la construcción de los cuatro textos de apoyo, como durante la intervención y el análisis de los resultados.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo presentaremos una visión global sobre la teoría que fundamenta la presente tesis, exponiendo también algunas ideas correspondientes a las teorías de los campos conceptuales y del psiquismo, con el propósito de fundamentar mediante tales presupuestos teóricos los aspectos educativos construidos en los textos de apoyo con la finalidad de posibilitar una enseñanza que propicie un aprendizaje significativo de las Matemáticas en la enseñanza primaria.

En un principio necesitamos partir del hecho de que las leyes provienen de hipótesis (respuesta provisional cuya finalidad es la de ayudar a comprender un determinado hecho, sin ocuparse de su demostración) y se derivan de testes experimentales, que encierran el propósito de describir relaciones o regularidades de fenómenos. A continuación, concebimos la idea de **teoría** como algo que emerge de integraciones coherentes provenientes de la reunión de leyes, hipótesis, conceptos. En palabras de Abbagnano (1977, p. 190):

"[...] Una teoría no es necesariamente una explicación del dominio de los hechos a los que se refiere, pero constituye un instrumento de clasificación y de previsión. Ya Duhem observaba: ***una T. verdadera no es la que da una explicación de las apariencias físicas conforme con la realidad, sino que es más bien una T. que representa de modo satisfactorio un conjunto de leyes experimentales***".

Por **definición**, entiende:

"*[...] Cualquier respuesta a la pregunta: ¿qué es? puede ser tomada como definición. Desde este punto de vista, el concepto moderno, según el cual* ***definición*** *es la declaración del significado de un termino, o sea, del uso que del término se puede hacer en un determinado campo de investigación, […]*" (*ibid.*, p. 289).

En función de lo anteriormente expuesto, para mejorar la idealización sobre el concepto de teoría, y en particular, sobre la teoría del aprendizaje, objeto de interés de este capítulo, Moreira (1999, p. 12), de forma concisa, define que**:**

"*Una teoría es, entonces, una construcción humana para interpretar sistemáticamente el área de conocimiento que llamamos aprendizaje. Representa el punto de vista de un autor/investigador acerca de cómo interpretar el tema del aprendizaje, cuáles son las variables independientes, dependientes e intervinientes. Intenta explicar lo que es aprendizaje y por qué funciona como funciona*".

2.1 Teorías en las que se fundamente la Tesis

El objeto de interés de este punto consiste en presentar brevemente algunos aspectos característicos y determinadas ideas que permitan entender como se dispusieron en las formulaciones de las teorías de Ausubel (1963), Leontiev (1978a) y Vergnaud (1983). Y, además, a la vista de sus aplicabilidades diversas ya conocidas, se persigue delimitar de qué modo estos aspectos teóricos pueden ser barajados para confeccionar la presente tesis.

2.1.1 Alusión a la Teoría del Aprendizaje Significativo

La adquisición de significados fue y continúa siendo objeto de interés de numerosos teóricos y/o estudiosos preocupados por comprender cómo se produce la personificación de una nueva información por parte de quienes aprenden; dicho con otras palabras: estamos refiriéndonos a la adquisición de nuevos significados. Y como quiera que el objeto de interés de este estudio se encuentra más enfocado hacia la interpretación de fenómenos inherentes al conocimiento humano, y en concreto, en los referidos al campo del aprendizaje, entre todas las posibles teorías, fue adoptada la Teoría del Aprendizaje Significativo (TAS) de David Ausubel (1978).

En términos generales, la teoría aludida puede resumirse en pocas palabras, según el propio Ausubel (2002, p. 9), del siguiente modo:

"*El conocimiento es significativo por definición. Es el producto significativo de un proceso psicológico cognitivo (‹‹conocer››) que supone la interacción entre unas ideas ‹‹lógicamente›› (culturalmente) significativas, unas ideas de fondo (‹‹de anclaje››) pertinentes en la estructura cognitiva (o en la estructura del conocimiento) de la persona concreta que aprende y la ‹‹actitud›› mental de esta persona en relación con el aprendizaje significativo o la adquisición y la retención de conocimientos*".

En el ámbito del aprendizaje significativo, emerge una idea fundamental, que podemos percibir con claridad en el proceso de interacción entre lo que el aprendiz ya conoce y la nueva información a la que está siendo presentado; se trata del *concepto subsumidor*, o como aparece más difundido *subsunsor*. Tal idea puede ser entendida como 'algo específico relevante (concepto, idea, proposición) ya existente en la estructura cognitiva del aprendiz que sirve de "anclaje" para la nueva información'. A partir de tal idealización, Moreira (2006, p. 15) puntualiza que:

"*[...] El aprendizaje significativo se produce cuando la nueva información "se ancla" en conceptos relevantes (subsumidores) preexistentes en la estructura cognitiva*".

Diferenciación Progresiva, Reconciliación Integradora, Organización Secuencial y Consolidada.

Las ideas de diferenciación progresiva, reconciliación integradora y organización secuencial son ideas importantes en la consolidación de la TAS, y constituyen principios relativos a la programación eficiente de los contenidos, como indica Moreira (1999, p. 160). Los dos primeros principios, en un sentido instructivo, pueden ser concebidos del siguiente modo:

"*La diferenciación progresiva se concibe como un principio programático de la materia de enseñanza, en virtud del cual las ideas, conceptos y proposiciones más generales e inclusivos del contenido deben ser presentados desde el comienzo de la instrucción, para, progresivamente, ser diferenciados en términos de detalle y especificidad*" (*op. cit.,* p. 160).

"*La reconciliación integrativa, por su parte, es el principio según el cual la instrucción debe también ocuparse de las relaciones entre las ideas, establecer semejanzas y diferencias fundamentales, así como reconciliar discrepancias reales o aparentes*" (*op. cit.*, p. 161).

Cabe indicar, que en los apartados siguientes, dichas ideas, en función del desarrollo del presente capítulo, aparecerán representadas de un modo más explícito, lo que permitirá una mejor comprensión. Por otro lado, Moreira y Buchweitz (1993), basándose en el propio Ausubel, ya señalaron que los dos principios programáticos anteriormente mencionados pueden implementarse tanto con el uso de organizadores previos adecuados como mediante el uso de los llamados *Mapas Conceptuales*.

Por el momento, cabe preguntarse de qué modo estos principios se encuentran implicados en la TAS. Para responder a esta cuestión, se puede recurrir a la idea de presentar el aprendizaje significativo fundamentado en la recepción, a modo de proceso activo, toda vez que exige como mínimo los tres aspectos siguientes, según recoge Ausubel (2002, p. 32):

"*1) El tipo de análisis cognitivo necesario para determinar qué aspectos de la estructura cognitiva ya existente son más pertinentes al nuevo material potencialmente significativo; 2) Algún grado de conciliación con ideas ya existentes en la estructura cognitiva, es decir, percibir similitudes y diferencias y resolver contradicciones aparentes o reales, entre conceptos y proposiciones nuevos ya establecidos; y 3) La reformulación del material de aprendizaje en función del vocabulario y del fondo intelectual idiosincrásico de la persona concreta que aprende*".

Teniendo en cuenta la naturaleza del aprendizaje presentada más arriba, para que llegue efectivamente a producirse, se presenta el hecho de su dependencia con un tipo de enseñanza expositiva que haga posible el reconocimiento de los principios de la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora en los materiales utilizados, con la intención de alcanzar, más allá de un aprendizaje de nombre similar, la retención y la organización de las informaciones presentadas en la estructura cognitiva del alumno. Con ello, queda perfectamente clara la caracterización de los dos principios de interés que por el momento suscita la TAS, esto es, la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora. Dichos principios aparecen delimitados por Ausubel (*op. cit.*, p. 32-33) del siguiente modo:

"*El primer principio reconoce que la mayor parte del aprendizaje y toda la retención y la organización de la materia es de naturaleza jerárquica, yendo de arriba abajo en función de los niveles de abstracción, generalidad e inclusividad. La conciliación integradora se facilita en la enseñanza expositiva siempre que aquel que enseña y/o los materiales de instrucción prevean y neutralicen explícitamente las similitudes y las diferencias confundibles entre las ideas nuevas y las ideas pertinentes* *y establecidas ya existentes que están presentes en la estructuras cognitiva de los alumnos*".

Además de las ideas que hemos presentado hasta ahora, hay otra aún más importante, a la que se conoce por el nombre de subsunsor. Y aunque no presentemos aún las formas de aprendizaje que son consideradas en la TAS, lo que ayudaría bastante en la comprensión de esta idea, diremos, a modo de síntesis, que se refiere a la forma en la que la nueva y potencialmente significativa información se ancla en las ideas de carácter más general e inclusivo ya existentes en la estructura cognitiva del alumno.

En este sentido, e intentando aclarar cómo las ideas subsumidas se convierten en ideas subsumidoras, citando al ya mencionado Ausubel (*op. cit.*, p. 155), encontramos que:

"[…] Puesto que la propia estructura cognitiva tiende a estar organizada de una manera jerárquica en relación con el nivel de abstracción, la generalidad y la inclusividad de las ideas, lo más normal es que la aparición de ***nuevos significados*** *proposicionales refleje una relación* ***subordinada*** *del nuevo material con ideas de orden superior ya existentes en la estructura cognitiva.*

A su vez, este resultado produce una mayor organización jerárquica de la estructura cognitiva cuando las propias ideas subsumidas se convierten en subsumidoras [...]".

Por último, subyacen a la idea de asimilación que será presentada de forma más completa en el ítem siguiente, algunos aspectos interesantes acerca de la adquisición de significados nuevos y su retención oriunda del ámbito del aprendizaje de conceptos y proposiciones, como, por ejemplo:

"*Cuando se aprenden conceptos o proposiciones mediante procesos subsumidores de orden superior o combinatorios nuevos y consecutivos, se pueden desarrollar significados nuevos y diferentes; y es posible que los significados contradictorios se puedan resolver mediante un proceso de* ***conciliación integradora****. Con el tiempo, a medida que el proceso de asimilación sigue operando, los significados de los conceptos o proposiciones que lo componen ya no se pueden disociar (recuperar) de sus ideas de anclaje y entonces decimos que se ha producido una asimilación* ***obliteradora*** *o un olvido significativo: la asimilación relativamente completa de la especificidad del nuevo significado hace que ya no se pueda disociar (recuperar) de la generalidad de la idea de anclaje, más inclusiva de la estructura cognitiva (a causa de la subsunción obliteradora), y, en consecuencia, se considera que se olvida*" (*op. cit.*, p. 171).

Aprendizaje Significativo

En este momento, después de haber realizado en el apartado anterior la presentación de algunas ideas básicas que fundamentan la TAS, es posible adentrarse un poco más en el aprendizaje significativo, acrecentándolas, tanto con otras nuevas ideas como construyendo con ellas ciertas estructuras que ayudan a comprender mejor el encadenamiento de los propósitos de esa teoría.

Nada más comenzar, incluso antes de hablar en profundidad sobre el aprendizaje significativo, es importante caracterizar un tipo de aprendizaje que se diferencia claramente de él y que, como afirma el propio Ausubel (2002, p. 29):

"*Naturalmente, las tareas de aprendizaje memorístico no se dominan en un vacío cognitivo. Se* ***pueden*** *relacionar con la estructura cognitiva, pero* ***sólo*** *de una manera arbitraria y literal que no produce la adquisición de algún significado*".

No obstante, añade Ausubel (*op. cit.*), por más que la estructura cognitiva, a diferencia de un ordenador, no consiga trabajar con un número excesivamente elevado de informaciones relacionándolas de la forma anteriormente explicada, o incluso cuando lo hace, generalmente, lo hace de forma muy breve y con una retención muy reducida, resulta importante destacar que:

"*Tanto en el aprendizaje memorístico como en el aprendizaje significativo, la misma reproducción del material retenido también está influida por factores como el sesgo cultural o actitudinal y por las demandas circunstanciales específicas del propio contexto de reproducción*" (*op. cit.,* p. 30).

En virtud de estas informaciones, y, al mismo tiempo, sin dejar de aceptar como una posibilidad aclararlas un poco más, se revela como ciertamente importante comentar lo que se entiende por relaciones no arbitrarias y no literales, en tanto que capacidad de relación, en el ámbito de la TAS. En este sentido, para Ausubel (*op. cit.*, p. 127):

"*[…]* ***La capacidad de relación no arbitraria*** *- sólo indica que si el* ***propio*** *material es suficientemente no arbitrario (o no aleatorio), ya existe una base adecuada y casi evidente para relacionarlo de una manera no arbitraria con los tipos de ideas correspondientes pertinentes de la estructura cognitiva que los seres humanos en general, o por lo menos algunos seres humanos, son capaces de aprender*".

"*[…]* ***La capacidad de relación no literal*** *- indica que la tarea de aprendizaje nuevo es suficientemente no arbitraria, y que se podrían relacionar un símbolo o grupo de símbolos ideacionalmente equivalentes (sinónimos) con la estructura cognitiva del estudiante sin cambiar el significado de ninguna manera importante*".

El aprendizaje significativo, en lo que se refiere a la forma, puede caracterizarse mediante una de las tres formas siguientes: la *representacional*, la relativa a los *conceptos*, y, por último la *proposicional*. Tales formas, según Ausubel (*op. cit.*), se definen, respectivamente, así:

"*El aprendizaje* ***representacional*** *(como nombrar) es el más parecido al aprendizaje memorístico. Se produce cuando el significado de unos símbolos arbitrarios se equipara con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y muestran para el estudiante cualquier significado que expresen sus referentes*" (*op. cit.,* p. 26).

"*Existen dos métodos generales para aprender conceptos: 1) la formación de conceptos, que se da principalmente en los niños pequeños; y 2) la asimilación de* *conceptos, que es la forma predominante del aprendizaje de conceptos en los escolares y adultos. En la formación de conceptos, los atributos característicos del concepto se adquieren por medio de la experiencia directa, es decir, mediante etapas sucesivas de generación de hipótesis, comprobación y generalización. Sin embargo, a medida que el vocabulario del niño aumenta, los conceptos nuevos se adquieren principalmente mediante el proceso de asimilación de conceptos, puesto que los atributos característicos de los nuevos conceptos se pueden definir mediante el uso, en nuevas combinaciones, de referentes ya existentes disponibles en la estructura cognitiva del niño*" (*ibid*).

"*Sin embargo, en este caso, la tarea de aprendizaje, o la proposición potencialmente significativa, consta de una idea compuesta que se expresa verbalmente en una expresión que contiene tanto significados de palabras de carácter denotativo y connotativo como las funciones sintácticas de las palabras y las relaciones entre ellas*" (*op. cit.*, p. 28).

Con la intención de contemplar la esencia de los procesos de adquisición de significado, y principalmente, con respecto a la última de las formas de aprendizaje significativo mencionadas anteriormente, podemos añadir que dichos aprendizajes se fundamentan en la adquisición y en la retención de conocimientos, en especial, los verbales cuyo origen se encuentra en un proceso activo, integrador e interactivo. Y que, a su vez, se derivan de las relaciones particulares entre las ideas nuevas que están presentes en el material de instrucción y las ideas preexistentes en la estructura cognitiva del alumno.

El Aprendizaje Significativo Proposicional, por su parte, puede presentarse, según Ausubel (*op. cit.*), en función de las tres formas siguientes: Aprendizaje Subordinado (subsumidor), Aprendizaje de Orden Superior (Supraordenado) y Aprendizaje Combinatorio. Y estas formas son definidas por él del siguiente modo (*ibid*, p. 28):

"*El aprendizaje subsumidor se produce cuando una proposición ‹‹lógicamente›› significativa de una disciplina particular (plausible, pero no necesariamente válida desde un punto de vista lógico o empírico en sentido filosófico) se relaciona significativamente con unas proposiciones específicas de orden superior en la estructura cognitiva del estudiante. Este aprendizaje se puede llamar* ***derivado*** *si el material de aprendizaje simplemente ejemplifica o apoya una idea que ya existe en la estructura cognitiva. Se llama* ***correlativo*** *si es una extensión, una elaboración, una modificación o una matización de proposiciones previamente aprendidas*" (*ibid*).

"*El aprendizaje proposicional de orden superior se produce cuando una proposición nueva se puede enlazar, bien con unas ideas subordinadas especificas de la estructura cognitiva ya existente, bien con un amplio fondo de ideas pertinentes en general de la estructura cognitiva que se pueden subsumir en ella*" (*ibid*).

"*Por último, el aprendizaje proposicional combinatorio se refiere a los casos en los que una proposición potencialmente significativa no es enlazable con unas ideas específicas subordinadas o de orden superior en la estructura cognitiva del estudiante pero si lo es con una combinación de contenidos pertinentes en general, y también* *menos pertinentes, de esa estructura. Evidentemente, la mayor parte del aprendizaje proposicional es subsumidor o combinatorio*" (*ibid*).

Asimilación

En función de las ideas expuestas hasta el momento, parece intuirse que aún se necesita algún dato adicional que propicie una más clara comprensión del concepto que venimos denominando como aprendizaje significativo, en particular, en lo que se refiere a la adquisición, la retención y la organización de significados en la estructura cognitiva. Para ello, en la TAS, se optó por profundizar más en el principio denominado **asimilación**.

El punto de partida según Ausubel (*op. cit.*) consiste en admitir como centro de la teoría de la asimilación la idea de que la adquisición de significados nuevos constituye un hecho que puede surgir a partir de la interacción entre ideas nuevas y potencialmente significativas y conceptos y proposiciones que ya habían sido aprendidos en momentos anteriores. Y, además, debemos entender también la asimilación como proceso, y, en este sentido, en palabras del citado teórico:

"*Este proceso interactivo produce como resultado una modificación tanto del significado potencial de la nueva información como del significado de los conceptos o proposiciones a los que se ancla, y también crea un nuevo producto ideacional que constituye un nuevo significado para el estudiante. El proceso de asimilación secuencial de nuevos significados a partir de exposiciones sucesivas a nuevos materiales potencialmente significativos, da como resultado una* ***diferenciación progresiva*** *de los conceptos o proposiciones, el consiguiente refinamiento de los significados y una mayor potencialidad para ofrecer anclaje a otros aprendizajes significativos*" (*op. cit.,* p. 171).

Como consecuencia de ello, el aprendizaje de nuevos y consecutivos conceptos y/o proposiciones en las formas de subsumidores, de órdenes superiores y Combinatorias ya comentadas en el apartado anterior, además de promover el desarrollo de nuevos significados, puede resolver los significados contradictorios a través del proceso de reconciliación integradora.

Por lo que se refiere a la organización de las informaciones en la estructura cognitiva del alumno, la asimilación puede desempeñar un importante papel, pues como muy bien señala Ausubel (*op. cit.*, p. 173):

"*Si las ideas nuevas se* ***almacenan*** *mediante relaciones enlazadas con las correspondientes ideas pertinentes ya existentes en la estructura cognitiva (y si también se cumple que uno de los miembros de este par enlazado es típicamente de orden superior o más inclusivo que el otro y que el miembro de orden superior [por lo menos, una vez establecido] es el miembro más estable del par), entonces se sigue necesariamente que el residuo acumulativo de lo que se aprende, se retiene y se olvida (la estructura psicológica del conocimiento o la estructura cognitiva en su conjunto) se ajusta al principio organizativo de la diferenciación progresiva*".

A su vez, durante el proceso de asimilación, o lo que es lo mismo, durante el establecimiento del anclaje, se pueden dar condiciones generales que favorezcan la retención. En un intento de ofrecer una mejor comprensión de este fenómeno, debemos tener en cuenta que para mantener disponibles los significados que acaban de asimilarse, los significados retenidos temporalmente, en todo y/o en parte, durante un espacio de tiempo variable, pueden haberse disociado de las ideas de anclaje, o sea, existe la posibilidad de reconocerlos en su forma inicial. En otras palabras:

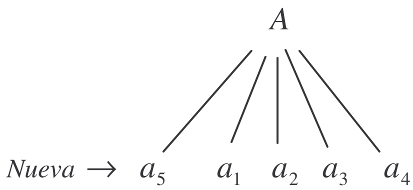
"*Al principio, el significado* a' *que se acaba de aprender y asimilar es disociable de su relación enlazada con la idea de anclaje* A'*; en otras palabras, el producto interactivo* $A'a'$ *se pude disociar en* A' *y* a'*. La experiencia universal indica que el grado o la fuerza de disociabilidad llega al punto máximo poco después del aprendizaje y que, en consecuencia, los significados recientemente adquiridos se pueden disociar al máximo en ese momento, incluso en ausencia de una práctica (revisión) directa o indirecta*" (*ibid*).

Precisamente por ello, resulta especialmente relevante explicitar de una forma más clara una idea global sistematizada de los tipos de aprendizajes significativos teniendo en cuenta el concepto de asimilación. A ello se refiere Ausubel (*op. cit.*, p. 177) en los siguientes términos:

TABLA 2. Formas de aprendizaje significativo desde la perspectiva de la teoría de la asimilación.

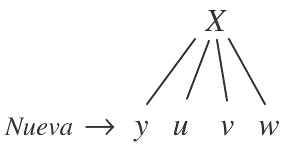
1. Aprendizaje subordinado: *Idea establecida*

A. Subsunción derivada



En la subsunción derivada, la nueva información a_5 *se enlaza con la idea de orden superior* A *y representa otro caso o extensión de* A*. Los atributos característicos del concepto* A *no cambian, pero los nuevos ejemplos se reconocen como pertinentes.*

B. Subsunción derivada *Idea establecida*



En la subsunción correlativa, la nueva información y *se enlaza con la idea* X*, pero es una extensión, modificación o matización de* X*. Los atributos característicos del concepto subsumidor se pueden expandir o modificar con la nueva subsunción correlativa.*

2. Aprendizaje de orden superior:

Nueva idea $A \rightarrow A$

Ideas establecidas $a_1 \quad a_2 \quad a_3$

En el aprendizaje de orden superior, las ideas establecidas a_1, a_2 y a_3 se reconocen como ejemplos más específicos de la nueva idea A y se acaban enlazando con A. La idea de orden superior A se define por un nuevo conjunto de atributos característicos que comprenden las ideas subordinadas.

3. Aprendizaje combinatorio:

Nueva idea $A \rightarrow B$ - C - D

Ideas establecidas

En la aprendizaje combinatorio se considera que la nueva idea A está relacionada con las ideas ya existentes B, C y D, pero sin ser más inclusiva ni más específica que ellas. En este caso, se considera que la nueva idea A tiene algunos atributos característicos en común con las ideas ya existentes.

4. La teoría de la asimilación:

*La nueva información se enlaza con aspectos **pertinentes** y **ya existentes** de la estructura cognitiva y tanto la información que acaba de adquirirse como la estructura preexistente se modifican durante el proceso. Todas las formas anteriores de aprendizaje son ejemplos de asimilación. La mayor parte del aprendizaje significativo es, en esencia, asimilación de nueva información.*

Material Potencialmente Significativo

En el ámbito del *aprendizaje significativo,* Ausubel (2002) defiende que en la esfera de la recepción, la adquisición de conocimiento se deriva tanto de la actitud de aprendizaje del alumno como del material de aprendizaje utilizado, de donde se sigue que son éstas las dos condiciones que él establece para que se produzca tal tipo de aprendizaje.

El foco de interés del presente trabajo está más centrado en el ámbito del material, y, por ello, las dos importantes suposiciones que sobre él se vierten merecen ser enfatizadas a través de las palabras del propio Ausubel (*op. cit.*, p. 25). Se precisa:

*"1) Que el propio material de aprendizaje se pueda relacionar de una manera **no arbitraria** (plausible, razonable y no aleatoria) y **no literal con cualquier** estructura cognitiva apropiada y pertinente (esto es, que posea un significado ‹‹ lógico ››)";*

*"2) Que la estructura cognitiva de la persona **concreta** que aprende **contenga** ideas de anclaje pertinentes con las que el nuevo material se pueda relacionar".*

Junto a ello, debemos aclarar, como hace Ausubel, que el objetivo que se pretende alcanzar con el material es que éste se revele en todo momento como potencialmente significativo, por más que el aprendizaje producido no pueda ser entendido necesariamente como un sinónimo del aprendizaje significativo, incluso en aquellos casos en que el material posea en sí mismo componentes de naturaleza significativa y las partes constituyentes de la tarea de aprendizaje o su conjunto sean "lógicamente" significativos. Por lo tanto, aunque se haga uso de un material *lógicamente significativo* (naturaleza del material), se puede dar la posibilidad de que el aprendizaje que se obtenga sea de tipo memorístico, para lo cual, apenas es suficiente que el aprendiz no manifieste una *actitud de aprendizaje significativo* (predisposición para aprender).

Con la intención de adentrarnos un poco más en las ideas presentadas anteriormente sobre el material, podemos hacer mención aún de otro aspecto importante:

"*Como es evidente, en la mayoría de las tareas de aprendizaje potencialmente significativas, **las partes que componen** (las palabras) el material ya son significativas; pero, en estos casos, la **tarea de aprendizaje en su conjunto** (la proposición) sólo es **potencialmente** significativa. Por ejemplo, cuando se aprende un nuevo teorema geométrico, cada una de las palabras que lo componen ya es significativa, pero la tarea de aprendizaje **en su conjunto** (aprender el significado del teorema) aún se debe dominar*" (*op. cit.*, p. 132).

Organizadores Previos

La exposición que venimos estableciendo hasta ahora sobre el aprendizaje significativo deja traslucir el hecho de que para conseguir alcanzarlo es preciso trabajar adecuadamente en los tres elementos indisociables (el contenido, el profesor y el alumno) que aparecen en cualquier acto educativo y, en especial, en las relaciones que se producen entre estos tres elementos. No obstante, todos los que ya han experimentado, de una u otra forma, la tarea de enseñar, perciben de inmediato la importancia que tiene el uso de materiales diversos, junto con las diversas aplicaciones que tales materiales puedan desarrollar, en especial, si tenemos en cuenta la finalidad de facilitar el intercambio de informaciones acerca del contenido presentado, a la hora de ayudar a profesores y alumnos en el desempeño de sus respectivas tareas pedagógicas.

Tales materiales reciben habitualmente el nombre de materiales pedagógicos, materiales educativos, etc., y, por su parte, de una forma genérica, sus funciones educativas, les atribuyen la denominación de recursos pedagógicos, recursos didácticos, u otros parecidos. Los organizadores previos tienen el propósito de servir de instrumento de unión, buscando acortar la distancia que se pueda producir, en el ámbito de la articulación, entre lo que el aprendiz ya sabe y las nuevas informaciones a las que se pretende que acceda, una vez que se haya producido el proceso de enseñanza de forma activa y eficaz. Por lo tanto, forman parte de lo que denominamos anteriormente como recurso pedagógico.

Para que podamos comprender con claridad lo que aquí debemos entender por eficaz, resulta interesante traer a colación las palabras del propio Ausubel (2002, p. 41):

"*Para que funcionen con eficacia en una diversidad de personas, cada una de las cuales con una estructura cognitiva un tanto idiosincrásica, y para proporcionar o modificar ideas de anclaje a un nivel de orden superior,* ***los organizadores se presentan con un nivel de abstracción, generalidad e inclusividad mayor que el material nuevo que se debe aprender***".

Para profundizar un poco más en la idea de organizador previo en virtud de la importancia que encierra para la presente tesis doctoral, decidimos trabajar de forma específica en dos aspectos de orden clasificatorio. El primero de ellos está referido a la comprensión de los organizadores previos conocidos como *organizador expositivo* y *organizador comparativo*, conceptos que aparecen perfectamente caracterizados en Moreira (2006, p. 137), como sigue:

"*[...] Un organizador de este tipo intenta identificar explícitamente un contenido ya existente en la estructura cognitiva, que puede "sustituir" a aquel contenido que sería específicamente relevante para el aprendizaje del nuevo contenido. El organizador expositivo tiene, entonces, una relación de superordenación con el nuevo material que debe aprenderse y pretende ofrecer un soporte de las ideas en términos que ya le son familiares al aprendiz*".

"*En el caso del aprendizaje de material relativamente familiar, un organizador "comparativo" debe ser usado tanto para integrar como para discriminar las nuevas informaciones y conceptos, ideas o proposiciones, básicamente similares o esencialmente distintos, ya existentes en la estructura cognitiva*".

Además, Moreira (*ibid*) hace hincapié en el hecho de que los organizadores previos no deben confundirse con simples comparaciones introductorias, de modo que para contemplar la percepción de dicha distinción presenta tres características inherentes a los organizadores previos:

"*1. Identificar el contenido relevante en la estructura cognitiva y explicitar la relevancia de tal contenido para el aprendizaje del nuevo material*"*;*

"*2. Ofrecer una visión general del material en un nivel más alto que el de la abstracción, destacando las relaciones que se revelen como más importantes*"*;*

"*3. Proveer elementos organizacionales inclusivos que conduzcan a una consideración más eficiente y sean capaces de resaltar mejor el contenido específico del nuevo material*".

Por lo que se refiere al segundo aspectos de orden clasificatorio anteriormente aludido, se centra conceptualmente en la caracterización de las ideas relativas a los *organizadores previos* y *seudo-organizadores*, conceptos a los que también hace alusión Moreira (*op. cit.*, p. 141):

"*[...] Es necesario establecer la distinción que existe entre organizadores y seudo-organizadores previos. Para Ausubel (1980), organizadores previos verdaderos son aquellos que están destinados a facilitar el aprendizaje significativo de temas* *específicos, o una serie de ideas estrechamente relacionadas. Los materiales de introducción utilizados para facilitar el aprendizaje de diversos temas (por ejemplo, los capítulos o unidades de estudio), se denominan* ***pseudo-organizadores previos***".

Algunos comentarios adicionales sobre la Teoría del Aprendizaje Significativo

Moreira (2006) con la intención de destacar la dificultad de calificar si un material es o no organizador previo remite a tres características amplias de las que depende tal calificación. La primera de ellas está centrada en el material, y se trata de la naturaleza del material de aprendizaje en sí, mientras que las otras dos están centradas en el aprendiz, remitiéndose una a su edad y la otra al tipo de familiaridad que él mismo tiene con la tarea propuesta.

Hay en la literatura al uso ejemplos de investigadores que afirman haberse valido de organizadores previos en sus trabajos. Moreira (*op. cit.*) lo ilustra en un principio intentando caracterizar mediante ejemplos los dos tipos de organizadores, o sea, los organizadores expositivos y los organizadores comparativos.

Inicialmente se refiere al trabajo de Ausubel (1960), realizado con alumnos de Psicología Educativa en la Universidad de Illinois, que tuvo como material de aprendizaje un texto de 2500 palabras que trataba de las propiedades metalúrgicas del acero carbónico, que al no ser familiares a los alumnos, constituía un organizador de tipo expositivo, y que debería ofrecer un anclaje con respecto al texto siguiente. Después, se refiere a otro trabajo, en esta ocasión realizado por Ausubel y Fitzgerald (1961) con alumnos del mismo curso y de la misma universidad, si bien el material utilizado fue un texto sobre el budismo, cuando los participantes apenas poseían conocimientos sobre el cristianismo, y, por lo tanto, el organizador era de tipo comparativo y trataba de forma explícita diferencias y similitudes entre el budismo y el cristianismo.

La tercera ilustración se refiere a la enseñanza de las ciencias, y, en este caso, Ronca (1976) trabaja con alumnos de los cursos de Matemáticas y Física de la Pontificia Universidad Católica (PUC) de São Paulo. El material utilizado fue en esta ocasión un texto que trataba del cambio de comportamiento, en el que se intentaba analizar dicho cambio a partir de las variables causa y efecto, pero que debido a que las informaciones del material eran muy familiares a los alumnos, el organizador previo en cuestión era de tipo expositivo.

Los ejemplos cuarto y quinto a los que se refiere Moreira (*op. cit.*), son, respectivamente, los trabajos de Eggen, Kauchak y Harder (1979) y Willerman y Harg (1991). En el primer trabajo lo más importante es lo que se refiere a la diversidad de utilización de los organizadores previos, en este caso, utilizado para iniciar un estudio sobre sistemas de ríos. Por su parte, en el segundo trabajo, surge el uso de mapas conceptuales como organizadores previos en lugar de textos como ocurría en los otros cuatro casos anteriores.

Y para completar la presentación de estos trabajos, Moreira (*ibid*), tras señalar una diferenciación entre organizadores previos y seudo-organizadores, se refiere al trabajo de Sousa (1980), que consiste en un conjunto de trece seudo-organizadores elaborados para un curso completo.

Por último, a título de consideración relevante, Moreira (*ibid*) destaca dos aspectos que merecen ser destacados entre las informaciones que ya hemos presentado acerca de los organizadores previos. En sus propias palabras:

"*A pesar de haber sido ofrecidos varios ejemplos de organizadores previos, cabe registrar que, en la gran mayoría de los artículos de investigación sobre este asunto, no se encuentran ejemplos propiamente dichos de los organizadores utilizados, y sí pequeñas descripciones sobre cómo fueron construidos. Cabe también destacar que, aunque casi todos los ejemplos dados habían consistido en textos introductorios, la definición de organizador previo no implica que sea necesariamente un texto de ese tipo: puede ser una película, una discusión, una frase, una dramatización*" (*op.cit.*, p. 142).

Junto a estas consideraciones anteriores, hay otra también muy importante y que apunta Moreira (2006): se trata de la atracción natural por comparar los estudios que utilizan y los que no utilizan organizadores previos; en este sentido, cita como ejemplos los trabajos de Graber *et al*. (1972); Kahle y Nordland (1975); Lesh y Johnson (1976); Rickards (1975-1976); Lawton y Wanska (1977); Mayer (1979); Moreira *et al*. (1982). A continuación, lleva a cabo una revisión de la literatura al respecto que incluye hasta 32 estudios sobre organizadores previos que fue realizada por Barnes y Clawson (1975) y vuelve a plantear la cuestión sobre la eficacia o no de tales organizadores. No obstante, a pesar de que los resultados resultan estadísticamente decepcionantes, tal cuestión se cierra con el trabajo de Luiten, Ames y Ackerson (1980) que indagan en 135 estudios que tratan sobre los efectos de los organizadores previos.

Hay otro aspecto que precisa ser destacado acerca de la Teoría del Aprendizaje Significativo: se trata de algunas implicaciones que llegan a veces a ser consideradas como su expansión. Los teóricos que contribuyeron a esta consideración fueron Novak (1981), Gowin (1981) y Moreira (2005), si bien no incluiremos aquí un relato sobre sus teorías, pues tan sólo se trata en nuestro caso de relacionarlas con la teoría de Ausubel.

Los dos primeros pueden ser sintetizados en su vertiente teórica a partir de la siguiente conclusión a la que llega Moreira (1999, p. 179):

"*Las teorías de Ausubel, Novak y Gowin forman un cuerpo teórico coherente sobre el aprendizaje y la enseñanza, particularmente adecuado con la referencia del día a día en el aula. Ausubel hace hincapié en la construcción cognitiva por medio del aprendizaje significativo. Novak asume que el aprendizaje significativo subyace en la integración constructiva de pensamientos, sentimientos y acciones; esta integración conduce al engrandecimiento (**empowerment**) humano. Gowin propone una relación triádica entre alumno, materiales educativos y profesor, cuyo objetivo es el de compartir significados. Cuando el ente objetivo es alcanzado, el alumno está preparado para decidir si quiere o no aprender significativamente*".

En función de lo anteriormente dicho, resulta evidente la necesidad de presentar algunas informaciones adicionales acerca de las concepciones de estos dos teóricos. Y en virtud de tal necesidad, y, en especial, debido al interés que para esta tesis tiene la organización de la enseñanza, resultan de gran importancia los dos pasajes que seleccionamos a continuación, extraídos de Moreira (2006, p. 182):

Si, por un lado, para Novak (1981), "*[...] La organización de la enseñanza con vistas a facilitar el aprendizaje significativo no puede quedar restringida al análisis* *conceptual ni al uso de estrategias instruccionales adecuadas para facilitar la adquisición significativa de dicho contenido. El alumno es* ***persona*** *y, como tal,* ***piensa, siente*** *y* ***hace****. [...] Por lo tanto, facilitar el aprendizaje significativo debe tener en cuenta también los sentimientos del alumno; otorgar atención a lo afectivo, además de lo cognitivo; debe considerar, en fin, al aprendiz como persona*".

Por otro lado, para Gowin (1981):

"*La interacción social, el intercambio de significados entre profesor y alumno tan enfatizada por Gowin parece ser, de hecho, indispensable para facilitar el aprendizaje significativo, y debe, sin duda, ser tenida en cuenta en la organización de la enseñanza a la luz del aprendizaje significativo*" (Moreira, *op cit*., p. 184).

El propio Moreira (2005), como tercer teórico enunciado, cuando presenta su conclusión/resumen destaca el papel del conocimiento previo, al que añade, como una cuestión de supervivencia, la necesidad cambiar el núcleo que hace posible facilitar el aprendizaje de la enseñanza. Después, según él mismo propone, parafraseando a Postman y Weingartner (1969), señala que, en su opinión:

"*[…] Ese foco debería estar en el* ***Aprendizaje significativo subversivo****, o* ***crítico****, que me parece mejor; aprendizaje que permitirá al sujeto formar parte de su cultura y, al mismo tiempo, estar fuera de ella, manejar la información críticamente, sin sentirse impotente; usufructuar la tecnología sin idolatrarla; cambiar sin ser dominado por el cambio; vivir en una economía de mercado sin dejar que éste determine su vida; asumir la globalización sin aceptar sus perversidades, convivir con la incertidumbre, la relatividad, la causalidad múltiple, la construcción metafórica del conocimiento, la probabilidad de las cosas, la no dicotomización de las representaciones mentales; rechazar las verdades fijas, las certezas, las definiciones absolutas, las entidades aisladas*" (*op. cit.*, p. 40).

Las informaciones que hemos presentado acerca de las tres teorías anteriores, incluso cuando sólo hemos tratado algunas ideas no muy numerosas, pensamos que satisfacen unas expectativas mínimas y suficientes para dar a entender que dichas teorías sin duda han contribuido al enriquecimiento de la llamada teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel (1978).

2.1.2 Alusión a la Teoria de Vergnaud

Gérad Vergnaud fue Director del Centro Nacional de Investigaciones Científicas de París, y dirigió durante quince años el grupo de investigación en Didáctica, en particular, en el ámbito de las Matemáticas y la física. Este investigador fue discípulo de Piaget, que representa una de las figuras más importante dentro de la Psicología Cognitiva, principalmente en lo que se refiere al desarrollo de cuestiones relacionadas con la educación, por más que sus intereses no estuvieran centrados específicamente en los aspectos didácticos.

En eventos como el **V Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo** (V EIAS) o el **I Encuentro Nacional sobre Enseñanza de las**

Matemáticas (I ENEM), entre otros, Vergnaud establece de forma nítida en sus conferencias la innegable influencia de las ideas de Piaget en su trabajo, incluso, en su Teoría de los Campos Conceptuales, si bien no deja de afirmar que también consideró las aportaciones de otros importantes teóricos como, por ejemplo, Vygotsky.

Al comenzar la discusión acerca de la proposición que defiende que "*el conocimiento es un proceso de adaptacióin*", Vergnaud (1996a, p. 196) afirma que:

"*Ésta es probablemente la idea más fundamental de Piaget, la que impregna toda su obra*".

A continuación, señala que, en tanto que biólogo, Piaget se vio influenciado por las teorías de la evolución, y al establecer un paralelismo con la evolución de las especies, surge la posibilidad de concebir el conocimiento a partir del desarrollo del pensamiento del niño.

Vergnaud (*ibid*), dice a respecto de Piaget:

"*[…] La tesis de que para comprender el conocimiento hay que estudiar su desarrollo; dicho de otro modo: la idea de una evolución adaptativa de los conocimientos en el niño le permite proponerse como proyecto científico no sólo elaborar y acreditar la tesis según la cual los conocimientos actuales del sujeto proceden de la interacción entre su experiencia y sus conocimientos anteriores (las tesis interaccionalistas), sino también la que afirma que el conocimiento procede fundamentalmente de la acción sobre el mundo, puesto que es sobre todo mediante la acción como el sujeto pone a prueba sus conocimientos y los modifica (tesis operatoria)*".

La idea de la tesis operatoria citada anteriormente supone un concepto importante que debe ser esclarecido, toda vez que el propio Vergnaud (*ibid*) intentar explicar lo que dicho concepto representa para él, definiéndolo así:

"*Por tesis operatoria entendemos aquí, simplemente, que el conocimiento se forma, se desarrolla y se transforma con la acción; así pues, el término* ***operatoria****, empleado por nosotros, no expresa todas las ideas que Piaget le atribuye: distinción entre acción y operación, conjunto estructurado y reversible de operaciones, etc.*".

Por otro lado, resulta importante mencionar una destacada contribución de Vergnaud en su teoría de los campos conceptuales en lo que se refiere al ámbito de la ampliación del objetivo piagetiano sobre el análisis del desarrollo cognitivo. Porque, según Franchi (1999, p. 160), dicha contribución contempla las dos direcciones complementarias siguientes:

"*Una primera consiste en afirmar que un enfoque más fructífero para el desarrollo se obtiene utilizando un sistema que* ***tenga como referencia el propio contenido del conocimiento y el análisis conceptual del dominio de tal conocimiento****. Una segunda, consiste en desplazar el interés de las investigaciones del estudio de las estructuras generales del pensamiento al estudio del funcionamiento cognitivo del* ***sujeto-en-situación****, considerando, por ejemplo, las variables de la situación, las* *informaciones ya disponibles en el repertorio cognitivo del sujeto, las operaciones de pensamiento necesarias para la resolución de la situación, la especificidad de tales variables y operaciones en función del contenido a que se refieren*".

Todas estas informaciones que acabamos de presentar, especialmente la idealización sujeto-en-situación, que vuelve a aparecer hasta en dos ocasiones más, parece sugerir que tales ideas ocupan un lugar importante en la teoría de Vergnaud (1990a).

Situación

Vergnaud (1996a) utiliza una idea importante dentro del ámbito de la teoría de los Campos Conceptuales: se trata de la idea de situación. Para Vergnaud, no se ha debido a una casualidad el hecho de que las situaciones hayan constituido objeto de estudio por parte de muchos especialistas en didáctica, sino porque posibilitan analizar el desarrollo de los alumnos. Inmediatamente, no duda en señalar que la evolución adaptativa de la actividad y el conocimiento de los alumnos constituyen aspectos relevantes que dependen de situaciones susceptibles.

En función de ello, Vergnaud (*op. cit.*, p. 198), cuando examina el planteamiento que se establece al estudiar los conceptos que responden a preguntas sobre "*¿Qué se está haciendo*?" y "*Conceptualizaciones específicas o estructuras generales de pensamiento*", llega a la conclusión de que las contribuciones de Piaget caracterizaban una preocupación por una psicología o una epistemología del concepto. Y que los investigadores, por su parte, se han ocupado en el análisis detallado del progreso de los alumnos en situaciones diversificadas, en los que un mismo concepto puede presentarse en función de propiedades muy diferentes entre sí.

Por su parte, Moreira y Greca (2004, p. 72) mencionan algunos aspectos que merecen nuestra consideración cuando nos movemos en el ámbito de las situaciones:

"*[...] Las situaciones son las que dan sentido al concepto; son las situaciones las responsables del sentido atribuido al concepto (Barais & Vergnaud, 1990, p. 78); un concepto se torna significativo a través de una variedad de situaciones (1994, p. 46). Pero el sentido no está en las situaciones en sí mismas, así como tampoco lo está en las palabras ni en los símbolos (1990, p. 158)*".

Hay aún otro aspecto importante referente a las situaciones, en esta ocasión señalado por Franchi (1999), y que trata de cómo proceder para que el alumno reconozca los procedimientos canónicos adecuados para una determinada clase de problemas, esto es:

"*A nuestro modo de ver, es condición indispensable que el alumno se apropie de la situación. Para que se produzca tal apropiación resulta esencial que pueda seguir sus propios procedimientos a partir de la representación que concibe acerca de la situación*" (*op .cit.,* p. 189).

Para exponer mejor los propósitos presentados en el párrafo anterior, Vergnaud (1996a) recurre a establecer una discusión acerca de la idea de proporcionalidad, y, en ese sentido, cabe recordar que:

"*Más vale analizar los procedimientos de los alumnos frente a una variedad organizada de situaciones, con miras a intentar descubrir en qué momento se producen las filiaciones y rupturas en el proceso de conceptualización de las estructuras multiplicativas y de proporcionalidad*" (*op. cit.,* p. 200).

Por ultimo, para complementar las escasas informaciones contenidas en el fragmento anterior referentes a las situaciones, y con el propósito de que lleguen a considerarse como consistentes, sería interesante hacer referencia a algunas consideraciones relevantes relacionadas con este concepto que ahora tratamos.

En este sentido, Vergnaud (1993) deja claro que en tanto que concepto, sus situaciones no tienen el mismo sentido que las denominadas situaciones didácticas, y que toda situación compleja puede ser tratada como una combinación de tareas, de las que es preciso conocer su naturaleza y dificultad. Por otro lado, incluso cuando se sabe que el fracaso de una subtarea provoca el fracaso total, las dificultades de una determinada tarea no pueden ser concebidas ni como la suma ni como el producto del conjunto de dificultades de subtareas distintas.

Esquemas

La idea de esquema proviene de Vergnaud (1996a), quien, ante la necesidad de responder a la cuestión de "cómo analizar la acción en situación y la conceptualización subyacente a la acción", llega a afirmar que, en la actualidad, se trata de la pregunta más importante a la que debemos dar respuesta. Para él, el conocimiento humano es, en su mayor parte, competencia, y que ésta, a su vez, a lo largo de la experiencia humana, y en función de las situaciones vivenciadas, presenta las siguientes fases: formación, desarrollo, diferenciación, maduración (mejora) y deterioro.

Vergnaud (*op. cit.*, p. 200) destaca que aun considerando la relevancia de la idea de esquema como aportación en Piaget, éste no llega a considerarlo de un modo tan esencial como el que posee en el momento actual:

"*Podemos destacar tres grandes ideas iniciales, ya presentes en Piaget:*

1 - Que un esquema es una totalidad dinámica funcional;

2 - Que hay que buscar buenos ejemplos de esquemas en la actividad llamada ***sensomotriz;***

3 - Que los esquemas no sólo conciernen a la actividad sensomotriz, sino también a la actividad intelectual: es el caso, sobre todo, de los esquemas de clasificación y de razonamiento lógico, y también del esquema de la proporcionalidad (que hoy evidentemente hay que poner en plural)".

Y sólo en virtud de tales ideas, ya presentes en Piaget, si bien caracterizadas por él a través de ejemplos referidos a bebés, es como, según veremos a continuación, podemos aceptar el admitir una evolución en los ejemplos, en las formas de análisis y también en el propio concepto. Porque, en el caso de ejemplos cuyas actividades son de un carácter más intelectual que gestual, al contrario que en las conductas instintivas, se puede observar capacidad Matemática, u otras competencias que, para ser organizadas necesitan de esquemas.

En este sentido, Vergnaud (1996a, p. 201) presenta una sistematización más elaborada cuando define la idea de esquema de este modo:

"*Los esquemas se tienen que poner en relación, por necesidades del análisis, con las características de las situaciones a las cuales se aplican. Un esquema se puede definir como* ***una organización invariante de la conducta para una clase de situaciones determinada****. Esta organización se basa en cuatro clases de elementos principales:*

1 - objetivos y anticipaciones;

2 - reglas de acción, de acopio y de control de la información;

3 - invariantes operatorias;

4 - posibilidades de inferencia".

Tal vez, al principio, a causa de la deformación realizada en el texto original, no quede clara de inmediato la fuerza que encierra esta idea de esquema en el contexto en que nos movemos, de manera que es importante describir lo que propone Vergnaud (*op. cit.*) a través de dichos elementos:

"*Un esquema se dirige siempre a una clase de situaciones en las cuales el sujeto puede descubrir una posible finalidad de su actividad, eventualmente, sub-objetivos; igualmente, puede esperar ciertos fenómenos*" (*ibid*).

"*Las reglas de acción forman la parte verdaderamente generadora del esquema, la que permite generar la continuación de las acciones de transformación de lo real, de acopio de información y de los controles de los resultados de la acción, lo que permite garantizar el éxito de la actividad en un contexto que puede estar en constante evolución*" (*ibid*).

"*Las invariantes operatorias constituyen la base conceptual implícita o explicita, que permite obtener la información pertinente, e inferir de ella, a partir de esta información y del objetivo por alcanzar, las reglas de acción más pertinentes. Más adelante hablaremos de las dos principales categorías de invariantes operatorias: conceptos-en-acto y teoremas-en-acto*" (*ibid*).

"*Por último, el esquema comporta necesariamente unas posibilidades de inferencia, puesto que toda la actividad mencionada más arriba requiere* ***cálculos hic et nunc en situación****. Un esquema, en general, no es un estereotipo, al contrario, es un instrumento de adaptación de la actividad y de la conducta a los valores particulares tomados por diferentes parámetros en la* ***situación hic et nunc***" (*op. cit.*, p. 202).

Para definir de forma compacta lo que podemos entender como esquema, junto a lo ya expuesto a partir del propio Vergnaud, si recurrimos a Franchi (1999, p. 164), encontramos lo siguiente: "*Se denomina esquema a la* ***forma estructural de la actividad****, a la organización invariante de la actividad del sujeto sobre una clase de situaciones*". Y, además, resalta que la característica de ser invariante, con respecto a los elementos formales que permiten definir una determinada clase de situaciones, se refiere en menor medida a los actos, sino a la parte invariante de la organización de los actos.

Más adelante, Vergnaud (*op. cit.*) destaca que el interés teórico fundamental acerca del concepto de esquema se encuentra en la posibilidad de articulaciones esenciales, formadas por los invariantes operatorios, que los esquemas propician entre la conducta y la representación. Y esto se debe a que se considera que la percepción, la búsqueda y la selección de información se fundamentan completamente en lo que denominó conceptos-en-acto, habitualmente disponibles en el sujeto (objetos, atributos, relaciones, condiciones, circunstancias...), así como en los teoremas-en-acto, que se refieren a la conducta del sujeto. Para exponer mejor estas dos últimas ideas, podemos recoger las palabras de Vergnaud (*ibid*, p. 202):

"*Un teorema-en-acto es una proposición considerada como verdadera sobre lo real; un concepto-en-acto es un pensamiento considerado como pertinente. Así, en el ejemplo de proporcionalidad mencionado más arriba,* $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *es un teorema-en-acto, y el factor* λ *es un concepto-en-acto*".

Hay, además, otro aspecto importante señalado por Vergnaud (*ibid*) cuando se refiere al hecho de que si Piaget, en lugar de haber tratado de la **interacción sujeto-objeto** se hubiese ocupado de la **interacción sujeto-situación,** el resultado habría sido mucho más fructífero. En este sentido, indica que una teoría de la representación no puede preceder a una teoría de la referencia. Esto se justifica cuando comprobamos que las situaciones en las que la actividad del sujeto sirve de base de organización tienen mayor importancia que los objetos y sus propiedades en la elaboración de las representaciones de tales sujetos. Estas consideraciones, entre otros múltiples aspectos ya indicados, hacen posible que llegue a la siguiente conclusión:

"*[...] Hoy podemos aceptar la idea de que el desarrollo cognitivo consiste, ante todo y principalmente, en el desarrollo de un vasto repertorio de esquemas*" (*ibid*, p. 203).

Por otro lado, en la conceptualización de la realidad el sujeto se vale de una simbolización, como el lenguaje, y de otras formas de representación simbólica. Por lo tanto, para que se produzca la función adaptativa del conocimiento, es necesario priorizar las formas que dicho conocimiento asume en la acción del sujeto, es decir, una comprensión precisa de la función de los símbolos o señales (significantes). Con ello, los símbolos, en sus funciones instrumentales de organización de la experiencia y de conceptualización de la realidad, tienen un valor mucho mayor que el de la mera función instrumental de comunicación.

Invariantes Operatorios

La sistematización de la integración de las ideas que constituyen un campo conceptual puede iniciarse retomando algunos aspectos ya aludidos anteriormente, recordando que un esquema tiene por finalidad organizar un determinado conjunto de situaciones. Y que entre los conocimientos que en dichos esquemas existen, se encuentran los llamados *conceptos-en-acto* y los teoremas-*en*-acto; a su vez, éstos se denominan mediante la expresión *invariantes operatorias*.

En este momento, surge la necesidad de integrar las ideas anteriores, incluso llegando a justificar el motivo. Para empezar, recurriendo a Vergnaud (1993), en el ámbito de las ciencias, encontramos su punto de vista que viene a resaltar la posibilidad de discutir la pertinencia y la veracidad de los conceptos y teoremas, debido a que se precisa que sean explícitos. Por otro lado, alerta de que no es ése necesariamente el mismo caso de los invariantes operatorios. Para profundizar en esta idea, el autor recurre a un tipo de metáfora que compara los conceptos y los teoremas explícitos como si se tratara de la parte visible de un iceberg, mientras que la parte no perceptible correspondería a los invariantes operatorios. En otras palabras:

"*Recíprocamente, sólo se puede hablar de invariantes operatorios integrados en los esquemas con ayuda de las categorías del conocimiento explícito: proposiciones, funciones proposicionales, objetos-argumentos*" (*op. cit.*, p. 8).

Debemos considerar también un aspecto importante en este proceso integrativo referido a la conceptualización, y que trata de las ideas expuestas hasta aquí: se trata de una idealización sobre conceptos en una determinada área del conocimiento. Es lo que Vergnaud (*ibid*) hace en el caso de las Matemáticas de la siguiente forma:

"*Un abordaje psicológico y didáctico de la formación de los conceptos matemáticos nos lleva a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto recurre, por lo tanto, al conjunto de las situaciones que constituyen la referencia de sus diversas propiedades, y al conjunto de los esquemas utilizados por los sujetos en tales situaciones*".

En síntesis, según Vergnaud (*ibid*):

"*El acto operatorio no constituye la totalidad de la conceptualización de la realidad. No se discute la veracidad o la falsedad de un enunciado totalmente implícito. No se identifican los aspectos de la realidad a los que se debe prestar atención sin ayuda de las palabras, enunciados, símbolos y señales. El empleo de significantes explícitos resulta indispensable para la conceptualización*".

A partir de aquí, pasa a idealizar la conceptualización de concepto considerándolo a partir de la terna (S, I, R), donde S, I y R según Vergnaud (*ibid*) representan, respectivamente:

"*[…] Conjunto de las situaciones que dan sentido al concepto (referencia); conjunto de los invariantes en que se basa la operatividad de los esquemas* *(significado); y conjunto de las formas de lenguaje, o no, que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (significante)*".

Y para contemplar esta idealización podemos recurrir al pasaje extraído de la obra de Franchi (1999, p. 173), que parte de la pregunta: "*¿Qué es el **campo conceptual**?",* quien, para responder a esa pregunta, propone la transcripción de las siguientes características, tomadas, a su vez, de Vergnaud (1985; 1990c; 1994) y referidas al propio ***campo conceptual***:

"El estudio del desarrollo y funcionamiento de un concepto, en el decurso del aprendizaje o cuando se emplea, debe considerar, al mismo tiempo: el plano de las situaciones, el de los invariantes operatorios y el de las representaciones simbólicas. No hay, por lo general, biyección entre significantes y significados, ni [esquemas] invariantes y situaciones".

Cabe señalar, con la intención de destacar ciertas consideraciones relevantes sobre el uso de los campos conceptuales, en el ámbito didáctico, algunos aspectos que pueden derivarse ante situaciones a las que nos conducen conceptos como los vertidos por Moreira (2004, p.17), y que recogemos a continuación:

"*En general, los alumnos no son capaces de explicar, ni siquiera de expresar en lengua natural sus teoremas y conceptos-en-acto. En el abordaje de una situación, los datos sobre los que se va a trabajar así como la secuencia de cálculos que debe hacerse dependen de teoremas-en acto y de la identificación de diferentes tipos de elementos pertinentes. La mayoría de esos conceptos y teoremas-en-acto permanecen totalmente implícitos, si bien pueden también ser explícitos o tornarse explícitos, y es ahí donde entra la enseñanza: ayudar al alumno a construir conceptos y teoremas explícitos, y científicamente aceptados, a partir del conocimiento implícito. Es en ese sentido en el que conceptos-en-acto y teoremas-en-acto pueden, progresivamente, llegar a convertirse en verdaderos conceptos y teoremas científicos, pero eso puede tardar mucho tiempo*".

Algunos comentarios adicionales sobre la Teoría de los Campos Conceptuales

D'Amore (2005) señala la dificultad que existe para distinguir un *concepto* de su *construcción*, a la que atribuye la denominación adoptada por algunos autores de *conceptualización*, remitiéndonos inmediatamente a la siguiente cuestión: "*¿qué es y cómo se produce la conceptualización?*" En este sentido, merece mención la contribución de Vergnaud (1990b), que propone una unificación del concepto con su propio componente constructivo, caracterizando, así, la conceptualización con el paso de "*conceptos-como-instrumento* a *conceptos-como-objeto"* (el mismo autor define que un concepto 'C' es una terna (S, I, R), respectivamente, Referente, Significado y Significante). Además, recuerda que una nominalización sería una operación lingüística esencial en esta transformación.

En estos casos, en las tareas de aprendizaje, sin embargo:

"*La importancia práctica y educativa de distinguir con precisión entre los significados de los conceptos y aprender los significados de las palabras conceptuales puede ilustrarse citando diversos ejemplos cotidianos y educativos. En primer lugar, ocurre con bastante frecuencia, especialmente en la formación de conceptos, que los alumnos adquieren unos conceptos concretos de una manera significativa sin aprender durante algún tiempo cuáles son sus nombres. Así pues, simplemente porque no sepan lo que significan las* ***palabras*** *correspondientes a unos conceptos determinados, no se puede suponer necesariamente que no sepan (tampoco) los* ***significados*** *(atributos característicos) de los conceptos correspondientes*" (Ausubel, 2002, p. 151).

Por otro lado:

"*[…] Debemos tener la precaución de no confundir el proceso por el que una palabra adquiere significado con los factores que explican el grado relativo de significado que manifiesta*" (*op. cit.*, p. 134).

La terna (S, I, R), por lo tanto, representa la conceptualización de Vergnaud sobre el concepto de concepto, a la cual denominó campo conceptual, y que fue por él mismo definido del siguiente modo:

"Un campo conceptual está constituido, desde el punto de vista práctico, por el conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y de representaciones simbólicas que están en estrecha conexión; desde el punto de vista teórico, está constituido justamente por el conjunto de conceptos y teoremas que contribuyen al dominio de tales situaciones, aunque sea de forma implícita" (Vergnaud, 2004, p. 193).

El ejemplo utilizado por Vergnaud para definir su idea de conceptualización, fue el denominado campo conceptual de las estructuras aditivas. En él, señala que dicho campo está formado por diferentes situaciones que posibilitan realizar una adición, una sustracción o una combinación de ambas. Para entender mejor esta idea, caracteriza a continuación las ideas que conforman el campo conceptual en función de algunas de las posibles relaciones que pueden establecerse entre ellas:

"*[…] Estas situaciones presentan una gran variedad y pueden ser clasificadas; su análisis muestra que, junto al concepto de adición y al de sustracción, se utilizan también, los conceptos de medida, de parte y todo, de estado y transformación, de comparación binaria y operador unitario, de número relativo, de abscisa, etc. Las relaciones que están presentes y las operaciones de pensamiento que permiten tratarlas pueden representarse a través de diversos sistemas de significantes matemáticos (diagramas, Álgebra...) y mediante múltiples formas lingüísticas, cuya pertinencia y límites resulta interesante evaluar*" (Vergnaud, 2004, p. 194).

Por ultimo, cabe enfatizar el grado de sofistificación de las consideraciones de Vergnaud que culmina con la formulación de su tríada. En todo caso, debemos señalar aquí que otros teóricos ya se habían ocupado, en cierto modo, de reflexionar sobre algo semejante, como oportunamente indica D'Amore (*op. cit.*, p. 22):

"*La idea de Vergnaud podría ser considerada como una posible conclusión de una línea* ***clásica****, la que pasa a través de los tres famosos* ***triángulos*** *(Bibliografía específica en: D'Amore, 1999b):*

• *[…] El triángulo de Charles Sanders Peirce [1839-1914], publicado en 1883, que tiene como "vértices": interpretante - representante – objeto;*

• *El triángulo de Gottlob Frege [1848-1952], publicado en 1892: Sin [sentido] - Zeichen [expresión] - Bedeutung [denotación];*

• *El triángulo de C. K. Ogden y I. A. Richards, que pretendía ser un compendio de los otros dos, publicado en 1923: referencia - símbolo - referente*"

Por último, debemos registrar el hecho de que el concepto de campo conceptual de Vergnaud, a lo largo de los años fue paulatinamente perfeccionado, incluso, él mismo introdujo nuevas matizaciones, como señala D'Amore (2007, p. 366):

"*Por campo conceptual se entiende un conjunto de situaciones, conceptos y representaciones simbólicas (significantes), en estrecha relación unos con otros, que sólo de forma ilusoria podrían ser analizados separadamente*". (Vergnaud, 1984);

"*Un campo conceptual constituye un conjunto de problemas y situaciones que, para tratarlos, resulta necesario echar mano de conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos, si bien mantienen una estrecha conexión entre sí*". (Vergnaud, 1985b);

"*La teoría de los campos conceptuales es una teoría de carácter cognitivo que se propone ofrecer un cuadro coherente y algunos principios básicos para el estudio del desarrollo y aprendizaje de competencias complejas, sobre todo de aquellas que se refieren a las ciencias y a las técnicas. Como ofrece un referencial para el aprendizaje, tiene que ver con la didáctica: pero, no es tan sólo una teoría didáctica. Su objetivo principal consiste en proporcionar un cuadro que permita comprender las filiaciones y las rupturas que se producen en los conocimientos de niños y adolescentes, entendiendo aquí por* ***conocimientos,*** *tanto el saber hacer, como los saberes explícitos. [...] La teoría de los campos conceptuales no es específica de las Matemáticas, si bien, fue inicialmente elaborada para considerar el proceso de conceptualización progresiva de las estructuras multiplicativas, de las relaciones números-espacio o del Álgebra*" (Vergnaud, 1990b).

Por tanto, a partir de las informaciones que acabamos de exponer, queda claramente establecido el hecho de que, como cuerpo teórico en pleno uso, la idea de Vergnaud sobre los Campos Conceptuales se desarrolló a través de sucesivas elaboraciones y matizaciones, tanto en lo que se refiere a la idealización en sí, como en lo que atañe a las aplicaciones a otras áreas del conocimiento.

2.1.3 Alusión a la Teoria de Leontiev

Duarte (2005) destaca el proceso de apropiación de la cultura por parte del individuo como algo que se encuentra esencialmente mediatizado por la comunicación. Este fenómeno se deriva de las relaciones que se producen entre el hombre y el mundo, relaciones que, por otro lado, acusan intermediaciones que muchas veces son efectuadas por otros hombres, de donde se deduce que es por eso por lo que las actividades humanas, necesariamente, se encuentran relacionadas con la comunicación. Por tanto, de una forma más refinada, podemos referir aquí el siguiente pasaje (*ibid*, p. 34):

"*[…] El individuo se forma apropiándose de los resultados de la historia social y objetivándose en el interior de esa historia, es decir, su formación se realiza a través de la relación entre la objetivación y la apropiación. Esta relación se efectúa siempre en el seno de las relaciones concretas con otros individuos, que actúan como mediadores entre él y el mundo humano, el mundo de la actividad humana objetivada*".

Rosseler (2004) contribuye a la justificación de las argumentaciones anteriores cuando recuerda que el proceso de formación del individuo comienza desde su nacimiento, prolongándose a lo largo de toda su existencia, pues es en el ámbito social donde se produce la apropiación del lenguaje, de los objetos, de los instrumentos culturales y donde también adquiere los usos y costumbres de dicha sociedad.

Asbahr (2005) señala que Marx (1989), cuando se refiere al materialismo histórico-dialéctico, ya situaba la actividad en un lugar privilegiado, en virtud de lo cual, la práctica sensorial de la misma originaría tanto el desarrollo histórico-social de los hombres como el del propio individuo. Junto a ello, añade, conforme señala Asbahr (*apud* Davidov, 1988, p. 109):

"*La categoría filosófica de actividad es la abstracción teórica de toda la práctica humana universal, que tiene un carácter histórico social. La forma inicial de actividad de las personas es la práctica histórico-social del género humano, es decir, la actividad laboral colectiva, adecuada, sensorio-objetal, transformadora, de las personas. En la actividad se pone al descubierto la universalidad del sujeto humano*".

Por lo tanto, los psicólogos soviéticos no adoptaron al azar la idea de actividad como uno de los principios básicos para el estudio del desarrollo del psiquismo. En efecto, como apunta Asbahr (*op. cit.*) a partir de Kozulin (2002), Vigotski se aprovecha de dicho concepto ya desde sus primeros escritos, en los cuales, la actividad socialmente significativa aparece como principio explicativo de la conciencia, de tal modo que, una conciencia tal está conformada desde fuera para dentro a través de las relaciones sociales.

"Según el psicólogo soviético Aléxis N. Leontiev (1978b), el psiquismo humano se estructura a partir de la actividad social e histórica de los individuos, es decir, mediante la apropiación de la cultura humana material y simbólica, producida y acumulada objetivamente a lo largo de la historia de la humanidad. Los objetivos de tal proceso de apropiación, a saber, las objetivaciones producidas por el género humano, condensan en sí mismas este hecho, en otras palabras, materializan trabajo humano,

facultades y aptitudes humanas desarrolladas a lo largo de la historia de la humanidad, y se constituyen en síntesis de su propia historia" (Rossler, 2004, p. 101-102).

Hay aún otra cuestión relevante que podemos añadir a las informaciones anteriores como apoyo a las ideas que vienen siendo expuestas, y, en concreto, a las consideraciones acerca de que la actividad, en cuanto que estructura objetiva socialmente construida, puede corresponder también a una estructura subjetiva. En palabras de Rossler (*op. cit.*, p. 102):

"*[...] En otras palabras, a una determinada realidad social, tanto material como simbólica, le corresponde una determinada forma de conciencia y personalidad. De este modo, actividad, conciencia y personalidad se relacionan siempre dialécticamente. Leontiev distingue actividad, acto y operación cuando analiza la estructura de la actividad específicamente humana. De la misma forma, diferencia sentido y significado al analizar la estructura de la conciencia humana. En sus estudios, el referido autor deja claro que el proceso de constitución del psiquismo humano, mediante la apropiación de los bienes culturales producidos por la humanidad, consiste en un proceso mediado por otros individuos. Siendo esto así, se trata siempre y necesariamente de un proceso educativo*".

A la vista de estas breves informaciones, podemos admitir que queda demostrada la importancia que se le viene otorgando a la idea denominada actividad dentro del materialismo histórico-dialéctico y, como consecuencia de ello, dentro del desarrollo del psiquismo. Ahora bien, ¿A qué podemos denominar como actividad? ¿Qué tipo de características posee? ¿Cómo están dispuestas sus partes integrantes? ¿Y cómo puede funcionar? Esas son, entre otras muchas, las cuestiones que abordaremos con el objetivo de mostrar la importancia que otorgamos en el presente estudio a la actividad.

Actualmente contamos con una vasta literatura acerca de la teoría psicológica general de la actividad, que fue inicialmente establecida por Leontiev, y en la cual se puede apreciar una aceptable sistematización del concepto mismo de actividad, como no podría ser de otra forma, en la medida en que dicho concepto aparece como base explicativa, tanto de los procesos psicológicos superiores como del objeto mismo de investigación. Sin embargo, debemos advertir la atención que merece el papel de la actividad en tanto que principio básico para el estudio del desarrollo del psiquismo.

De forma global, la actividad juntamente con la conciencia pueden ser consideradas como unidades dialécticas, y por ende, elementos importantes en la psicología histórico-cultural. Como apunta Asbahr (2005), citando a Davidov (1988, p. 23), existe un problema fundamental que ha sido expuesto por los psicólogos en estos términos:

"*[…] Descubrir de qué modo la dialéctica universal del mundo se convierte en patrimonio de la actividad de los individuos, y a su vez, cómo éstos se apropian de las leyes universales del desarrollo de todas las prácticas sociales y de la cultura espiritual*".

Por el momento nos conviene adentrarnos tan sólo un poco más en la idealización de la actividad, y, para ello, nada mejor que hacerlo basándonos en lo expuesto por el propio Leontiev (1983, p. 17), a ejemplo de Asbahr (*op. cit.*, p. 109):

"*El análisis de la actividad constituye el punto decisivo y el método principal del conocimiento científico del reflejo psíquico, de la conciencia. En el estudio de las formas de la conciencia social está el análisis de la vida cotidiana de la sociedad, de las formas de producción propias de ésta y del sistema de relaciones sociales; en el estudio de la psiquis individual está el análisis de la actividad de los individuos en las condiciones sociales dadas y en las circunstancias concretas que les ha tocado en suerte a cada uno de ellos*".

Acerca del tratamiento de la cuestión que plantea de dónde surgen las actividades, podríamos comenzar a partir de un contexto que considera el hecho de que, para sobrevivir, el hombre, a lo largo de su historia, movido por sus necesidades y emociones, necesitó aprender a lidiar con los objetos que existían en el mundo. De ahí se siguen dos aspectos importantes dentro de la psicología histórico-cultural acerca de la necesidad. El primero se refiere a la naturaleza de las actividades, pues debido al hecho de que las emociones comporten el espacio con las necesidades, se comprueba que las actividades, en su diversidad, van más allá de los procesos cognoscitivos. El segundo está relacionado con el aspecto funcional de la actividad, toda vez que la necesidad funciona como agente dirigente y regulador de la actividad humana.

La estructuración de la actividad humana en Leontiev parte de la distinción entre actividad y acto. En su trabajo, expone dicha distinción aludiendo a la transformación histórica de una actividad humana, que conlleva características pasadas, presentes y futuras, llegando a la conclusión de que las distorsiones existentes pueden verificarse en el ámbito de los actos delimitados por las siguientes dos consideraciones referidas a su forma de actuación: 'el animal actúa para satisfacer sus necesidades', y 'el hombre actúa para producir los medios que satisfagan sus necesidades':

"*Imaginemos una situación en la cual un grupo primitivo de seres humanos, nuestros antepasados, transformó una piedra en un objeto perforante o cortante, y entonces, utilizó ese objeto para cazar, y, con el producto de la cacería, pudo satisfacer la necesidad de alimento. El aspecto importante que merece ser destacado es que, entre la necesidad de alimento que se produce en el punto de partida y la satisfacción de tal necesidad en el punto de llegada, existe un elemento intermedio, se produce una actividad mediadora: la producción de instrumentos. No importa cuán primitivo sea ese primer instrumento, la piedra lascada. Importa que comienza aquí la diferenciación entre el ser humano y el animal*" (Duarte, 2005, p. 32).

Ahora el objetivo pasa a ser el papel de la necesidad en el entorno de la actividad, e inicialmente se puede atribuir un lugar destacado a lo que Leontiev (1983) denominó "*motivo",* por tratase de un concepto que se refiere a la condición de existencia de la actividad. Para él, la necesidad pasa a adquirir la condición de satisfacción al encontrar un objeto, y, por lo tanto, el motivo puede ser concebido como la articulación entre la necesidad y el objeto, y funciona como resorte propulsor de una determinada actividad. Se no se produjese una articulación tal entre necesidad y objeto, seguramente se llegaría a un aislamiento de ambos, y, como consecuencia de ello, no podría haber actividad.

El contexto anterior sirve también para hacer referencia al proceso conocido como objetivación, término usado por Leontiev, proveniente de Marx, según Duarte (2005). Se trata de la existencia objetiva adquirida como resultado de la actividad humana a partir de los instrumentos, de las relaciones entre los miembros de un grupo y del lenguaje. Este proceso es el responsable de la transferencia de las actividades física y mental a los productos de dichas actividades, o sea, las facultades humanas concebidas, después del proceso de objetivación, como productos de las ya citadas actividades debido a que las características adquiridas son “corporificadas”, lo que acaba por generar algún tipo de función específica en el ámbito interno a la práctica social.

Por lo que se refiere al papel desempeñado a través del proceso de objetivación sobre la forma de adquisición cultural, compartimos, para este estudio, dos importantes consideraciones establecidas por Duarte (*op. cit.*, p. 33):

“El proceso de objetivación es, por tanto, el proceso de producción y reproducción de la cultura humana (cultura material y cultura no-material), producción y reproducción de la vida en sociedad”.

“El proceso de objetivación de la cultura humana no existe sin su opuesto, y, al mismo tiempo, complemento, que es el proceso de apropiación de esa cultura por los individuos”.

Es preciso prestar atención a algo que ya advirtió Leontiev (1978b) acerca de la relación entre la actividad y la necesidad, y que fue destacado por Asbahr (2005, p. 110) de la siguiente forma:

“*La primera condición de toda actividad es una necesidad. Aún más, en sí misma, la necesidad no puede determinar la orientación concreta de una actividad, pues sólo encuentra su determinación en el objeto de la actividad: debe encontrarse en él, por decirlo de algún modo. Cuando la necesidad encuentra su determinación en el objeto (se "objetiva" en él), dicho objeto se convierte en motivo de la actividad, aquello que la estimula*”.

Acto

En virtud de lo expuesto hasta ahora con respecto a una actividad, y para establecer de un modo sistemático cómo se encuentran en la misma la necesidad, el objeto y el motivo, amén de comentar otros aspectos importantes, inicialmente partiremos de la siguiente cita de Asbahr (*ibid*):

“*Ejemplificaremos estas relaciones inspirados por la situación establecida por Leontiev (1983): un sujeto está con hambre (necesidad de comer) y puede satisfacer esa necesidad si busca comida (objeto). Se encuentra motivado para la actividad de buscar comida cuando siente la necesidad de comer y cuando idealiza un objeto que pueda satisfacerlo. Se proponen, entonces, objetivos: ¿Qué podrá hacer (actos) para* *satisfacer su necesidad? Los actos posibles dependerán de las condiciones concretas de vida del individuo, y éstas han sido engendradas históricamente*".

Al observar esta cita se percibe que la actividad ha recibido un nuevo elemento constitutivo añadido, que no se conoce: se trata del acto. El acto surge básicamente a partir de dos aspectos: uno de orden intencional, y otro de tipo operacional, en los que la condición de existencia de la misma depende de las diversas formas de operaciones que pueden ser consideradas como los procedimientos adoptados para que el objetivo sea cumplido.

Una buena pregunta que podemos plantear a este respecto podría ser la siguiente: ¿Cuál es el papel que desempeña (el acto) y su importancia real en el marco de las ideas de Leontiev? En este sentido, encontramos una buena sistematización en Duarte (2005), quien, cuando responde a la cuestión de qué es lo que da sentido a la actividad que desarrolla un individuo, procura plantear la cuestión de otro modo, intentando saber qué provoca la ligazón entre el acto que realiza el individuo con aquello que le motivó a cometerlo. Tomando como base el ejemplo utilizado por Leontiev sobre la actividad colectiva de una cacería llevada a cabo por un grupo primitivo de seres humanos, seleccionamos el siguiente fragmento:

"*La respuesta es: las relaciones sociales existentes entre él y el resto del grupo o, en otras palabras, el conjunto de la actividad social. Sólo cuando se considera el acto individual como parte de ese conjunto es cuando adquiere un sentido racional. Lo mismo podemos decir con relación a los demás actos que componen la actividad establecida como ejemplo*" (*op. cit.*, p. 34).

Más adelante, (*ibid*, 2005) señala que un acto, para Leontiev, es un proceso que no presenta una relación directa entre el contenido (u objeto) y el motivo de tal acto, y que la existencia del acto está condicionada a su integración al todo que representa la actividad. Por otro lado, en virtud de la diversidad de situaciones que pueden ser enfrentadas por el hombre, se establecen básicamente dos tipos: las representadas por actividades que poseen estructuras constituidas por un complejo conjunto de actos, y que son las más habituales, y, en segundo lugar, aquellas en las que la actividad está constituida por un solo acto.

Cuando consideramos las actividades desde la perspectiva de sus partes constituyentes y de las variadas formas de relaciones, pueden ser caracterizadas: bien como un complejo, que, como tal, puede admitir cambios bruscos, como la transformación de una actividad en un acto cuando el motivo deja de presentar las características originales; o bien, por el contrario, cuando el acto adquiere un motivo propio y pasa a ser una actividad. Con ello, podemos observar que investigar la actividad significa analizar tanto su estructura como las relaciones existentes entre sus partes constitutivas, intentando identificar el motivo de la actividad.

Asbahr (2005) indica, basándose en Leontiev, que las actividades internas y externas son estructuralmente las mismas. Pero, las actividades internas se constituyen a partir de la actividad práctica sensorial externa, de manera que la transformación de la actividad externa en interna se produce mediante un proceso de internalización. De este modo, el paso de lo externo a lo interno se produce a través de una forma específica de reflujo psíquico de la realidad: la conciencia, que Leontiev define como conocimiento compartido, una realización social. Y, finalmente, añade que la conciencia individual adquiere su existencia en la conciencia social, que encuentra en la lengua su sustrato real.

En este mismo sentido, siguiendo a Asbahr (o*p. cit.*, p. 111):

"*[...] En el tránsito de la conciencia social a la conciencia individual, el lenguaje y la actividad colectiva laboral desempeñan un papel fundamental. Siendo el trabajo una actividad socialmente organizada, el lenguaje se convierte en necesidad y condición para el desarrollo social e individual de los hombres. A través del lenguaje los hombres comparten representaciones, conceptos, técnicas, y los transmiten a las siguientes generaciones. El hombre se apropia de las significaciones sociales expresadas por el lenguaje y les confiere un sentido propio, un sentido personal vinculado directamente a su vida concreta, a sus necesidades, motivos y sentimientos".*

Significación y Sentido.

Inmediatamente debemos indicar, para comenzar, que Taille, Oliveira y Dantas (1992, p. 81) señalan que:

"*Vygotsky distingue dos componentes en el significado de la palabra: el significado propiamente dicho, y el 'sentido'. El significado propiamente dicho se refiere al sistema de relaciones objetivas que se formó a lo largo del proceso de desarrollo de la palabra, y consta de un núcleo relativamente estable de comprensión de la palabra, que es compartido por todas las personas que la emplean. El sentido, por su parte, se refiere al significado de la palabra para cada individuo, y está constituido por relaciones que tienen que ver con el contexto de uso de la palabra y con las vivencias afectivas del propio individuo*".

Por lo tanto, con estas ideas pertenecientes al ámbito de la significación de la palabra, Vygotsky encuentra una clara conexión entre los aspectos cognitivos y los afectivos del funcionamiento psicológico.

Se puede presentar lo que aquí estamos llamando sentido de otras formas, si bien la definición que aparece delimitada en la construcción de las etapas anteriores, pretende caracterizarlo como algo que pueda ser contemplado en virtud de la relación que se produce entre el motivo del acto y su contenido, en el marco de las actividades humanas.

Por su parte, Asbahr (2005), cuando se refiere al concepto de significación, señala que Leontiev (1978b) destaca como principal componente de la estructura interna de la conciencia la relación entre la significación social, el sentido personal y el contenido sensible, incluido el emocional. Comenta que la materialización de la misma se consolida a través de la experiencia humana y pasan a ser formas representativas destinadas a que el hombre se apropie de experiencias humanas generalizadas.

Para establecer una visión panorámica, a la vez que consistente, acerca de lo que se entiende por significación, en Asbahr (*op. cit.*, p. 111) encontramos que:

"*La significación es la generalización de la realidad que se encuentra cristalizada y fijada en un vector sensible, de ordinario, la palabra o la locución. Es la forma ideal, espiritual, de la cristalización de la experiencia social y de la práctica* *social de la humanidad. La esfera de representaciones de una sociedad, su conciencia, su lengua existen en cuanto que sistemas de significaciones correspondientes. La significación pertenece, por lo tanto, antes que nada, al mundo de los fenómenos objetivamente históricos*".

Por otro lado, podemos citar, con respecto a la significación y al sentido, el siguiente esquema desde la perspectiva que defiende Duarte (2005, p. 36):

"*Haciendo uso de los términos de Leontiev, al contenido del acto, esto es, a aquello que constituye su objeto, se vincula el* ***significado del acto****, es decir, el significado del acto es lo que el sujeto hace, es la respuesta a la pregunta: ¿qué es lo que está haciendo el individuo? Pero, la conciencia humana, según Leontiev, trabaja con las relaciones entre significado y sentido del acto. ¿Cuál sería el sentido del acto? Para Leontiev, el sentido del acto es dado por aquello que une, en la conciencia del sujeto, el objeto de su acto (su contenido) al motivo del mismo*".

Y acerca del proceso de apropiación, podemos traer a colación, en este sentido, las palabras de Asbahr (*ibid*):

"*[...] Las significaciones son fenómenos de la conciencia social, pero cuando pasan a ser propiedad de los individuos entran a formar parte de la conciencia individual. Cuando nace, el hombre se encuentra ante un sistema de significaciones establecido; apropiarse o no de tales significaciones depende del sentido personal que encierren para el propio sujeto. El sentido personal se engendra, se va produciendo en el transcurso de la vida del sujeto, en el desarrollo de su actividad".*

Por su parte, para intentar aclarar un poco más los aspectos anteriores dentro del ámbito psicológico, Asbahr (*apud,* Leontiev, 1978b, p. 111) señala lo siguiente:

"Desde un punto de vista psicológico concreto, este sentido consciente se crea a través de la relación objetiva que se refleja en el cerebro del hombre entre aquello que le incita a actuar y aquello para lo cual se orienta su acto como resultado inmediato. En otras palabras: el sentido consciente traduce la relación del motivo con el fin".

El sentido, en tanto que elaboración mental, por construcción, depende de una significación atribuida por alguien a algo. Y, como ya indicó Leontiev (1978b), el principal componente de la estructura interna de la conciencia es la relación entre la significación social, el sentido personal y el contenido sensible, emocional, toda vez que a lo largo de la evolución de la significación, el sentido presenta una naturaleza caracterizada por múltiples facetas. Ello justifica la dificultad de su investigación, pero debido a su estrecha relación con el motivo, Leontiev propone que, para desvelarlo, basta con analizar adecuadamente el motivo que a él le corresponde en cada caso.

Para caracterizar el hecho de que, en verdad, abordar el sentido y el significado no resulta ser una tarea fácil, podemos citar, a este respecto, las palabras de Asbahr (2005, p. 111-112):

"*Según Leontiev (1978b), en etapas anteriores de la evolución humana, significación social y sentido personal estuvieron unidos y, en cierta forma, eran* *coincidentes. La coincidencia entre significados y sentidos fue la principal característica de la conciencia primitiva, y eso se producía porque las significaciones aún no estaban completamente diferenciadas, y el hombre vivía en comunión con su sociedad; individuo y grupo poco se distinguían".*

"En la sociedad de clases, que se caracteriza por la propiedad privada de los medios de producción y por la separación entre trabajo manual e intelectual, la conciencia humana sufre una transformación radical: significaciones y sentidos no sólo dejan de ser coincidentes, sino que se vuelven contradictorios. Para el trabajador, aunque el significado social de su trabajo sea producir determinados productos, el sentido de trabajar es otro: se trata de obtener un salario porque sólo así puede sobrevivir".

Hay aquí una observación importante que puede extraerse de Asbahr (*op. cit.*) acerca de cómo la pérdida de sentido puede tener consecuencias negativas. Para el citado autor, la conciencia humana se encuentra fragmentada en las clases sociales, está desintegrada, y los significados y sentidos presentan una relación de exterioridad. Tomando como referencia las actividades manual e intelectual, señala que el trabajo intelectual, al transformarse en un medio de vida debido a su remuneración (salario), acaba sometido a las condiciones de producción, y establece un paralelismo entre el trabajo intelectual y la actividad docente, indicando que ésta puede llegar a perder su sentido limitándose a la mera obtención de un salario.

Los argumentos anteriores pueden encontrar diversas formas capaces de justificarlos, si bien se optó en este punto por recoger la posición que se expresa en el trabajo de Asbahr (*op. cit.*, p. 113):

"*Entender el significado de la actividad pedagógica se impone como un elemento importante en la investigación sobre la realidad de la enseñanza escolar (Basso, 1994), pues resulta fundamental para la comprensión de lo que motiva la actividad docente, esto es, cuál es el sentido personal atribuido a dicha actividad, toda vez que el sentido se relaciona directamente con la significación social*".

Para una mejor contextualización a propósito de esa significación social, Asbahr (*op. cit.*.) expone la relación que existe entre la significación social, el sentido personal y la actividad pedagógica, siguiendo a Basso (1994), y la formación del significado del trabajo como su objetivo (finalidad del acto de enseñar), eligiendo el contenido concreto efectuado por las operaciones conscientes llevadas a cabo por el profesor, considerando las condiciones reales de apropiación del conocimiento por parte de los alumnos. Más concretamente, puntualiza:

"*La significación social de la actividad pedagógica del educador es, justamente, proporcionar condiciones para que los alumnos aprendan, o mejor, se impliquen en actividades de aprendizaje. Para ello, el profesor es el responsable de organizar situaciones propiciadoras de aprendizaje, teniendo en cuenta los contenidos que han de ser transmitidos y la mejor forma de hacerlo*" (Asbahr, *op. cit.*, p. 113).

"*El profesor es, por tanto, el mediador entre el conocimiento y el alumno, entre los productos culturales humano-genéricos y los seres humanos en desarrollo. Tanto*

Vygotsky *(1988) como Leontiev (1978b) hacen hincapié en el carácter mediador del trabajo del profesor (adulto responsable o niño con mayor experiencia) en el proceso de apropiación de los productos culturales*." (*ibid*)

"*La mediación realizada por el profesor entre el aluno y la cultura presenta especificidades, o sea, la educación formal es cualitativamente diferente al tener como finalidad específica propiciar la apropiación de instrumentos culturales básicos que permitan la elaboración de comprensión de la realidad social y la promoción del desarrollo individual. Así, la actividad del profesor consiste en un conjunto de actos intencionales, conscientes, dirigidos hacia un fin específico*" (*ibid*, *apud* Basso, 1998, p. 4).

Algunos comentarios adicionales acerca de la Teoría de la Actividad

Moysés (2004), al destacar la desmitificación realizada por Vygotsky (1990) sobre el hecho de que la imaginación era apenas un privilegio de unos pocos y también acerca de la creencia de que estaba más desarrollada en los niños que en los adultos, toma como punto de partida la oposición entre *actividad reproductiva* y *actividad creativa* (*Combinatoria*). Sobre la primera actividad mencionada, se centra en el hecho de que ella misma resulta de fundamental importancia para la vida cotidiana del hombre, de manera que su empleo le llega a capacitar para adaptarse al mundo cuando vuelve. Por otro lado, la segunda actividad surge de la necesidad de tratar todo aquello que es nuevo, esto es, que presenta un tipo inusitado, con lo que para adaptarse a la nueva situación debe recurrir a la combinación creativa de elementos ya existentes en su cerebro.

Después de haber desarrollado con propiedad estas ideas, recomienda, en último término, una consideración aplicable al ámbito pedagógico:

"*Hay aquí, por tanto, dos ideas que deberían tenerse en cuenta por parte de los educadores, en especial, por parte de los responsables de la elaboración de las propuestas curriculares: la de que la imaginación creativa es susceptible de desarrollo, y la de que ésta guarda estrecha relación con la riqueza de experiencias y conocimientos previamente adquiridos por la persona.*" (Moysés, 2004, p. 44)

En virtud de lo anteriormente expuesto, es importante señalar que el interés de la presente tesis no está centrado en ellas, y sí, en la forma como Leontiev (1978a, 1989) trató sobre la actividad mental y su relación con el desarrollo de la personalidad, en especial, con la interrelación entre la actividad y la conciencia, en la medida en que esta última puede tomar en consideración diversas formas de abordajes pedagógicos.

Vygotsky, cuando se ocupa, dentro del estudio de la Psicología, de los procesos de socialización y de los emocionales, proporciona una nueva perspectiva relativa a la actividad grupal al intentar delimitar el papel de la interacción social en el desarrollo de las funciones mentales superiores. Pero, como destaca Moysés (2004), la interacción anterior se restringía a la relación entre niños y adultos, mientras que algunos investigadores a partir de sus estudios amplían sus ideas incluyendo la actividad compartida o actividad grupal. En este sentido, podemos citar hasta siete investigadores (Rubtsov y Guzman 1984/1985; Forman y Cazden 1988; Forman 1989; Rivina 1991;

Rubtsov 1989; 1991a; 1991b; Schenfeld, 1989; Saxe, 1992), que trabajan en la actualidad siguiendo esta línea de trabajo, con lo que podemos concluir que se trata de un área en crecimiento.

Moysés (*op. cit.*) señala además que se siguió una tendencia por parte de algunos investigadores soviéticos en el sentido de continuar las investigaciones iniciadas por Leontiev, más centradas en la actividad, siendo Davidov y Elkonin los responsables del alcance pedagógico que obtuvieron tales ideas en el ámbito del pensamiento soviético, del mismo modo que Vitaly Rubtsov puede ser considerado el líder de la investigación acerca del estudio de la actividad compartida en la situación de enseñanza-aprendizaje. Junto a ello, de una forma muy amplia, podemos caracterizar la existencia de dos líneas de trabajo con las siguientes palabras:

"*[…] La de quienes intentan saber de qué manera las formas colectivas de organización de las actividades de aprendizaje contribuyen al desarrollo de las funciones mentales superiores, y la de quienes, al analizarlas, se preocupan más por saber de qué forma favorecen la adquisición de conocimiento*" (*ibid*, p. 51).

Por último, y en función de los intereses de esta tesis doctoral están centrados en las actividades desarrolladas en situaciones producidas en el aula, así como por su papel en el desarrollo cognitivo, entre la extensa producción de Rubtsov con referencia a esta cuestión, analizada desde diferentes ángulos, cabe afirmar, siguiendo a Moysés (*op. cit.*, p. 54), lo siguiente:

"*En primer lugar, el autor pretende investigar de qué forma la organización de las actividades conjuntas funciona como una situación social capaz de conducir al desarrollo cognitivo (Rubtsov, 1989). En segundo lugar, profundizando en la cuestión anterior, se detiene en el estudio de los mecanismos psicológicos presentes en las actividades compartidas de resolución de tareas, que permiten realizarlas correctamente (Rubtsov; Guzman 1984/1985). Por último, y aunque se refiera a la misma temática general, puede clasificarse como perteneciente a la línea de los estudios que persiguen relacionarlo con la adquisición de conocimientos, realiza un análisis del papel del contenido en ese tipo de actividad (Rubtsov, 1991b)*".

Las informaciones anteriores referidas a la teoría de la actividad de Leontiev, de alguna forma revelan el hecho de que, a pesar de que originalmente dicha teoría no había sido elaborada con finalidades educativas, con el paso de los años comenzó a ser utilizada también en el ámbito de las investigaciones educativas.

2.2 Síntesis de los Aspectos Teóricos de las tres Teorías utilizadas en la Tesis

Los tres aspectos que recogemos a continuación de forma general albergan el propósito de caracterizar sistemáticamente algunos aspectos referentes a dichas teorías, que en sus idealizaciones contribuyeron a fundamentar la base teórica.

Síntesis de los Aspectos Teóricos de la Teoría de Ausubel en la Tesis Doctoral

Los cuatro textos de apoyo que forman parte de la presente tesis tienen en cuenta los aspectos que venimos discutiendo en lo referente a los organizadores previos, y se elaboraron con la finalidad de servir de organizadores previos, buscando una formación introductoria a los campos de la Combinatoria, de la Lógica Matemática, del Álgebra y de la Geometría Euclidiana. No obstante, en virtud de lo hasta ahora expuesto, podemos decir que los organizadores previos que aquí ofrecemos pertenecen al tipo *organizador comparativo*. Y, además, a pesar de cada una de las situaciones están direccionadas hacia los denominados como 'verdaderos organizadores previos', considerando las tres situaciones en conjunto como un todo, esto es, si consideramos cada texto de apoyo en sí mismo, podemos decir que se aproximan más a los llamados *seudo-organizadores previos*.

Síntesis de los Aspectos Teóricos de la Teoría de Vergnaud en la Tesis Doctoral

La base teórica que aquí presentamos acerca de la teoría de los campos conceptuales, tiene el propósito de caracterizar, dentro del ámbito de la conceptualización, el aprendizaje de los campos matemáticos de la Combinatoria, la Lógica Matemática, el Álgebra y la Geometría Euclidiana, considerando la tríada (referencia, significado, significante), y profundizando en las ideas básicas conceptuales de los mencionados campos en lo referente a su desarrollo y funcionamiento. Además, cabe señalar que por ser la didáctica el núcleo pedagógico del presente estudio, las situaciones que en él se producen, en virtud de su particular estructuración y desarrollo, se situaron más allá de la mera idea de tarea.

Síntesis de los Aspectos Teóricos de la Teoría de Leontiev en la Tesis

Los presupuestos teóricos expuestos acerca de la teoría de la actividad como foco, en el sentido derivado de la significación adquirida, fueron aplicados en la presente tesis doctoral a través de dos formas de utilización. La primera tuvo un carácter regulador, y ayudó en la elaboración de las *ADAVL* que se encuentran en las secuencias didácticas de los textos de apoyo, buscando una formación básica en Matemáticas dentro de los campos del Álgebra, la Combinatoria, la Lógica Matemática y la Geometría Euclidiana. La segunda tuvo un carácter investigativo, pues el acto mismo de la investigación sirvió como base para identificar (calificar) el tipo de comprensión que los alumnos de un Curso de Especialización en la Enseñanza de las Matemáticas presentaron después de haber recibido las enseñanzas y una vez que habían utilizado los mencionados textos.

2.3 Una revisión acerca de la Adquisición/Construcción de Significado y Sentido

En Carvalho (2002), encontramos algunas informaciones educativas clásicas generales, que cuando menos pueden ayudarnos a comprender que se ha producido una evolución en las concepciones acerca de la elaboración de un determinado conocimiento. Dewey (1959), cuando analiza a Herbar[2], hace importantes consideraciones sobre la educación, y, más en particular, sobre la enseñanza. Como mérito de Herbart señala el postulado de que la enseñanza no es una tarea que ocurre al azar; si bien, no faltan, a su parecer, deficiencias, entre las que destaca la omisión del aspecto activo en el aprendizaje de los niños. A su vez, añade otras cualidades y necesidades inherentes a dicha idealización, por ejemplo:

"*[...] una reconstrucción o reorganización de la experiencia, que aclara y aumenta su sentido, así como nuestra aptitud para dirigirnos en el curso de las experiencias consiguientes*" (Dewey, 1959, p. 83 *apud* Carvalho, 2002, p. 5).

Estas concepciones poseen en la actualidad un valor mucho más histórico que lo que se pretendía en sus propósitos originales, pues a pesar de que hoy existe una disciplina que se ocupa de estas preocupaciones, como veremos inmediatamente en el próximo apartado, notaremos que aún no se ha producido una unanimidad acerca de muchos de los criterios en los que se fundamenta tal disciplina.

2.3.1 La didáctica de las Matemáticas como una perspectiva epistemológica

Vergnaud (1996a) argumenta que, como consecuencia directa de la tesis interaccionista referente a la posibilidad de orientar los aprendizajes haciendo uso de situaciones apropiadas, Piaget, a diferencia de los didácticos, no vio o no quiso ver tal orientación. Más en concreto, señala que el didáctico de las Matemáticas responsable de la formulación sistemática de tal idealización fue, en realidad, Brousseau:

"*En efecto, éste distingue (tal vez más de lo necesario, pero desde luego, con toda pertinencia) entre: a) las situaciones de acción, cuya finalidad es hacer lograr; b) las situaciones de formulación, cuya finalidad es producir un mensaje y comunicarlo; c) las situaciones de validación, cuyo objetivo es demostrar la verdad de un enunciado o de una teoría y lograr la adhesión de los demás. En las tres categorías de escenificación así consideradas, entran en juego los procesos adaptativos, y en primer lugar, en la acción, origen y criterio del conocimiento operatorio*" (*op. cit.*, p. 196).

Además, cabe preguntarse cómo escoger una determinada situación. Y, en este sentido, en lugar de ofrecer una explicación, Vergnaud (*ibid*) se conforma con destacar que, entre algunos de los aspectos que se dan en el ámbito de determinado conocimiento, se encuentra el carácter epistemológico de la disciplina que se enseña, así como también los problemas prácticos y teóricos que se dan en la esfera de tal conocimiento. Además, y no menos importante que estos dos aspectos, en el seno de las fases de desarrollo de los alumnos inserta la Psicología cuya función consistiría en proporcionar la relación fundamental entre problemas y conocimientos, planteando, a continuación el siguiente cuestionamiento:

"*¿Qué objetivos teóricos y prácticos debe poner en juego el docente en las*

[2] Según Carvalho (2002, p. 4), "*El primero de los grandes pensadores que reveló una preocupación referente a los fundamentos científicos que deberían nortear la acción pedagógica fue el filósofo alemán Johann Friedrich Herbart (1776-1841)*".

situaciones que presenta a sus alumnos para que éstos entren en el juego, es decir, para que puedan comprender los aspectos básicos de las nuevas situaciones propuestas para darles sentido y reconocer en ellas las cuestiones por sí mismos?" (*ibid*, p. 197).

D'Amore (2007) promueve una discusión acerca del **estilo cognitivo y los perfiles pedagógicos**. Y, cuando trata de **cognición y conocimiento**, restringe el ambiente didáctico al desarrollo de procesos de enseñanza-aprendizaje en la escuela y elige como puntos de vista privilegiados el uso de metodologías didácticas dirigidas o indirectas por parte del profesor, mientras que, por lo que se refiere al alumno, habla de la codificación, la elaboración, la propuesta de hipótesis, etc. Cuando busca características que permitan distinguir relaciones próximas entre cognición y conocimiento, se remite al esquema de Bransford (1979), destacando que sus cuatro vértices (naturaleza y representación de los contenidos; características del sujeto que aprende; actividades, estrategias, procesos solicitados y puestos en práctica por parte del alumno; tareas de criterios usadas para la verificación del aprendizaje) tienen su presencia garantizada en los fenómenos educativos.

A continuación, desde una perspectiva heurística, postula que es importante el análisis de los cuatro componentes, en especial, la separación de las variables y sus efectos, respectivamente, la naturaleza de los contenidos y las características del sujeto que aprende.

Por ello, debido a los intereses de la presente tesis, cabe dar prioridad a la consideración que trata de la naturaleza y la presentación de los contenidos de los dos enfoques anunciados, y en especial, el ítem b (modalidades de organización y presentación), cuya prioridad puede encontrar una adecuada justificación en las siguientes palabras, tomadas de D'Amore (*op. cit.*, p. 318):

"*No entro en detalles; para (a) remito a Vicentini Missoni (1983); para (b), a Ausubel (1968). Solamente quiero mencionar que aquí retorna la temática de los* ***frame****, como moldes, en la medida en que se habla de variaciones en la modalidad de presentación de materiales*".

Según lo anterior, cabe preguntar: ¿por qué *frame*? En principio, como afirma D'Amore (*op. cit.*), y en particular para todos los que trabajan en el ámbito de las didácticas especificas, a pesar de ser un concepto olvidado en los estudios realizados sobre teoría de la educación, no se le ha otorgado la debida importancia a la naturaleza de los contenidos y sus modalidades de presentación. Más adelante, remitiéndose a una secuencia de aprendizajes de tipo jerárquico, como la referida por Gagné (1965-1985) o a alguna taxonomía entre las múltiples existentes, o a lo que él denominó como:

"*[...] Presentación orgánica sobre conceptos generales, de alguna forma anticipadora, como sugiere Ausubel (1968)*" (D'Amore, *op. cit.*, p.178).

Antes de adentrarnos más en la didáctica propiamente dicha, es importante recordar la existencia de un debate, en cierto modo polémico, pero que resulta pertinente a este respecto. Se trata de la verificación de que no existe unanimidad consensual acerca de la existencia de la didáctica como ciencia o incluso de la existencia de una didáctica general y/o específica.

En este sentido, D'Amore (*op. cit.*, p. 377) comenta la siguiente opinión de

Cornu y Vergnioux (1992, p.15):

"*Yo dudo de la existencia de una* ***didáctica general****, y tampoco veo lo que pueda ser la Didáctica de las Matemáticas; sin embargo, atisbo perfectamente lo que puede ser la didáctica de los números decimales, de la Geometría, [...]*".

A esta polémica se refiere D'Amore (*op. cit.*) cuando habla de los tres enfoques: Problemas de existencia o legitimidad, Problemas de Epistemología, y Problemas de formación.

En el caso de los 'Problemas de existencia o legitimidad', D'Amore (*op. cit.*, p. 378) llega a afirmar:

"*No existe una Didáctica general. [...]*" *vs.* "*No existe una Didáctica específica para cada disciplina en particular. [...]*", y, a partir de ahí, realiza la siguiente crítica referida a los aspectos terminológicos, confrontando las idealizaciones 'didáctica general' *vs.* 'didáctica especifica' (*ibid*):

"*Antes que nada, parece que existen problemas de lenguaje, al menos por lo que se refiere a la terminología:*

• ***Didáctica*** *puede ser entendida como* ***teoría de la didáctica,*** *deducida de la pragmática observada y de los resultados obtenidos*";

• *Por otro lado,* ***didáctica*** *también puede ser entendida en el sentido filosófico y teórico*";

• ***Didáctica****, en fin, puede ser entendida como algo mucho más específico*".

En el caso de los **Problemas de Epistemología,** D'Amore (*op. cit.*, p. 380) propone lo siguiente:

"*Solamente la Didáctica específica posee un estatuto epistemológico significativo. La didáctica general no tiene epistemología:* ***toma prestados*** *fragmentos de epistemologías de cada materia.*" *vs.* "*Solamente la Didáctica general posee un estatuto epistemológico significativo. El de las didácticas específicas coincide con la epistemología de la materia que constituye su objeto*".

Es en este mismo sentido como concibe la base de la controversia de la ambigüedad del término epistemología, indicando que, al menos, presenta tres significados, que, de un modo sintético, pueden presentarse como sigue:

"*1. Existen epistemologías de las disciplinas en sí, creadas por la historia del progreso y de los descubrimientos efectuados por los seres humanos que crean esas mismas disciplinas; muchas veces, la epistemología de una materia es el resultado de un fuerte debate que se produjo a lo largo de siglos; basta pensar en el concepto de verdad Matemática y cómo se transformó desde Platón hasta Hilbert!...*" (*ibid*, p. 381);

"*2. Existen epistemologías de las didácticas específicas que son* ***otra cosa****; aquí, tal vez, el término se encuentra más próximo al piagetiano, esto es, se trata de algo relativo al estudio de cómo evolucionan y de cómo se adquieren los conceptos. [...]*" (*ibid*);

"*3. Existen aún otras epistemologías de la didáctica general, que constituyen una tercera visión y que dependen de las elecciones que se sitúan en la base de la constitución de la didáctica general. Si la base es heurística (colecta y generalización de pruebas didácticas específicas), la epistemología apriorística resultante es una cosa. Si la base es, por así decirlo,* ***filosófica*** *(teórica), la epistemología resultante es otra cosa [...]*" (*op. cit.*, p. 382).

Por último, en el caso de los **Problemas de formación,** D'Amore (*op. cit.*, p. 384) caracteriza la oposición mediante las siguientes argumentaciones:

"*La Didáctica general es un depósito de actitudes psicopedagógicas (triviales) que es perfectamente sustituible por el sentido común, por el entusiasmo, por una sólida preparación en la disciplina, por un poco de sensibilidad, por una fuerte motivación para enseñar ...*" *vs.* "*La Didáctica específica coincide con la disciplina que tiene como objeto; por ejemplo, la Didáctica de las Matemáticas coincide con las Matemáticas. La preparación del profesor se encuentra, por lo tanto, ligada tan sólo a su formación en la disciplina. Si, por otro lado, se concibe el papel del profesor como* ***educador****, en cualquier nivel, entonces, teniendo clara su preparación en la disciplina, es necesaria tan sólo una formación en ciencias de la educación*".

A continuación, en este mismo sentido, parafrasea esas dos argumentaciones anteriores con otras dos mucho más difundidas, que son (*ibid*):

"*[…] Para enseñar bien, es necesario y suficiente conocer a fondo la materia objeto de enseñanza*" y "*la formación del docente está ligada, sobre todo, a estudios de carácter profesional, esto es, a la preparación en el campo educativo*".

Su conclusión viene a demostrar que las dos posiciones sobre la Didáctica General y la Didáctica Específica dejan de concebirse como opuestas, es decir, pasan a ser la misma.

Una vez expuestos estos argumentos acerca de la Didáctica en cuanto que campo, creemos que ha sido suficiente para evidenciar que aún existe un largo camino por recorrer hasta alcanzar su completa caracterización. Con todo, en la presente tesis se hace necesario puntualizar dentro del ámbito de las llamadas Didácticas Específicas, cuando menos, una referencia que sea compatible con los propósitos educativos de la misma. Y en este sentido, podemos recurrir a esta cita:

"*La didáctica de las Matemáticas es la ciencia del estudio y de la ayuda para el estudio de las Matemáticas. Su objetivo es llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio – o procesos didácticos – para proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con las que se encuentran todos aquellos (alumnos, profesores, padres, profesionales, etc.) que se encuentran en la tesitura de estudiar Matemáticas o de ayudar a otros a estudiarla*" (Chevallard, Bosch & Gascón, 2001, p. 59).

D'Amore (2007, p. 78) se refiere a la concepción de Gay Brousseau (1989a) cuando habla de: "*[…] una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, y por todo lo que esa producción y esa comunicación poseen de especifico*". Más adelante, añade:

"[…] una ciencia que posee como objetos específicos de estudio:

• *Las operaciones esenciales de la difusión de los conocimientos, las condiciones de esa difusión y las transformaciones que produce tanto sobre los conocimientos como sobre quien los utiliza;*

• *Las instituciones y las actividades que tienen como objetivo facilitar esas operaciones*".

La Didáctica de las Matemáticas, como se sabe, se ha desarrollado ampliamente, generando una variedad de formas, entre otros aspectos, gracias a la multiplicidad de situaciones educativas oriundas de las diversas relaciones existentes en el *núcleo duro*[3] compuesto por: *conocimiento matemático*, *profesor* y *alumno*. En particular, el referido núcleo puede ser caracterizado, respectivamente, a partir de sus metas, como sigue:

1: El conocimiento matemático (cultural) que debe ser difundido;

2: El responsable social e institucional de la difusión de tal conocimiento;

3: El responsable de la *adquisición adecuada*[4] del conocimiento matemático, difundido, socializado e institucionalizado.

Son varias las posibilidades que existen de interrelacionar los tres polos anteriores si lo que se quiere es establecer entre los ítems 2 y 3 significaciones pertinentes (comprensión) con relación a 1, esto es, respectivamente, la Enseñanza y el Aprendizaje de un determinado conocimiento matemático. En este ámbito, un vehículo articulador capaz de producir (generar) tal articulación puede construirse a partir de la elección de *contextos apropiados* (situaciones) que posibiliten que los aprendices atribuyan sentidos a la significación sobre tal conocimiento.

En el contexto del propósito anteriormente citado, debe destacarse, sin embargo, como ya anunció Vergnaud (1990a) entre otros, que difícilmente un concepto se deja desvelar en toda su complejidad a través de una y sólo una situación. Y, por otro lado, a pesar de que no existe un consenso absoluto en el campo de la didáctica, no pretendemos aquí crear ni recrear teorías, sino utilizar algunas ya existentes, y, cuando sea necesario y resulte posible, adecuarlas a los intereses del presente estudio.

De esta forma, recurriremos a algunos aspectos de la *Teoría de los Campos Conceptuales* (Vergnaud, *op. cit.*) y de la *Teoría de la Actividad* (Leontiev, 1978a) para aportar las necesidades teóricas en este estudio que atañen a la enseñanza, es decir, al ámbito didáctico. Con todo, la calidad educativa Matemática pretendida debe derivarse de la organización de los materiales didácticos, que, subyacentes en su estructura,

[3] Lo término Núcleo Duro es análogo a lo propuesto por Lakatos (1978).
[4] La adquisición aquí tiene en esencia que los alumnos después de la enseñanza deben ser capaz de utilizar, reproducir y reestructurar el conocimiento adquirido.

relacionan las dos primeras teorías más arriba indicadas, si bien persigue un aprendizaje de tipo supraordinado en el ámbito de la *Teoría del Aprendizaje Significativo* (Ausubel, 1978).

Debemos recordar ahora que una situación se define aquí en la medida en que posibilita la construcción de un conocimiento (significado) a partir del sentido aclarado por las actividades didácticas (estructuras contextuales). Es muy necesario llevar a cabo una reflexión sobre la concepción siguiente de Sastre (*apud* Abbagnano, 1992, p. 1085):

"Si el para sí [o sea la conciencia o el hombre] no es mas que su Situación, resulta que el estar en Situación define la realidad humana dando cuenta al mismo tiempo de su ser ahí y de su ser más allá. La realidad humana es, en efecto, el ser que siempre está más allá de su ser ahí, y la Situación es la totalidad organizada del ser ahí, interpretado y vivido de y para estar más allá de este mismo ser".

Por eso, una situación, en nuestro estudio, no puede ser contemplada como una simple actividad práctica. El aprendizaje, a partir de las situaciones, por tanto, puede ser concebido en virtud de una variedad de situaciones propuestas, que están constituidas por su acción/acciones didáctica(s), objetivando la enseñanza de un determinado contenido específico. La riqueza de la adquisición de conocimiento puede analizarse, ante la diversidad de respuestas que hemos caracterizado, mediante posibles cambios en las estrategias empleadas por los alumnos, si bien, para eso, se precisa poseer un buen foco de observación que, en nuestro caso, se centrará en el significado y en el sentido atribuidos al objeto de estudio.

2.3.2 El lenguaje como una perspectiva epistemológica

La dificultad para trabajar en el campo de la adquisición del conocimiento matemático llevó y ha llevado a muchos investigadores a intentar minimizar dichas dificultades, lo que, por un lado, ha desarrollado campos de estudio como la didáctica de las Matemáticas, en los que la preocupación por la *apropiación* de un determinado concepto se ha perseguido por caminos diversificados. Y una de estas tentativas llevó a algunos estudiosos a optar por el lenguaje como instrumento capaz de favorecer la comprensión Matemática.

D'Amore (2005) presenta una forma de trabajar en el ámbito del aprendizaje en Matemáticas, recurriendo a la semiótica y a la noética. El citado autor usa ambos términos, respectivamente, en los sentidos siguientes: la semiótica es ~~la~~

"[…] La adquisición de una representación realizada por medio de signos"; y la noética, la "*adquisición conceptual de un objeto*" (*op. cit.,* p. 30).

Al lado de las consideraciones que fueron expuestas con relación a las dificultades que entraña el trabajar con conceptos referidos a las Matemáticas, y aún más si cabe, en el ámbito de las investigaciones en didáctica de las Matemáticas, es importante tener en cuenta los tres aspectos apuntados por Duval (1998), *apud* D'Amore (*op. cit.*, p. 23):

"*[…] Todo concepto matemático remite a "no-objetos"; por lo tanto, la* *conceptualización no es y no puede basarse en significados que se apoyen en la realidad concreta; en otras palabras, en Matemáticas no son posibles reenvíos ostensivos*";

"[…] Todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de "objetos" para exhibir en su lugar o en su evocación; por tanto la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos";

"*[…] En Matemáticas se habla más de "objetos matemáticos" que no de "conceptos matemáticos" dado que en Matemáticas se estudian preferiblemente objetos mucho más que conceptos;" "la noción de objeto es una noción que no puede no utilizarse desde el momento en el cual se interroga sobre la naturaleza, sobre las condiciones de validez o sobre el valor del conocimiento".*

Alcalá (2002), por su parte, destaca el simbolismo como marca fundamental de las dificultades al trabajar con las Matemáticas, e indica que poseen un sistema simbólico con características propias, distinto de otros como los de la música, o el de la lengua escrita o hablada, sólo por citar algunos. Y, junto a ello, destaca también otras características del conocimiento matemático, como la forma de razonamiento, la variedad de estrategias y de procedimientos operativos, etc., llegando a la conclusión de que:

"*[...]* L*as Matemáticas se configuran ante los aprendices como un complejo y variado conjunto de signos que soportan significados (conceptos, representaciones, operaciones, etc.)[...]*" (*op. cit.*, p. 29).

Más adelante, afirma que las Matemáticas no llegan a ser un lenguaje, ni siquiera una lengua o un idioma, argumentando lo siguiente:

"*[...] Pues las Matemáticas son una ciencia, cada vez más esencial en la sociedad actual, que tiene sus métodos de trabajo, sus contenidos propios, sus ramas, etc., pero con unos rasgos semióticos de especial relevancia*" (*ibid*).

Para completar esta caracterización de afinidades y, al mismo tiempo, diferencias, entre las Matemáticas y el lenguaje, resulta importante recordar que hay muchos investigadores que consideran las Matemáticas como lenguaje, como indica Alcalá (*op. cit.*, 29) citando a Pimm (1990, p. 28):

"*El aspecto simbólico de las Matemáticas escritas, junto con el estímulo que brindan los matemáticos para hacer tabla rasa de la distinción entre símbolo y objeto, además de la naturaleza abstracta de los mismos objetos matemáticos, se unen para producir la percepción de que las Matemáticas constituyen un lenguaje".*

Si las Matemáticas se considerasen como un tipo de lenguaje, podríamos recurrir al campo de la filosofía, y más en concreto, al campo de la Lógica, para obtener una idealización acerca de estructuración de este tipo de conocimiento. Por ejemplo, Mora y

Leblanc (1992) señalan que los escolásticos, a pesar de conocer la distinción entre uso y mención con relación a la escritura de los signos, se valían de los contextos para identificar los propósitos para los que eran elaborados, y se hacía en función de cada una de las partículas o por los enunciados. Actualmente, esa distinción se establece en el campo de la llamada 'teoría de la jerarquía de los lenguajes' con la que se propone distinguir un 'lenguaje' al que se denominó objeto del lenguaje, del 'lenguaje de este lenguaje', conocido como metalenguaje.

En este mismo contexto y siguiendo los postulados de Mora y Leblanc (*ibid*), cabe informar que estudiar los sistemas de signos lógicos considerados como la base del discurso en la esfera de los metalenguajes es estudiar dentro del ámbito de lo que se ha venido a denominar *metalógica,* y que representa la semiótica (o estudio general de los signos). Para comprender la estructuración de aquello a lo que estamos denominando como semiótica, en cuanto que metalenguaje, es primordial referirnos a las tres dimensiones que la constituyen, es decir, a la *sintaxis*, a la *semántica* y a la *pragmática*. En palabras de Mora y Leblanc (*op. cit.*, p. 18):

"*La sintaxis estudia los signos como puras y simples figuras, independientemente de lo que designan y significan. Se define así mismo como el estudio de las relaciones de los signos entre sí. Por lo tanto, la sintaxis es la teoría de la construcción o la formación de cualquier lenguaje*"*;*

"*La semántica estudia los signos en relación con los objetos. La semántica opera, pues, en un nivel menos abstracto y formal que la sintaxis. Como una de las relaciones entre los signos y los objetos designados es la relación de verdad, la noción de verdad cae dentro de la semántica"*;

"*La pragmática estudia los signos en relación con los sujetos que los usan. Con respecto a este hecho, se dice que los signos significan algo para alguien, y la pragmática se ocupa de tales significaciones. La pragmática opera, por tanto, en un nivel menos abstracto y menos formal que la sintaxis y la semántica"*.

En la literatura al uso, se encuentran quienes defienden que las Matemáticas son un lenguaje y también quienes no admiten este extremo. El interés de este estudio, sin embargo, no es el de abrazar decisivamente una de las dos ideas. Si bien, por otro lado, se pretende admitir que, en el ámbito simbólico, este hecho pueda acarrear consecuencias pertinentes, es decir**, que en determinadas circunstancias pedagógicas, puede ser interesante considerar las Matemáticas como un tipo de lenguaje**.

Este propósito encuentra respaldo en la argumentación de Alcalá (2002), cuando ofrece hasta tres razones para justificar, didácticamente, la utilización de las Matemáticas como lenguaje. Una síntesis de sus argumentaciones podría muy bien estar representada por las siguientes palabras:

1. Ayuda a identificar las dificultades de aprendizajes inherentes a los ámbitos semántico, sintáctico y pragmático;

2. Da énfasis a la construcción progresiva de los significados, en lo que se refiere a los aspectos comunicativos y, en el ámbito sintáctico, orienta la actividad operativa;

3. posee rasgos delimitados a partir del proceso de simbolización de las dificultades, lo que le permite la manipulación de los símbolos y el uso del código para razonar y resolver problemas, posibilitando organizar, planificar e interpretar la enseñanza de las Matemáticas básicas.

Los presupuestos inherentes al tercer ítem, asociados a la experiencia en impartir clase por parte de los profesores, considerando, además, los aspectos indicados en los dos primeros, y tomando como base teoría(s) sobre el aprendizaje, son factores que pueden propiciar la construcción de materiales didácticos que ayuden en la tarea de minimizar malentendidos, equivocaciones y errores construidos por los alumnos a lo largo de un determinado proceso de enseñanza. Con todo, tales materiales deben estar formados de acuerdo con los dos principios que apunta Ausubel (2002):

"*En este momento, es necesario establecer una diferenciación entre los dos tipos básicamente diferentes de subsunción, que se pueden producir en el curso del aprendizaje y de la retención de carácter significativo. La subsunción* ***derivada*** *se produce cuando el nuevo material de aprendizaje se comprende, ya sea como un ejemplo específico de un concepto o proposición ya establecida en la estructura cognitiva, o como un apoyo o una ilustración acerca de un concepto o proposición de carácter general aprendido previamente. [...] En estas circunstancias, el significado del material derivado surge rápidamente y con una* ***relativa*** *facilidad, si bien, tiende a ser olvidado con rapidez, tanto porque se puede representar adecuadamente por el propio subsumidor, como porque se puede regenerar con facilidad un nuevo ejemplo cuando sea necesario*" (p. 156).

"*Sin duda, lo más normal es que la nueva materia se aprenda mediante un proceso de subsunción correlativa. En este caso, el nuevo material de aprendizaje es una extensión, una elaboración, una modificación o una matización de conceptos o proposiciones aprendidos previamente. [...] Cuando el material de aprendizaje intenta aumentar de manera explícita la discriminabilidad entre las nuevas ideas de la instrucción y las antecedentes ideas subsumidoras pertenecientes a la estructura cognitiva por medio de una serie de comparaciones que supone la exposición explícita de las semejanzas y diferencias entre ellas, se puede considerar la existencia de un subtipo* ***comparativo*** *de subsunción correlativa*" (p. 156-157).

2.3.3 Construcción de Significado a partir de la atribución de Sentido a las acciones Didácticas

La ampliación de Leontiev de la doble función de Vygotsky ya apuntada aquí siguiendo a Duarte (2005) servirá como referencia para los propósitos que van a ser discutidos en este apartado. Es decir, el establecimiento de la relación entre la estructura de la actividad humana y la estructura de la conciencia humana, servirá como base para la significación construida por los alumnos durante el procedimiento didáctico que está presentándose en este trabajo como una *actividad didáctica*. Cuando se analiza la relación entre el motivo de la acción y el contenido de la acción, procurando identificar sus consecuencias en la estructura cognitiva a través de la relación entre sentido y significado, resulta posible establecer la caracterización de si el aprendiz además de saber hacer, tiene claro lo que él está haciendo realmente.

La acción puede encontrarse en la base de la estructuración de la actividad humana y, en el ámbito de lo que se vino a denominar como *ADAVL*, la acción precisa caracterizarse como el rasgo dentro de una cultura. Si se tratara de una cultura material, incluiría cosas, martillos, llaves, etc. Y si fuese el caso de una cultura no-material, incluiría actos como una despedida con un gesto, mover la cabeza afirmando o negando, etc. La acción en sí no posee una unanimidad en términos de significación por parte de quienes la usan en sus teorías, pero esto, necesariamente, no ocasionará problemas al desarrollo del presente trabajo, porque, además de la sintaxis y de la semántica, también se tendrá en cuenta la pragmática a la hora de elaborar y aplicar las actividades didácticas. Sin embargo, se establecerán algunas consideraciones relevantes acerca de las acciones, inicialmente, partiendo de Piaget, cuando sobre la construcción del sujeto, afirma, según Davis (2005, p. 43), lo siguiente:

"*[...] Con el desarrollo, las acciones poco a poco se interiorizan, encubriéndose, o sea, haciéndose no visibles para el entorno. A lo largo del proceso, las acciones concretas pasan al plano interno, de forma casi literal al principio - como mera repetición mental de lo que se acabó de, o de lo que se pretende aún realizar. Posteriormente, las acciones internalizadas se van volviendo cada vez más esquemáticas, abstractas, amplias, reversibles y organizadas en sistemas*";

"*[...] Énfasis en la acción, la visión piagetiana postula, como no podría ser de otro modo, que el niño sólo puede conocer, esto es, construir conocimientos, en y por la acción individual que ejerce sobre los objetos por su parte. El niño de Piaget es, por lo tanto, esencialmente, un niño activo*".

Para proponer una ampliación que complemente la teoría de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud (1990a), movido por la necesidad de tratar la complejidad existente en la esfera de la conceptualización en Matemáticas, la acción, por ser la menor célula estructural de lo que se pasó a denominarse en esta tesis como actividades didácticas, adquiere una importante función organizacional. Por eso mismo, la acción precisa caracterizarse con precisión, y como las bases teóricas de Vergnaud (*op. cit.*) están centradas en Piaget, con el objetivo de exponer este hecho complejo, seguimos a Leontiev (1978a), que expresa el contrapunto de esta teoría a partir de Vygotsky.

En este sentido, Davis (*op. cit.*) afirma que Vygotsky opina que el niño, además de activo, como apuntaba Piaget, es también bastante interactivo en su teorización psicológica socio-histórica, y atribuye al psiquismo humano, en lo que se refiere a su estruturación, una construcción social de algo que resulta de la apropiación por parte del sujeto de conocimientos y producciones culturales de la sociedad en la que vive mediatizado por la propia sociedad. Es dentro de esta construcción donde cabe entender que *mediación* responde a una necesidad existente entre dos cosas capaces de posibilitar que se produzca una relación entre ellas. En Vygotsky, ese algo se trata de un compañero con más experiencia.

Según este concepto sobre la actividad humana que propone Vygotsky, podemos concluir, siguiendo a Davis (*op. cit.*, p. 44), en referencia al papel que desempeña en la formación del sujeto, lo siguiente:

"*Es, por lo tanto, en y por la interacción con otros sujetos humanos, en el ámbito de la actividad humana, como las formas de pensar se construyen y/o se transforman, transformando, a su vez, también al sujeto. Se puede decir, por tanto, que mediante la apropiación y la internalización del saber y del hacer de la comunidad es la forma en la que el sujeto se inserta, es decir, la forma en la que él se constituye en cuanto que tal sujeto, y al estar constituido de este modo, constituye también su comunidad*".

La complejidad de estos conceptos que han sido expuestos, parece invitar a buscar otras maneras de enfocar la idea de concepto y conceptualización. Pino (2005) presenta una visión general que viene a mostrar que no hay ninguna teoría dentro del ámbito antropológico que haya logrado establecer un consenso acerca de alguna de sus definiciones. Más adelante, señala que en la obra de Vygotsky no se incluye ninguna discusión sobre el concepto de cultura, si bien, el propio Vygotsky, cuando analiza trabajos psicológicos, llega a algunas conclusiones acerca de la *naturaleza* del desarrollo de las formas superiores de la conducta. O sea, el referido desarrollo es de *naturaleza cultural* y recuerda que, para tratar sobre ello, recurre al sentido más profundo del concepto de cultura. Pino (*op. cit.*, p.19) alude a esta referencia cuando señala que:

"*[...] Vygotsky está afirmando dos cosas: (1) la cultura es una "producción humana"; y (2), esa producción tiene dos fuentes simultáneas: la "vida social" y la "actividad social del hombre". [...] Vuelve a situar el debate filosófico sobre el paso del "estado de la naturaleza" al "estado de la sociedad" en términos del paso del plano biológico al plano de la Cultura".*

La comprensión de la forma en virtud de la cual se construye el proceso de *elaboración cultural del ser humano* puede ser enfocada a través del *sentido* que los individuos y grupos atribuyen a los *significados culturales instituidos*. Esto puede ser mejor explicado recurriendo al siguiente fragmento, extraído de Pino (*ibid*):

"*Vygotsky da a entender - lo que otros autores como Bakhtin y Peirce dejan mucho más claro - que el campo de la* ***significación*** *no es algo homogéneo, sino que en ellos se delinean áreas de mayor estabilidad y unidad, como ocurre con los* ***significados*** *socialmente instituidos, y áreas de mayor inestabilidad y diversidad, como es el caso del* ***sentido*** *que los significados culturales instituidos tienen para individuos y grupos diferentes".*

Las actividades humanas señaladas anteriormente, en cuanto que actividades didácticas serán enfocada como si se tratase de una construcción de tipo cultural que, como fenómeno educativo, posee tres componentes básicos indisociables: la enseñanza, el conocimiento y el aprendizaje. Enseñar puede concebirse como una negociación (intercambio y/o estructuración) de significados entre el que enseña y el que aprende/o grupos de personas que aprenden; el conocimiento surge durante un proceso en el que se dan formas interpretativas, en virtud de las cuales los aprendices aceptan dicha negociación (autoritarismo, imposición, convencimiento), y el aprendizaje se produce cuando el aprendiz realiza una conversión de los significados, es decir, cuando les atribuye un sentido propio.

Además de los aspectos tratados anteriormente, Pino (*ibid*) presenta una discusión sobre la forma en como fue definida la constitución cultural del ser humano a la luz de dos consideraciones: la primera se refiere a la naturaleza cultural del desarrollo y la segunda versa sobre lo que llama "salvaguardas" de la subjetividad en la constitución cultural del individuo. No obstante, en esta discusión, lo que llega a ser más útil para establecer la estructura del presente estudio es el momento en el que trata la comprensión del hombre desde una perspectiva histórica cultural, y que se revela por el surgimiento de lo simbólico, como señala Pino (*op. cit.*, p. 20):

"*(1) Por no estar el orden de lo simbólico sujeto a las contingencias de las llamadas "leyes físicas" (del espacio/tiempo), puede operar en todos y cada uno de los seres humanos al mismo tempo; (2) Por ser de naturaleza simbólica, las significaciones culturales, que constituyen el ser social o público de los hombres, se convierten en significaciones personales de cada individuo, y (3) Dado que en el acto de "conversión" permanece y otros deben cambiar (pues, en caso contrario no habría "conversión") - podemos concluir que la conversión de las significaciones culturales en significaciones personales constitutivas del individuo adquieren en él un sentido personal que el análisis semiótico puede revelar".*

El camino adoptado para culminar las expectativas educativas caracterizadas en el discurso utilizado en la anterior referencia, intenta remitir a la idealización de que la construcción de recursos didácticos (textos de apoyo) que posean una buena estructuración, es decir, que los objetos matemáticos puedan ser presentados (sintaxis), desarrollados (semántica) y comprendidos (pragmática). Si estos aspectos fueran estructurados por parte del que enseña y sometidos a un análisis a priori con el fin de reorganizar adecuadamente los aspectos anteriores en cuanto que metas, creemos que podrá producirse el acto de vislumbrar (aprendizaje significativa) el objeto matemático a través de su conceptualización.

D'Amore (2005), por otro lado, dice, siguiendo a Chevallard (1991), que un determinado objeto matemático se presenta en virtud de un sistema de praxis que puede caracterizarse a través de la manipulación de objetos materiales mediante una diversidad de *registros semióticos* (oral, de palabras o expresiones pronunciadas, gestos, dominio escrito: gráficos, fórmulas, [...]). Por eso, didácticamente hablando, *la noción de referencia* del objeto sobre la relación del objeto supera a la *noción de significado del objeto*, subsidiando y ese constructo constituye el fundamento básico de la 'teoría del conocimiento de Chevallard' (antropología cognitiva).

Cabe añadir que Chevallard (1992) coloca al individuo o a los grupos de individuos como foco en virtud de su(s) relacion(es) con el objeto. Esto lo habilita para enumerar dos posibles tipos generales de relaciones entre personas e institución, donde cabe destacar que institución, en este contexto, quiere decir conjunto de personas. Denominando X a las personas, I a la institución, O al objeto, y R a la relación, podemos decir:

a) R(X, O): relación de X con O;

b) R(I, O): relación institucional de I con O.

Afirmar la existencia de (a), significa decir que el objeto O existe para X; y afirmar la existencia de (b) significa decir que el objeto O existe para I.

Hay otro aspecto importante, todavía dentro del ámbito cultural, que fue apuntado por Duarte (2005) acerca de Leontiev, y que considera el presente estudio, y que dice que el proceso de apropiación de la cultura por el individuo es esencialmente un proceso mediatizado por la comunicación:

"*[...] Sus relaciones con el mundo tienen siempre como intermediario la relación del hombre con los otros seres humanos; su actividad está siempre inserta en la comunicación*" (p. 32).

A continuación, se presentarán tres características, que destacan la importancia del proceso de apropiación en el campo de la psicología (Leontiev, *apud* Duarte, 2005.):

"*[...] Se trata de un proceso siempre activo, esto es, el individuo precisa realizar una actividad que "reproduzca los rasgos esenciales de la actividad acumulada en el objeto"* (p. 33);

"*[...] Por medio de él, se producen en el individuo "las aptitudes y funciones humanas históricamente formadas", o sea, la apropiación de la cultura es el proceso mediador entre el proceso histórico de formación del género humano y el proceso de formación de cada individuo como ser humano"* (*ibid*);

"*[…] Tal proceso está siempre mediatizado por las relaciones entre los seres humanos, siendo, por tanto, un proceso de transmisión de experiencia social, esto es, un proceso educativo, en el sentido amplio del término"* (*op. cit.*, p. 34).

Luego, como hizo Duarte (*ibid*), es importante señalar que el proceso de objetivación también ejecuta este tipo de mediación, en la línea que apuntaba la segunda característica anterior, toda vez que la apropiación de la cultura no se completa si no se produce también la objetivación del ser humano en sus procesos culturales, en sus actividades sociales. En este sentido, podemos añadir:

"*[…] El individuo se forma apropiándose de los resultados de la historia social y objetivándose en el interior de dicha historia, o sea, su formación se realiza por medio de la relación entre objetivación y apropiación. Esta relación se efectúa siempre en el seno de relaciones concretas con otros individuos, que actúan como mediadores entre él y el mundo humano, el mundo de la actividad humana objetivada*" (*op. cit.*, p. 34).

El significado y el sentido, según Moysés (2004), fueron introducidos inicialmente por Vygotsky (1987) cuando se refirió a las relaciones entre lenguaje y pensamiento, en las que, en líneas generales, un individuo atribuye significado a una determinada palabra debido al dominio de su experiencia social, mientras que el sentido se deriva de la forma de su utilización, y, por tanto, del contexto que se establece.

Y aún, en el ámbito de las relaciones entre pensamiento y lenguaje, Vygotsky (*op. cit.*) apunta la existencia de un reduccionismo en los trabajos de Piaget, en lo que se refiere a comunicación intersubjetiva que conduce al proceso de socialización, toda vez que Piaget considera las relaciones entre pensamiento y lenguaje como independientes de la actividad social.

En este sentido, Duarte (2005) advierte de que ello puede traer consecuencias metodológicas, pues Vygotsky analiza la actividad y el lenguaje sin disociarlos, adoptando el método de análisis por unidades, o sea, el lenguaje tiene una doble función: la comunicativa y como medio de pensamiento, y su unidad de análisis es el significado de la palabra. En otras palabras (*op. cit.*, p. 32):

"*En el desarrollo del psiquismo, Leontiev amplía esta concepción de Vygotsky, estableciendo una relación entre la estructura de la actividad humana y la estructura de la conciencia humana. Así, la unidad inicial de análisis pasa a ser la de la relación entre el motivo de la acción y su contenido (o su objetivo). Esta relación entre el motivo y el contenido de la acción se refleja en la estructura de la conciencia como relación entre el significado y el sentido. Obviamente, la relación entre el significado y el sentido no puede establecerse sin la mediación del lenguaje".*

El punto de partida de la presente tesis doctoral a la hora de tratar la comprensión en cuanto que significado y sentido en el ámbito pedagógico perteneciente a las esferas de la enseñanza, del aprendizaje y de los procesos de enseñanza-aprendizaje, consiste en la atribución de un papel fundamental a la interrelación entre la acción y la conceptuación. Cabe aquí la argumentación establecida por Becker (2005), para quien la conceptuación se deriva de las acciones del sujeto y no de la enseñanza en sí, y, a la vez, el alcance de la estructura conceptual (herramienta fundamental del pensamiento) es accionado por la concientización de la acción, de forma progresiva, a través de mecanismos íntimos o debido a sus coordinaciones. Para intentar, en la medida de lo posible, aclarar estos conceptos, y siguiendo a la misma autora citada anteriormente, podemos decir que:

"[...] A partir de cierto nivel, se comprueba una influencia decisiva de la conceptuación sobre la acción. La acción pasa a ser corregida y puede ser mejorada en función de la conceptuación. Es ése el sentido de la afirmación de Piaget de que la toma de conciencia invierte el orden de la génesis; esto es, lo que venía primero, en el orden de la génesis - la acción con su éxito precoz -, viene después en el nuevo orden de las construcciones conceptuales mediante regulaciones activas; la acción que generaba la conceptuación pasa, ahora, a ser generada por ella, esto es, a sufrir modificaciones de la conceptuación originada de la toma de conciencia" (p. 31).

Para ampliar la riqueza de informaciones que subyacen en la idea anterior, podemos recurrir a Smole (2005, p. 38), que también se apoya en Piaget dentro del ámbito de la didáctica de las Matemáticas:

"[...] Nos alerta sobre el hecho de que existe una lógica de la acción que conduce hasta la construcción de ciertas identidades que van más allá de la percepción y de la elaboración de determinadas estructuras. Para él, en lo que se refiere a la pedagogía de las Matemáticas, caeríamos en un grave error si, limitándonos al plano del lenguaje, dejásemos de lado el papel de las acciones. Bien al contrario, en los alumnos jóvenes, la acción sobre los objetos resulta totalmente indispensable para la comprensión, no sólo en las relaciones Aritméticas, sino también en las geométricas,

las métricas temporales y espaciales".

Por otro lado, Smole (*ibid*) recuerda que de las preocupaciones sobre las acciones de los niños surgieron estudios, como los de Froebel y Maria Montessori, centrados en la producción de materiales educativos, que perseguían un aprendizaje por parte de los alumnos a través del desarrollo de aspectos de manipulación y experimentales. No obstante, estudios respaldados por la teoría de Piaget, puntualizan que es la acción y no la manipulación de materiales la que ocasiona buenos resultados educativos. Alertando, inclusive, del hecho de que si, en el transcurso del proceso, el alumno no se comportara de un modo reflexivo, no llegarán a establecerse relaciones entre lo que hace para solucionar el problema y la realización de la acción.

A todo lo anterior puede añadirse que la cuestión no está en el acto manipulativo de un determinado material en sí, sino en su utilización adecuada y recursiva, no sólo por parte del alumno, lo que posibilita vislumbrar un determinado contenido, sino también por parte del profesor, ayudándolo en su tarea didáctica. Así, cualquier recurso didáctico que pueda servir de puente en el proceso educativo, facilitando la actividad didáctica y promoviendo la adquisición de una nueva idea y/o reestructuración de una idea que, por algún motivo, aún esté mal elaborada, precisa ser considerado.

El uso de un determinado recurso, buscando viabilizar la construcción de significados (sintaxis) a través del sentido (pragmático) atribuido por el aprendiz durante el proceso educativo, según acciones didácticas apropiadas (semántica), en cierto modo, encuentran respaldo en Smole (*op. cit.*, p. 39), de acuerdo con los dos aspectos que señalamos a continuación:

"[...] Cualquier recurso didáctico debe servir para que los alumnos profundicen y amplíen los significados que construyen mediante su participación en las actividades de aprendizaje".

"[...] Aunque no es el uso específico del material con los alumnos lo más importante para la construcción del conocimiento matemático, sino la conjunción entre el significado que la situación en la que aparece tiene para el niño, sus acciones sobre el material y las reflexiones que hace sobre tales acciones".

Por su parte, para establecer una consideración acerca de lo que se argumentó sobre recursos didácticos, referido al ámbito del aprendizaje, cabe destacar la siguiente consideración, elaborada por Ausubel (2002, p. 59):

"*Algunos lectores podrán percibir alguna semejanza entre los conceptos de aprendizaje subordinado (subsumidor) y de orden superior, con relación a la teoría de la asimilación, por un lado, y las nociones que contrastan con la asimilación y con la acomodación de Piaget por el otro. En realidad, por lo que parece, es más un asunto meramente terminológico (nominal) que real. Piaget sólo emplea estos términos para describir distintos tipos de cambios **evolutivos** en los esquemas, en lugar de emplearlos para describir unos procedimientos de aprendizaje **contemporáneos**. En consecuencia, no hace ninguna referencia a las condiciones o mecanismos subyacentes a tales procesos de aprendizaje*".

El objeto propulsor de aspectos didácticos que son caracterizados en esta tesis, compatibles con las intenciones educativas de los últimos párrafos, coincide con todo lo que ha sido tratado hasta aquí y subraya la necesidad de un marco teórico que sea capaz de abarcar las teorías ya expuestas. Por ello, se adoptó la teoría del Aprendizaje Significativo (Ausubel, *op. cit.*), en la que, a su vez, el recurso utilizado para articular ideas nuevas de forma sustantiva con ideas ya pertenecientes al dominio cognitivo del aprendiz se denomina *Material Potencialmente Significativo*.

2.3.4 Actividades Didácticas y Construcción de Objetos y/o Conceptos Matemáticos

Según lo dicho, queda expuesta con cierta claridad la dificultad que existe para analizar la construcción del conocimiento matemático. Sin embargo, después de haber hecho algunas consideraciones con respecto a determinadas formas de abordar la cuestión, entre las teorías presentadas e, incluso, ante la diversidad de actividades humanas, debido al carácter pedagógico inherente a este trabajo, se resolvió optar por la ideación que aparece consolidada en estas páginas con el nombre de *ADAVL*.

La idea básica consiste, en función de los propósitos educativos, en añadir las denominadas como *situaciones* por Vergnaud en su *teoría de los campos conceptuales*, a las ideas relacionadas con la *actividad humana*, defendida por Leontiev en la llamada *teoría de la actividad*. Con ello, se pretende, en un principio, superar dos aspectos sutiles, pero que pueden aportar importantes contribuciones didácticas para la comprensión cultural de las Matemáticas académicas.

El primero de estos aspectos consiste en intentar una concisión mayor en lo que se refiere al marco teórico, procurando evitar ambigüedades originadas, en parte, por el uso inadecuado de ideas teóricas provenientes de una o incluso de varias teorías superpuestas. En segundo lugar, ayudar en el proceso de elaboración de materiales didácticos dotados de estructuras pedagógicas en forma de actividades didácticas con propósitos e intenciones educativas bien delineadas que posibiliten, como resultado, un aprendizaje significativo.

Cabe destacar, por otra parte, que la tríada (S, I, R) de Vergnaud, a pesar de su afirmación relativa a la existencia de una estrecha conexión entre (S, I) y (R,I), si se concibe como:

$$\{C\} = \{(S), (R), (I), (S, R), (S, I), (R, I), (S, I, R)\}$$

parece resultar más explícita tanto en lo que se refiere a la forma de existencia, según las contribuciones de cada uno de los siete elementos anteriores, como en sus relaciones dos a dos, o incluso considerando la integración de todos sus componentes.

Las estructuras desarrolladas en este capítulo, a pesar de la evidente complejidad que las envuelve, pueden ser mejor entendidas a través de las cuatro propuestas didácticas que se encuentran en el Capítulo 5, y en particular, en los Propósitos e Intenciones Educativas de las Actividades Didácticas delineadas para cada uno de los textos de apoyo utilizados.

En el caso de la teoría del aprendizaje significativo, el foco de interés se refiere directamente a dos procesos relacionados que, por un lado, integra la dinámica de la estructura cognitiva y, por otro, presenta una gran importancia desde el punto de vista instructivo. Los dos procesos se producen durante el aprendizaje significativo. Se trata de la articulación entre la *diferenciación progresiva,* que está más relacionada con el aprendizaje subordinado y la *reconciliación integrativa*, que está relacionada con el aprendizaje superordinado.

Por su parte, la ya mencionada articulación parece estar más clara, y, por lo tanto, se hace más perceptible, si la observamos dentro del ámbito de la TAS de Ausubel (2002), la diferenciación progresiva y la reconciliación integrativa. Por eso, pretendiendo analizar cómo están dispuestos (organizados) los elementos que pueden ser componentes de una determinada nueva información, así como las relaciones establecidas entre las ideas de orden del Aprendizaje Significativo de Ausubel (*op. cit.*), acerca del pensar, el actuar y el hacer como perceptible, es como la calidad de la adquisición pasa a ser función del mismo tipo que dicha articulación.

Para valorar en su justa medida el papel de tales ideas en la elaboración de los materiales de instrucción en el presente trabajo, representados por los cuatro textos de apoyo para la enseñanza de las Matemáticas en la *Enseñanza Fundamental* y en la *Enseñanza Media*, podemos afirmar, en palabras de Moreira y Buchweitz (1987), que:

"[...] El principio de la diferenciación progresiva debe tenerse en cuenta cuando se programa el contenido, por ejemplo, las ideas más generales y más inclusivas de la disciplina deben presentarse al principio para, solamente entonces, ser diferenciadas de un modo progresivo, a través del detalle y las especificidades" (p. 25).

"[...] La programación del contenido debe no sólo proporcionar la diferenciación progresiva, sino también analizar explícitamente las relaciones entre proposiciones y conceptos, llamar la atención sobre diferencias y similitudes importantes y reconciliar inconsistencias reales o aparentes. Es esto lo que debe hacerse para alcanzar lo que Ausubel denomina ***reconciliación integrativa,*** *y que él mismo describe como una antítesis de la práctica usual de los libros de texto, que separan ideas y temas en capítulos y secciones*" (p. 25-26).

Los cuatro textos de apoyo que conforman la presente tesis están fundamentados en los aspectos que fueron discutidos acerca de organizadores previos y se elaboraron con la finalidad de servir como tales organizadores previos, buscando una formación introductoria a los campos de la Combinatoria, de la Lógica Matemática, del Álgebra y de la Geometría Euclidiana. Pero, si tenemos en cuenta lo dicho hasta el momento, podríamos decir que los organizadores previos que aquí presentamos pertenecen al tipo *organizador comparativo*. Por otro lado, a pesar de que cada una de las situaciones en sí misma está enfocada a los llamados 'verdaderos organizadores previos', el conjunto de las tres situaciones consideradas como un todo, esto es, cada texto de apoyo en sí, se aproxima más a los llamados *seudo-organizadores previos*.

En la teoría de la actividad de Leontiev (1978a), lo que se denomina como actividad proviene de la relación del hombre con el mundo, donde las estructuras se establecen a través de las condiciones sociales y de las relaciones humanas que de ellas se derivan. De ahí que dichas actividades siempre se originan en un contexto de trabajo, ya sea físico o intelectual, a partir de relaciones inherentes a la vida social humana.

Según esta teoría de Leontiev, los objetos de interés son el *motivo de la acción* y el *contenido de la acción*. Para entender estos conceptos en pocas palabras, cabe indicar que están relacionados de forma indisociable e interdependiente, de manera que el primero que mencionamos tiene como base el generar la actividad, y, por tanto, la actividad sólo adquiere existencia a partir de él

Para Leontiev (*ibid*), la consideración de la relación entre la significación social, el sentido personal y el contenido sensible, emocional, considerados como principales componentes de la estructura interna de la conciencia, ayuda a formular un tipo de comprensión sobre aquello que el individuo pasa a comprender. Tal articulación, por la naturaleza de sus elementos constituyentes, es humana por excelencia, y puede ser examinada en el acto de la adquisición de una nueva información mediante la elaboración de actividades apropiadas.

Por otro lado, es también importante alertar del hecho de que la relación entre el pensar, el sentir y el actuar, según aparece reflejado en la teoría de la actividad de Leontiev, no debe ser tratada a partir de la mera etimología de las tres palabras, sino desde la perspectiva en que lo analiza, entre otros, Rossler (2004, p. 109-110):

"*Para Heller, en la vida cotidiana, la presencia de cualquiera de esas formas de pensamiento, sentimiento y acción, no es en sí misma un problema. Es más, cuando el individuo es incapaz de romper con estas formaciones psíquicas, incluso en las situaciones de su vida en las que tales padrones cotidianos, pensar, sentir y actuar necesitan superarse, nos encontramos ante un fenómeno de alienación. En otras palabras, cuando la estructura de la vida cotidiana se hiperatrofia, convirtiéndose en la única forma del individuo; cuando su vida se reduce a un conjunto de actividades centradas esencialmente en su reproducción, para la reproducción de su particularidad, presentando, así, modos rígidos de pensar, sentir y actuar, esto es, determinando un modo de funcionamiento psíquico (intelectual y afectivo) cristalizado, que no puede ser roto incluso en las situaciones que así lo exigen; en tales casos, estamos ante un fenómeno de alienación. Se trata, por tanto, de una estructura social alienada, de una cotidianeidad alienada, y, consecuentemente, de un psíquico cotidiano alienado*".

Para aclarar un poco mejor las ideas relativas a las ADAVL, parece razonable hacer una breve consideración acerca de los propósitos que dan lugar a que una actividad didáctica no sea simplemente concebida como una actividad cualquiera. Por lo tanto, ¿cómo proceder o de qué forma se puede concretar tal diferencia?

Movidos por esta intención, pensamos poder resolver la cuestión estableciendo una relación entre el contenido de la pregunta anterior y lo que Vila y Callejo (2006) indican cuando tratan sobre la resolución de problemas de forma segura: la resolución de problemas no debe ser confundida con una **simple tarea**. En el contexto escolar, entre otros muchos aspectos, existe una amplia tipología de actividades que son propuestas a los alumnos que se preocupan por aplicarse a diferentes conocimientos, habilidades y capacidades de programas matemáticos al uso. Sin embargo, en este sentido, sistematizan la diversidad llegando a establecer tres aspectos derivados del papel de la tarea en cuanto que función: inclusividad de la tarea, destinatarios y profesores. Tales aspectos, según Vila y Callejo (*op. cit.*, p. 28), se pueden definir, respectivamente, como sigue:

"*En primer lugar, podríamos abordar el hecho de presentar problemas en el aula considerándolos **simplemente** como **tareas**. Bajo esta perspectiva, la única cosa que parece que importaría (en el análisis y/o en la selección de problemas) sería, por lo* *tanto, su estructura Matemática, y nuestros esfuerzos de planificación de la clase quedarían reducidos a efectuar un análisis de tareas, dentro de la más pura tradición conductista, direccionados a poner en evidencia tal estructura Matemática (**finalidad ilustrativa de la resolución de problemas**) […]*".

"*En segundo lugar, si tuviéramos en consideración a los destinatarios, veríamos la diferente dificultad que puede suponer tal tarea para diferentes resolutores; eso nos llevaría a otorgar importancia a los conocimientos previos del resolutor, a las diferentes capacidades personales, a las ideas de **aplicación significativa/aplicación rutinaria** y, en función de ello, a distinguir la tipología de las tareas en una escala que denominamos **ejercicio-problemas**... En resumen, esto nos llevaría a dar importancia también a un amplio conjunto de aspectos **cognitivos** [...]*".

"*Finalmente, si tomásemos en consideración el hecho de que un mismo problema-tarea puede ser propuesto a los mismos alumnos con diferentes finalidades, y que se pueden obtener (por lo tanto) diferentes objetivos o realizaciones, podemos admitir la especial relevancia de un tercer personaje, los profesores, como algo más que un **prescriptor** o un **planificador** [...]*".

Por otro lado, debido al marco teórico en el que se halla enmarcado el presente estudio, centrarse en la teoría del aprendizaje significativo y, además, aunque su desarrollo no esté dirigido hacia la línea de investigación de la Resolución de Problemas, es perfectamente pertinente que el abordaje de la concepción anterior tenga en cuenta tanto el referido marco teórico cuanto la línea en sí. En este sentido, cabe citar a Gangoso (1999, p. 85), cuando, siguiendo a Ausubel (1992) afirma que al tratar acerca de los problemas-tipo los alumnos terminan realizando "una proeza", pues tratan de "*poder memorizar un conjunto de expresiones algébricas que, sin entender, aplican para llegar a la solución*". Y añade que los problemas-tipo están en el mismo nivel del aprendizaje mecánico, es como si se tratase de experiencias de laboratorio desarrolladas como "*receta de cocina*", si bien para que tales experiencias pasen a ser genuinamente significativas, las dos condiciones siguientes son necesarias (*ibid*):

• "*Deben fundamentarse en conceptos y principios claramente comprendidos".*

• "*Las operaciones constitutivas deben ser significativas por sí mismas*".

Por último, para poder complementar los objetivos pedagógicas establecidos en este estudio se hace necesario presentar algún tipo de presupuesto básico, con lo que se decidió seleccionar el siguiente: en el ámbito didáctico, la mediación, en un determinado tipo de enseñanza, está directamente relacionada con la forma en la que los objetos matemáticos fueron organizados dentro de un determinado material didáctico e, igualmente, con el dominio que el que enseña posee sobre la referida organización. Por eso, parece fundamental la participación de dicho sujeto que enseña en la elaboración del material que será utilizado por él en una tarea pedagógica. Y, por último, la calidad educativa de un determinado proceso pedagógico, en cuanto que investigación didáctica, debe evaluar la triangulación entre los resultados obtenidos en términos de *enseñanza* (conceptual y/o conceptualización), *procesos de enseñanza-aprendizaje* (el tipo de recursos adoptados) y *aprendizaje* (el tipo adquisición).

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA GENERAL

3.1 Marco Metodológico

El abordaje que aquí presentamos intenta enfocar algunos aspectos que nos permitan penetrar en el campo denominado investigación cualitativa y se completa con la identificación de aquellos elementos que, dentro de ella, más se aproximen a los propósitos del presente estudio. Inicialmente, partiremos de los aspectos específicos que pueden caracterizar las formas de investigaciones cualitativas y/o cuantitativas; en ese momento, llamaremos la atención sobre el hecho de que ciertos abusos cometidos cuando se emplean tales formas, en especial, cuando se realizan consideraciones extremadas, pueden llegar a comprometer una determinada investigación. A continuación, abordaremos el campo de la investigación cualitativa y, de forma muy simplificada, presentaremos los denominados principales métodos de investigación cualitativos. Por último, entre los métodos de investigación cualitativos presentados, haremos un especial énfasis en la investigación acción, con la intención de caracterizar su proximidad con los intereses de esta tesis. Este procedimiento de actuación está respaldado por algunas de las aportaciones realizadas, entre otros, por Alves-Mazotti & Gewandsznajder (1998), André (1998), Rodríguez, Gil & García (1996) y Moreira (2002).

3.1.1 Caracterización de la investigación Cualitativa

El punto de partida para abordar esta discusión radica en destacar las perspectivas de este tipo de investigación mediante el análisis de los aspectos polémicos que se han producido en este contexto. En este sentido, debemos recoger la indicación que, con respecto a la terminología 'investigación cuantitativa', señala André (1998), cuando afirma que, con ella, se comete una exageración, pues acaba rotulando la perspectiva positivista, y eso, como poco, resulta reduccionista. Es decir, una asociación de cuantificación y positivismo es algo que conduce a no considerar que cantidad y calidad se encuentren, ciertamente, relacionadas de algún modo.

Alves-Mazotti & Gewandsznajder (1998) se refieren a las objeciones de Kuhn (1977), relativas a la objetividad y racionalidad de la ciencia, recogiendo las críticas de Kuhn acerca de la imposibilidad de evaluar objetivamente una teoría científica. Con ello, se establecen dos líneas de relaciones que se oponen: una es el relativismo, representado por el intento de defender que *"[…] todas las metodologías, incluso las más obvias, tienen limitaciones.*" (Feyerabend, 1977, p.43), al que se une el constructivismo social de la Sociología del Conocimiento. Van Franssen (*apud* Alves-Mazotti & Gewandsznajder, *op. cit.*, p. 60), *"[...] defiende la idea de que las teorías se caracterizan mejor como un conjunto de modelos (visión semántica de las teorías).*" La segunda línea apuntada, pretende, a partir de la objetividad, caracterizar, de algún modo, la certeza en la ciencia. En este contexto, como modelos alternativos al positivismo en las ciencias sociales, se presentan los "paradigmas cualitativos", que con tal denominación, dan la impresión equivocada tanto de oposición en términos cualitativo-cuantitativo, cuanto de homogeneidad interna del paradigma.

Los modelos alternativos citados anteriormente están representados según los tres paradigmas siguientes: el constructivismo social, el postpositivismo y la teoría crítica. Alves-Mazotti & Gewandsznajder (*op. cit.*, p.132), siguiendo a Guba (1990), destacan que el término paradigma debe entenderse aquí como: *"[…] un conjunto básico de creencias que orienta la acción", de donde la acción implica* ***investigación disciplinada****"*. Además, siguiendo aún a Guba (*ibid*), tanto este tipo de descripción cuanto un análisis que trate los presupuestos básicos de los tres paradigmas mencionados es realizado a partir de tres dimensiones:

"[…] La ontológica (referente a la naturaleza del objeto a ser conocido), la epistemológica (referente a la relación conocedor & conocido) y la metodológica (referente al proceso de construcción del conocimiento por parte del investigador)" (Alves-Mazotti & Gewandsznajder, *ibid*).

André (1998) configura la perspectiva cualitativa de investigación, según Weber, destacando la comprensión, incluso, con ella, diferencia la ciencia social de la ciencia física. Ella añade que la investigación tiene como objeto la comprensión de los significados dados por los sujetos a sus acciones y, ante la necesidad de comprender esos significados, Dilthey indica que es preciso situarlos dentro de un contexto.

Si analizamos las afirmaciones anteriormente realizadas por André (*ibid*) en el sentido de que la investigación cualitativa no considera la realidad como algo externo al sujeto, sino que pretende identificar la forma propia, a partir de la cual comprende la realidad, termina caracterizando esa perspectiva del conocimiento como abarcadora de una 'idea-subjetivista'. Con lo cual, las investigaciones que toman tales perspectivas del conocimiento por cierto, se oponen al modo empirista de caracterización de la ciencia, que busca el descubrimiento por interpretación a través de la inducción, atribuyendo al investigador una posición neutra, toda vez que los hechos y valores están relacionados de forma íntima.

"*Y basándose en estos principios es como se configura el nuevo abordaje (algunos autores prefieren el término paradigma) de investigación, llamado "naturalista" por algunos o "cualitativo" por otros. Naturalista porque no conlleva manipulación de variables, ni tratamiento experimental; es el estudio del fenómeno en su acontecer natural. Cualitativo porque se contrapone al esquema cuantitativo de investigación (que clasifica la realidad en unidades susceptibles de mensuración, estudiándolas aisladamente), defendiendo una visión holística de los fenómenos, es decir, que tenga en cuenta todos los componentes de una situación en sus interacciones e influencias recíprocas*" (André, *op. cit.*, p.17).

Así, de acuerdo con el enfoque abordado, resulta posible establecer las diferencias esenciales entre las investigaciones cualitativas y cuantitativas apuntadas por Stake (1995 *apud* Rodríguez, Gil & García, 1996, p. 34), a partir de tres aspectos fundamentales:

"(1) *La distinción entre la explicación y la comprensión como propósito del proceso de indagación*; (*se sitúa en el campo epistemológico*); (2) *la distinción entre lo* *personal y lo impersonal que puede adoptar el investigador;* (*los datos deben ser recogidos y analizados estadísticamente y el investigador debe interpretarlos 'libre de valores'*) *y* (3) *la distinción entre conocimiento descubierto y conocimiento construido […]. Como tercera característica diferenciadora de la investigación cualitativa, Stake (1995) argumenta que en ésta el investigador no descubre, sino que construye el conocimiento*".

En líneas generales, en cierto modo, estos tres aspectos están ligados a la comprensión y, de forma simplificada, esta perspectiva de Stake (*ibid*), por lo que se refiere a los aspectos diferenciales de un estudio cualitativo están caracterizados en virtud de su carácter holístico, empírico, interpretativo y enfático.

Rodríguez, Gil & García (1996, p.62) destacan que:

"[…] La investigación cualitativa, se plantea, por un lado, que observadores competentes y cualificados pueden informar con objetividad, claridad y precisión acerca de sus propias observaciones del mundo social, así como de las experiencias de los demás. Por otro lado, los investigadores se aproximan a un sujeto real, que está presente en el mundo, y que puede, en cierta medida, ofrecernos informaciones sobre sus propias experiencias, opiniones, valores...etc. Por medio de un conjunto de técnicas o métodos, como las entrevistas, las historias sobre la vida, el estudio de caso o el análisis documental, el investigador puede fundir sus observaciones con las observaciones aportadas por otros".

Por lo tanto, los Investigadores cualitativos buscan adecuar un método que, a partir de lo que le permiten registrar sus propias observaciones, lleguen a descubrir los significados que los sujetos ofrecen en sus propias experiencias. Se trata, por tanto, de un método basado en significados, dados por los propios sujetos estudiados e interpretados por el investigador cualitativo. De esta forma, se estableció un consenso, según el cual, la naturaleza de las cuestiones sobre las investigaciones es que guían y orientan el proceso de indagación, el cual, a su vez, define la elección del método, caracterizado por naturaleza instrumental.

En virtud de todo lo expuesto, y más allá de sus concepciones y necesidades, el investigador debe tener conocimientos acerca de los tipos de investigación disponibles para poder llevar a cabo una elección adecuada. Junto a ello, debe poseer una visión global sobre la investigación cualitativa, a la que podemos hacer alusión, por ejemplo, a partir de las siguientes cinco características básicas, establecidas por Bogdan y Biklen (1982, *apud* Ludke & André, 1986): 1) La investigación cualitativa tiene en el ambiente natural su fuente directa de datos, y en el investigador su principal instrumento; 2) los datos recogidos son predominantemente descriptivos; 3) la preocupación con el proceso ha de ser mucho mayor que con el producto; 4) el "significado" que las personas dan a las cosas y a su vida son focos de atención especial para el investigador; y 5) el análisis de los datos tiende a seguir un proceso inductivo. Y, para contemplar esta referencia, presentamos, a continuación, un mapa conceptual elaborado como consecuencia de la asimilación de uno modelo de organización cognitiva sobre las investigaciones cualitativas.

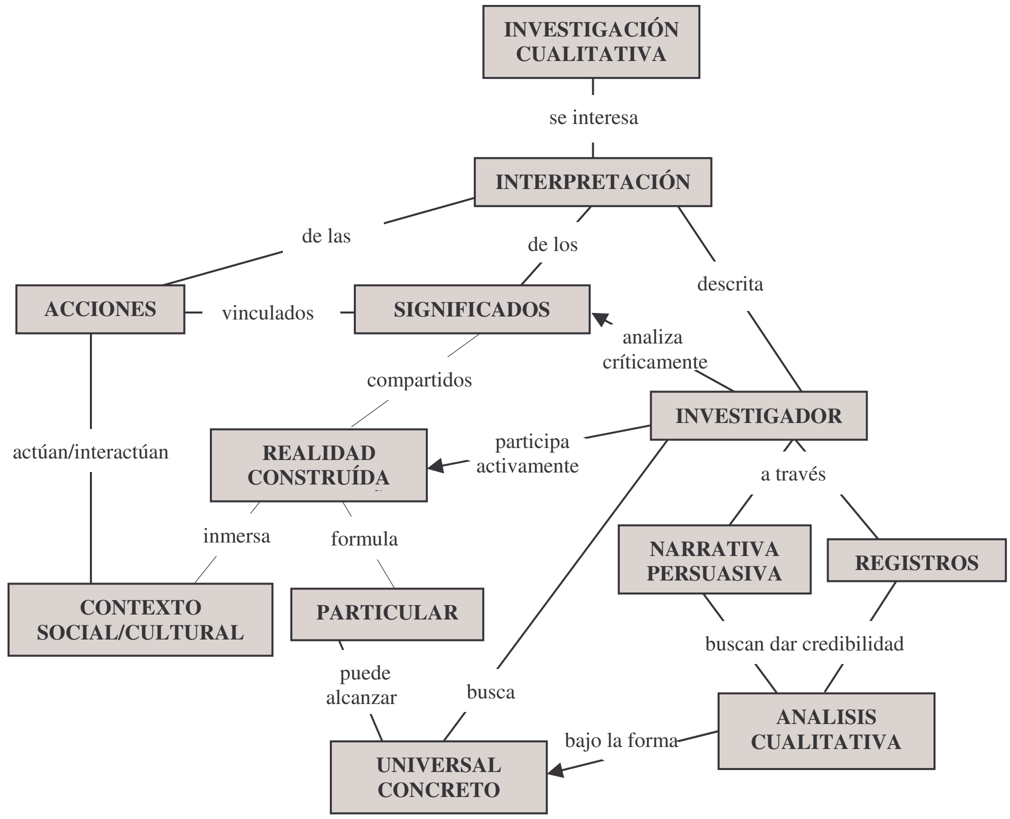


Figura 1: Un mapa conceptual sobre la investigación cualitativa (Silva, 2008)

3.1.2 La Investigación Cualitativa en el ámbito Educacional

Según lo visto hasta ahora, se puede apreciar, que no resulta fácil elaborar un estudio, dentro del contexto educacional. André (1998) señala que, para captar el dinamismo particular del mundo escolar, se hace necesario abordarlo considerando tres dimensiones: la institucional u organizacional, la instructiva o pedagógica y la sociopolítica/cultural. Ninguna de las cuales puede ser considerada aisladamente, sino que todas ellas han de concebirse como una unidad de múltiples interrelaciones. Estas tres dimensiones, en palabras de la propia autora, se explican del siguiente modo:

"*La dimensión institucional u organizacional engloba los aspectos referentes al contexto de la práctica escolar: formas de organización del trabajo pedagógico, estructuras de poder y de decisión, niveles de participación de sus agentes, disponibilidad de recursos humanos y materiales, en resumen, toda la red de relaciones que se forma y transforma en el acontecer de la viva escolar*" (*op. cit.*, p. 42).

"*La dimensión instructiva o pedagógica se ocupa de las situaciones de enseñanza en las que se produce el encuentro profesor-alumno-conocimiento. En tales situaciones están incluidos los objetivos y contenidos de la enseñanza, las actividades y el material didáctico, el lenguaje y otros medios de comunicación entre profesor y alumnos, así como las formas de evaluar la enseñanza y el aprendizaje*" (*op. cit.*, p. 43).

En este sentido, la propia autora señala que:

"*El proceso de investigación de la clase se realizará básicamente por intermedio de la observación directa de las situaciones de enseñanza-aprendizaje, así como a través del análisis del material didáctico utilizado por el profesor y del material producido por el alumno*" (*op. cit.*, p. 44).

"*Otra dimensión fundamental en el estudio de las cuestiones cotidianas de la escuela es la sociopolítica/cultural, que se refiere al contexto sociopolítico y cultural más amplio, o sea, a los determinantes macroestructurales de la práctica educativa. Este ámbito de análisis incluye una reflexión sobre el momento histórico, sobre las fuerzas políticas y sociales y sobre las concepciones y los valores presentes en la sociedad*" (*ibid*).

Además, también por lo que se refiere a la investigación en educación, es importante destacar la observación de Moreira (1999) sobre los focos de interés de cualquier fenómeno educativo, que están representados en los cinco elementos de Novak: la enseñanza (profesor), el aprendizaje (alumno), el plan de estudios (conocimiento), el contexto (medio social), y la evaluación. Cabe recordar que los ya mencionados cinco elementos, en cierto modo, se refieren a la inserción de la evaluación en los llamados cuatro "lugares comunes de la educación" elaborados por Schwab.

En este contexto, Ludke & André (1986) señalan que en la investigación cualitativa (naturalista), siguiendo a Bogdan y Biklen (1982), el investigador está en contacto directo con la situación estudiada, y se recogen datos de carácter descriptivo. Además, en este tipo de investigación, como el énfasis en el proceso es mayor que en el producto, resulta de importancia retratar la perspectiva de los participantes. Entre los diferentes tipos de investigación asociados a abordajes cualitativos hay tres que se destacan en el ámbito educativo: la investigación etnográfica, el estudio de caso y la investigación-acción.

3.1.3 Las Metodologías Cualitativas más Aplicadas a la Educación

Estudio de Caso

Lüdke y André (1986) señalan que el estudio de caso es el estudio de *un* caso, tanto considerado en cuanto objeto de estudio simple y específico como complejo y abstracto. El caso, por tanto, debe estar siempre bien delimitado y presentar sus contornos claramente definidos en el desarrollo del estudio. Por otra parte, puede ser similar a otros, pero necesita ser, al mismo tiempo, distinto, pues encierra un interés propio, singular, diferenciándose por el hecho de constituir una instancia singular dentro de un sistema más amplio.

De acuerdo con Sturman (1998 *apud* Moreira 2002), el estudio de caso es un término genérico para referirse a la investigación de un individuo, un grupo o un fenómeno, cuya característica más destacada por oposición a otros tipos de investigación radica en la creencia de que los sistemas humanos no son simplemente una serie de conjuntos de partes o de rasgos. Consecuentemente, el estudio de caso incorpora una visión holística de investigación, según la cual las características de una parte requieren la comprensión de sus interrelaciones con el todo. Se trata de una visión sistémica porque presupone que los elementos de un evento son interdependientes e inseparables y que, el cambio de un elemento implica un cambio en todos los otros.

Para Moreira (2002), la investigación del tipo estudio de caso se realiza cuando se pretende entender un caso, queriendo comprender y descubrir, en cuanto fenómeno, cómo ocurren las cosas y por qué ocurren, con el fin de poder predecir algo a partir de un único ejemplo o para obtener indicadores que puedan ser usados en otros estudios. En este tipo de investigación, ya sea cuantitativa, ya cualitativa, es necesario un profundo análisis de las interdependencias de las partes y de los estándares que emergen, lo que requiere un estudio de estándares y no de variables. Y es por esto por lo que las técnicas de investigación cualitativa resultan frecuentemente como las más adecuadas.

André (1998, p. 50), según Stake (1988), destaca que:

"[…] Los estudios de caso son extremadamente útiles para conocer los problemas y ayudar a entender la dinámica de la práctica educativa. Un estudio de caso que retrate un problema educacional en toda su complejidad individual y social constituye un descubrimiento precioso".

¿Cuándo y para qué usar el estudio de caso etnográfico y no otra estrategia de investigación? Eso depende, naturalmente, de lo que el investigador quiera saber, esto es, del problema que planteó y de las cuestiones a las que quiere responder.

Sintetizando las ideas de varios autores, André (*op. cit.*, p. 51-52) señala que se puede decir que el estudio de caso etnográfico debe emplearse:

"*(1) Cuando se está interesado en una instancia en particular, es decir, en una determinada institución, en una persona o en un programa específico o plan de estudios; (2) cuando se desea conocer en profundidad esa instancia particular en toda su complejidad y en su totalidad; (3) cuando se esté más interesado por aquello que ocurre y cómo está ocurriendo que por los resultados; (4) cuando se pretenden descubrir nuevas hipótesis teóricas, nuevas relaciones, nuevos conceptos sobre un determinado fenómeno; y (5), cuando se quiere retratar el dinamismo de una situación de una forma mucho más próxima a su acontecer natural*".

Entonces, se puede decir que, en síntesis, de acuerdo con los rasgos esenciales mencionados por Serrano (1998 *apud* Moreira, 2002 p 34.), en un estudio de caso cualitativo,

"[…] Las propiedades esenciales son la particularización (se centran en una situación, evento, programa o fenómeno particular), la descripción (el producto final es una descripción rica y densa del objeto estudiado), la heurística (iluminan la comprensión del lector con respecto al objeto de estudio) y la inducción (se basan en un razonamiento inductivo; las teorías, los conceptos o las hipótesis surgen de un examen de los datos fundamentados en el contexto mismo)".

Con respecto a los tipos de estudios de caso, Serrano (*ibid*):

"[…] Argumenta que pueden clasificarse por la naturaleza del informe final, independientemente de su orientación disciplinar o área de interés, en ***descriptivos, interpretativos*** *y* ***evaluativos***".

En síntesis, respectivamente según Serrano (*ibid*):

"[…] Se caracterizan por un informe detallado de un fenómeno objeto de estudio sin fundamentación teórica previa; son irremisiblemente descriptivos, no se guían por generalizaciones establecidas o hipotéticas, ni desean formular hipótesis o teorías".

"[…] Contienen descripciones ricas y densas; sin embargo, los datos descritos son utilizados para desarrollar categorías conceptuales o para ilustrar, defender o desafiar presupuestos teóricos difundidos antes del estudio. El investigador debe reunir tanta información sobre el objeto de estudio cuanto le sea posible, con la pretensión de interpretar o teorizar sobre el fenómeno".

"[…] Implican, descripción, explicación y juicios; sobretodo, este tipo de estudio de caso sopesa la información para emitir un juicio; la emisión de juicios representa el acto final y esencial de la evaluación".

Otra clasificación de tipos de estudios de casos, ahora siguiendo a Moreira (2002), según Stenhouse (1985), recoge, en primer lugar, el llamado *estudio de caso etnográfico*, al cual ya hicimos referencia anteriormente; en él, se desarrolla un estudio profundo de una entidad singular generalmente a través de la observación participante y entrevistas; en segundo lugar, el *estudio de caso investigación-acción,* cuyo objeto consiste en generar un cambio en el caso del estudio; después, el *estudio de caso evaluativo* se refiere a la evaluación de programas y, en él, un trabajo de campo más condensado sustituye muchas veces al enfoque etnográfico, que precisa de un tiempo mayor; por último, el *estudio de caso educativo* está diseñado para mejorar la comprensión de la acción educativa.

Moreira (*op. cit.*) señala que, según el análisis que se desprende de estas dos propuestas de clasificación realizadas por Serrano y Stenhouse, resulta difícil separar el estudio de casos de otros tipos de investigación cualitativa, como la etnografía y la investigación-acción. Y, apoyándose en André (1998), argumenta, además, acerca de la posibilidad de caracterizar el estudio de casos a partir de su preocupación central, que consiste en la comprensión de una instancia singular, lo que significa que el objeto estudiado es caracterizado como único, como una representación singular de la realidad que es multidimensional e, históricamente, situada.

Investigación-Acción

En el caso de la investigación-acción, Serrano (1994, *apud* André, 1998), basándose en las aportaciones de diversos autores, reconoce a Kurt Lewin como creador de esta línea de investigación. Lewin, que era un estudioso de las cuestiones psico-sociales, pretendía, con este tipo investigación, analizar las relaciones sociales y alcanzar cambios en las actitudes y comportamientos de los individuos. A esta orientación pertenece una de las líneas de investigación-acción que Corey (1953, *apud* André, 1998) caracteriza como un proceso a partir del cual los prácticos objetivan estudiar científicamente sus problemas en el sentido de orientar, corregir y evaluar sus acciones y decisiones:

"*La investigación-acción constituye una forma de búsqueda auto-reflexiva, llevada a cabo por participantes en situaciones sociales (que incluyen las educativas), para llegar a la perfección lógica y a la equidad de a) las propias prácticas sociales o educativas en que se efectúan estas prácticas; b) comprensión de las prácticas; y c) las situaciones en que se efectúan estas prácticas*" (Kemmis 1988 *apud* Rodríguez *et al.* 1996, pp. 52-53).

Eliott (1993), por su parte, señala que el objetivo fundamental de la investigación-acción consiste en mejorar la práctica en lugar de generar conocimientos. La producción y la utilización del conocimiento se subordinan a ese objetivo fundamental y están condicionados por él. La mejora de la práctica consistirá en implantar aquellos casos que constituyen sus fines, por ejemplo, la justicia como finalidad de la práctica legal; la atención al paciente, como finalidad de la medicina; el mantenimiento de la paz, como finalidad de la política, y la educación, como finalidad de la enseñanza.

Moreira (*op. cit.*, p.37), *apud* Kemmis y McTaggart (1988), indica que:

*"[…] La investigación-acción se define como una forma de investigación **colectiva auto-reflexiva**, emprendida por participantes de situaciones sociales para mejorar la productividad, la racionalidad y la justicia de sus propias prácticas sociales y educativas, así como su comprensión con respecto a dichas prácticas y a las situaciones en que se producen. Los participantes pueden ser profesores, alumnos, directores, padres y otros miembros de la comunidad, es decir, cualquier grupo que comparta una preocupación, un objetivo. Se trata de una investigación de colaboración, sin duda; y es importante enfatizar que esta acción de colaboración depende del hecho de que cada individuo examine, críticamente, sus propias acciones […]"*.

"*El proceso de investigación-acción, según Kemmis y McTaggart (1988) y Elliot (1993), se caracteriza por una espiral de ciclos de reconocimiento (descubrimiento de hechos): reconocimiento de una situación que se quiera modificar, planificación general de la acción, objetivación del cambio; **desarrollo**, **implementación** y **evaluación** de esa acción; reflexión a la luz de la evidencia reconocida en la implementación; revisión del plan general; planificación de la nueva acción, implementación, evaluación, reflexión, revisión del plan; planificación e implementación de una tercera acción […]*" Moreira (*op. cit.*, p.38).

En este contexto, Moreira (*op. cit.*) señalan que en la investigación-acción es un proceso de colaboración, acto-reflexivo en el cual la implicación directa de los profesores y de los demás implicados en la recopilación de los datos, en el análisis, la crítica, la reflexión, etc., crea inmediatamente un sentido de responsabilidad con respecto a la mejora de la práctica.

3.1.4 La Credibilidad en las Metodologías Cualitativas

La Validez

Goetz & Lecompte (1988) apuntan la necesidad del control de la calidad en las investigaciones cualitativas, en especial, en las etnográficas, mediante la fiabilidad y la validez, a partir de la utilización de estrategias que buscan la superación de las amenazas sobre la credibilidad de tales investigaciones. Por tanto, incluso cuando se trata de tradiciones positivistas, se recurre a los fundamentos de fiabilidad y de validez, y, en ambos casos, tanto interna como externa. Sólo así se hace posible la evaluación de la calidad de los componentes fundamentales.

Merece la pena resaltar lo que ya habíamos anunciado inicialmente acerca de la fiabilidad y de la validez: se trata de instrumentos de tradiciones positivistas y, por ello, mientras que las mediciones de los laboratorios pueden ser mejor controladas, en el caso de las investigaciones cualitativas la manipulación de los fenómenos ofrece una dificultad mucho mayor. Por lo tanto, se puede presentar la fiabilidad y la validez externa e interna en los siguientes términos, según Goetz & Lecompte (*op. cit.*):

"[…] El etnógrafo aumenta la fiabilidad externa de sus datos determinando e intentando dar solución a cinco problemas principales: los referidos al estatus del investigador, la selección de informantes, las situaciones y condiciones sociales, los constructos y premisas analíticas, y los métodos de recogida y análisis de datos" (*ibid,* p. 217).

"[…] Sin una corroboración aportada por otros, la investigación realizada puede ser tachada de idiosincrásica y carente de un registro cuidadoso y sistemático de los fenómenos. Para proteger sus estudios de las dudas acerca de su fiabilidad interna, los etnógrafos pueden utilizar una de estas cinco estrategias: descripción de bajo nivel de inferencia, pluralidad de investigadores, participantes ayudantes, revisión por otros investigadores y datos registrados automáticamente" (*ibid,* p. 221).

"*La definición de validez interna presentada contempla el problema de si las categorías conceptuales que se cree que poseen los mismos significados para los participantes y el observador, son realmente compartidas. Las amenazas sobre la validez interna descritas por Campbell y Stanley (1966) y Cook y Campbell (1979) para el caso de la investigación experimental se mantienen para el caso de la etnografía; incluso, se plantean en esta última problemas algo diferentes y la solución puede abordarse de otro modo. Estas amenazas son: la historia y la maduración, la influencia del observador, la selección y la regresión, la mortalidad y las conclusiones apresuradas*" (*ibid,* p. 225).

Con respecto a la validez externa, Goetz & Lecompte (*op. cit.*) apuntan, como amenaza a los propósitos de la investigación etnográfica, aquellos factores que puedan impedir o reducir la comparabilidad y la traducibilidad en una determinada investigación. Además, añaden que tanto la comparabilidad como la traducibilidad deben ser establecidas a través de lo que Wolcott denominó tipicidad de un fenómeno, o sea, en qué medida los referidos fenómenos pueden ser comparados y contrastados con otros. Con ello, la validez externa queda establecida en lo que se refiere a la identificación y la descripción de las características esenciales de los fenómenos a partir de la comparación con otros por similitud. En este sentido, ante la aparición de un determinado fenómeno, sólo es posible a partir de la comparación y la traducción de resultados, aplicar estos últimos a distintos contextos y disciplinas.

Finalmente, por lo que se refiere a los problemas relacionados con la **validez**, podemos mencionar aspectos ligados al ámbito de lo fidedigno y a la generalización. Por ello:

"*Para desarrollar un estudio de caso "cualitativo", el investigador precisa, antes que nada, ser enormemente tolerante con la ambigüedad, es decir, debe saber convivir con las dudas e incertidumbres que son inherentes a ese abordaje de investigación. También ha de aceptar un esquema de trabajo abierto y flexible, en el que las decisiones se vayan tomando a medida que sean necesarias. No existen normas establecidas sobre cómo proceder en cada situación específica, y los criterios para seguir esta o aquella dirección son, por lo general, poco evidentes*" (André, 1998, p.59).

3.1.5 Caracterización de la Metodología empleada en el Estudio

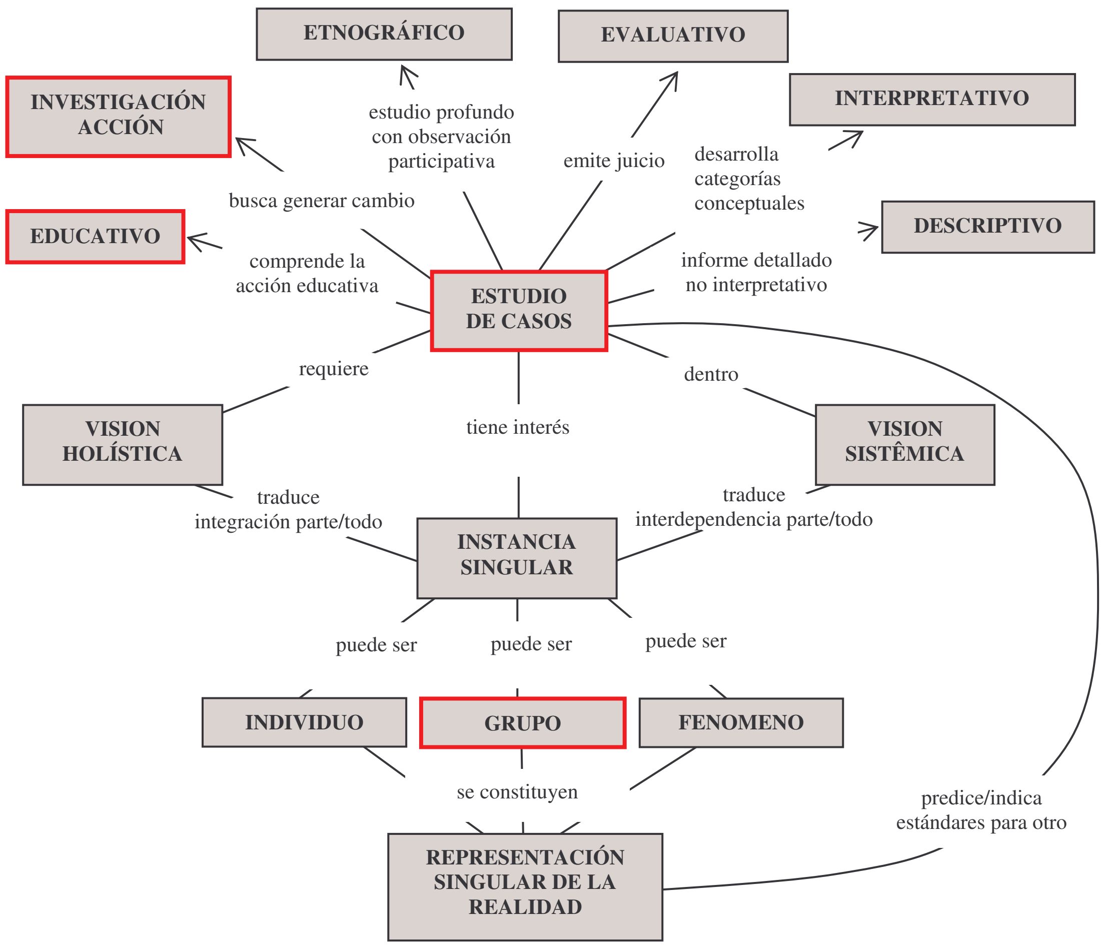


Figura 2: Un mapa conceptual para estudio de casos (Silva, 2008)

El abordaje presentado en esta parte de la metodología tiene como objetivo situar metodológicamente esta investigación, cuya preocupación central es la comprensión de una instancia singular educativa (un Grupo de un Curso de Especialización en la Enseñanza de las Matemáticas). Por eso, se trata de un estudio de caso educativo. El propósito de la investigación consiste en mejorar la práctica pedagógica (desempeño didáctico) de un grupo de 32 profesores de la *Enseñanza Fundamental* y *Media*, considerando como procesos sus características políticas, colectivas, de colaboración, autoevaluativas y autotreflexivas. Con todo ello, se buscan los cambios en las concepciones de los participantes a partir de las acciones e interacciones desarrolladas durante el período en que fue impartida la disciplina *Didáctica de las Matemáticas* en el referido curso. En este sentido, podemos afirmar que la investigación es cualitativa y se halla situada en el ámbito de los denominados estudios de caso educativo del tipo investigación-acción. Y, para concluir este apartado, ofrecemos en el apartado siguiente una visión panorámica de los propósitos metodológicos que hasta aquí han sido presentados, en forma de mapa conceptual.

3.2 Marco Didáctico

3.2.1 Intenciones Metodológicas Estructuradoras de los Textos de Apoyo

Actualmente, se está discutiendo de forma abierta sobre la necesidad de una mejora en la calidad de la formación del conocimiento del ciudadano como un todo: es lo que se denomina holismo. La calidad que se persigue se refiere tanto a una mejor formación académica, como a una mejora en la calidad de vida de los individuos en términos generales. Los intereses del presente estudio en lo referente a tales mejoras surgieron de necesidades observadas y discutidas en cursos de extensión, graduación y especialización en la enseñanza de las Matemáticas. **Para ilustrar y aclarar estos objetivos, se elaboraron cuatro textos de apoyo, provenientes de trabajos de conclusión de Cursos de Especialización en la Enseñanza de las Matemáticas (CEEM), con la expectativa de consolidar la importancia de la producción y utilización de este tipo de material, buscando un aprendizaje significativo de las Matemáticas.**

Uno de los propósitos que persiguen los cuatro textos de apoyo que forman parte de esta tesis, tanto de una forma general como específica, es el intento de caracterizar el importante papel de la didáctica de las Matemáticas en el ámbito de la producción y utilización de recursos didácticos como soporte para fundamentar la construcción del conocimiento matemático. Y todo ello en los ámbitos correspondientes a las áreas Matemáticas de la *Combinatoria*, el *Álgebra*, la *Lógica Matemática* y la *Geometría*, que constituyen las bases Matemáticas de la *Enseñanza Fundamental* y *Enseñanza Media*.

Las ideas presentadas sobre el campo de la didáctica tendrán en cuenta los aspectos que sobre la visión clásica de la didáctica de las Matemáticas fueron comentados por Chevallard (2001), esto es, considerada no como meta, sino del mismo modo que él lo hace, esto es, defendiendo la idea de que la didáctica tiene como fin proporcionar recursos técnicos para que los profesores realicen sus actividades educativas, en función de dos problemáticas: la primera se refiere al pensamiento del alumno y está relacionada con la teoría del aprendizaje significativo (Ausubel, 1978); la segunda, además de considerar los aspectos relativos a la instrucción en relación con los alumnos, considera también la figura del profesor y su formación como tal.

Se hace necesaria la apertura a otras ideas, pues, como indica el propio Chevallard (2001), en la elaboración del texto anteriormente citado, el hecho de que, en el ambiente escolar, la *actividad de estudio* ha sido confundida con el *acto de enseñanza*, siempre que se ha otorgado una cierta importancia a esos momentos, cuando han ocurrido en la clase. Chevallard (*op. cit.*) llama la atención sobre el hecho de que:

"[…] El efecto que se persigue con el estudio, esto es, el aprendizaje, se produce independientemente de haber enseñanza o no, como generalmente se piensa, adviene apenas durante el mismo" (p. 57).

Lo que quiere decir que:

"*El estudio - o proceso didáctico - es un proceso más amplio que no se restringe al* ***proceso de enseñanza y aprendizaje****, pero lo engloba*" (*ibid*).

También con relación a la didáctica de las Matemáticas, los cuatro textos de apoyo han sido elaborados teniendo en cuenta los *procedimientos para la dirección del aprendizaje* a partir de los llamados *métodos* o *formas metodológicas*, que recoge Bardera (2000) cuando se refiere a los procedimientos didácticos. Se debe tener en cuenta sin embargo, la responsabilidad del profesor en promover el cambio del estatuto de los conocimiento que se puede hacer con la Teoria de la Situaciones (Brousseau, 1986), en especial, con las llamadas **situaciones de institucionalización**. Sin embargo, las actividades didácticas presentadas en dichos textos, en lo esencial, están basadas en las aportaciones teóricas de Brousseau (*op. cit.*), Leontiev (1978a) y Vergnaud (1990a) y siguen, como teoría abarcadora, los postulados de Ausubel (*op. cit.*). Con ello, además de superar algunas de las dificultades didácticas establecidas superficialmente aquí, se pretende contribuir a concienciar a los profesores sobre la necesidad de la utilización y de la elaboración de materiales didácticos, así como la elaboración de estrategias metodológicas, que permitan, con el establecimiento de recursos didácticos apropiados, una mejor calidad en la enseñanza de las Matemáticas.

Lo que se pretende objetivar, desde un punto de vista didáctico, mediante los cuatro textos de apoyo mencionados (propuestas didácticas) es una calidad sustancial de la información que va a ser presentada en el acto de difusión del conocimiento matemático. Para poder alcanzar tales objetivos, la meta establecida consiste en la intención de producir materiales que puedan ser calificados como *potencialmente significativos* para la Enseñanza de las Matemáticas. En este proceso de elaboración se siguió el apoyo teórico educacional que proporciona la *teoría del aprendizaje significativo* de David Ausubel (2002), conjuntamente con la *teoría del aprendizaje significativo crítico.* (Moreira, 2005).

3.2.2 Información acerca de la Elaboración de los Textos de Apoyo/Investigación

Las necesidades de mejora y el aporte teórico del presente estudio se realizaron, en un primer momento, a través de las respuestas vertidas por profesores y alumnos, incluso mediante evaluación continuada de los alumnos a lo largo del Curso de

Especialización en Enseñanza de las Matemáticas (CEEM), realizado en el curso académico 2000/2001. Durante todo ese período, podemos destacar que la introducción de la disciplina "Introducción a la Filosofía de las Ciencias y de las Matemáticas", que se produjo después del segundo CEEM, dio lugar a cambios satisfactorios, pues aumentó la capacidad crítica y el desempeño de los alumnos. Esto se demuestra tanto si consideramos las notas que obtuvieron los alumnos en las diferentes evaluaciones después de cursar cada disciplina, como en el discurso desarrollado por los propios alumnos, tal y como aseguraron algunos profesores de disciplinas de contenido específico (Matemáticas), al haber percibido diferencias en los grupos a partir del curso 1999-2000, cuando se comenzó a cursar la referida disciplina, con respecto, por ejemplo al grupo del curso 1998-1999, que no la estudió.

Otro factor importante registrado en el acto de construcción del conocimiento erudito matemático por parte de los alumnos del CEEM fue la argumentación favorable de los propios alumnos con respecto al hecho de que si las nuevas ideas presentadas fuesen relacionadas con aspectos cotidianos socioculturales (siquiera de forma práctica) y/o raíces históricas, profundas o no, acerca de un determinado tema estudiado, ello facilitaría una aproximación mucho mayor al conocimiento erudito abordado. Estos aspectos que acabamos de mencionar, coinciden en lo sustancial con las apreciaciones vertidas en los estudios de: Schlimann, Carraher y Carraher (1988); Bishop (1994); o D'Ambrósio (1993), entre otros.

Todos los aspectos presentados en este apartado acerca de la elaboración de propuestas didácticas derivadas de problemas enfrentados en el acto de la enseñanza, y que van desde la fragmentación de los contenidos presentados, pasando por equivocaciones y/o errores conceptuales, hasta una mala presentación de los contenidos por parte de los profesores, justifican la necesidad de una mejora "considerable", de la calidad de la enseñanza. Esta necesidad de mejora de la calidad de la enseñanza, en cierto modo, desde distintas perspectivas, se origina a partir de diversos problemas que ocasionan muchas dificultades a los profesores en el acto de enseñanza, lo que provoca también obstáculos en el aprendizaje de los alumnos. En este estudio, por contra, nos proponemos minimizar las dificultades en el acto de enseñanza, partiendo de la utilización de propuestas elaboradas por los propios profesores que buscan, entre otros factores, reducir al máximo la fragmentación, los errores y/o equivocaciones conceptuales, así como la deficiente exposición de los contenidos.

Por eso, para atender estos fines, en lugar de trabajar en una única área de las Matemáticas, tratando sobre un tema específico de forma aislada, se elaboró una propuesta que satisfacía las características básicas del conocimiento matemático para la *Enseñanza Fundamental* y la Enseñanza *Media*. De ahí se deriva el hecho de haber trabajado en las cuatro áreas que conforman las bases Matemáticas estudiadas en los mencionados niveles de enseñanza, a saber: la Combinatoria, el Álgebra, la Lógica Matemática y la Geometría, que, adecuadamente organizadas, podrán servir de fundamentación para dos tipos de estructuración: la argumentación de los profesores en el acto de enseñanza y el establecimiento del conocimiento matemático de los alumnos en su aprendizaje.

3.2.3 Procedimientos y Criterios de Adoptados

Procedimientos adoptados para la producción de los textos de apoyo

Avanzar en la construcción del conocimiento cuando nos enfrentamos con una supuesta suficiencia atribuida por parte del aprendiz, requiere convencerlo sobre la insuficiencia de sus resultados (limitación de sus soluciones), incluso cuando, en ciertos casos, los procedimientos y respuestas les resulten muy familiares y puedan hasta ofrecerles respuestas próximas a las compartidas por la comunidad científica que trabaja con determinados *paradigmas*[5]. En nuestro caso, como fundamentos para poder trabajar en este ámbito, vamos a recurrir a tres campos teóricos - *epistemología*, *formación de conceptos* y *didáctica de las Matemáticas*- con el fin de enfocar mejor la enseñanza de las Matemáticas y, por consiguiente, para caracterizar en el aprendiz la *necesidad de cambio*[6].

La intención educativa intrínseca a los Cuatro Textos de Apoyo que se elaboraron (2004), tuvo en consideración tanto los aspectos caracterizados en el apartado 'Intenciones Metodológicas Estructuradoras de los Textos de Apoyo', como la aportación teórica citada en el último párrafo. Con estos textos, intentamos convencer a los alumnos del CEEM de que un material elaborado cuidadosamente, que combina consideraciones conceptuales generales y específicas, bien relacionadas, puede proporcionar, tanto a los alumnos en su aprendizaje, como al propio profesor, una reorganización en lo que se refiere a su visión acerca de un determinado contenido o área. Incluso en el caso específico de las Matemáticas, puede ayudar a ambos a comprender mejor los axiomas, las leyes y las teorías, posibilitándoles un mejor desempeño en la resolución de ejercicios y problemas:

Los cuatro textos de apoyo producidos contaron con la participación, en calidad de elaboradores en sus respectivas áreas Matemáticas, de: José Roberto da Silva y Maria Aparecida da Silva Rufino (Combinatoria); José Roberto da Silva y Cicleide Maria da Costa Lira (Lógica Matemática); José Roberto da Silva y José Miguel Guimarães Falcão (Álgebra); José Roberto da Silva y Hélio Oliveira Rodrigues (Geometría Clásica). Cada texto consta de una introducción y/o presentación, una fundamentación teórica y una metodología, que se piensa que está lo suficientemente bien delineada como para alcanzar satisfactoriamente estos objetivos, y, por último, una presentación de un mapa conceptual producido por los elaboradores del texto.

Procedimientos Metodológicos de la Investigación

El presente estudio se desarrolló durante un Curso de Especialización en Enseñanza de las Matemáticas, realizado en el período comprendido entre los meses de

[5] **Paradigma,** en este caso, se emplea como 'matriz disciplinar'. Es decir, lo que se refiere al sentido general de este término, como señaló Kuhn (2003) al definirlo como conjunto de compromisos en las investigaciones de una comunidad científica.

[6] **Necesidad de Cambio**, en este contexto, significa cambiar el paradigma que el aluno posee, o sea, pasar del 'sentido común' al modelo que es compartido por la comunidad científica que trabaja con el referido paradigma.

enero de 2005 a julio de 2006 en la Facultad de Formación de Profesores de Vitoria de Santo Antão (FAINTVISA), Estado de Pernambuco, Brasil. Para comprender mejor el alcance de este curso, podemos partir de la siguiente visión panorámica: las disciplinas estaban agrupadas en dos bloques, en función de su intencionalidad pedagógica, por lo cual, en un primer plan, se impartió una Formación básica en Educación para las Matemáticas y, en un segundo momento, la Enseñanza de las Matemática. El primer bloque estaba constituido por las siguientes disciplinas: Evaluación, Introducción a la Filosofía de las Ciencias, Metodología Científica. El segundo grupo, denominado "Conceptos Matemáticos", fue subdividido en dos; el I de ellos, concentró las disciplinas: Construcciones Geométricas, Tópicos de Geometría Plana, Tópicos de Geometría Espacial y Lógica Matemática. Y el II, por su parte, trato sobre las disciplinas: Álgebra, Combinatoria, Didáctica de las Matemáticas y Tratamiento de la Información. Como información complementaria sobre el curso, podemos añadir que las disciplinas se impartieron los sábados, de 8 a 12 de la mañana y de 1 a 4 y media de la tarde.

Por lo que se refiere a las especificidades de esta investigación, debemos advertir que la disciplina **Didáctica de las Matemáticas** fue la última en impartirse y es en ella, precisamente, donde se encuentra el foco de la investigación. Esta disciplina fue coordinada por el autor de esta tesis y fue impartida por los profesores Maria Aparecida da Silva Rufino, Cicleide Maria da Costa Lira, José Miguel Guimarães Falcão y Hélio Oliveira Rodrigues, que, como ya informamos, participaron también en la elaboración de los cuatro textos de apoyo. En este sentido, básicamente se pretendía caracterizar dos aspectos: el primero, de orden didáctico, pues habiéndose cursado disciplinas que contemplan tales áreas en el plan de estudios del CEEM, se buscó indagar sobre si se produjo alguna influencia o no en la enseñanza por parte de los textos de apoyo elaborados para dichas disciplinas.

La disciplina Didáctica de las Matemáticas, en su primer módulo, procura caracterizar, de forma abarcadora, el área de la Didáctica en sí, si bien tiene como objetivo hacer referencia al campo de la Didáctica de las Matemáticas, teniendo en cuenta la producción y utilización de recursos didácticos y, en especial, los textos de apoyo. En los cuatro módulos restantes, a razón de 12 horas cada uno, lo que arroja un balance total, considerando el primero, de 60 horas, fueron tratados los estudios referentes a la Combinatoria, la Lógica Matemática, el Álgebra y la Geometría Clásica, respectivamente.

El procedimiento metodológico adoptado en cada jornada consistió, en un primer momento, en solicitar a los 32 alumnos que formaban la clase del CEEM (2005-2006) que respondiesen a un cuestionario diagnóstico para, a continuación, pasar a elaborar individualmente un mapa conceptual, con lo que se pretendía caracterizar la visión que cada uno de ellos poseía antes de la enseñanza a través de los ya citados textos de apoyo. A medida que se iban llevando a cabo las distintas enseñanzas, se produjo una gran variedad de actividades didácticas, a cuyo término, cada alumno respondía a un cuestionario de evaluación del aprendizaje a la vez que elaboraba un mapa conceptual de las enseñanzas recibidas. El juicio de valor sobre los propósitos de investigación de esta tesis se abstrajo a partir de la comparación entre los cuestionarios diagnósticos y los cuestionarios de evaluación de aprendizajes, junto con los mapas conceptuales anteriores y posteriores a la enseñanza.

Criterios de Evaluación Adoptados para los Mapas Conceptuales

Los criterios evaluativos, de un modo general, fueran tres, 1) Selección Conceptual; 2) La Inclusión y 3) Las Relaciones Significativas. Cada uno de tales criterios puede comprenderse en mayor medida si tenemos en cuenta las descripciones:

1- La selección Conceptual va a ser tratada en términos *cuantitativos* y *cualitativos*, cuando se pretende contar (cuantificar) los conceptos, teniendo en cuenta los siguientes tres aspectos (cualitativos): Inferior (a), Equivalente (b) y Superior (c);

2- La Inclusión que se busca en la *jerarquía conceptual* en el contexto de este estudio, también tendrá en cuenta los tres aspectos cualitativos anteriores: Inferior, Equivalente y Superior;

3- Las Relaciones Significativas se observarán dentro del ámbito de las *proposiciones*, inicialmente, identificando su existencia o no y, en un segundo momento, en el caso de que existan, delimitándolas según los ya referidos aspectos cualitativos: Inferior, Equivalente y Superior;

Consideraciones:

I) Aclaración sobre los tres aspectos cualitativos que aparecen en los criterios evaluativos descritos anteriormente Inferior, Equivalente y Superior:

1. Será considerado el primer aspecto, **Inferior**, cuando la calidad observada en el mapa del alumno deje que desear con relación a la presentada en el mapa conceptual que se encuentra en el texto de apoyo;

2. Será considerado el segundo aspecto, **Equivalente,** cuando la calidad observada en el mapa del alumno sea idéntica y/o similar a aquella que presenta el mapa conceptual que se encuentra en el texto de apoyo;

3. El tercer aspecto, llamado **Superior**, se producirá cuando la calidad observada en el mapa del alumno sea superior a la presentada en el mapa conceptual que se encuentra en el texto de apoyo.

II) Para evitar la ambigüedad durante la producción de los datos a partir de los mapas de los alumnos, se resolvió admitir que los conceptos-foco no deberían presentar uniones horizontales y que, cuando eso ocurriese, tales conceptos serían considerados como intermediarios.

Criterios de Evaluación General

Cabe informar que, además de estos aspectos cualitativos presentados para el análisis de los mapas conceptuales, se emplearon otros tres, mucho más simples, tanto para el análisis de los propios mapas como también para el análisis de los cuestionarios.

Tales aspectos se codificaron como (**NR**), (**RI**) y (**RA**), que corresponden a *no respondió*, *respondió inadecuadamente* y *respondió adecuadamente*.

Hay, ciertamente, una variedad de criterios muy extensa que fueron apareciendo de acuerdo con la necesidad de crear condiciones que permitieran establecer consideraciones sobre los propósitos investigativos, hubiesen sido o no contemplados con la intervención. Las tablas contenidas en el análisis, por lo tanto, presentan informaciones tanto sobre los mapas conceptuales como sobre los cuestionarios, registradas todas de forma codificada, con la finalidad de interpretar los datos conforme a sus propósitos. Y como son muchos los códigos, debido a la variedad mencionada al comienzo, creemos que la mejor forma de exponerlos es al lado de las tablas, que es donde definitivamente se dispusieron.

Por último, con relación a la forma de seleccionar las respuestas extraídas de los alumnos se adoptaron dos criterios preliminares. El primero consistió en descubrir si el alumno estuvo presente en un determinado módulo cumpliendo todas las actividades que en el se llevaron. Y el segundo consistió en clasificar los extractos, procurando agruparlos según tres modalidades: *débil*, *regular* y *buena* conforme resultase, respectivamente, *muy poco*, *poco equivalente* o *muy equivalente*, con la finalidad de evaluar tales respuestas con respecto a las enseñanzas propuestas que se encuentran en el siguiente apartado.

Cabe destacar que las modalidades anteriores se expusieron con la intención de evidenciar la existencia de evolución de comprensión por parte de los alumnos durante cada uno de los cuatro actos educativos que constituyen este estudio. De esta forma, tales cambios se formalizan en el Capítulo 5 y pueden ser contrastados con los anexos 1 y 2, los cuales, respectivamente, se refieren a la clasificación de los mapas y de los extractos, obedeciendo el orden de presentación informado en el párrafo anterior. Por su parte, es importante apuntar que la selección de los cuestionarios estuvo centrada en las últimas cuestiones, toda vez que estas inciden en la conclusión de las ideas Matemáticas tratadas en cada una de las cuatro áreas referidas en este estudio en cuanto a la enseñanza.

A lo largo del desarrollo de la investigación surgieron algunos problemas debidos a fenómenos naturales, como por ejemplo, inundaciones en las regiones próximas a FAINTVISA, que provocaron una frecuencia diversificada durante las sesiones destinadas a los módulos que trataban los campos de la Combinatoria, la Lógica Matemática, el Álgebra y la Geometría Clásica. Por eso, en un mismo módulo y/o en módulos distintos, hay diferencias entre el número de alumnos con relación a la cantidad de mapas conceptuales y de cuestionarios.

Guiados por la intención de no sobrecargar los cuadros empleados en los análisis con muchas informaciones, presentaremos a continuación un cuadro que refleja la cantidad de alumnos conforme lo anunciado anteriormente.

Cuadro 1: Registro de los Alumnos que Participaron de las Actividades de Intervención.

Intervención \ Módulos		Combinatoria	Lógica Matemática	Álgebra	Geometría
Antes	Cuestionarios	26	30	30	28
	Mapas	31	31	24	31
Después	Cuestionarios	28	28	28	28
	Mapas	28	28	30	31

3.3. Propósitos Intrínsecos a las Enseñanzas Propuestas

3.3.1 Descripción de los Propósitos e Intenciones Educativas de las Actividades Didácticas del Texto de Apoyo de Combinatoria

Situación 1: Recuento Simple, Recuento de tipo Combinatorio, Principios básicos de Recuento y Problemas de Existencia.

Propósitos de la Situación 1

Las tres actividades que caracterizan esta situación se organizaron para llevarse a cabo con el tangram, que es un material didáctico de manipulación. La intención didáctica es establecer, a partir de ideas básicas geométricas, aspectos propicios para subsidiar las bases conceptuales, con el fin de fundamentar el campo de la Combinatoria. En otras palabras, se trata de presentar de forma segura las ideas de recuento simple, recuento de tipo combinatorio, principios aditivo y multiplicativo y problemas de existencia.

Actividad 1: Referida al Recuento Simple.

Acción 1: Identificación de las formas geométricas planas del tipo triángulo.
Resolución: En la figura 3, están dispuestas Todas las Formas Geométricas que Componen el Tangram, mientras que, en la figura 4, están agrupadas Todas las piezas del Tangram que son triángulos.

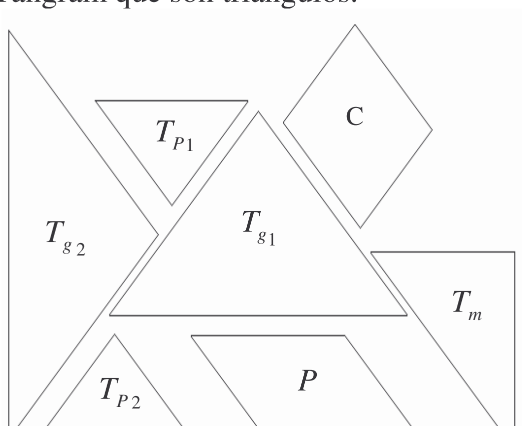


Figura 3

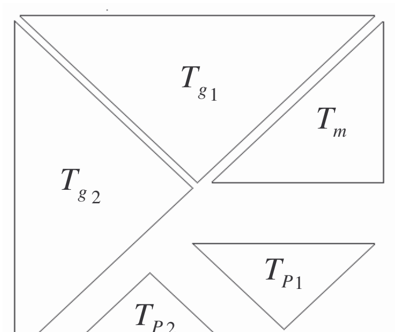


Figura 4

Leyenda: P - Paralelogramo, C Cuadrado, T_m - Triángulo mediano, T_{P1} **-** Triángulo pequeño 1, T_{P2} **-** Triángulo pequeño 2, T_{g1} - Triángulo grande 1, T_{g2} - Triángulo grande 2.

Acción 2: Recuento de los triángulos identificados.
Resolución: Tras asignar, a cada pieza, un número entero, que representa la presencia de un determinado triángulo, se identifica que hay 5 formas geométricas que representan triángulos.

Conclusión: El procedimiento empleado se refiere a la idea de recuento simple (uno a uno).

Actividad 2: Aludiendo al Principio Aditivo en cuanto Combinatoria.

Acción 1: Composición de cuadrados mediante todas las formas posibles para obtenerlos.
Resolución:

1ª posibilidad: Composición de un cuadrado con dos triángulos pequeños (Figura 5).

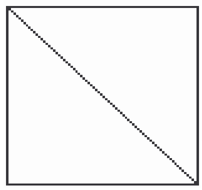


Figura 5

2ª posibilidad: Composición de un cuadrado con dos triángulos grandes (Figura 6).

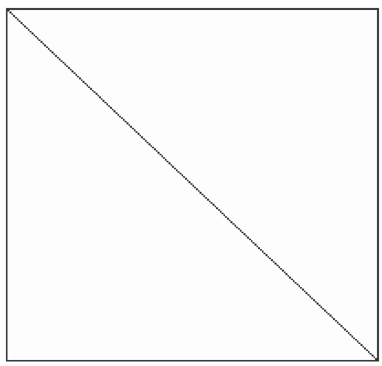


Figura 6

3ª posibilidad: Composición de un cuadrado con el triángulo mediano y los dos triángulos pequeños (Figura 7).

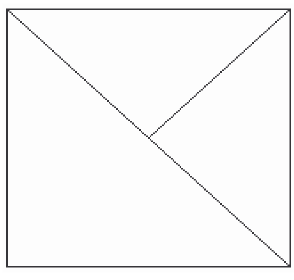


Figura 7

4ª posibilidad: Composición de un cuadrado con un triángulo grande, dos triángulos pequeños y el cuadrado (Figura 8).

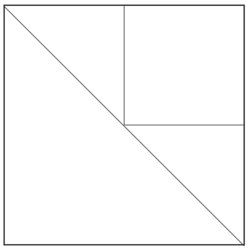


Figura 8

5ª posibilidad: Composición de un~~o~~ cuadrado con un triángulo grande, dos triángulos pequeños y el paralelogramo (Figura 9).

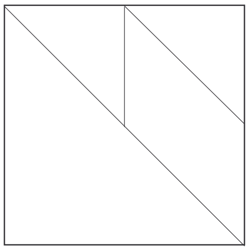


Figura 9

6ª posibilidad: Composición de un cuadrado con un triángulo grande, dos triángulos pequeños y el triángulo mediano (Figura 10).

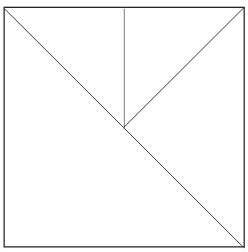


Figura 10

7ª posibilidad: Composición de un cuadrado con el cuadrado, el paralelogramo, el triángulo mediano y dos triángulos pequeños (Figura 11).

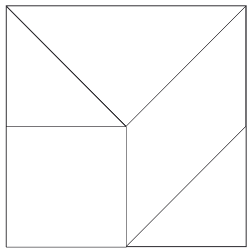


Figura 11

8ª posibilidad: Composición de un cuadrado utilizando las siete piezas del tangram (Figura 12).

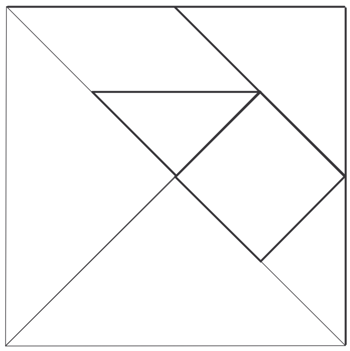


Figura 12

Acción 2: Recuento de las posibles formas anteriores obtenidas.
Resolución: Después de identificar que hay ocho maneras posibles de componer cuadrados, que contienen, desde dos piezas hasta el número máximo de piezas posibles del tangram, se registra la existencia de 8 cuadrados.
Conclusión: Esta forma de recuento es Combinatoria, y difiere de la que fue presentada en la acción 1 (recuento simple), por tener una condición dada (Actividad 3_1, p. 192).

Actividad 3: Aludiendo al Principio Multiplicativo, en cuanto Combinatoria.

Actividad 3_1: Caracterizar la Existencia de la Condición de Recuento.

Acción 1: Verificación de las áreas comunes con la superposición de las piezas.
Resolución: Después de escoger una de las piezas del tangram como unidad estándar (el triángulo menor, por ejemplo) y superponerla en las otras piezas, se verifica que las áreas de los dos triángulos pequeños, las de los dos triángulos grandes y las del cuadrado, triángulo mediano y paralelogramo son iguales entre sí.

Acción 2: Constatación de la posibilidad o no de pintar el área del tangram con dos colores (Actividad 3_1, p. 192).

Resolución: No es posible, porque con esa cantidad de colores (dos) habría figuras con la misma área pintadas del mismo color, toda vez que existen tres piezas con áreas iguales (el cuadrado, el triángulo mediano y el paralelogramo).

Actividad 3_2: Uso Intuitivo del Principio Multiplicativo.

Acción 1: Composición de las posibilidades de pintar cada pieza obedeciendo la condición dada (Figura 13).
Resolución:

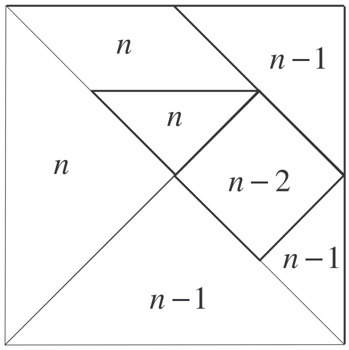


Figura 13

Acción 2: Aplicación del principio multiplicativo para determinar el total de las maneras de colorear el área de todo el tangram.
Resolución:

$$\frac{n}{P}\times\frac{(n-1)}{T_m}\times\frac{(n-2)}{Q}\times\frac{n}{T_{g1}}\times\frac{(n-1)}{T_{g2}}\times\frac{n}{T_{P1}}\times\frac{(n-1)}{T_{P2}}=n^3(n-1)^3(n-2)\ \textit{posibilidades}.$$

Actividad 3_3: Alusión a los Problemas de Existencia.

Acción 1: Constatación de la relación: número mínimo de colores x número máximo de piezas con la misma área.
Resolución:

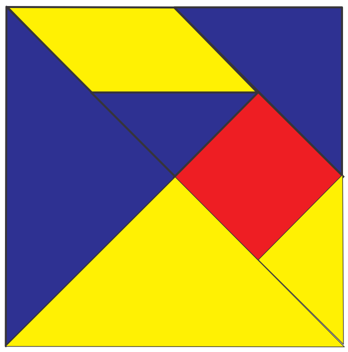


Figura 14

Acción 2: Determinación del número mínimo de colores para colorear el área del tangram (Figura 14).
Resolución: como se observa, serán necesarios, como mínimo, 3 colores.

Situación 2: Presentación de los Principios Aditivo, Multiplicativo, de Inclusión-Exclusión y de Dirichlt.

Propósitos de la Situación 2

Las tres actividades que componen esta situación se centran en la formalización del Principio Aditivo, del Principio Multiplicativo y del Principio de Inclusión-Exclusión, que ya fueron presentados intuitivamente en la situación 1, así como en la presentación y formalización del Principio de la Distribución de Dirichlet. La contextualización adoptada pretende ayudar a los alumnos a establecer una reflexión más elaborada en lo tocante a los conceptos/procedimientos relacionados con el principio aditivo y su generalización, e incluso, a la necesidad de otros principios combinatorios.

Actividad 1: Sistematización del Principio Aditivo (Actividad 1, p. 193).

Acción 1: Identificación de la relación entre los eventos compuestos por una única realización y la aplicación del principio aditivo.
Resolución: Como Carlos tiene dinero para asistir a tan sólo 1 evento, el problema consiste entonces en asistir bien a la película, bien a una obra de teatro, esto es, una acción compuesta por sólo una realización.

Acción 2: Aplicación del Principio Aditivo (PA).
Resolución: Como hay 3 películas $F=\{F_1,F_2,F_3\}$ y 2 obras de teatro $P=\{P_1,P_2\}$, el total de programas que Carlos puede hacer el sábado, será: $3+2=5$ programas.

Caracterización formal:

En general, cuando se puede tomar una primera decisión de m maneras, mientras que una segunda decisión se puede efectuar de n maneras, no pudiéndose realizar las dos acciones simultáneamente, entonces el número total de maneras para tomar una u otra decisión será de $m+n$ posibilidades.

Generalización:

El principio aditivo, también conocido como regla de la suma, admite una formulación mediante la teoría de los conjuntos, utilizando el concepto de cardinalidad de un conjunto.

Si llamamos $n(A)$ la cardinalidad del conjunto A y denominamos $n(B)$ la cardinalidad del conjunto B, entonces se puede reformular el Principio Aditivo o regla de la suma de la siguiente manera:

Dados dos conjuntos A y B disjuntos, la cardinalidad de $A\cup B$ denominada $n(A\cup B)$ es igual a la cardinalidad de A más la cardinalidad de B, es decir:

$$A\cap B=\phi \Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B).$$

Actividad 2: Sistematización del Principio Multiplicativo.

Acción 1: Identificación de la relación entre las acciones compuestas por más de una realización que son independientes y sucesivas, y la aplicación del principio multiplicativo.

Resolución: El problema consiste ahora en ir al cine o ir al teatro, es decir, una acción compuesta por dos realizaciones independientes y sucesivas. Para realizarlas, se toman dos decisiones: la primera, ir al cine, que, a su vez, puede ser realizada de 3 maneras; la segunda, ir al teatro, que, por su parte, puede ser realizada de 2 maneras. En este estudio, esta información fue representada conforme los esquemas que aparecen a continuación:

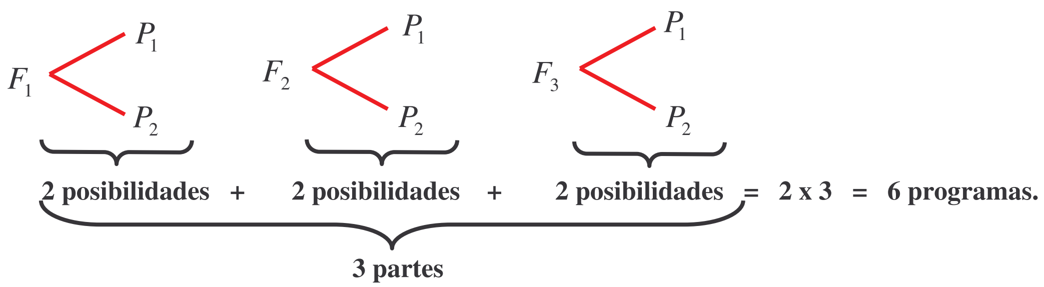
Esquema Simple:

D_1: Ir al cine $\longrightarrow$ 3 posibilidades.

D_2: Ir al teatro $\longrightarrow$ 2 posibilidades.

Acción 2: Aplicación del Principio Multiplicativo (PM).

Esquema con el Árbol de Posibilidades:

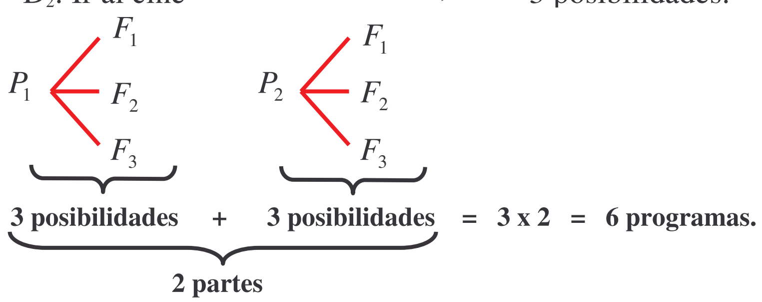


En función de lo expuesto, queda caracterizado el hecho de que existe aplicación del Principio Multiplicativo, pues cada una de las 3 opciones de películas puede combinarse con las 2 opciones de las obras de teatro, luego el total de programas que Carlos puede hacer el sábado será: $3 \times 2 = 6$.

Otra forma de organizar el esquema correspondiente a la solución anterior, puede expresarse de la siguiente forma:

D_1: Ir al teatro $\longrightarrow$ 2 posibilidades.

D_2: Ir al cine $\longrightarrow$ 3 posibilidades.



Obsérvese que esta forma de contar posibilitó establecer entre las agrupaciones una repetición en el mismo sentido que los factores en la multiplicación $(3 \times 2 \ y \ 2 \times 3)$ que obedecen a la conmutatividad, lo que no ocurrió en la situación II, si bien, ambas situaciones de recuento, II y III se efectúan a partir de la condición dada mientras que, en la situación I, no existe una condición dada que condicione decisivamente la forma de recuento. O sea, existe un recuento, que es tan espontáneo como el de los propios números naturales.

Caracterización formal:

El principio multiplicativo o regla del producto nos dice que, si un procedimiento puede ser dividido en dos etapas y, si existen m posibilidades de resultado para realizar la primera etapa y n posibles resultados para la segunda, entonces el procedimiento total puede ser realizado designando el orden de $m \times n$ maneras.

Generalización:

Imagine que se toma inicialmente una decisión (D_1) que puede ser tomada de m maneras distintas y que, a continuación, una vez establecida D_1, sea posible tomar otra decisión (D_2) que, por su parte, puede ser tomada de n maneras distintas; el número de formas posibles de tomarse las decisiones D_1 y D_2, independientes y sucesivas, será dado por el producto de esas posibles maneras, es decir, m multiplicado por n. Cabe recordar que esta estructura formal que acabamos de describir, puede extenderse a cualquier número finito de decisiones.

Siendo D_1 y D_2 las decisiones descritas más arriba, la representación esquemática que ofrecemos a continuación, pretende aclarar la obtención del número de formas posibles a partir de las posibilidades de tales decisiones.

Representación esquemática:

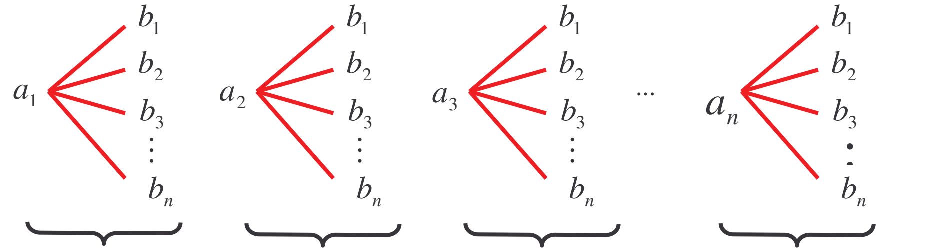
$1^a \ Decisión: D_1 = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}, m \ posibilidades;$

$2^a \ Decisión: D_2 = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m\}, n \ posibilidades.$

$$\left.\begin{array}{l}
(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),\cdots,\ (a_1,b_n) \rightarrow n \ posibilidades; \\
(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),\cdots,\ (a_2,b_n) \rightarrow n \ posibilidades; \\
(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_3,b_3),\cdots,\ (a_3,b_n) \rightarrow n \ posibilidades; \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
(a_m,b_1),(a_m,b_2),(a_m,b_3),\cdots,(a_m,b_n) \rightarrow n \ posibilidades.
\end{array}\right\}$$

$$\therefore o \ número \ de \ formas \ possíveis \ é \ então: \ \underbrace{n+n+n+\cdots\cdots+n}_{m \quad parcelas} = n \times m \quad formas.$$

Otra manera de representar:



$$\underbrace{\textbf{n posibilidades + n posibilidades + n posibilidades + ... + n posibilidades}}_{\textbf{m partes}} \textbf{ = n} \times \textbf{m formas}$$

Nótese que al poseer D_2 n maneras distintas, entonces, cuando se asocia cada una de ellas a una de las m maneras distintas de D_1, se estará efectuando el recuento de D_1 con D_2, que tendrá como resultado n. Como este recuento se hará de forma análoga, tomándose ahora D_2 para contar D_1, lo que representa el segundo recuento en este procedimiento, el número que caracteriza todas las posibilidades será dado por $n \times m$.

Este principio también puede ser expresado en términos de la teoría de los conjuntos, haciendo uso del producto cartesiano: $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$.

Para el producto de más de dos conjuntos se cumple una identidad semejante del tipo: $n(A_1 \times A_2 \times, \ldots, \times A_n) = n(A_1) \times n(A_2) \times \ldots \times n(A_n)$.

Actividad 3: Principio de Inclusión-Exclusión y Principio de Distribución de Dirichlet.

Actividad 3_1: Principio de Inclusión-Exclusión.

a) (Rescatar el Principio Aditivo):…un as o un rey?
Acción 1: Revisión del fundamento del principio aditivo.
Resolución: Obsérvese que el problema consiste en sacar apenas una carta, la cual puede ser o un as o un rey, es decir, una acción compuesta por tan sólo una realización, lo que garantiza, según ya quedó caracterizado en la actividad 1, la aplicación del Principio Aditivo como técnica de resolución. Componiendo ahora el conjunto de las posibilidades, tenemos:

- Conjunto de Ases (Figura 15):

$A =$ 

Figura 15

- Conjunto Reyes (Figura 16):

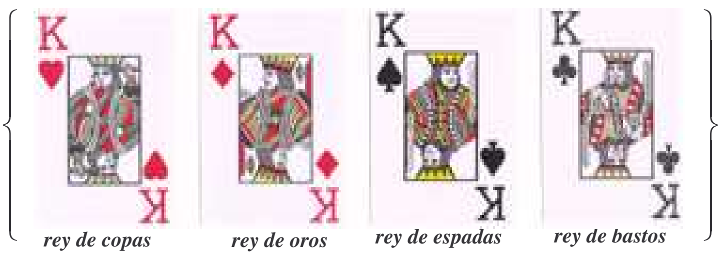
$B =$ 

Figura 16

Acción 2: Aplicación del Principio Aditivo (PA).
Resolución: Como se observa, existen 4 posibilidades para sacar un as (Figura 15) y 4 posibilidades para sacar un rey (Figura 16), siendo todas esas 4 últimas posibilidades distintas de las 4 anteriores ($A \cap B = \phi$); aplicándose el Principio Aditivo, tenemos que las posibles formas de sacar un as o un rey totalizan: $4 + 4 = 8$ formas.

b) (Rescatar el Principio Multiplicativo):…un as y un rey?
Acción 1: Repaso del fundamento del principio multiplicativo.
Resolución: El problema consiste ahora en sacar una carta correspondiente a un as y otra carta correspondiente a un rey, es decir, una acción compuesta por dos realizaciones. Para ejecutarlas se tomarán dos decisiones independientes ($A \cap B = \phi$) y sucesivas, lo que caracteriza la aplicación del Principio Multiplicativo (conforme lo estructurado en la actividad 2).

Acción 2: Aplicación del Principio Multiplicativo (PM).
Resolución:

D_1: sacar un as $\longrightarrow$ 4 posibilidades;
D_2: sacar un rey $\longrightarrow$ 4 posibilidades.

Por el P.M. se obtienen: $\frac{4}{D_1} \times \frac{4}{D_2} = 16$ formas.

c) (Generalización del Principio Aditivo con la anunciación del Principio de Inclusión-Exclusión):…un as o una carta de espadas?
Acción 1: Identificación del principio de inclusión-exclusión, como una generalización del principio aditivo, cuando $A \cap B \neq \phi$.
Resolución: Para resolver este problema es importante componer nuevamente los conjuntos de las posibilidades (Conjunto de ases: Figura 15).

- Conjunto de espadas (Figura 17):

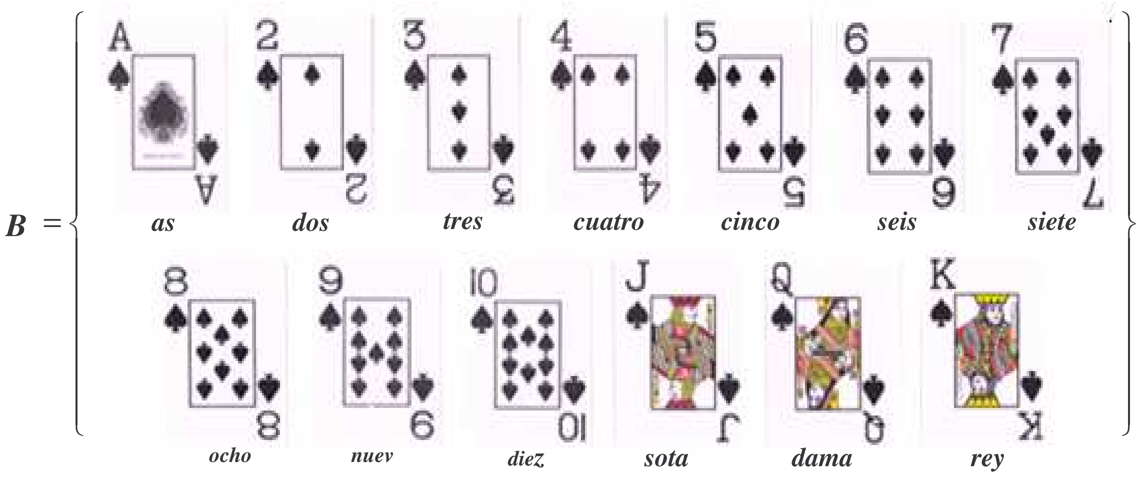


Figura 17

Hecha la composición de los conjuntos, inmediatamente se observa que, aunque el problema consista en sacar sólo una carta (o un as o una espada), esto es, una acción compuesta por sólo una realización, no cabe emplear como técnica de recuento el Principio Aditivo: $4 + 13 = 17$, toda vez que los conjuntos no son disjuntos ($A \cap B \neq \phi$). Este procedimiento tornaría la respuesta no válida, porque el as estaría siendo computado dos veces, una en el recuento de las posibilidades de sacar un as (4 posibilidades), y otra al cuantificarse las posibilidades de sacar una espada (13 posibilidades – Figura 17).

Acción 2: Aplicación del Principio de Inclusión-Exclusión (PIE).
Resolución: se llegará al razonamiento correcto, extrayéndose, del total obtenido a partir del Principio Aditivo, la cantidad equivalente al número de cartas comunes a los dos conjuntos, que, en el caso en cuestión, es sólo una (el as de espadas). Procediendo así, obtenemos: $4+13-1=16$.

Caracterización formal:

Admitiendo una formulación mediante la teoría de los conjuntos, podemos denominar $n(A)$ al número de elementos del conjunto de ases, que son 4; $n(B)$ al número de elementos equivalentes a las espadas, que son 13; $n(A\cap B)$ al número que corresponde a las cartas comunes a los dos conjuntos, que es una. Con eso, podemos obtener, entonces, una fórmula que ofrezca el número total de elementos en la unión de dos conjuntos $n(A\cup B)$, no necesariamente disjuntos:

$$4+13-1=16 \text{, o sea, } n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

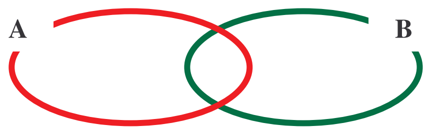
Generalización del Principio de Inclusión-Exclusión:

El principio de Inclusión-Exclusión (PIE) es, por lo tanto, una generalización de uno de los principios básicos de recuento, el principio aditivo. El Principio de Inclusión-Exclusión se interesa por la obtención de una fórmula para contar el número de elementos que pertenecen a la unión de varios conjuntos no necesariamente excluyentes o disjuntos.

En su forma más simple, calcular la cardinalidad de la unión de dos conjuntos A y B con $A\cap B\neq\phi$, a partir de la fórmula:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

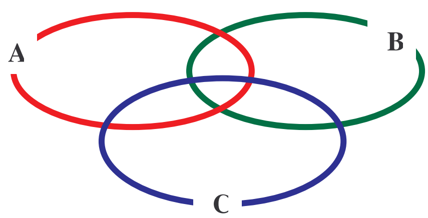
La situación anterior puede ser ilustrada también en forma de diagrama:



Para la unión de tres conjuntos A, B y C con $A\cap B\cap C\neq\phi$, la fórmula del PIE se da por:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

Utilizando un diagrama en una situación general, incluyendo A, B y C, se tiene:



Cardinalidad de la unión de n conjuntos

La cardinalidad de la unión de n conjuntos finitos A_1, A_2, A_3, … , A_n puede generalizarse por el PIE a través de la fórmula que se recoge más abajo, considerando que, cuanto mayor sea el número de conjuntos implicados en este tipo de recuento, resultará más inviable, geométricamente hablando, la utilización de diagramas como estrategia de resolución.

Para mostrar que la fórmula del PIE es correcta, se debe comprobar que cuenta cada elemento exactamente una vez. Por tanto, deben considerarse todos los casos posibles y, en cada uno de ellos, los elementos de la unión de todos los conjuntos, o sea, $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ deben contarse exactamente una vez.

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k < p \le n}^{n} (A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) + \cdots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Vamos a considerar, por lo tanto, todos los casos posibles y mostrar que, en cada uno de ellos, cada elemento de la unión de A , B y C , por ejemplo, se cuenta exactamente una vez.

1er. Caso: En el caso de que un elemento pertenezca solamente a uno de los conjuntos (A , por ejemplo), la fórmula irá a considerarlo una sola vez, pues tenemos una contribución de 1 del término $n(A)$ y ninguna contribución de los demás términos.

2º Caso: En el caso de que pertenezca a exactamente 2 conjuntos (A y B , por ejemplo), tendremos dos contribuciones positivas, una en $n(A)$ y otra en $n(B)$, y una negativa en $n(A \cap B)$, lo que ofrece:

$$1 + 1 - 1 = 1.$$

3er. Caso: En el caso de que el elemento pertenezca a los 3 conjuntos, tenemos contribuciones positivas en $n(A)$, $n(B)$ y $n(C)$, negativas en, $n(A \cap B)$, en $n(A \cap C)$ y en $n(B \cap C)$, y una positiva en $n(A \cap B \cap C)$, resultando:

$$1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 = 1.$$

Eso muestra que, en cualquiera de los tres casos posibles, esta fórmula cuenta cada elemento de la unión de A , B y C , exactamente una vez.

Actividad 3_2: Principio de la Distribución de Dirichlet.

a) Acción 1: Discusión de las posibilidades.

Resolución: En la primera ocasión, puede cogerse o un calcetín de color blanco o un calcetín de color negro. En la segunda, puede ocurrir que se coja un par de calcetines blancos o un par de calcetines negros**,** pero también puede ocurrir, en la peor de las hipótesis, que cojamos dos calcetines de colores diferentes. O sea, nada se puede garantizar con sólo dos acciones, toda vez que un par, en este caso, sólo está considerado como tal, cuando los dos calcetines sean del mismo color. En la tercera ocasión, independientemente del color del calcetín, se puede garantizar la composición de un par de calcetines, ya sea de calcetines blancos, ya sea de calcetines negros.

Acción 2: Intuición del Principio de la Distribución de Dirichlet.
Resolución: Puesto que, en el cajón, existen tan sólo dos colores diferentes de calcetines $\{calcetines\ blan\text{cos}, calcetines\ negros\}$ retirándose, al azar, uno a uno, serían necesarias por lo menos 3 acciones para garantizar un par de calcetines del misma color, recordando que tres corresponde a una unidad más con respecto a la cantidad de colores de los calcetines existentes en el cajón, que son dos.

Caracterización formal:

Mediante el ejemplo ofrecido, parece posible observar que esta solución está basada en un interesante principio de distribución, si bien utilizado, en este caso, en un sentido común. Este principio, en general, es enunciado como Principio de la Distribución de Dirichlet y se presenta así: si $n+1$ objetos son colocados en, como máximo, n cajas, entonces, por lo menos una de ellas contendrá, como máximo, dos objetos.

Para aplicarlo, en la situación dada, debemos identificar quién desempeña el papel de los objetos y quién hace el papel de las cajas. El total de cajas es dos, que corresponde a los tipos de calcetines que están guardados en el cajón $n=2 \Rightarrow \{calcetines\ blan\text{cos},\ \ calcetines\ negros\}$, y los objetos corresponden a los calcetines. Aplicando el Principio de Dirichlet (Figura 18), se puede confirmar que sería necesario retirar $n+1=2+1=3$ calcetines para garantizar un par de calcetines (dos calcetines del mismo color).

Esquema Ilustrativo:

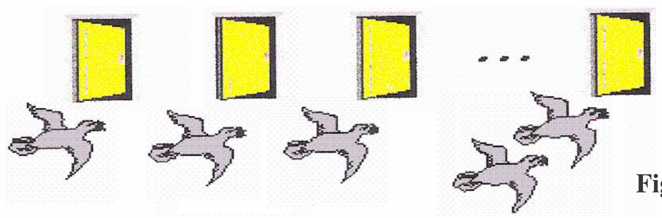


Figura 18

Este principio se denomina también de forma habitual Principio del Palomar (PCP) por el hecho de que muchas veces se enuncia así: si $n+1$ palomas se colocan en n jaulas, entonces, por lo menos una jaula deberá contener más de una paloma.

Parece ser que esto es obvio, pues, al distribuirse las n palomas en n jaulas, faltará una paloma que ocupará una jaula ya ocupada por otra paloma.

La manera más formal de decir lo mismo es que, si el número de elementos de un conjunto finito A es mayor que el número de elementos de otro conjunto B, entonces no existe función inyectiva de A en B.

b) Acción: Generalización del Principio del Palomar.
Resolución: Para la resolución de esta alternativa, es importante considerar el hecho de que para la obtención de dos pares del misma color, o sea, 4 calcetines del mismo tipo,

debe garantizarse anteriormente una cantidad k mínima de calcetines de cada color, de forma que cualquiera que sea el tipo del próximo calcetín retirado, deberá establecerse la cantidad necesaria que garantice la obtención del resultado esperado. Recordando que $n = 2$, para el caso $k = 3$ corresponde a 3 calcetines de cada color, determinando así un total de 6 calcetines ya retirados. Luego, el próximo calcetín retirado, cualquiera que sea su color, compondrá los dos pares de calcetines deseados (o dos pares de calcetines blancos o dos pares de calcetines negros), resultando así un total de, como mínimo, 7 calcetines retirados.

Conclusión: Es importante observar que el resultado $7 = 2 \times 3 + 1$ puede ser expresado de la siguiente forma $7 = nk + 1$.

A continuación, podemos decir entonces que, de una manera más general, el principio del palomar puede enunciarse mejor del siguiente modo:

Generalización:

Si n jaulas están ocupadas por $nk + 1$ palomas, entonces por lo menos una jaula deberá contener al menos $k + 1$ palomas.

c) Acción: Especificación del Principio del Palomar.
Resolución: Como pretenden componerse un par de calcetines de cada color, primero se deben agotar todas las formas posibles de obtener pares de un único color. Considerando que, en este caso, el número mayor de posibilidades de aparición de calcetines de un mismo tipo está garantizada con 8 retiradas (este total equivalente a los 8 calcetines de color negro) sólo faltará hacer ahora dos retiradas más, que irán a garantizar la composición de un par del otro color (un par de calcetines blancos), ofreciendo así un total mínimo de 10 retiradas.

Situación 3: Caracterización estructural de las Agrupaciones Ordinarias y con Repetición.

Propósitos de la Situación 3

Las tres actividades que componen esta situación están centradas en la "evolución" del campo de la Combinatoria en términos de sofisticación de los principios básicos de recuento (principio aditivo y principio multiplicativo), procurando contemplar las técnicas de variación, permutación y combinación, que se aplicarán sobre la composición/cuantificación de las agrupaciones simples y de las agrupaciones con repetición.

Actividad 1: Variaciones Ordinarias y con Repetición.

Actividad 1_1: Variaciones Ordinarias.

Acción 1: Presentación del concepto de Variación Ordinaria.
Resolución: Denominando al conjunto de los atletas por $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ y componiendo, a continuación, algunos de los posibles resultados de la carrera, tenemos:

$$\begin{array}{l} 1^{\text{o}}\ \ 2^{\text{o}}\ \ 3^{\text{o}}\ \ lugares: \\ a_1\ \ a_2\ \ a_3; \\ a_1\ \ a_2\ \ a_4; \\ a_2\ \ a_4\ \ a_1. \\ \quad\vdots \end{array}$$

Procediendo de este modo, se puede observar, entonces, que esos posibles resultados forman agrupaciones que representan partes (subconjuntos), compuestas por tres elementos, tomados del conjunto A (conjunto de los atletas), las cuales difieren tanto por la naturaleza ($a_1\ \ a_2\ \ a_3 \neq a_1\ \ a_2\ \ a_4$) cuanto por el orden ($a_1\ \ a_2\ \ a_4 \neq a_2\ \ a_4\ \ a_1$) en que se disponen sus elementos. Este aspecto caracteriza las propiedades necesarias y suficientes para clasificar tales agrupaciones como **variaciones ordinarias**. Se denominan simples u ordinarias porque en los subconjuntos generados, no se admite la repetición de un mismo elemento, del tipo, $a_1\ \ a_1\ \ a_4$, por ejemplo; y, en este caso en cuestión, no tendría mucho sentido, pues un mismo atleta no podría llegar, simultáneamente, en primer y en segundo lugar en la misma carrera.

Acción 2: Formatación del Principio Multiplicativo para determinar el total de variaciones ordinarias.

Para computar todos estas agrupaciones, generalmente, se ha empleado la expresión: $A_{m,n}=\dfrac{m!}{(m-n)!}$ (con m elementos distintos, tal que $m\geq 1$ e $1\leq n\leq m$), pero, por el momento, lo que se pretende es desarrollar una forma de disposición del Principio Multiplicativo, que fundamenta el recuento y que subyace en el razonamiento utilizado en la expresión antes indicada; de este modo, se trata de componer la técnica de recuento que determine el total de variaciones ordinarias. Para aplicarla, en el caso que nos ocupa, se toman, inicialmente, tres decisiones independientes y sucesivas:

D_1: escoger el atleta para el 1er lugar $\longrightarrow$ 5 posibilidades;
D_2: escoger el atleta para el 2º lugar $\longrightarrow$ 4 posibilidades;
D_3: escoger el atleta para el 3er lugar $\longrightarrow$ 3 posibilidades.

$$Por el P.M.: \frac{5}{1^{\text{o}}}\times\frac{4}{2^{\text{o}}}\times\frac{3}{3^{\text{o}}}=60\ resultados.$$

Actividad 1_2: Variaciones con Repetición.

• i) Con $m>n$:
Acción 1: Presentación del concepto de Variación con Repetición.

Resolución: Inicialmente, vamos a considerar todos los números de cuatro guarismos ($n = 4$), escogidos del conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ($m = 5$), por ejemplo: $1355, 5135, 3175, 9153, 7999$. En ellos se observan las propiedades de orden y naturaleza de los elementos que los clasifican como variaciones. Pero, también se debe observar que, en algunas de esas agrupaciones, se producen repeticiones de, por lo menos, un elemento en la formación de un mismo número ($1355, 7999$); tal aspecto caracteriza que, en este caso, se trata de **variaciones con repetición** ($com\ m > n$).

Consideración: Es importante llamar la atención sobre el hecho de que, aunque la nomenclatura para estos casos se enuncie acompañada por la expresión "con repetición", ello no significa que en todas las agrupaciones generadas a partir de un determinado conjunto, se registre la repetición de, por lo menos, un elemento. En este tipo de recuentos, (variaciones con repetición con $m > n$) está incluido también el recuento de las variaciones ordinarias (distintas) del tipo: $1357, 3175, 9153$, como apareció explicitado en el ejemplo de arriba.

Acción 2: Formatación del Principio Multiplicativo para determinar el total dos variaciones con repetición.
Resolución: Se pretende calcular todos ellos con la fórmula de las variaciones con repetición: $AR_{m,n} = m^n$ (con m elementos distintos, siendo $m \geq 1\ e\ 1 \leq n \leq m$), pero cabe informar que nada impide que se pueda calcularlos también utilizando el P. M.

No obstante, en este caso concreto, para contemplar la cuantificación en cuestión, debemos atender a lo que de hecho nos interesa contar (los números de 4 guarismos, de modo que por lo menos 2 guarismos sean iguales). Para ello, debemos excluir en el recuento de las variaciones con repetición, el número equivalente a las variaciones ordinarias, el cual se encuentra ya incluido en aquel recuento. Procediendo de este modo, tenemos que:

D_1: escoger los guarismos de la casilla del millar $\longrightarrow$ 5 posibilidades;
D_2: escoger los guarismos de la casilla de la centena $\longrightarrow$ 5 posibilidades;
D_3: escoger los guarismos de la casilla de la decena $\longrightarrow$ 5 posibilidades;
D_4: escoger los guarismos de la casilla de la unidad $\longrightarrow$ 5 posibilidades.

$Porel\ P.M.:$

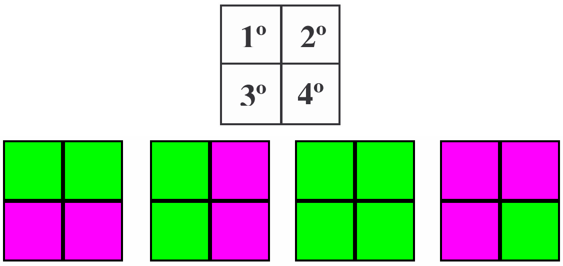
$\frac{5}{UM} \times \frac{5}{C} \times \frac{5}{D} \times \frac{5}{U} = 5^4 = 626 \rightarrow$ Recuento de las **variaciones con repetición.**

$\frac{5}{UM} \times \frac{4}{C} \times \frac{3}{D} \times \frac{2}{U} = 120\ números \rightarrow$ Recuento de las **variaciones ordinarias.**

$Luego: 625 - 120 = 505 \rightarrow$ Recuento de las agrupaciones con por lo menos 2 guarismos repetidos.

• ii) Con $m < n$:
Acción 1: Presentación de las Variaciones con Repetición (Figura 19).

Resolución: Componiendo inicialmente el conjunto generador (conjunto de los colores) $C = \{Verde(V), Rosa(R)\}$ donde $m = 2$, es importante observar algunos de los posibles cuadros que se pueden pintar:



$VVRR$ $VRVR$ $VVVV$ $RRRV$ **Figura 19**

Se percibe, entonces, que cada una de esas posibilidades está compuesta por 4 elementos ($n = 4$ número de elecciones del conjunto generador), y que esas posibilidades se distinguen unas de las otras por la naturaleza ($VVRR \neq RRRV$) y por el orden ($VVRR \neq VRVR$) de sus elementos. Eso es lo que caracteriza el recuento denominado **variaciones**. Otra observación que se puede hacer es que en estas agrupaciones, se produce la aparición de repetición de elementos en un mismo grupo, lo que delimita a las **variaciones con repetición**.

Consideración: Con este tipo de formación (con $m < n$), se constata que no hay posibilidad alguna de obtener **variaciones ordinarias,** pues la repetición es inevitable, toda vez que, en la composición de los subconjuntos, las posibilidades de tomar elementos distintos del conjunto generador siempre se agotan. Esto obliga a que se tome un elemento que ya había sido contemplado en la misma agrupación, incluso varias veces**.** Luego, la nomenclatura "con repetición", en estos casos, delimita exclusivamente a los subconjuntos con, por lo menos, un elemento repetido.

Acción 2: Formatación del Principio Multiplicativo para determinar el total de variaciones con repetición.
Para contarlas, podemos organizar el siguiente esquema:

D_1: pintar el 1er. cuadradito $\longrightarrow$ 2 posibilidades;
D_2: pintar el 2º cuadradito $\longrightarrow$ 2 posibilidades;
D_3: pintar el 3er. cuadradito $\longrightarrow$ 2 posibilidades;
D_4; pintar el 4º cuadradito $\longrightarrow$ 2 posibilidades.

$$Por el\ P.M.: \frac{2}{1º} \times \frac{2}{2º} \times \frac{2}{3º} \times \frac{2}{4º} = 2^4 = 16\ anagramas.$$

Actividad 2: Permutaciones Ordinarias y con Repetición.

Actividad 2_1: Permutación Simple u Ordinaria.

Acción 1: Presentación del concepto de Permutación Ordinaria.

Resolución: En este momento, es importante recordar que los anagramas son palabras con significado gramatical o no, compuestas por la transposición de las letras de otra palabra. Así, los anagramas constituyen casos típicos de permutaciones. No obstante, por sí solo, este aspecto no debe ni puede suprimir la necesidad de delimitar las propiedades conceptuales que caracterizan a este tipo de agrupaciones. Y menos aún, la técnica de recuento utilizada para cuantificarlas. Muy al contrario, la opción por el anagramático está justificada por su fácil comprensión y, principalmente, porque permite una posible variación en términos de formas de recuento, contemplando así diferentes ejemplares.

Entonces, para la cuestión que estamos analizando, los constituyentes del conjunto generador son las letras de la palabra Brasil $P = \{B, R, A, S, I, L\}$ $(m = 5)$. Componer los anagramas de esa palabra equivale a tomar todos los elementos (letras) del conjunto generador de forma que cada uno de esos nuevos subconjuntos (anagramas) sea distinto de los demás, únicamente por el diferente orden que adoptan las letras que componen la palabra generadora ($BRASIL \neq BRISAL \neq LISBRA \neq ABSRIL \ldots$). Así, de manera general, se puede decir que las agrupaciones simples que se forman tomando todos los elementos del conjunto generador, o sea, $m = n$ y que difieren uno de otro únicamente por el orden de colocación de sus elementos, se clasifican como **permutaciones simples u ordinarias**.

Acción 2: Formatación del Principio Multiplicativo para determinar el total de permutaciones ordinarias.
Resolución: El total de tales grupos ordenados se indica a través de la fórmula: $P_m = m!$ (con m elementos distintos, donde $m = n$). Pero, así como en el caso de las variaciones, ese total puede ser también computado por la regla básica del producto o P.M., organizado según el formato siguiente:

D_1: escoger la primera letra del anagrama $\longrightarrow$ 6 posibilidades;

D_2: escoger la segunda letra del anagrama $\longrightarrow$ 5 posibilidades;

D_3: escoger la tercera letra del anagrama $\longrightarrow$ 4 posibilidades;

D_4: escoger la cuarta letra del anagrama $\longrightarrow$ 3 posibilidades;

D_5: escoger la quinta letra del anagrama $\longrightarrow$ 2 posibilidades;

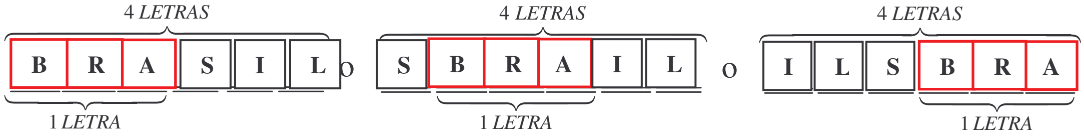
D_6: escoger la sexta letra del anagrama $\longrightarrow$ 1 posibilidad.

$$Por\ \ el\ P.M.: \frac{6}{1^{a}} \times \frac{5}{2^{a}} \times \frac{4}{3^{a}} \times \frac{3}{4^{a}} \times \frac{2}{5^{a}} \times \frac{1}{6^{a}} = 720 \quad anagramas.$$

Actividad 2_2: Otras aplicaciones relacionadas con las permutaciones ordinarias.

Acción 1: Formatación del P.M. para determinar el total de permutaciones ordinarias.

a) **Resolución**: En este caso, sólo deben ser considerados los anagramas compuestos por la triada BRA y que observen necesariamente ese orden. En realidad, todo se concibe como si BRA fuese una única letra, dado que no podrá producirse ninguna alteración de posición entre ellas; consecuentemente, ya no se trata de una permutación de 6 letras, sino de 4, como indicamos a continuación:



Utilizando el P.M. para contabilizarlos, tenemos que:

D_1: escoger la posición de la triada $\overbrace{BRA}^{1^a\,LETRA}$ en el anagrama $\longrightarrow$ 4 posibilidades;

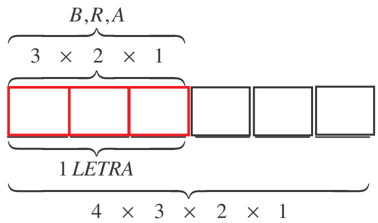
D_2: escoger la posición de la segunda letra en el anagrama $\longrightarrow$ 3 posibilidades;

D_3: escoger la posición de la tercera letra en el anagrama $\longrightarrow$ 2 posibilidades;

D_4: escoger la posición de la cuarta letra en el anagrama $\longrightarrow$ 1 posibilidad.

$$\text{Por el P.M.: } \frac{4}{\underbrace{BRA}_{1^a\ LETRA}} \times \frac{3}{2^a} \times \frac{2}{3^a} \times \frac{1}{4^a} = 24 \ \textit{anagramas}.$$

b) Resolución: Para este caso, deben considerarse, ahora, todos los anagramas de la palabra BRASIL en los que las letras B, R y A estén juntas, pero no necesariamente en ese mismo orden. En función de ello, pronto se descubre que podrán aparecer, incluso, dos permutaciones simultáneas: una permutación de las 4 letras, puesto que las letras B, R y A deben computarse como una sola, y otra permutación al alterarse la posición entre B, R y A. Procediendo de este modo, se tiene:



$$\text{Por el P.M.: } \frac{4}{\underbrace{BRA}_{3\times 2\times 1=6}} \times \frac{3}{2^a} \times \frac{2}{3^a} \times \frac{1}{4^a} = 6 \times 24 = 144 \quad \textit{anagramas}.$$

Actividad 2_3: Repaso del Principio de Inclusión-Exclusión a partir de la idea de permutación

Acción 1: Aplicación del Principio de Inclusión-Exclusión a partir de la idea de Permutación.

Resolución: Obsérvese que el problema consiste en cuantificar los anagramas en los que la letra B ocupe el 1er. lugar, o la letra R ocupe el 2º lugar, o la letra A ocupe el 3er. lugar, esto es, una acción compuesta por tan sólo una realización, lo que podrá caracterizar, conforme ya fue tratado anteriormente, la aplicación del Principio Aditivo como técnica de resolución, siempre que los conjuntos implicados sean disjuntos. Caso contrario, la cuantificación deseada solamente será válida con la aplicación del Principio de Inclusión-Exclusión, en cuanto técnica generalizadora del Principio Aditivo. Para poder averiguar si esos conjuntos son o no necesariamente excluyentes, será necesario definir los conjuntos implicados:

B = {conjunto de anagramas de la palabra BRASIL, con la B en 1er lugar};
R = {conjunto de anagramas de la palabra BRASIL, con la R en 2º lugar} y
A = {conjunto de anagramas de la palabra BRASIL, con la A en 3er lugar}.

Una vez definidos tales conjuntos, podemos listar algunos de sus elementos y verificar si existen anagramas que pertenecen a más de un conjunto. Es lo que ocurre, por ejemplo, con los anagramas BRILAS y BLARIS. El primero pertenece, simultáneamente, a los conjuntos B y R porque contiene la letra B en 1er lugar y la letra R en 2º lugar; el segundo pertenece a los conjuntos B y A porque contiene la letra B en 1er lugar y la letra A en 3er lugar. En el caso del anagrama BRASIL, éste pertenece, simultáneamente, a los conjuntos B, R y A, pues contiene la letra B en 1er lugar, la letra R en 2º lugar, y la letra A en 3er lugar. Así, para evitar la recurrencia de error en el recuento, es decir, el computar un mismo elemento más de una vez, se debe adoptar la técnica cuantificadora del Principio de Inclusión-Exclusión, la cual podrá garantizar la validez de la respuesta.

Por lo tanto, en el ejemplo citado, se desea calcular $n(B \cup R \cup A)$ y, para ello, debe emplearse la fórmula del Principio de Inclusión-Exclusión:

$$n(B \cup R \cup A) = n(B) + n(R) + n(A) - n(B \cap R) - n(B \cap A) - n(R \cap A) + n(B \cap R \cap A).$$

Para el cálculo de $n(B), n(R)$ y $n(A)$, es necesario entender que cada uno de estos recuentos representa, ni más ni menos, el número de permutaciones de la palabra BRASIL con una letra fija, o sea, $n(B) = n(R) = n(A) = 120$:

$$n(B) = \boxed{B}\ \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 120;$$
$$n(R) = \boxed{5} \times \boxed{R} \times \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 120;$$
$$n(A) = \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{A} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 120.$$

Así, los recuentos de $n(B \cap R), n(B \cap A)$ y $n(R \cap A)$ representan las permutaciones con dos letras fijas:

$$n(B \cap R) = \boxed{B}\ \boxed{R} \times \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 24.$$

lo que garantiza que:

$$n(B \cap R) = n(B \cap A) = n(R \cap A) = 24.$$

Consecuentemente, $n(B \cap R \cap A)$ significa el número de permutaciones de la palabra BRASIL con tres letras fijas:

Por tanto: $n(B \cap R \cap A) = \boxed{B}\ \boxed{R}\ \boxed{A}\ \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 6.$

$$n(B \cup R \cup A) = n(B) + n(R) + n(A) - n(B \cap R) - n(B \cap A) - n(R \cap A) + n(B \cap R \cap A)$$

$$n(B \cup R \cup A) = 3 \times 120 - 3 \times 24 + 6 = 294.$$

Actividad 2_4: Presentación de las Permutaciones con repetición.

Acción 1: Presentación de las Permutaciones con Repetición.
Resolución: Inicialmente, se debe observar que cualquiera que sea el camino que una persona elija para ir del punto A al punto B, yendo por el camino más corto posible, estará tomando la dirección Norte (N) tres veces y la dirección Este (L) cuatro veces, o sea, el conjunto de las direcciones será: $D = \{N, N, N, L, L, L, L\}$, lo que puede garantizar que, para ir de A en dirección a B, se estarán tomando siempre 7 decisiones. A título de ilustración mostramos a continuación, como ejemplo, dos de esas posibles formas (caminos): *NLNLNLL*, ***LLLNNLN***.

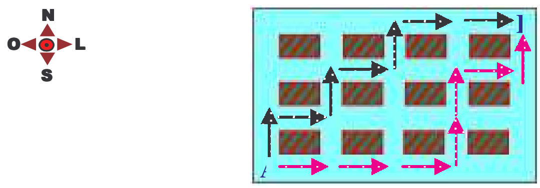


Figura 20

Se observa entonces que, cualquiera que sea la ordenación de esas 7 letras (*3N4L*), contemplará una de las posibles formas (caminos) que, partiendo del punto A se llega al punto B (Figura 20). Tal aspecto caracteriza esos posibles caminos como permutaciones de las direcciones Norte (N) y Este (L), representadas aquí por el conjunto D, pues todos ellos tienen la misma naturaleza $(m = n)$ del conjunto de origen (*3N4L*), distinguiéndose entre sí, únicamente, por la alteración de sus posiciones.

Sin embargo, como, en realidad, esas direcciones pueden repetirse en un mismo camino (los m elementos no son distintos), se trata, en este caso, de **permutaciones con repetición**, ya que hay 3 letras iguales a N y 4 letras iguales a L.

Acción 2: Formatación del P.M. para el cálculo de Permutaciones con repetición.
Resolución: Así, el total de esas posibles permutaciones no podrá ser $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, pues este cálculo corresponde a una permutación simple (ordinaria) de 7 elementos distintos. Computarlos así, acarrea contar varias veces un mismo camino.

Finalmente, para que esto no se produzca se debe descontar de aquel total el número equivalente a las permutaciones de las 3 letras N (considerando estas tres letras diferentes, existen $3 \times 2 \times 1 = 6$ permutaciones formadas, alternando la posición de las tres $N's$ que, en realidad, son una sola) y de las 4 letras iguales a L (haciendo el mismo razonamiento para las 4 letras $L's$, el número de permutaciones iguales será $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$) para que, realmente, pueda computarse el total de permutaciones con repetición de forma distinta:

$$3N + 4L = 7\ letras \Rightarrow \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{\underbrace{3\times2\times1}_{N's}\times\underbrace{4\times3\times2\times1}_{L's}} = 35\ formas.$$

Generalmente, se ha venido adoptando, para la obtención del resultado de este tipo de situación, la aplicación de la fórmula:

$$P_m^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} = \frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}\ com\ \alpha+\beta+\ldots+\lambda = m.$$

Pero, debe entenderse que el cálculo que se realizó anteriormente utilizando el P. M. representa, ni más ni menos, el razonamiento que subyace a esa fórmula.

Actividad 3: Combinaciones Ordinarias y con Repetición.

Acción 1: Presentación del concepto de Combinación Simple u Ordinaria.
Resolución: Se debe entender inicialmente que, cuando los elementos que se desea contar son triángulos, éstos se hallan delimitados por tres vértices. Los vértices, a su vez, deberán elegirse entre los puntos que pertenecen a las rectas r y s, las cuales forman juntas los conjuntos generadores de las agrupaciones (que son los triángulos). Ejemplificando algunas de ellas tenemos: $\Delta FAH, \Delta AID, \Delta CLE, \Delta MDP, \ldots$; de inmediato, se observa que tales agrupaciones son distintas porque difieren en alguno de sus elementos (distinción por naturaleza). Cabe ahora investigar si el cambio en el orden de colocación de los elementos en los grupos influye de tal manera, que origina otros subconjuntos (o sea, nuevos triángulos). Sin embargo, esto no ocurre, pues las agrupaciones $\Delta AFH = \Delta HFA = \Delta FHA$, por ejemplo, representan el mismo triángulo, por lo cual sólo debe ser computado una vez. Siendo así, los recuentos con tales características se denominan combinaciones ordinarias, pues en ellas la distinción entre los grupos está delimitada por la naturaleza de los elementos, de tal manera que dos combinaciones serán consideradas como distintas si difieren únicamente por la naturaleza de sus elementos.

Acción 2: Formatación de la técnica de recuento de las Combinaciones Ordinarias.
Resolución (a): Para la obtención del número de combinaciones ordinarias, se utiliza habitualmente la expresión $C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ (con m elementos distintos y siendo $m \geq 1\ e\ 1 \leq n \leq m$). No obstante, este cálculo podrá efectuarse también utilizando el principio multiplicativo, del cual se deriva el recuento propuesto en la mencionada expresión. Con todo, es necesario darle una formatación adecuada para obtener la cuantificación deseada. Esto se llevará a cabo tomando como ejemplo la situación en cuestión.

Inicialmente, debemos aclarar que no se trata tan sólo de escoger, de entre los 15, tres puntos cualesquiera, porque si esos puntos fuesen colineales no darán lugar a la formación de triángulos, sino a segmentos, lo que lleva a concluir que, sólo en los dos casos ilustrados más abajo se dará lugar a la composición de triángulos (Figura 21):

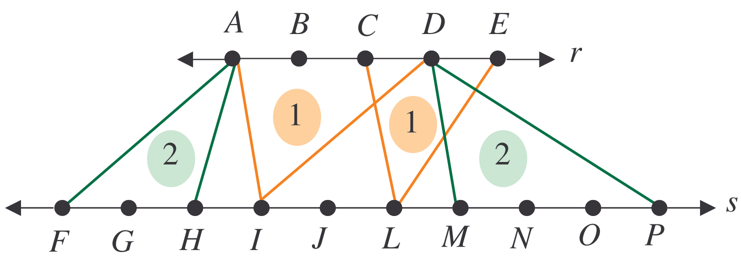


Figura 21

Caso 1: escoger un segmento en r y un punto en s:

D_1: escoger el 1er punto del segmento en r (1er vértice) $\longrightarrow$ 5 posibilidades;

D_2: escoger el 2º punto del segmento en r (2º vértice) $\longrightarrow$ 4 posibilidades;

D_3: escoger el 3er vértice en s $\longrightarrow$ 10 posibilidades.

Por el P.M.: $$\frac{\overbrace{\underset{1^\circ \textit{vértice}}{\underline{5}} \times \underset{2^\circ \textit{vértice}}{\underline{4}}}^{\textit{un segmento en } r}}{\underbrace{2 \times 1}_{\substack{\textit{descontar el orden}\\ \textit{enlos segmentos}}}} \times \frac{\overbrace{10}^{\textit{un punto en } s}}{3^\circ \textit{vértice}} = 100 \text{ triángulos.}$$

Caso 2: un segmento en s y un vértice en r:

D_1: escoger el 1er punto del segmento en s (1er vértice) $\longrightarrow$ 10 posibilidades;

D_2: escoger el 2º punto del segmento en s (2º vértice) $\longrightarrow$ 9 posibilidades;

D_3: escoger el 3er vértice en r $\longrightarrow$ 5 posibilidades.

Por el P.M.: $$\frac{\overbrace{\underset{1^\circ \textit{vértice}}{\underline{10}} \times \underset{2^\circ \textit{vértice}}{\underline{9}}}^{\textit{un segmento en } s}}{\underbrace{2 \times 1}_{\substack{\textit{descontar el orden}\\ \textit{enlos segmentos}}}} \times \frac{\overbrace{5}^{\textit{un punto } r}}{3^\circ \textit{vértice}} = 225 \text{ triángulos.}$$

Total: $100 + 225 = 325$ triángulos.

Resolución (b): En este caso, es importante observar que sólo existe una única situación para componer cuadriláteros, que consiste en escoger dos puntos en r y dos puntos en s:

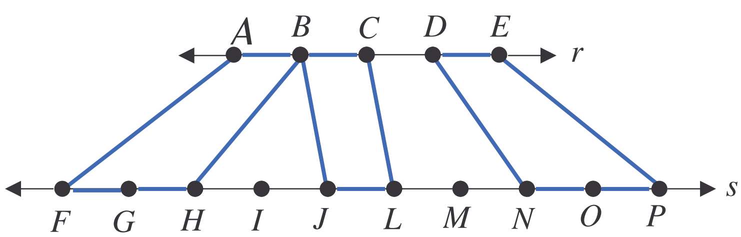


Figura 22

De este modo, para ello, se deben tomar cuatro decisiones:

D_1: escoger el 1er punto del segmento en r $\longrightarrow$ 5 posibilidades;

D_2: escoger el 2º punto del segmento en r $\longrightarrow$ 4 posibilidades;

D_3: escoger el 1er punto del segmento en s $\longrightarrow$ 10 posibilidades;

D_4: escoger el 2º punto del segmento en s $\longrightarrow$ 9 posibilidades.

$$\text{Por el P.M.: } \frac{\overbrace{5\times 4}^{\textit{segmento en } r}}{\underbrace{2\times 1}_{\text{sin } \textit{el orden}}} \times \frac{\overbrace{10\times 9}^{\textit{segmento en } s}}{\underbrace{2\times 1}_{\text{sin } \textit{el orden}}} = 10\times 45 = 450 \textit{ cuadriláteros.}$$

Por todo lo anterior, se concluye, entonces, que los referidos recuentos caracterizan las especificidades de las **combinaciones ordinarias o simples**.

Actividad 3_2: Combinación con Repetición.

• i) Con $m > n$.

Acción 1: Presentación de las Combinaciones con Repetición.

Resolución: Llamando $B = \{a, b, c, d\}$ al conjunto de los atracciones ofrecidas por el parque, se desea saber de cuántas maneras una persona podrá comprar tres billetes para montar en esas atracciones. Está claro que como no se hace referencia a que la compra de esos billetes deba ser para atracciones distintas, esa persona podrá comprar dos o hasta incluso tres billetes del mismo tipo (pudiera ser el caso, por ejemplo, de que quisiera montar dos veces en la noria gigante, o incluso tres veces en la barca).

Listando algunas de esas agrupaciones podemos obtener: $abc,\ abb,\ acd,\ ccc, \ldots$; luego se observa que, conforme se producen esas opciones, todas las otras posibilidades difieren entre sí únicamente por la naturaleza de sus elementos, toda vez que las alteraciones en el orden de los elementos en un mismo grupo no dan lugar a nuevas posibilidades de compra de billetes, como, por ejemplo, $abc = acb = bca \ldots$.

Los aspectos señalados anteriormente remiten a la conclusión de que las agrupaciones con tales características deben ser clasificadas como combinaciones con repetición, puesto que además de la formación de subconjuntos distintos ($abc, acd, \ldots$) se produce también la posibilidad de composición de agrupaciones con elementos repetidos ($abb, ccc, \ldots$).

Acción 2: Estrategia para el recuento en las Combinaciones con Repetición.

Para componer esta estrategia se buscó la inspiración que proporciona el modelo de resolución propuesto por Santos (1995, p.71-73).

Obviamente, para computar tales agrupaciones no se podrá recurrir a la misma estrategia de recuento de las combinaciones ordinarias, pues esta última sólo daría cuenta de las opciones de elección para atracciones distintas. En este caso, cabe componer una nueva estrategia cuantificadora que posibilite contar todas estas combinaciones ($CR_4^3 \rightarrow$ combinaciones con repetición de cuatro elementos tomados de tres en tres).

Para saber cuáles fueron los 3 billetes comprados, basta saber cuántos billetes de cada tipo compró aquella persona. Llamando x_1 al número de billetes para la atracción de tipo a, x_2 al número para b, x_3 para c y, finalmente, x_4 al número para la atracción d, lo que se está buscando es, ni más ni menos, el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$. Eso significa que las variables x_i pueden asumir cualquier valor entero positivo y también el valor cero.

Para la comprobación y el convencimiento de la eficacia de tal estrategia es importante ejemplificar (véase cuadro 2, seguidamente) algunas de esas posibles soluciones y sus correspondientes posibilidades de compra de billetes:

Cuadro 2: Soluciones x Posibilidades.

Soluciones para la ecuación: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$	**Posibilidades de compra de billetes**
(2, 0, 0, 1)	*aad*
(0, 0, 1, 2)	*cdd*
(0, 3, 0, 0)	*bbb*
…	…

Por lo tanto, determinar el número de soluciones para la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ es, consecuentemente, cuantificar los subconjuntos de B que representan todas las posibilidades de compra de los tres billetes.

Con el fin de contabilizarlas debe escribirse en la ecuación el número 3 como la suma de tres $1's$ e introducir barras (/) divisoras para separarlos. Es importante llamar la atención sobre el hecho de que, como se está interesado en expresar el entero 3 en cuatro partes (x_1, x_2, x_3 e x_4), será suficiente incluir en la ecuación tres de esas barras, esto es:

$$/1/+1/+1 = 3 \rightarrow (0,1,1,1) \rightarrow bcd;$$

$$1\ /+1\ /+\ 1/\ = 3 \rightarrow (1,1,1,0) \rightarrow abc.$$

Para una mejor visualización de estas representaciones se eliminarán los signos + entre los $1's$ y para evitar una confusión entre los símbolos (de 1 y de $/$) se tuvo a bien utilizar en la ecuación la letra b en sustitución de cada una de las barras divisoras, o sea:

$$/1/1/1 \rightarrow b1b1b1 \rightarrow (0,1,1,1) \rightarrow bcd.$$

Cabe observar además que en la composición de tales representaciones pueden darse dos o más $b's$ juntos, lo que permite que por lo menos una de las variables (x_i) pueda asumir el valor cero, cosa que en la cuestión objeto de estudio siempre deberá ocurrir.

Con todo, cualesquiera que sean esas representaciones, continuarán estando compuestas por un conjunto de seis símbolos (secuencias de tres $1's$ y tres $b's$ juntos o alternos) cuya distinción se establece en virtud de la forma en que se van componiendo las diferentes soluciones para la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ y, por correspondencia, los diferentes subconjuntos de B . Por ejemplo, podemos tener:

$$bb1b11 \to (0,0,1,2) \to cdd;$$
$$1bb11b \to (1,0,2,0) \to acc;$$
$$bbb111 \to (0,0,0,3) \to ddd.$$

Así, el número de secuencias de este tipo se da por $C_{6,3}\ o\ C_6^3$. Obsérvese que seis representa el número de elementos (símbolos) que componen las secuencias y tres se justifica porque se desea separarlos en cuatro partes. Este número se da por $C_6^3 = \dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$ posibilidades de comprar los tres billetes.

En el caso general en que se tengan ecuaciones con n variables $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = m,$ para $x_i \geq 0$ el número de soluciones se da por $C_{m+n-1}^{n-1}\ ou\ C_{m+n-1}^{m}$, o sea, $CR_m^n = C_{m+n-1}^{m}$.

• ii) Con $m < n$.

Acción 1: Presentación de las Combinaciones con Repetición.

Resolución: es importante observar que, en este caso, todos los subconjuntos van a formarse con la repetición de por lo menos uno de los elementos, pues el número de tomadas no se agota junto con el número de posibilidades ofertadas. Por lo tanto, todas ellas serán agrupaciones con repetición de por lo menos un elemento. ($CR_4^8 \to$ combinaciones con repetición de cuatro elementos tomados de ocho en ocho).

Acción 2: Estrategia para el recuento en las Combinaciones con Repetición.

Resolución: Inicialmente debe quedar claro que este recuento es equivalente a cuantificar el número de soluciones enteras no negativas para la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, cuyas soluciones representan agrupaciones cuaternarias del tipo:

$$(1,0,2,5), (2,1,4,1), (8,0,0,0)\ldots.$$

Para ejemplificarlo mejor, se puede muy bien reescribirlas como secuencias de ocho $1's$ y tres letras $b's$ (que representan las barras divisoras), de forma que dan lugar a la composición de los subconjuntos correspondientes a cada solución:

$$1bb11b11111 \to (1,0,2,5) \to accddddd;$$
$$11b1b1111b1 \to (2,1,4,1) \to aabccccd;$$
$$11111111bbb \to (8,0,0,0) \to aaaaaaaa.$$

Así estas representaciones poseen secuencias diferentes de ocho $1's$ y de tres letras $b's$ separadas en agrupaciones cuaternarias cuyo total puede determinarse de la siguiente forma: $CR_4^8 \to C_{4+8-1}^8 = C_{11}^8 = \dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1} = 165$ posibilidades.

De todo ello se concluye, entonces, que los referidos recuentos caracterizan las especificidades de las **combinaciones con repetición**.

3.3.2 Descripción de los Propósitos e Intenciones Educativas de las Actividades Didácticas del Texto de Lógica Matemática

Situación 1: Delimitar el objeto básico de estudio de la Lógica.

Propósito de la Situación 1

Esta situación pretende centrase pedagógicamente en tres aportaciones básicas a las ideas iniciales sobre la Lógica. En la primera se pretende señalar que, cuando se trabaja con sentencias declarativas, incluso con aquellas que no presentan encadenamiento lógico entre sí, resulta posible solucionar un determinado problema. En la segunda, se pretende apuntar que, cuando se trabaja con sentencias declarativas que presentan encadenamiento lógico entre sí, las respuestas obtenidas son más económicas y confiables que cuando se trabaja con las sentencias declarativas que no presentan dicho encadenamiento lógico. Y, en la tercera, al confrontar las dos anteriores, se busca enfatizar la importancia de la segunda aportación.

Actividad 1: Razonamientos que no presentan encadenamiento lógico (Figura 23)**.**

La actividad consiste en la presentación de cinco casas, conforme aparece en la figura de abajo, las cuales difieren entre sí en los siguientes aspectos: el color del inmueble, la nacionalidad del propietario, la marca de su coche, su bebida preferida, y el animal doméstico que vive en ella.

Figura 23

Además, como complemento a los datos sobre la actividad, se presentan dieciocho sentencias. El problema que debe resolverse consiste en determinar el morador de cada casa, considerando las respectivas diferencias con relación a los aspectos propuestos más arriba.

Sentencias dadas:

- Las cinco casas están localizadas en el mismo lado de la avenida;
- El peruano vive en la última casa de la avenida y tiene un vehículo de la marca Opel;
- El morador que es dueño de un gato no bebe café y no vive en la casa de color azul;
- El peruano y el argentino son vecinos;
- La 3ª casa es de color rojo y, en ella, la bebida preferida es la pepsi-cola;
- El mexicano vive en la casa de color rojo;

- El chileno bebe coca-cola y es vecino del mexicano;
- El dueño de la vaca es vecino del propietario del vehículo de la marca Renault;
- El brasileño es vecino del propietario de la casa de color azul;
- El vehículo Chevrolet pertenece al propietario de la casa de color rosa;
- El argentino tiene un perro y vive al lado de la casa de color verde;
- La casa de color verde queda al lado de la casa de color gris;
- El propietario del vehículo Chevrolet es vecino del dueño del caballo;
- El propietario del vehículo Volkswagen cría conejos;
- El dueño de la vaca vive al lado de la casa donde se bebe coca-cola;
- En la casa de color verde, la bebida preferida es el whisky;
- El propietario del vehículo Honda bebe cerveza;
- La casa del morador que cría conejos está a la misma distancia de la casa del morador que tiene un vehículo de la marca Renault y de la casa del que bebe cerveza.

Acción 1: Lectura y análisis de todas las sentencias.

Acción 2: Organizar las informaciones que contienen las sentencias de acuerdo con los aspectos presentados:
Resolución:

Cuadro 3: Organización de las informaciones.

Aspectos propuestos / Nº da casa	Color del Inmueble	Nacionalidad	Marca de coche	Preferencia de bebida	Tipo de animal doméstico
801	Rosa	Brasileño	Chevrolet	Café	Vaca
802	Azul	Chileno	Renault	Coca-cola	Caballo
803	Roja	Mexicano	Volkswagen	Pepsi-cola	Conejos
804	Gris	Argentino	Honda	Cerveza	Perro
805	Verde	Peruano	Opel	Whisky	Gato

Acción 3: Determinación, a partir de la sistematización de la organización establecida anteriormente, del morador de cada una de las cinco casas a partir de los aspectos propuestos.
Resolución:

- La casa número 801 es de color rosa, su morador es de nacionalidad brasileña, la marca de su coche es Chevrolet, prefiere tomar café y cría como animal doméstico una vaca.
- La casa número 802 es de color azul, su morador es de nacionalidad chilena, la marca de su coche es Renault, prefiere tomar coca-cola y cría como animal doméstico un caballo.
- La casa número 803 es de color rojo, su morador es de nacionalidad mexicana, la marca de su coche es Volkswagen, prefiere tomar pepsi-cola y cría conejos.

- La casa número 804 es de color gris, su morador tiene nacionalidad argentina, la marca de su coche es Honda, prefiere tomar cerveza y cría como animal doméstico un perro.
- La casa número 805 es de color verde, su morador es de nacionalidad peruana, la marca de su coche es Opel, prefiere tomar Whisky y cría como animal doméstico un gato.

Actividad 2: Razonamientos que presentan encadenamiento lógico.

La actividad propuesta para enfocar los razonamientos que presentan encadenamiento lógico se desarrolló a partir del texto que ahora reproducimos:

La heredera

"Hace no mucho tiempo, en un país lejano, había un viejo rey que tenía tres hijas, inteligentísimas y de indescriptible belleza, llamadas Guillermina, Genoveva y Griselda. Sintiéndose cerca de partir de ésta para mejor vida, y sin saber a cuál de ellas designar como su sucesora, el viejo rey resolvió someterlas a una prueba. La vencedora no sólo sería la nueva soberana, sino también recibiría la clave de la cuenta secreta del rey (en un banco), además de ganar un fin de semana, con los gastos pagados, en Disneylandia. Llamando a las hijas a su presencia, el rey les mostró cinco pares de pendientes, idénticos en todo con excepción de las piedras engarzadas en ellos: tres eran de esmeralda, y dos de rubí. El rey vendó entonces los ojos de las mozas y, escogiendo al azar, colocó a cada una de ellas un par de pendientes. La prueba consistía en lo siguiente: aquella que fuera capaz de decir, sin género de duda, cuál era el tipo de piedra que había en sus pendientes heredaría el reino (y la cuenta en Suiza, etc.).

La primera que quiso intentarlo fue Guillermina, a quien se le retiró la venda de los ojos. Guillermina examinó los pendientes de sus hermanas, pero no fue capaz de decir qué tipo de piedra había en los suyos (y se marchó furiosa). La segunda que quiso intentarlo fue Genoveva. Sin embargo, tras examinar los pendientes de Griselda, Genoveva se dio cuenta de que tampoco podía determinar si sus pendientes eran de esmeralda o de rubí y, con la misma furia que su hermana, salió dando un portazo. En cuanto a Griselda, incluso antes de que el rey le retirara la venda de los ojos, anunció correctamente, con voz alta y clara, el tipo de piedra de sus pendientes, explicando incluso el porqué de su afirmación. Así, ella heredó el reino, la cuenta en Suiza y, en el viaje a Disneylandia, conoció a un joven cirujano plástico, con quien se casó y fue feliz para siempre. ¿Cuál era la piedra de los pendientes de Griselda: esmeralda o rubí? Justifique la respuesta (Mortari, 2001, p. 2-3).

Queda claro, por tanto, que, después de leídas las informaciones contenidas en el texto anterior la pregunta que debe ser respondida es: ¿las piedras de los pendientes de Griselda son de esmeralda o de rubí? Justifique la respuesta.

Acción 1: Análisis e identificación de las sentencias que compondrán los argumentos.

Resolución:

- **...** *el rey les mostró cinco pares de pendientes, idénticos en todo con excepción de las piedras engarzadas en ellos: tres eran de esmeralda, y dos de rubí.*
- **...** *aquella que fuera capaz de decir, sin género de duda, cuál era el tipo de piedra que había en sus pendientes heredaría el reino...*
- **...** *La primera que quiso intentarlo fue Guillermina***...**
- **...** *Guillermina examinó los pendientes de sus hermanas, pero no fue capaz de decir qué tipo de piedra había en los suyos (y se marchó furiosa)***...**
- **...** *La segunda que quiso intentarlo fue Genoveva***...**
- **...** *tras examinar los pendientes de Griselda, Genoveva se dio cuenta de que tampoco podía determinar si sus pendientes eran de esmeralda o de rubí y, con la misma furia que su hermana, salió dando un portazo.***...**
- **...** *Griselda, incluso antes de que el rey le retirara la venda de los ojos, anunció correctamente, con voz alta y clara, el tipo de piedra de sus pendientes, explicando incluso el porqué de su afirmación***...**
- **...** *¿Cuál era la piedra de los pendientes de Griselda: esmeralda o rubí? Justifique la respuesta.*

Acción 2: Construcción de los encadenamientos lógicos.

Resolución:

- La primera que quiso decir cuál era el tipo de piedra que había en sus pendientes fue Guillermina. Al observar a las dos hermanas ella podría haber visto tres cosas diferentes (hipótesis):

1ª Hipótesis: cada hermana con pendientes de esmeralda;
2ª Hipótesis: cada una de las hermanas con pendientes de rubí;
3ª Hipótesis: una hermana con pendientes de rubí y la otra con pendientes de esmeralda.

- Si Guillermina hubiese visto a sus hermanas con los dos pendientes de rubí, entonces ella sólo podría estar con el de esmerada. Luego, acertaría la piedra de sus pendientes.
- Guillermina o vio un par de esmeralda y el otro de rubí o los dos pares de esmeralda.

- La segunda que quiso decir el tipo de piedra que había en sus pendientes fue Genoveva. Al observar a su hermana, podría haber visto dos cosas diferentes (hipótesis):

1ª Hipótesis: la hermana con pendientes de esmeralda;
2ª Hipótesis: la hermana con pendientes de rubí.

- Si Genoveva hubiese visto a Griselda con el pendiente de rubí, entonces ella sólo podría estar con el pendiente de esmeralda, deducción construida a partir de la reacción de su hermana Guillermina. Acertando, así, la piedra de su pendiente.
- Si Genoveva vio a Griselda con pendientes de esmeralda, entonces ella podría estar o con pendientes de esmeralda o de rubí, deducción también construida a partir de la reacción de su hermana Guillermina.

Genoveva percibió, entonces, que no podría determinar la piedra de sus pendientes.

Acción 3: Elaboración del argumento final y conclusión.

Resolución:

- Griselda, la última de las hermanas, analizando la reacción de Guillermina y Genoveva deduce que ella sólo puede estar con pendientes de esmeralda, según los encadenamientos construidos en la acción 2.

- Si Genoveva y Guillermina no acertaron, entonces ella sólo podía estar con pendientes de esmeralda.
- Genoveva y Guillermina no acertaron.

Luego, ella solamente puede estar con pendientes de esmeralda.

Actividad 3: Razonamiento lógico a partir de las sentencias abiertas x sentencias declarativas.

Se sabe que toda curva cerrada simple separa el plano en que se traza en tres conjuntos de puntos: el conjunto de puntos del exterior de la figura, el conjunto de puntos del interior de la figura (llamado región) y el conjunto de puntos de frontera entre ambos (el exterior y la región), el cual representa la propia curva cerrada simple.

Considerando, por tanto, que la circunferencia (Figura 24) es un caso específico de una curva cerrada simple de infinito número de puntos, conforme aparece más abajo en la ilustración, se presentan algunas sentencias que deberán clasificarse como Sentencias Abiertas (SA) o Sentencias Declarativas (SD), y, a continuación, a partir de tales sentencias, se construyeron argumentos que deben ser analizados en el sentido de poseer o no encadenamiento lógico.

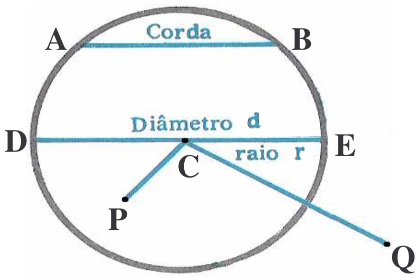


Figura 24

Acción 1: Distinguir, de entre las ocho sentencias dadas, aquellas que son Sentencias Abiertas (SA) de las que son Sentencias Declarativas (SD).

Resolución:

- El interior de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos cuya distancia con el centro C es menor que r unidades. **(SD)**
- El segmento que une dos puntos de una circunferencia se denomina cuerda. **(SD)**
- ¿El exterior de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos cuya distancia con el centro C es mayor que r unidades? **(SA)**
- Toda cuerda que no es diámetro es menor que el doble del radio. **(SD)**
- ¿Todos los puntos que se encuentran a una distancia de r unidades del centro C forman la circunferencia? **(SA)**
- P es punto interno de la circunferencia. **(SD)**
- El diámetro es la mayor cuerda de la circunferencia cuya medida es el doble del radio. **(SD)**
- ¿ Q es punto externo a la circunferencia? **(SA)**

Comentario: Toda sentencia que afirma o niega algo es declarativa. En general, se puede decir de toda sentencia en que sea posible verificar la veracidad de su contenido. Las demás, tales como las interrogativas o exclamativas, son sentencias abiertas.

Acción 2: Reconocer, de entre los dos argumentos construidos, el que posee encadenamiento lógico.

- **Si** $\overline{CP} < r$ **, entonces** P **es punto interno de la circunferencia**.
  $\overline{CP} < r$
  Luego, $\overline{AB}$ **es cuerda**.

Comentario: En ese argumento, el encadenamiento lógico se rompió, pues la conclusión no se deriva de la afirmación del antecedente, como sería lo esperado. Lo correcto sería:

- **Si** $\overline{CP} < r$ **, entonces** P **es punto interno de la circunferencia**.
  $\overline{CP} < r$
  Luego, P **es punto interno de la circunferencia**.

- **Si** $\overline{AB}$ **y** $\overline{DE}$ **son cuerdas y** $\overline{DE} = 2r$**, entonces** $\overline{DE}$ **es diámetro**.
  $\overline{DE}$ **no es diámetro**.
  Luego, $\overline{DE} \neq 2r$ **y** $\overline{AB}$ **y** $\overline{DE}$ **no son cuerdas**.

Comentario: Al negar el consecuente y concluir negando el antecedente, el encadenamiento lógico fue respetado.

Situación 2: Presentación de las reglas de inferencias del silogismo condicional.

Propósito de la Situación 2

Esta situación se elaboró con la finalidad de presentar las reglas de inferencia del silogismo condicional. La primera actividad pretende dar cuenta de un tipo de aplicación intuitiva de los *modus* de razonamientos válidos. La segunda se refiere a los *modus* válidos e inválidos de inferencia, que son presentados de manera formal; y en la tercera se trata de una aplicación de los *modus* formalizados anteriormente, si bien en una contextualización ajena al mundo académico.

Actividad 1: La importancia de la simbología en el silogismo condicional.

Obsérvense los cuatro cartones (Figura 25) tal y como aparecen dispuestos abajo. Sabiendo que cada uno de ellos tiene una letra por una cara y un guarismo entero por la otra, se elaboró la siguiente afirmación: todos los cartones que tienen una vocal por una cara tienen un número par en la otra.

Figura 25

Acción 1: Elaborar la sentencia condicional a partir de la afirmación dada:

Resolución: Si hay una vocal por una cara, entonces hay un guarismo par en la otra.
Acción 2: Identificar, de entre los ítems que aparecen a continuación, aquel que permita averiguar si la proposición elaborada anteriormente es verdadera o falsa.

Resolución:
a) Es necesario dar la vuelta a todos los cartones.
b) Es suficiente con dar la vuelta a los dos primeros cartones.
c) Es suficiente con dar la vuelta a los últimos cartones.
d) Es suficiente con dar la vuelta a los dos cartones del medio.
e) Es suficiente con dar la vuelta al primer y al último cartón.

Acción 3: Justificar la alternativa escogida haciendo uso del cálculo proposicional.
Resolución: No es necesario dar la vuelta a todos los cartones, como sugiere el item “a”, pues, si la Sentencia Condicional no trata de consonantes, no será necesario dar la vuelta al cartón que tiene la letra ”D” eliminándose así la alternativa “b”. Tampoco es necesario dar la vuelta al cartón que tiene el guarismo “4”, porque la Sentencia no es una Bicondicional, e tener un guarismo par no implica tener una vocal por la otra cara. Es suficiente, entonces, dar la vuelta a los dos cartones del medio (que tienen la vocal “A” y el guarismo “7”), como sugiere el ítem “d”. En el caso del cartón con la vocal “A”, para tener la seguridad de que por la otra cara tiene realmente un número par, conforme determina la sentencia, y, en el caso del que tiene el guarismo “7”, para confirmar justamente la presencia de una consonante, pues, si no es par, no puede ser vocal. Aplicando la simbología, como se expone más abajo, podemos llegar al mismo resultado de forma más simple:

“Si hay una vocal por una cara (*Vf*), entonces hay un guarismo par por la otra (*Pf*)”

• $Vf \rightarrow Pf$ Vf $\therefore PF$	Si hay una vocal por una cara, entonces hay un guarismo par por la otra. Hay una vocal por una cara. Luego, hay un guarismo par por la otra cara.
• $Vf \rightarrow Pf$ $\sim Pf$ $\therefore \sim Vf$	Si hay una vocal por una cara, entonces hay un guarismo par por la otra. No hay número par por la otra cara. Luego, no hay una vocal por la otra cara.

Actividad 2: Ilustración de las reglas de inferencias en el ámbito académico.

Analice la siguiente sentencia dada, aplicando los *modus* de inferencias, válidas e inválidas.

Sea A un conjunto formado por m elementos distintos y n el número de elementos tomados de esos m en la composición de los subconjuntos de A. *Si en los subconjuntos formados se produce* $m = n$*, entonces las variaciones ordinarias equivalen a permutaciones ordinarias*.

Acción 1: Traducción de las proposiciones al lenguaje del cálculo proposicional.
Resolución: *Si en los subconjuntos formados se da* $m = n$, *entonces, las variaciones ordinarias equivalen a permutaciones ordinarias.*

- *Si en los subconjuntos formados se da* $m = n$.
  - Representando $m = n$ por "e".
  - *Si en los Subconjuntos formados se da "* e *": Es*
- *Las Variaciones Ordinarias equivalen a permutaciones ordinarias.*
  - Representando *Permutaciones ordinarias* por p.
  - *Las Variaciones ordinarias equivalen a* p **:** Pa.

Acción 2: Representación del argumento en lenguaje simbólico.
Resolución: *Si en los subconjuntos formados se da* $m = n$, *entonces las variaciones ordinarias equivalen a permutaciones ordinarias*.

- $Es \to Pa$.

Acción 3: Construcción y análisis de los encadenamientos lógicos aplicando el *Modus Ponens*, *Modus Tollens* y las falacias (afirmación del consecuente y negación del antecedente).
Resolución:

- ***Modus Ponens***
  - $Es \to Pa$ *Si en los subconjuntos formados se da* $m = n$, *entonces las variaciones ordinarias equivalen a permutaciones ordinarias*.

  Es $\quad m = n$.

  $\therefore Pa$ *Las variaciones ordinarias equivalen a permutaciones ordinarias*.

- ***Modus Tollens***
  - $Es \to Pa$ *Si en los subconjuntos formados se da* $m = n$, *entonces las variaciones ordinarias equivalen a permutaciones ordinarias*.

  $\sim Pa$ *Las variaciones ordinarias no equivalen a permutaciones ordinarias*.

  $\therefore \sim Es$ $\quad m \neq n$.

- **Falacia de la Negación del Antecedente**
  - $Es \to Pa$ *Si en los subconjuntos formados se da* $m = n$, *entonces las variaciones ordinarias equivalen a permutaciones ordinarias*.

  $\sim Es$ $\quad m \neq n$.

  $\therefore ?$

Comentario: Nada se puede concluir a partir de la negación del antecedente, pues los subconjuntos pueden ser tan sólo variaciones ordinarias sin que sean permutaciones ordinarias.

- **Falacia de la Afirmación del Consecuente**
  - $Es \to Pa$ *Si en los subconjuntos formados se da* $m = n$, *entonces las variaciones ordinarias equivalen a permutaciones ordinarias*.

  Pa *Las variaciones ordinarias equivalen a permutaciones ordinarias.*

  $\therefore ?$

Comentario: Nada se puede concluir a partir de la afirmación del consecuente, pues esa conclusión sólo sería válida si toda permutación ordinaria también fuese una variación ordinaria, o sea, si estuviéramos tratando de sentencias bicondicionales.

Actividad 3: Ilustración de las reglas de inferencias fuera del ámbito académico.

Analice la sentencia dada en el siguiente contexto, aplicando los *modus* de inferencias válidas e inválidas.

Fernando es socio de su hermano en una franquicia del Servicio de Correos y Telégrafos (Figura 26). Para agilizar la atención al público, resolvieron hacer la siguiente promoción: "si un sobre va lacrado, llevará un sello de treinta y cinco centavos"; el precio normal de franqueo es cincuenta centavos. Un cliente trajo los cuatro sobres que aparecen abajo y los colocó encima del mostrador.

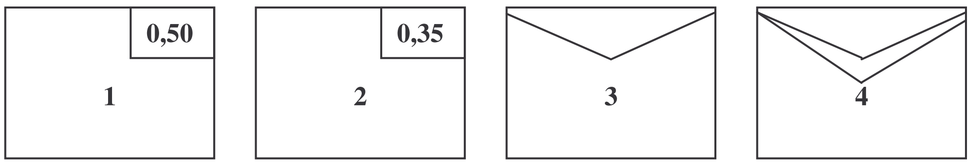


Figura 26

¿A cuántos y a cuáles de esos sobres debe dar la vuelta Fernando para estar seguro de que la regla de la promoción se cumple?

Acción 1: Traducción de las proposiciones al lenguaje del cálculo proposicional.
Resolución: "si un sobre estuviera lacrado, llevará un sello de treinta y cinco centavos".
- Sobre lacrado: Le.
- Sello de treinta y cinco centavos: Ts.

Acción 2: Representación del argumento en lenguaje simbólico.
Resolución: "Si un sobre estuviera lacrado, llevará un sello de treinta y cinco centavos".
- $Le \to Ts$.

Acción 3: Construcción del encadenamiento lógico, aplicando el Modus Ponens y el Modus Tollens.

Resolución:
➢ **Modus Ponens**

- $Le \to Se$ "Si un sobre estuviese lacrado, llevará un sello de treinta y cinco centavos".
  Le El sobre está lacrado.
  $\therefore Se$ El sobre tiene un sello de trinta y cinco centavos.

➢ **Modus Tollens**

- $Le \to Ts$ "Si un sobre estuviese lacrado, llevará un sello de treinta y cinco centavos".
  $\sim Ts$ El sobre no lleva un sello de treinta y cinco centavos.
  $\therefore \sim Le$ El sobre no está lacrado.

Acción 4: Verificación y Análisis de los encadenamientos lógicos construidos buscando dar respuesta a la cuestión.
Resolución: Analizando la aplicación del Modus Ponens y del Modus Tollens, se verifica que es necesario dar la vuelta a los sobre 3 y 1, respectivamente. En el caso del sobre 3, para tener la seguridad de que lleva un sello de treinta y cinco centavos; y en el caso del sobre 1, para confirmar que no está lacrado.

Situación 3: Profundización sobre las reglas de inferencias del silogismo condicional y utilización de otras simbologías.

Propósito de la Situación 3

La tercera situación está referida a un tipo de profundización en las reglas de inferencia del silogismo, dentro de la cual, las actividades 1 y 2 persiguen la meta de usar tales reglas fuera del mundo académico, aunque, mientras en la primera se usa apenas el conector de implicación, en la segunda, además, se utilizan otros conectores. Por su parte, la tercera actividad pretende, dentro del ámbito de las Matemáticas, y, en especial, en el Álgebra, emplear el razonamiento lógico con la finalidad de propiciar una visión de su importancia para la comprensión del conocimiento matemático.

Actividad 1: Consolidación de las reglas de inferencias con el conector de implicación fuera del ámbito académico.

Considere las afirmaciones: si Patricia es una buena amiga, Víctor dice la verdad; si Víctor dice la verdad, Elena es una buena amiga; si Elena no es una buena amiga, Patricia es una buena amiga. El análisis del encadenamiento lógico de esas tres afirmaciones permite concluir que ellas:
Resolución:
a) implican necesariamente que Patricia es una buena amiga.
b) son consistentes entre sí que Patricia sea una buena amiga y que Patricia no sea una buena amiga.
c) implican necesariamente que Víctor dice la verdad y que Elena no es una buena amiga.
d) equivalen a decir que Patricia es una buena amiga.
e) son inconsistentes entre sí.

Acción 1: Identificación de las proposiciones existentes en el argumento.
Resolución:
- “Si Patricia es una buena amiga, Víctor dice la verdad”;
- “Si Víctor dice la verdad, Elena es una buena amiga”;
- “Si Elena no es una buena amiga, Patricia es una buena amiga”.

Acción 2: Traducción de las proposiciones al lenguaje simbólico.
Resolución:
- Patricia es una buena amiga = Ap.

➢ Víctor dice la verdad: Vv .
➢ Elena es una buena amiga: Ah .
➢ Elena no es una buena amiga: $\sim Ah$.

Acción 3: Construcción de los encadenamientos lógicos.
Resolución:
• $Ap \rightarrow Vv$ Si Patricia es una buena amiga, Víctor dice la verdad.
$Vv \rightarrow Ah$ Si Víctor dice la verdad, Elena es una buena amiga.
$\sim Ah \rightarrow Ap$ Si Elena no es una buena amiga, Patricia es una buena amiga.

Acción 4: Verificación y Análisis de los encadenamientos lógicos construidos buscando dar respuesta a la cuestión.
Resolución:
- El encadenamiento lógico se rompe en la tercera línea: no existe trabazón consistente entre el hecho de que Elena no sea una buena amiga y que Patricia lo sea. La respuesta correcta es, por tanto, la contenida en la letra "e".

Actividad 2: Consolidación de las reglas de inferencias con la utilización de otros conectores fuera del ámbito académico.

Hay tres sospechosos de haber cometido un crimen: el cocinero, la gobernanta y el mayordomo. Se sabe que el crimen fue efectivamente cometido por uno o por más de uno de ellos, ya que pueden haber actuado individualmente o no. Se sabe además que: si el cocinero es inocente, entonces la gobernanta es culpable; o el mayordomo es culpable o la gobernanta es culpable, pero no los dos; el mayordomo no es inocente, luego:
Resolución:
a) La gobernanta y el mayordomo son culpables.
b) Sólo el cocinero es inocente.
c) Sólo la gobernanta es culpable.
d) Sólo el mayordomo es culpable.
e) El cocinero y el mayordomo son culpables.

Acción 1: Identificación de las proposiciones existentes en el argumento.
Resolución:
➢ "Si el cocinero es inocente, entonces la gobernanta es culpable";
➢ "O el mayordomo es culpable o la gobernanta es culpable";
➢ "El mayordomo no es inocente".

Acción 2: Traducción de las proposiciones al lenguaje simbólico.
Resolución:
➢ El cocinero es inocente: Ic .
➢ La gobernanta es culpable: Cg .
➢ El mayordomo es culpable: Cm .
➢ El mayordomo no es inocente: $\sim \mathrm{Im}$.

Comentario: La proposición 'El mayordomo es culpable' es equivalente a la proposición 'El mayordomo no es inocente', entonces, $Cm = \sim \mathrm{Im}$.

Acción 3: Construcción de los encadenamientos lógicos.
Resolución:

- **Aplicación del *Modus Ponens***
  - $Ic \rightarrow Cg$ Si el cocinero es inocente, entonces la gobernanta es culpable.
    Ic El cocinero es inocente.
    $\therefore Cg$ Luego, la gobernanta es culpable.

- **Aplicación del *Modus Tollens***
  - $Ic \rightarrow Cg$ Si el cocinero es inocente, entonces la gobernanta es culpable.
    $\sim Cg$ La gobernanta no es culpable.
    $\therefore \sim Ic$ Luego, el cocinero no es inocente.

- **Aplicación del razonamiento disyuntivo**
  - $Cm \vee Cg$ O el mayordomo es culpable o la gobernanta es culpable.
    Cm El mayordomo es culpable.
    $\therefore \sim Cg$ Luego, la gobernanta no es culpable.

Acción 4: Análisis de los encadenamientos lógicos construidos buscando dar respuesta a la cuestión.
Resolución: El enunciado disyuntivo de más arriba condiciona que o bien el mayordomo es culpable (Cm) o bien la gobernanta es culpable (Cg), y afirma que el mayordomo no es inocente ($\sim \mathrm{Im}$), o sea, si él no es inocente, él es culpable (Cm).

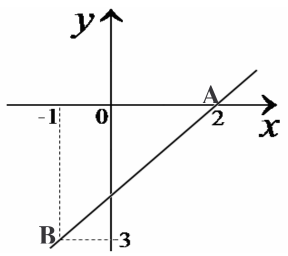
Tomando la conclusión de este encadenamiento y aplicando el *Modus Tollens* al argumento "Si el cocinero es inocente, entonces la gobernanta es culpable", se concluirá que el cocinero no es inocente, luego, él es culpable (Cc).

- $Ic \rightarrow Cg$ Si el cocinero es inocente, entonces, la gobernanta es culpable.
  $\sim Cg$ La gobernanta no es culpable.
  $\therefore \sim Ic$ Luego, el cocinero no es inocente.

Entonces, la alternativa correcta es la contenida en la letra "e".

Actividad 4: Función.

Determinar la ecuación de la recta representada en el plano cartesiano siguiente:



Acción 1: Elaboración de las proposiciones a partir del análisis del gráfico.

Resolución:

- Si el gráfico es una recta, entonces la función es afín. Luego, $f(x) = ax + b$ es el modelo que representa algebraicamente esta recta.
- Si la recta intercepta el eje de las abscisas en el punto 2, entonces la ordenada correspondiente a este punto es nula. Luego, A tiene coordenadas $(2,0)$.
- Si la abscisa -1 y la ordenada -3 constituyen las coordenadas del punto B, entonces se pasa a conocer dos puntos distintos A y B de esta recta.
- Si por dos puntos distintos pasa una única recta, entonces, conocidos los dos puntos A y B, es posible determinar la ecuación de la recta que pasa por ellos.

Acción 2: Construcción de los encadenamientos lógicos.
Resolución:

- Si $f(x) = ax + b$ es el modelo que representa algebraicamente una recta, entonces, sustituyendo en esa ecuación los pares ordenados que comprenden los puntos A y B pertenecientes a ella, se obtiene un sistema de ecuaciones a partir del cual se puede determinar la ecuación de la recta.

  - $(2,0) \in r \to 0 = 2a + b;$
  - $(-1,-3) \in r \to -3 = -a + b.$

  $$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + b = -3 \end{cases}$$

  $\therefore a = 1 \quad y \quad b = -2.$

Acción 3: Interpretación algebraica de la recta como conclusión de los encadenamientos construidos.
Resolución:

- $Si\ a = 1\ y\ b = -2 \to f(x) = 1x + (-2).$

$\therefore f(x) = x - 2.$

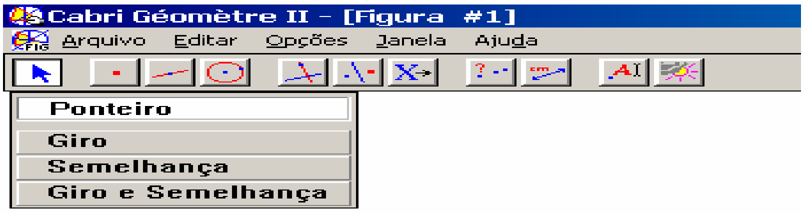
3.3.3 Descripción de los Propósitos e Intenciones Educativas de las Actividades Didácticas del Texto de Álgebra

Situación 1: Repaso de los Entes Geométricos con el uso del Cabri-géomètre.

Propósitos de la Situación 1

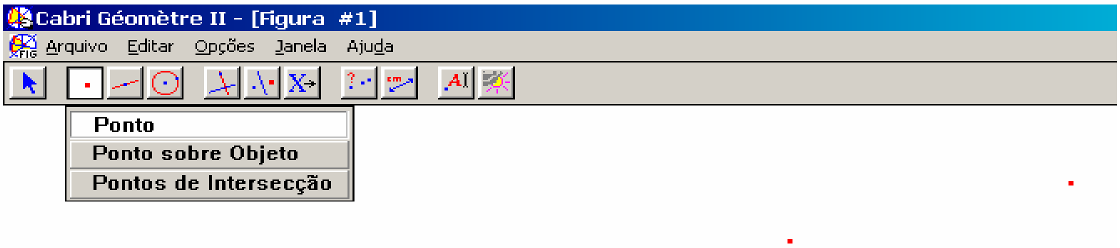
Se pretenden revisar, con el uso del Ordenador (Software Cabri-géomètre), los conceptos de Punto, Recta, Plano y segmento de recta, a través de la dinámica que el Cabri proporciona. Junto a esos conceptos, se buscará la posición relativa entre rectas en el plano, toda vez que ello compondrá la base estructural conceptual para aclarar el concepto de función a partir de la noción de proporcionalidad, lo que será estudiado posteriormente. En síntesis, en esta actividad se pretende construir y nombrar puntos, rectas y segmentos de recta, además de trabajar también los conceptos de medida de segmento y construcción de rectas transversales y paralelas.

Actividad 1: Construir y Nombrar Puntos y Segmentos de Recta.

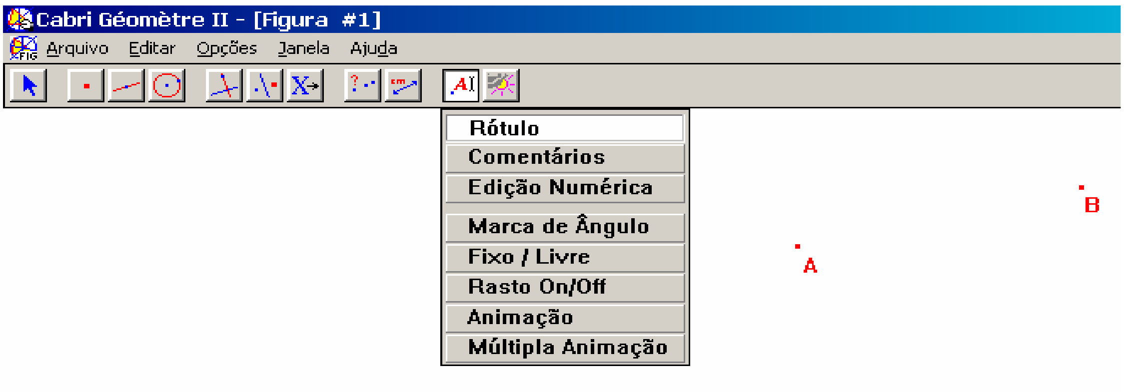


Para construir un determinado objeto geométrico y/o ejecutar una determinada acción, inicialmente es preciso seleccionar la ventana que contenga el icono correspondiente a lo que se pretende. A continuación, para ejecutar la acción deseada (movimiento) de un determinado objeto geométrico, se selecciona PONTEIRO [PUNTERO] (ventana 1); el cursor queda libre.

Acción 1: Cree dos puntos y denomínelos A y B.

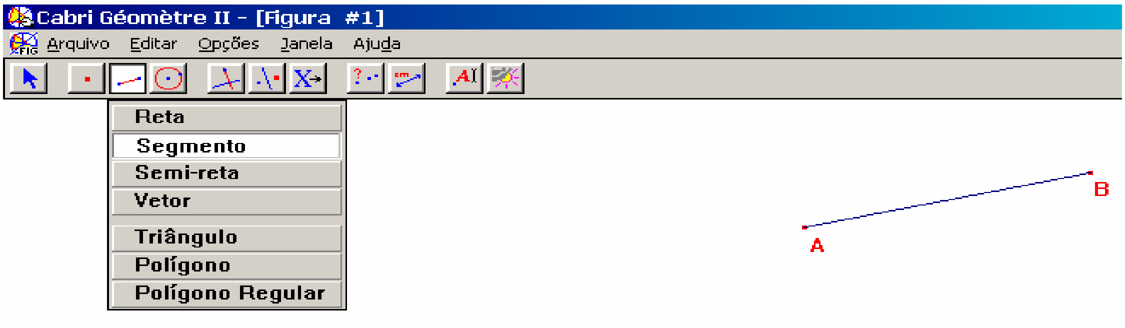


Creando Punto: En la ventana Cabri-Géomètre, seleccione el 2º icono, y en el menú de ese icono seleccione Punto.



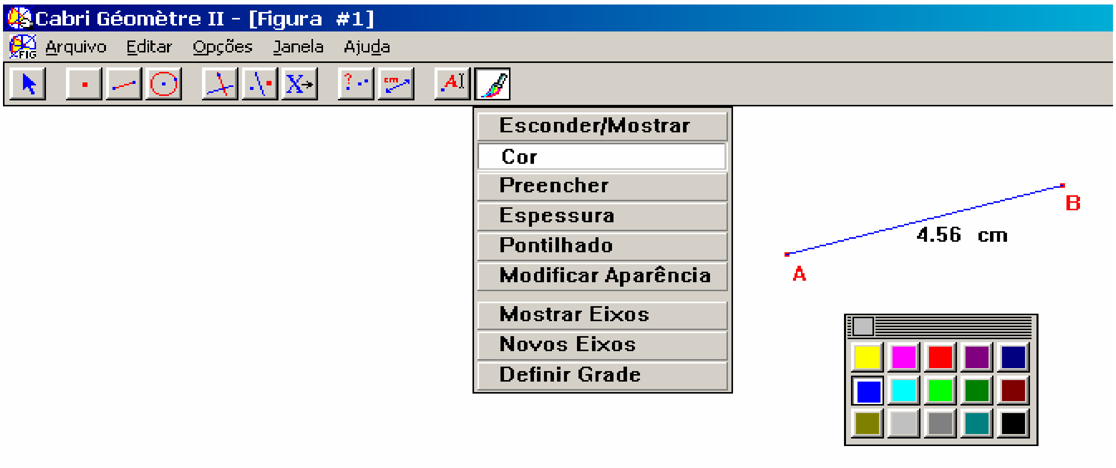
Designe el Punto: En la ventana Cabri-Géomètre, seleccionar el icono **A**, y, a continuación, clicar en RÓTULO y aproximar el puntero del punto deseado hasta que se transforme en una barra vertical.

Acción 2: Cree el segmento AB. Pinte y mida el segmento.



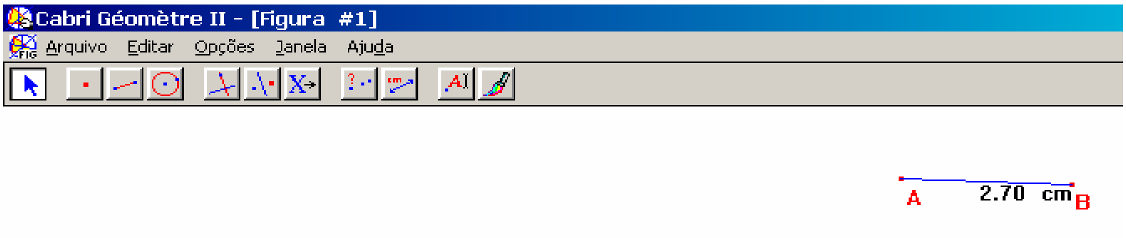
Creando el Segmento AB: En la ventana Cabri-Géomètre, seleccione el icono SEGMENTO y, después, tras clicar en el menú **Segmento**, clique en cada uno de los puntos A y B.

Midiendo el Segmento AB: En la ventana Cabri-Géomètre, seleccione el icono DISTÂNCIA [DISTANCIA] y, a continuación, después de clicar en el menú correspondiente al icono seleccionado, escoger **Distância e Comprimento** [**Distancia y longitud]** para, después, clicar sobre el segmento AB.



Pintando el Segmento AB: En la ventana Cabri-Géomètre, seleccione el icono COR [COLOR] y, a continuación, después de clicar en el menú correspondiente al icono seleccionado escoger **cor [color],** clique sobre el segmento AB.

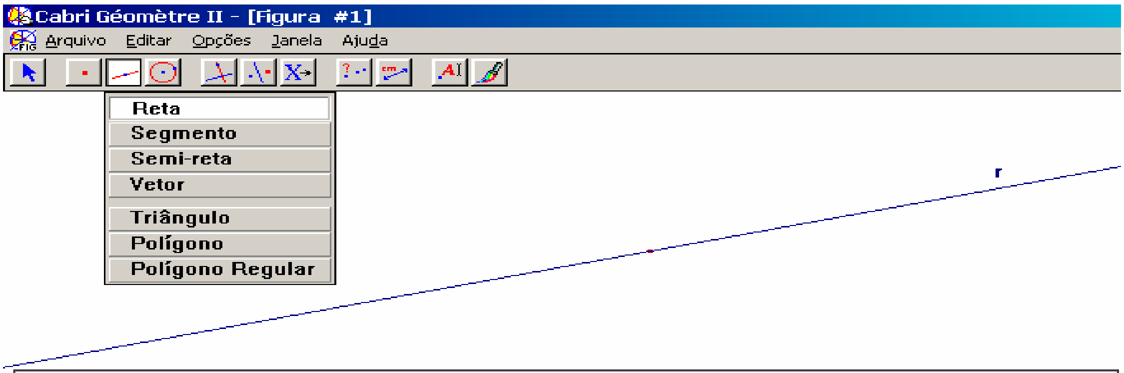
Acción 3: Desplace el punto A (o B) y observe lo que sucede.



Acción 4: Escriba sus observaciones:

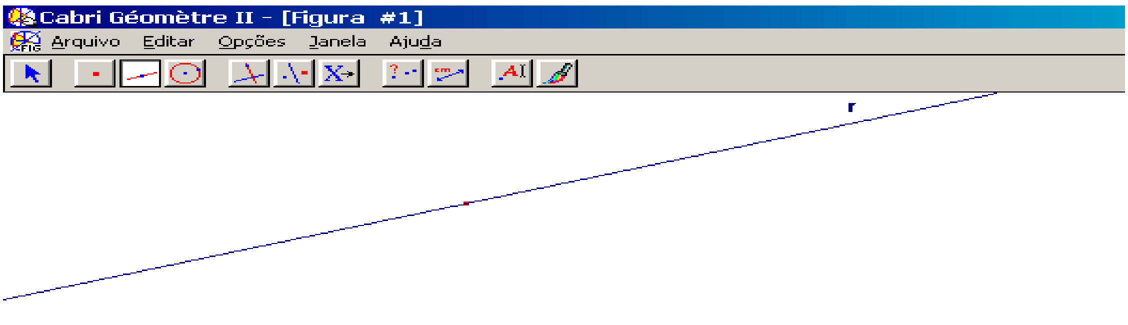
Al desplazarse el punto A (o B), cambia la longitud del segmento AB.

Acción 5: Cree una recta y denomínela *r*.

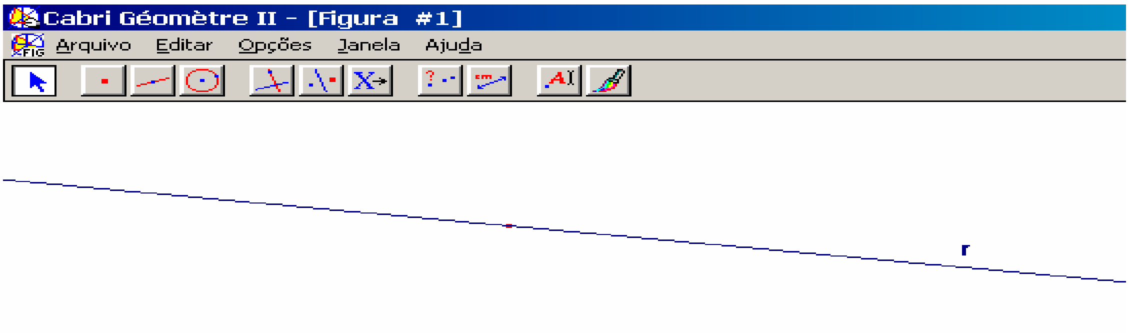


Creando la Recta r: En la ventana Cabri-Géomètre, seleccione el icono RETA [RECTA] y, a continuación, después de clicar en el menú correspondiente al icono seleccionado, escoja **reta** [**recta]** y clique sobre la pantalla del ordenador en dos lugares diferentes.

Acción 6: Desplace la recta *r* usando el punto que la originó.



Acción 7: Desplace la recta *r*, apoyándose en cualquier parte que no sea el punto que la originó.



Acción 8: Escriba sus observaciones:

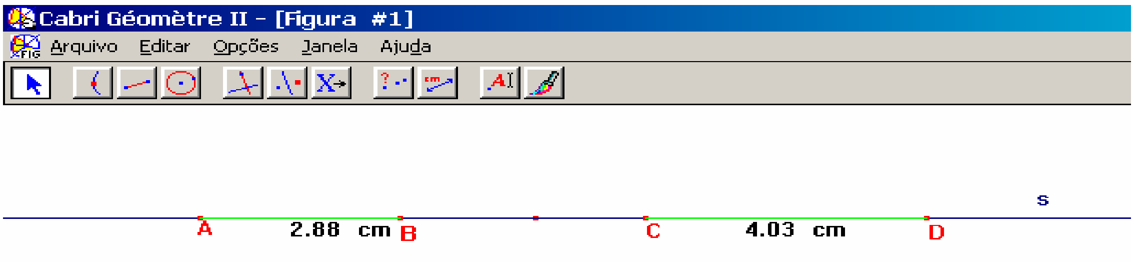
Cuando movemos la recta r, usando el punto que la originó, su movimiento es paralelo a la posición inicial (movimiento de translación). Cuando movemos la recta r, tocando en cualquier parte que no sea el punto que la originó, su movimiento es giratorio (movimiento de rotación).

Actividad 2: Medida de Segmentos y Construcción de Rectas Transversales y Paralelas.

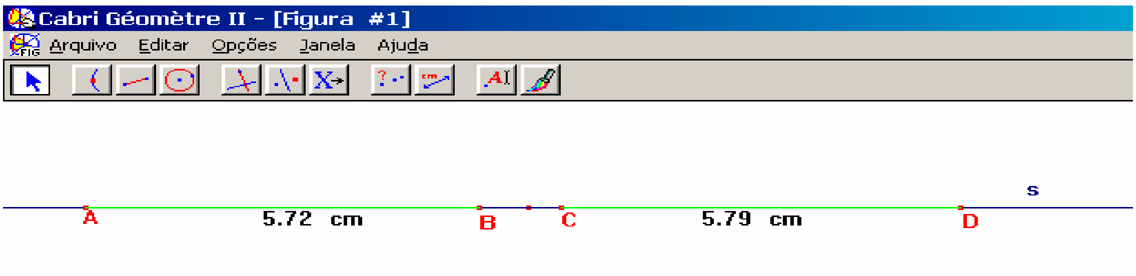
Actividad 2_1 (Especulación 1): Construcción de punto y segmento sobre la recta.

Acción 1: Cree una recta y denomínela *s*.

Acción 2: Trace cuatro puntos sobre la recta. Construya y mida dos segmentos cualesquiera, tomando como puntos extremos, dos de los cuatro puntos creados.



Acción 3: Desplace los puntos extremos de cada segmento.

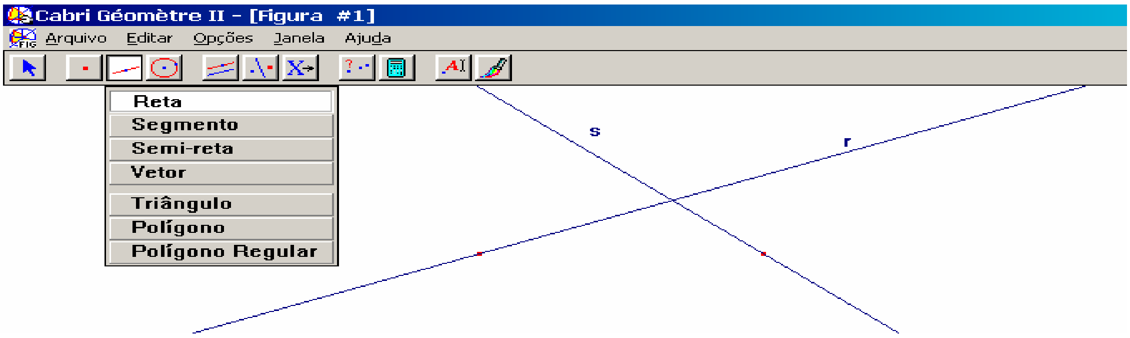


Acción 4: Escriba sus observaciones y dificultades:

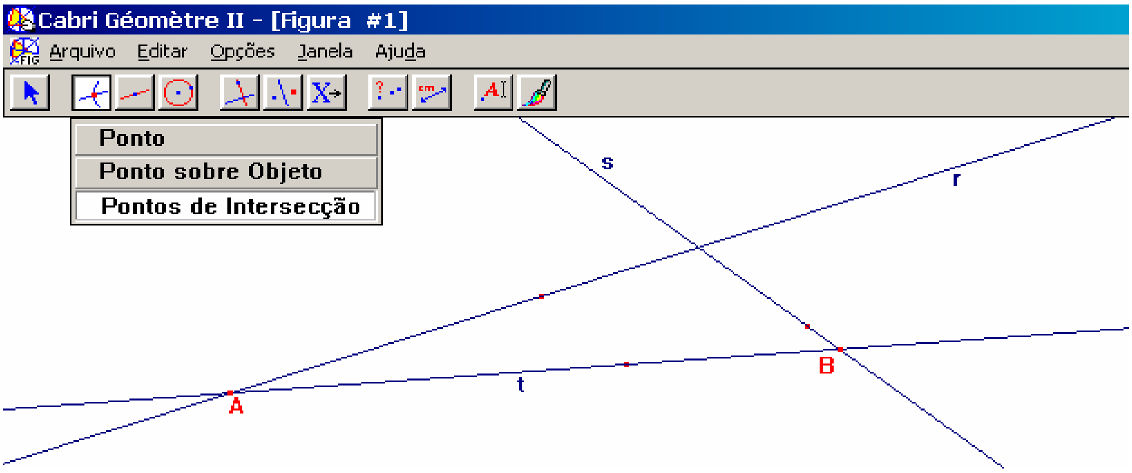
En esta acción, puede percibirse que un punto sobre una recta sólo puede desplazarse sobre ella misma. Y, además de eso, en cuanto a la construcción de segmento, ésta puede ser manipulada, y el tipo de aproximación depende de las limitaciones del software Cabri.

Actividad 2_2 (Especulación 2): Construcción de rectas transversales y paralelas.

Acción 1: Cree una recta *r* transversal a una recta *s*.

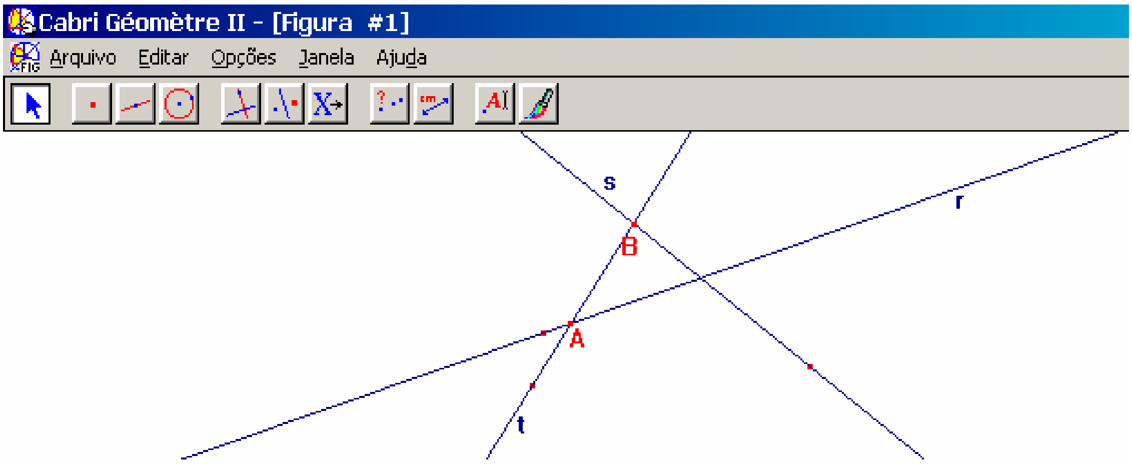


Acción 2: Cree una tercera recta *t* transversal a las rectas *r* y *s* y denomine como A y B los puntos de intersección de *t* con *r* y *s*.



Para determinar la posición de intersección de un punto, seleccione el 2º icono de izquierda a derecha y, después, en el menú correspondiente, clique sobre **Ponto de Intersecção [Punto de Intersección]** y aproxime el cursor a la posición de intersección deseada. Cuando aparezca en la pantalla del ordenador "punto en esta intersección" clique de nuevo.

Acción 3: Mueva la recta *t* sin usar los puntos A o B.



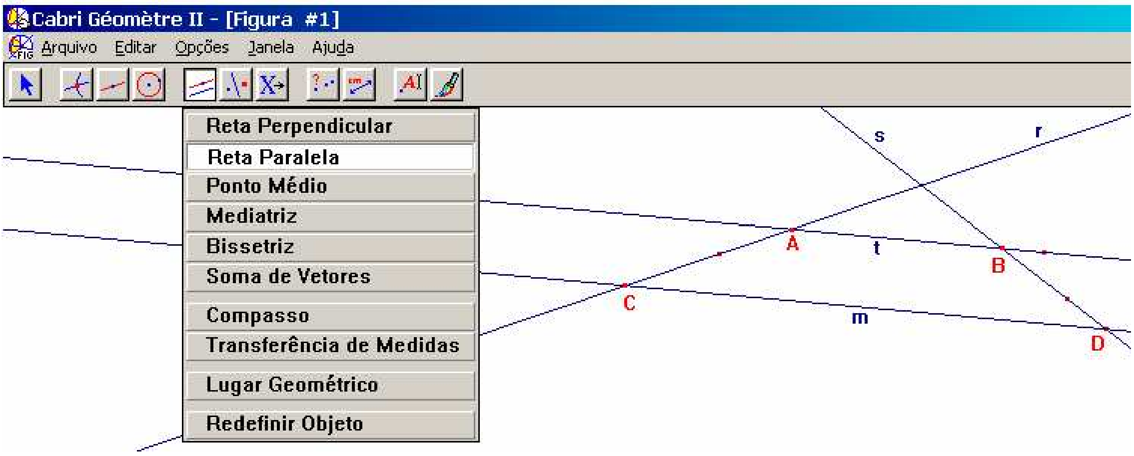
Acción 4: Escriba sus observaciones:

En este caso no existe movimiento ni de los puntos, ni de las rectas.

Acción 5: Mueva los puntos A o B. ¿Qué es lo que observa?

La recta *t* se mueve sin impedimento alguno. Los puntos A y B se mueven, manteniendo la intersección.

Acción 6: Cree la recta *m*, paralela a la recta *t*, cortando las rectas en puntos distintos. Llámense C y D a los puntos de intersección de la recta *m* con las rectas *r* y *s*.



Para construir una recta paralela, seleccione el 5º icono comenzando por la izquierda y, a continuación, en el menú correspondiente, clique en **Reta Paralela [Recta Paralela]**, clicando una vez sobre la recta t y en cualquier otro lugar próximo a la recta t, incluso, puede ser en un punto de la recta s (o r) o un punto fuera de ellas.

Acción 7: Mueva la recta *t* y después la reta *m,* sin tocar en los puntos de intersección. ¿Qué es lo que observa?

Al moverse la recta ***t***, la recta **m** se mueve paralelamente a ella, pero no es posible mover la recta ***m***.

Acción 8: Mueva los puntos A, B, C y D (uno cada vez). ¿Qué es lo que observa?

Sólo el punto que originó la recta **m** se mueve, desplazando automáticamente la recta **m** en dirección paralela a la recta **t**.

Situación 2: Conceptuando la Proporcionalidad.

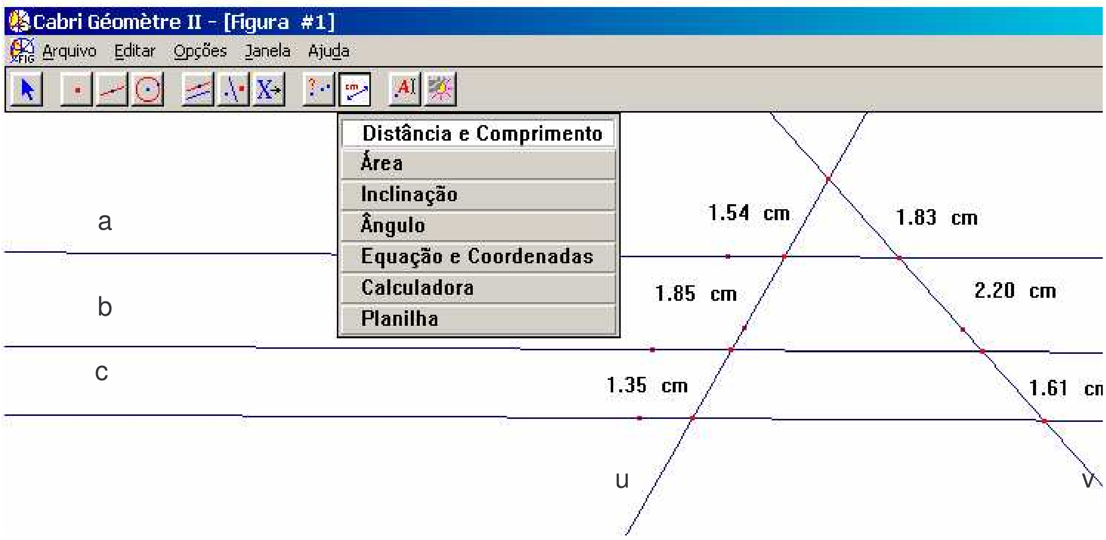
Propósitos de la Situación 2

En esta etapa se pretende fortalecer el concepto de proporcionalidad a partir de la relación de proporcionalidad existente en el teorema de Tales. En este momento, se espera que sea establecida, a partir del teorema de Tales, por la comparación entre las medidas de segmento, la construcción del concepto de proporcionalidad, utilizando el Computador (software Cabri-géomètre) como recurso didáctico. En la medida en que estos conceptos vayan siendo trabajados de manera interactiva, se tiene la certeza de que, posteriormente, en la actividad 3, la función de proporcionalidad será asimilada de forma más significativa. El propósito es trabajar las ideas de razón, proporción y Teorema de Tales.

Actividad 1: Obtención de la Distancia y la Longitud de Segmentos entre rectas.

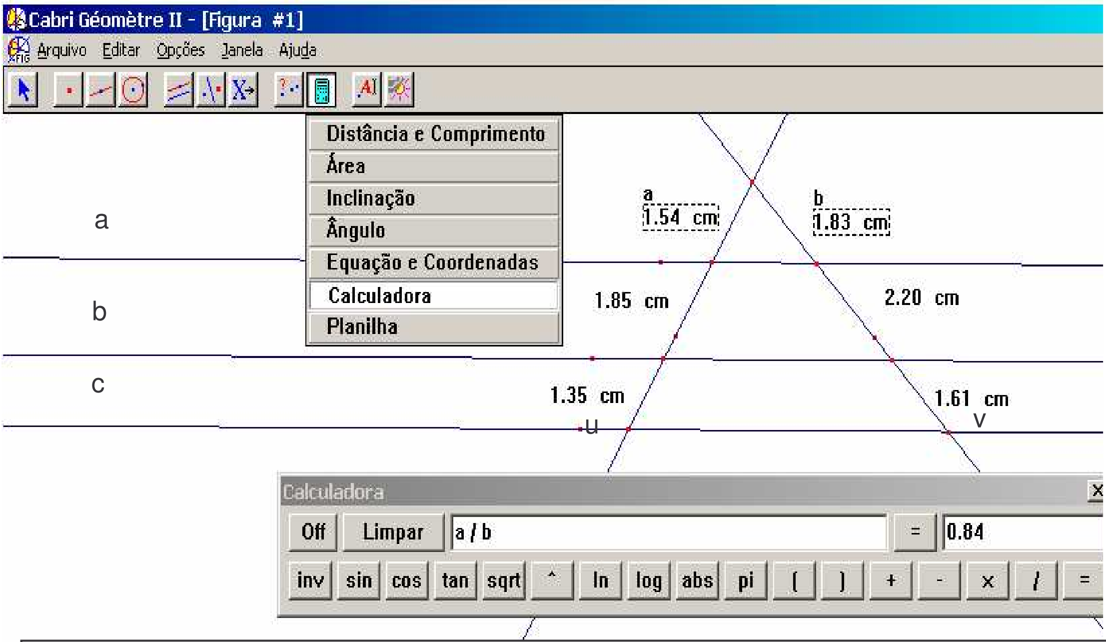
Acción 1: Cree tres rectas paralelas *a*, *b*, *c*, cortadas por dos rectas transversales *u*, *v*.

Acción 2: Mida todos los segmentos posibles, contenidos en las rectas *u* o *v*, que tengan, como puntos extremos, las intersecciones de las cinco rectas.



Actividad 2: Uso de la Calculadora.

Acción 1: Con ayuda de la Calculadora del Cabri, calcule todas las razones posibles entre las medidas de los segmentos contenidos en la recta *u* y los segmentos contenidos en la recta *v*.



Dé un Clic en CALCULADORA (ventana 9). Para efectuar la división, dé un Clic sobre la medida de uno de los segmentos. Con eso, el ordenador identificará esa medida de segmento mediante una letra. Clique después sobre la barra de división de la calculadora y Clique de nuevo sobre otra medida. Para finalizar, dé un Clic sobre el signo "igual" de la calculadora. Es posible pasar el resultado de la calculadora a la pantalla del ordenador, dando un Clic sobre el resultado y arrastrando el cursor hasta la posición deseada en la pantalla del ordenador.

Acción 2: Compare los resultados. Escriba sus observaciones:

Todas las razones calculadas son iguales.

Actividad 3: Identificación de la Proporcionalidad a través del Movimiento de las Rectas.

Acción 1: Mueva cualquiera de las rectas *a*, *b*, *c*.

Acción 2: A continuación, mueva la recta *u* o *v*. Escriba sus observaciones.

Al moverse una de las rectas *a*, *b* e *c*, las razones ya calculadas permanecen con el mismo valor.

Actividad 4: Elaboración del Concepto de Proporcionalidad a partir del Teorema de Tales con el uso del Cabri-géomètre.

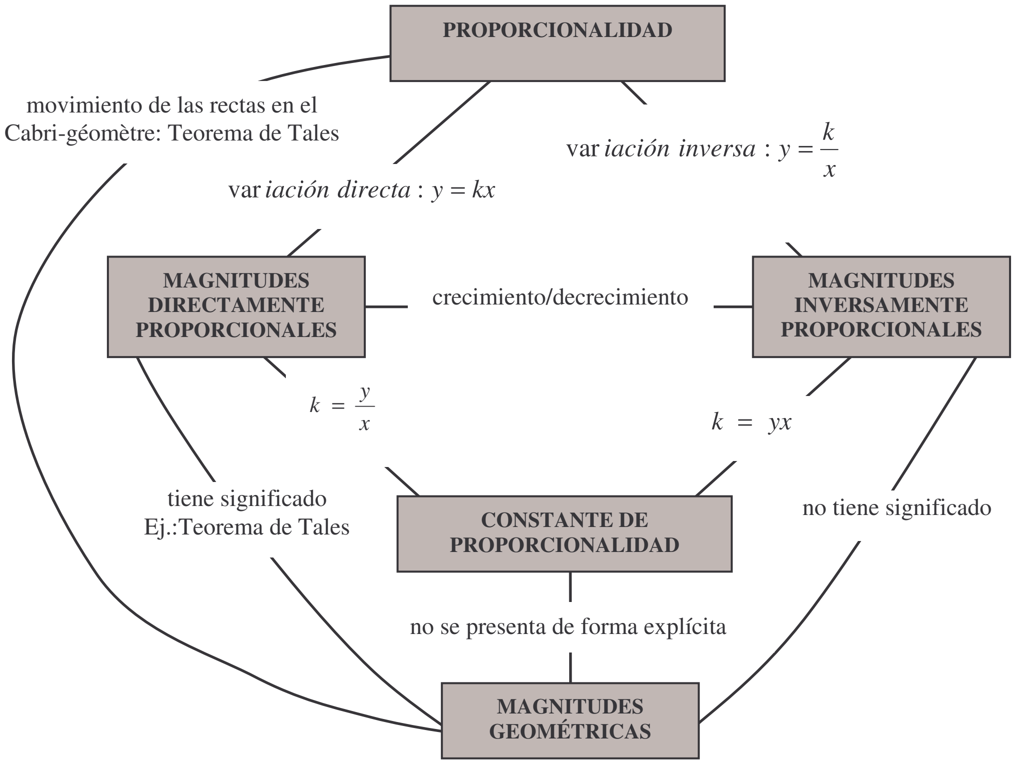


Figura 27: Un Mapa Conceptual de Proporcionalidad (Silva y Falcão, 2004)

Consideración: La elaboración del mapa anterior, adoptó los postulados de Moreira y Buchweitz (1987, pp. 29-30), que fueron descritos en forma de acciones en la presente tesis, en el texto de apoyo de Álgebra.

Situación 3: Visión panorámica de la idea de Función y el Concepto de Función de Proporcionalidad a partir del Teorema de Tales con el uso del Cabri-Géomètre.

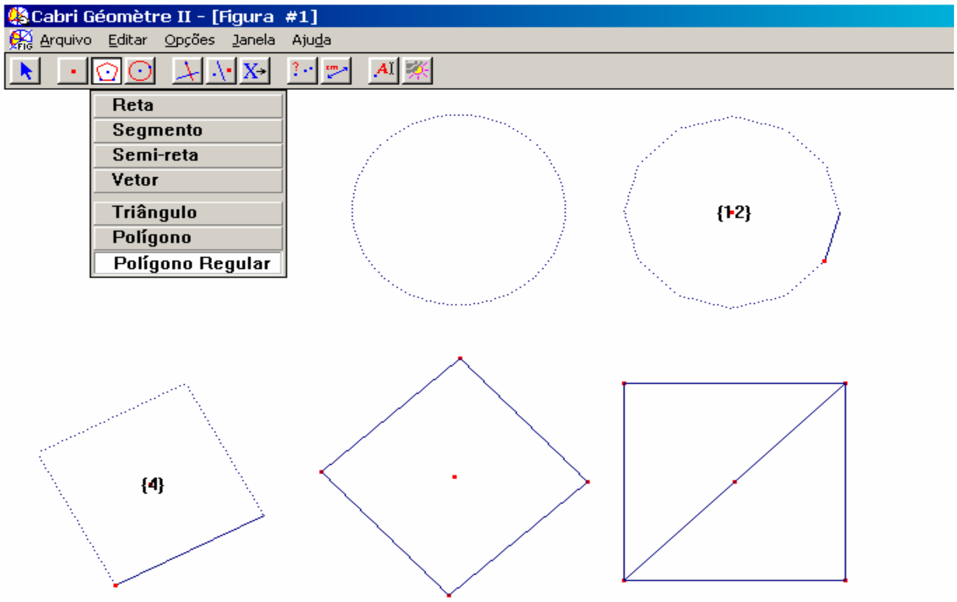
Propósitos de la Situación 3

En esta etapa, las actividades que se desarrollan buscan enfatizar la importancia de las actividades trabajadas en las dos situaciones anteriores para consolidar la abstracción del concepto de la función de proporcionalidad. La abstracción se hará a través de la idea de lugar geométrico, partiendo de la representación gráfica en el plano cartesiano con el uso del Software Cabri-géomètre. A continuación, se presentarán los objetivos generales y específicos, así como toda la sistematización de la presente actividad, que estará dividida en cuatro actividades.

En la primera actividad, se pretende situar al alumno ante acciones que le permitan comparar áreas, rever figuras geométricas planas y repasar el concepto del teorema de Tales. La Segunda actividad podrá favorecer al aluno en lo relativo al fortalecimiento de sus concepciones sobre números reales, abscisa, punto geométrico, plano cartesiano y tasa de variación, que compondrán la estructura del concepto de función. En la tercera actividad, se analizará el concepto de lugar geométrico. La cuarta actividad tiene como objetivo favorecer la percepción del sentido de las relaciones entre los temas abordados, a través de las regularidades de la función de proporcionalidad, percibidas mediante el movimiento que proporciona el software Cabri-géomètre durante la construcción del lugar geométrico de la función.

Actividad 1: Construcción del Tangram usando el Cabri-Géomètre.

Acciones 1 a 6: Secuencia de acciones adoptadas para la construcción del Tangram



Para iniciar la construcción, dé un Clic en POLÍGONO REGULAR (ventana 3). El primer Clic en la pantalla hace surgir una circunferencia. Un segundo Clic en la pantalla definirá el número de lados del polígono regular deseado, a medida que movemos el ratón. El tercer Clic determina la construcción del cuadrado. Tras la construcción del cuadrado, construya una diagonal con el recurso SEGMENTO (ventana 3).

Acción 1: construir un cuadrado identificando su punto medio y su diagonal.

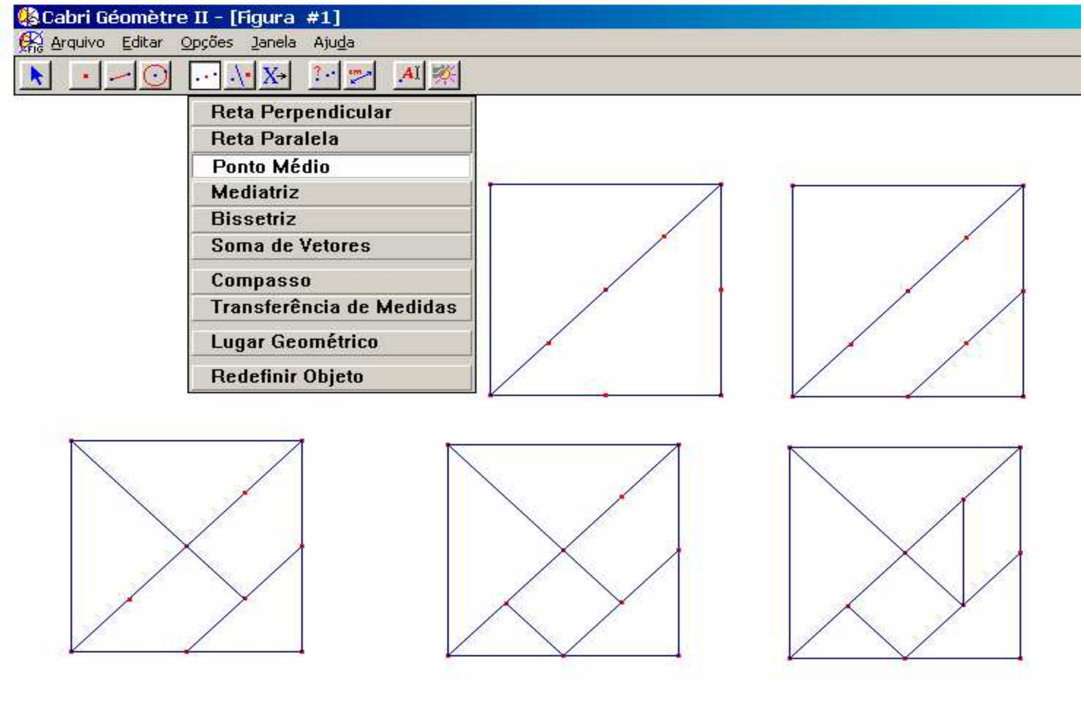
Acción 2: determinar los cuatro vértices, dos puntos medios de dos lados adyacentes y dividir la diagonal en 4 partes iguales.

Acción 3: obtener una recta paralela a la diagonal que contenga los dos puntos medios anteriores, y determinar su punto medio.

Acción 4: obtener un segmento que pase por el punto medio de la diagonal, teniendo como origen el punto medio determinado anteriormente y como extremo el vértice del cuadrado.

Acción 5: obtener el segmento que tiene como origen uno de los dos puntos medios obtenidos en la Acción 1, y como extremo uno de los cuatro puntos que constituyen la división realizada en la misma Acción 1, sabiendo que tal segmento forma con la diagonal un ángulo recto.

Acción 6: obtener el segmento que tiene como origen el punto medio determinado en la Acción 3, y como extremo uno de los cuatro puntos que constituyen la división de la diagonal de la Acción 2, sabiendo que tal segmento es paralelo a dos de los lados del cuadrado inicial.



Actividad 2: Construcción Gráfica de la Función de Proporcionalidad usando el Tangram Cabri-Géomètre.

Acción 1: Construya una tabla que presente, para cada una de las formas (piezas) que constituyen el tangram, tantas cuantas sean necesarias para cubrir toda el área del tangram.

Tipo de piezas del Tangram	**t**	**t_m**	**T**	**P**	**q**	**Q**
Número de piezas para formar el Tangram	**16**	**8**	**4**	**8**	**8**	**1**

Acción 2: Construya una tabla, relacionando en forma fraccionaria cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 8, 16, 17, 18, 19, 20... (variables independientes, que representan múltiplos del triángulo pequeño en términos de unidad de área), con la cantidad de área fija del triángulo pequeño necesaria para cubrir toda el área del tangram. A continuación, construya el gráfico cartesiano de esta relación. Si es posible, calcule la tasa de variación, escriba la sentencia Matemática que generaliza tal relación e identifique si es función.

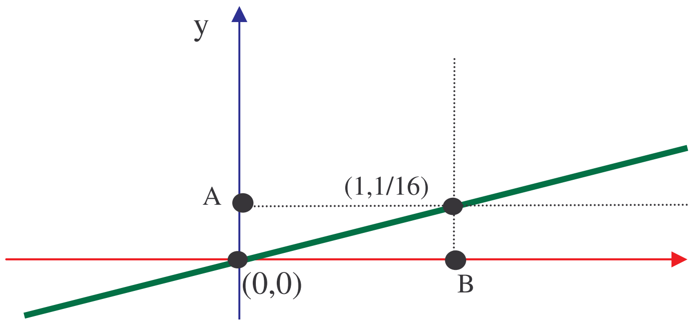
X	**1**	**2**	**3**				**8**	**9**	**10**				**19**	**20**	**21**	
Y	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	...	...	...	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{10}{16}$	...	...	...	$\frac{19}{16}$	$\frac{20}{16}$	$\frac{21}{16}$	...

Acción 3: Usando el Cabri-géomètre (recurso nuevo eje), ejecute las siguientes acciones:

Acción 3_1: Construir el gráfico de la relación área del Tangram en función del área del triángulo menor que lo compone.

Acción 3_2: Calcule la tasa de variación, usando la calculadora del Cabri.

Acción 3_3 y 3_4: Escriba con sus palabras cuál es la relación entre la tasa de variación y el teorema de Tales. ¿Podría explicarla?



Tasa de variación: $\frac{y}{16} = \frac{1}{16}$.

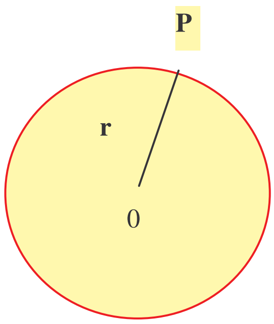
Ley de formación: $y = \frac{x}{16}$.

La tasa de variación de la función representa la constante de proporcionalidad.

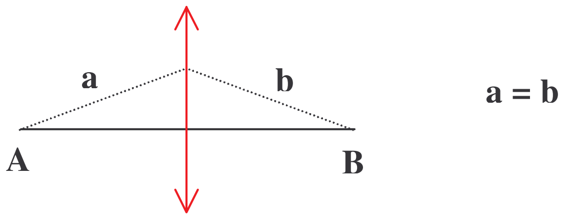
Actividad 3: Fundamentación Teórica sobre el Lugar Geométrico.

Con ayuda de material impreso y de retro-proyector, se llevará a cabo una exposición teórica sobre *lugar geométrico*, ejemplificando con la circunferencia y la mediatriz de un segmento. Wagner e Carneiro (1993) señala que la expresión lugar geométrico constituye un concepto antiguo en el ámbito de la Geometría, y que en sí misma, se refiere a un conjunto de puntos que poseen cierta propiedad. Por eso, para él, debe quedar claro que si una figura F es el lugar geométrico de los puntos que poseen la propiedad p, entonces todos los puntos de F poseen tal propiedad y ningún punto fuera de F puede tener la referida propiedad p.

Acción 1: Construir una Circunferencia.
Ejemplo 1. *Circunferencia de centro O y radio r* es el lugar geométrico de los puntos *P* del plano que distan de un punto central *O* la distancia *r*.



Acción 2: Construir un Segmento y obtener su Mediatriz.
Ejemplo 2. *Mediatriz de un segmento* es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a una misma distancia de los puntos extremos del segmento dado.

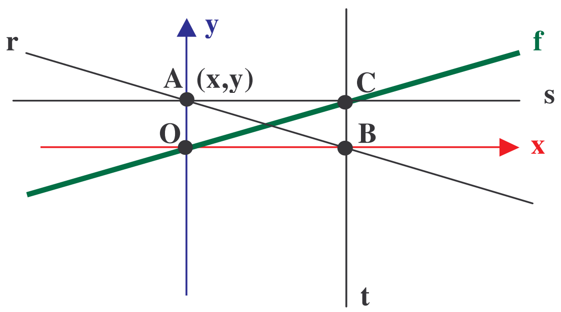


Actividad 4: Construcción del gráfico de la Función de Proporcionalidad existente en el Tangram, usando el Recurso Lugar Geométrico del Cabri-Géomètre.

Acción 1; Acción 2; Acción 3 y Acción 4: la secuencia de acciones fue adoptada respectivamente para: creación del sistema de ejes; uso de los datos de la actividad 1 para representar la función de proporcionalidad; creación de la recta r con los puntos de intersección A (x, y) en la ordenada y B $(1, 0)$ en la abscisa, e identificación del punto C $(1, \frac{1}{16})$, intersección de r con s, como punto de la función de proporcionalidad.

Procedimientos Esperados en esta Propuesta por parte del Aprendiz.

Convenciones:



Línea roja – eje de abscisas; Línea azul – eje de ordenadas;
Línea verde – recta de la función; Línea negra – rectas auxiliares.

Para que el punto (x, y) de la función mantenga la misma proporción, se crea la recta auxiliar r, cortando el eje de los y en $\frac{1}{16}$ y el eje de x en 1.

Esta recta debe tener como punto de origen, coincidiendo con el punto de abscisa 1, el punto B. Se crea el punto A de intersección entre r y el eje de los y.

Consideración: Cuando la recta auxiliar se mueva a través del punto que la originó, su dirección en el plano se mantendrá paralelamente a la posición inicial.

Se crea la recta t perpendicular al eje de abscisas en $x = 1$, y la recta s perpendicular al eje de ordenadas en $y = \frac{1}{16}$.

Consideración: El punto común a estas dos últimas rectas es el punto C (1, $\frac{1}{16}$) de la función.

A través del recurso *Lugar geométrico*, se puede visualizar el gráfico de la función de proporcionalidad. Tras dar un clic en la opción *lugar geométrico*, se clica en el punto B, y después en el punto C.

3.3.4 Descripción de los Propósitos e Intenciones Educativas de las Actividades Didácticas del Texto de Geometría

Situación 1: Proposiciones/propiedades presentes en los 6 primeros libros de Euclides que se refieren al campo de la Geometría plana.

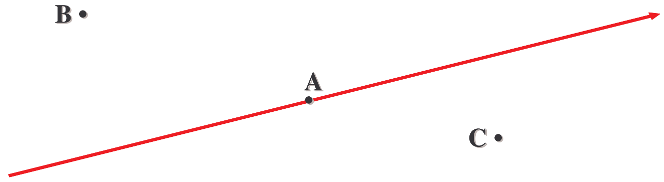
Propósitos de la Situación 1

Inicialmente, se propondrán algunas activiadades en las que los alumnos serán estimulados a construir cuadriláteros del tipo: cuadrado, rectángulo y rombo, utilizando como recurso didáctico, regla y compás. Esta actividad se realizará por grupos de un máximo de 5 alumnos. Cada alumno deberá ofrecer como resultado la obtención de las propiedades de tales figuras, en cuanto a los lados, ángulos y diagonales, establecidas a partir de las ya citadas construcciones. El cuadro 1 (Q1), que aparece más abajo, tiene la finalidad de organizar las propiedades enumeradas durante las discusiones promovidas en el desarrollo de la actividad 1.

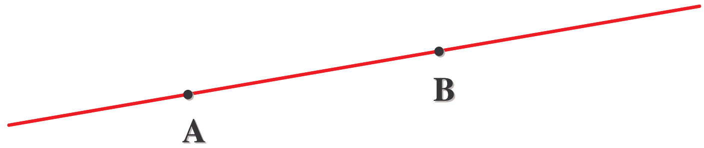
Actividad 1: Alusión a la Geometría plana.

Actividad 1_1: Presentación de los Axiomas de Incidencia y Orden (Barbosa, 1997).

Axioma 1_1: Para cualquier recta existen puntos que pertenecen a la propia recta y puntos que no pertenecen a la recta.



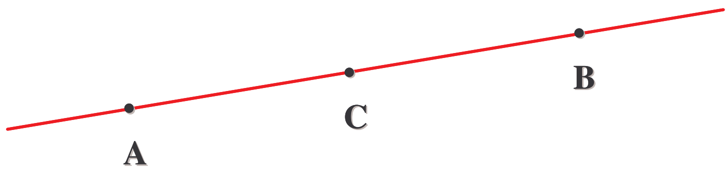
Axioma 1_2: Dados dos puntos distintos, existe una única recta que contiene tales puntos.



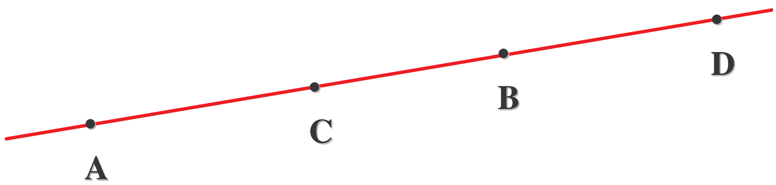
Proposición: dos rectas, distintas o no, se interceptan o se cortan en un único punto.

Demostración: sean m y n dos rectas distintas. La intersección de estas dos rectas no puede contener dos (o más) puntos, pues, caso contrario, por el axioma 1.2, coincidirían. Luego, la intersección de m y n o está vacía o consta de sólo un punto.

Axioma 2_1: Dados tres puntos de una recta, uno y sólo uno de ellos está situado entre los otros dos.

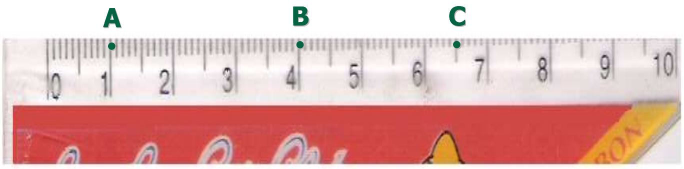


Axioma 2_2: Dados dos puntos A y B, siempre existe un punto C entre A y B, y un punto D tal que B está siempre entre A y D.



Axioma 2_3: Una recta m determina exactamente dos semiplanos distintos cuya intersección es la recta.

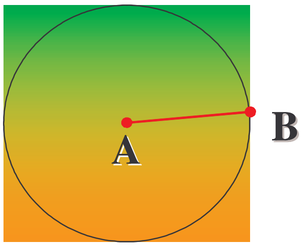
Actividad 1$_2$: Presentación de los Axiomas sobre Medición de Segmentos (*op. cit*., 1997).



Axioma 3$_1$: A todo par de puntos del plano corresponde un número mayor o igual a cero. Este número es cero si y sólo si los puntos son coincidentes.

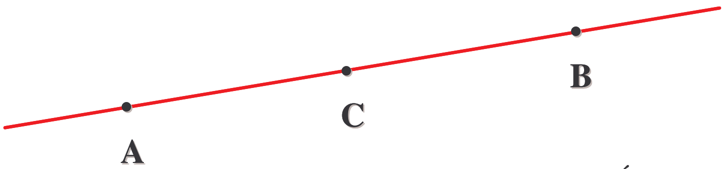
Axioma 3$_2$: Los puntos de una recta pueden siempre ponerse en correspondencia biunívoca con los números reales, de modo que la diferencia entre estos números mida la distancia entre los puntos correspondientes.

Definición: sea A un punto del plano y r un número real positivo. El círculo de centro A y radio r es el conjunto constituido por todos los puntos B del plano, tal que: $\overline{AB} = r$.



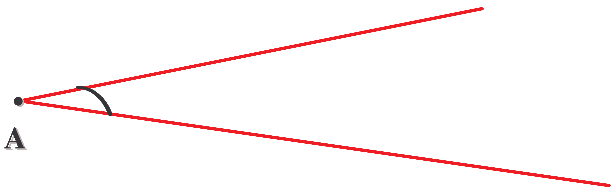
Es como consecuencia del axioma 3$_2$ por lo que podemos trazar un círculo con cualquier centro y cualquier radio.

Axioma 3$_3$: Si el punto C está situado entre A y B, entonces: $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.

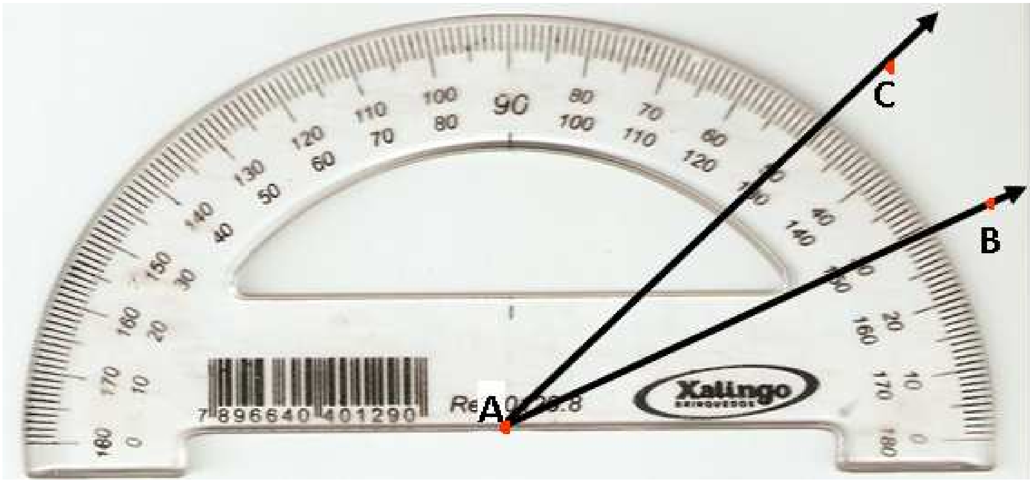


Actividad 1$_3$: Presentación de los Axiomas sobre Medición de Ángulos (*op. cit*., 1997).

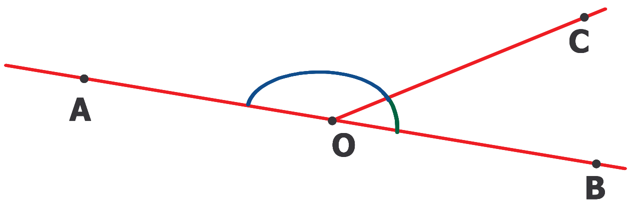
Definición: llamamos ángulo a la figura formada por dos semirrectas con el mismo origen.



Axioma 3_4: Todo ángulo tiene una medida en grados mayor o igual a cero. La medida de un ángulo es cero si y solamente si está constituido por dos semirrectas coincidentes. Todo ángulo raso mide 180º.

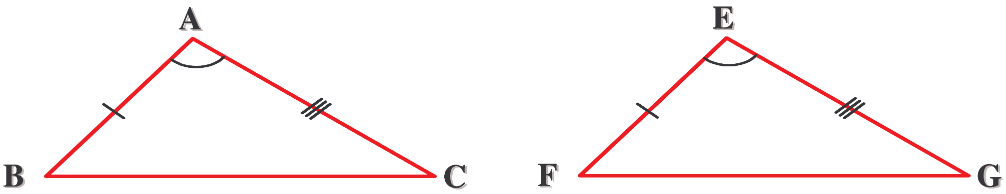


Axioma 5: Si una semirrecta $\overline{OC}$ divide un ángulo $A\hat{O}B$, entonces: $A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B$.



Actividad 1_4: Definición de Congruencia (*op. cit.*, 1997).

Axioma 6: Dados dos triángulos ABC y EFG, si $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, $\overline{AC} \equiv \overline{EG}$ y $\hat{A} \equiv \hat{E}$. Entonces, $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, EFG$.



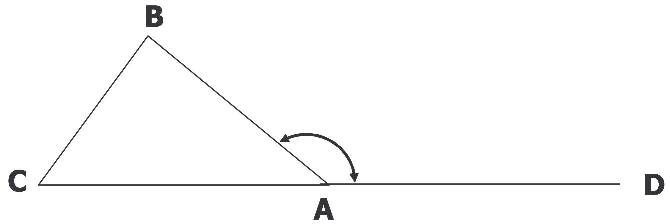
Obsérvese que, de acuerdo con la definición, para verificar si dos triángulos son congruentes, tenemos que verificar seis relaciones: congruencia de los tres pares de lados y congruencia de los tres pares de ángulos correspondientes. El axioma anterior afirma que es suficiente con verificar tres de ellas, o sea**:**

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{EF} \\ \overline{AC} \equiv \overline{EG} \\ \hat{A} \equiv \hat{E} \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{EF}, \overline{AC} \equiv \overline{EG}, \overline{BC} \equiv \overline{FG} \\ \hat{A} \equiv \hat{E}, \hat{C} \equiv \hat{G}, \hat{B} \equiv \hat{F} \end{array}$$

Obs.: Este axioma es conocido como primer caso de congruencia de triángulos.

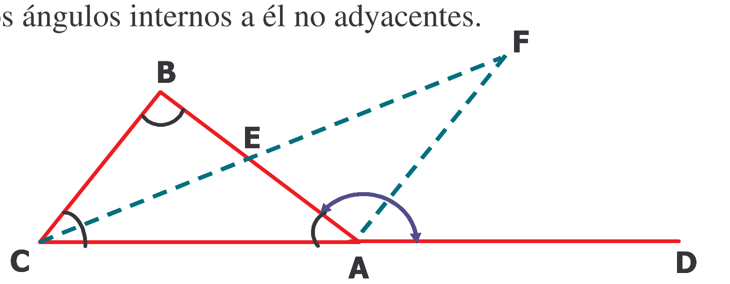
Actividad 1_5: Teorema del Ángulo Externo (*op. cit.*, 1997).

Definición: Si ABC es un triángulo, sus ángulos, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ y $C\hat{A}B$ se denominan **ángulos internos** o simplemente **ángulos del triángulo**. Los suplementos de estos ángulos se denominan ángulos externos al triángulo.



En la figura de arriba, el ángulo *BÂD* es un ángulo externo al triángulo ABC, adyacente al ángulo interno CÂB.

Teorema (ángulo externo): todo ángulo externo de un triángulo mide más que cualquiera de los ángulos internos a él no adyacentes.



Demostración: sea ABC un triángulo. En la semirrecta $\overrightarrow{CA}$ marque un punto D tal que A quede situado entre C y D, como se indica en la figura.

Debemos probar que $B\hat{A}D > \hat{B}$ y $B\hat{A}D > \hat{C}$. Vamos inicialmente a probar que $B\hat{A}D > \hat{B}$. Para ello, considere el punto medio E del Segmento $\overline{AB}$. En la semirrecta $\overrightarrow{CE}$ marque un punto F tal que $\overline{CE} \equiv \overline{EF}$. Trace $\overline{AF}$. Compare los triángulos CEB y FEA. Como $\overline{BE} \equiv \overline{AE}$ (ya que E es el punto medio de $\overline{AB}$), $\overline{CE} \equiv \overline{EF}$ (por construcción) y $B\hat{E}C \equiv A\hat{E}F$ (por ser opuestos por el vértice), se sigue que los triángulos $BEC \equiv AEF$. Consecuentemente $\hat{B} \equiv E\hat{A}F$. Entonces, $E\hat{A}F < B\hat{A}D$. Por lo tanto, $\hat{B} < B\hat{A}D$.

Proposición: la suma de las medidas de dos ángulos internos cualesquiera de un triángulo es menor de 180º.

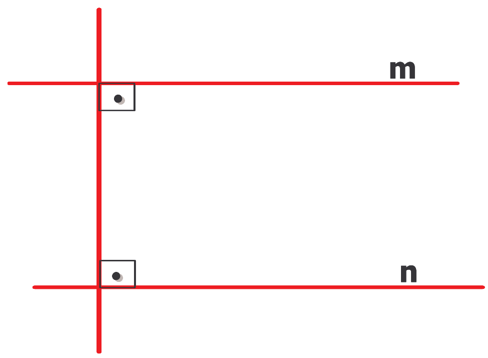
Demostración: Sea ABC un triángulo. Vamos a demostrar que $\hat{B}+\hat{C} < 180^0$. Sea θ el ángulo externo de este triángulo con vértice C.

Por la proposición anterior, tenemos que: $\theta > \hat{B}$.

Como θ y C son suplementarios, entonces $\theta + \hat{C} = 180^0$.

Por lo tanto, $\hat{B}+\hat{C}<\theta+\hat{C}=180^0$.

Corolario: Si dos rectas distintas m y n son perpendiculares a una tercera, entonces m y n no se interceptan.



Demostración: Si m y n se interceptasen (cortasen), se formaría un triángulo con dos ángulos rectos, lo que sería absurdo según el proposición anterior.

Definición: Dos rectas que no se interceptan (cortan) se llaman paralelas.

Acción 6: Presentación del Axioma de las Paralelas.

Axioma 7: Por un ponto fuera de una recta m se puede trazar una única recta paralela a la recta m.

La existencia de rectas paralelas es una consecuencia de los postulados ya presentados.

Debe advertirse que este axioma prescribe la unicidad, ya que la existencia de una recta paralela a m, pasando por un punto dado, estaba garantizada.

Actividad 2: Propiedades de la Geometría Plana.

Acción 1: Identificar algunas propiedades/proposiciones que forman parte del contenido de cinco de los seis capítulos (libros) que constituyen la Geometría plana.

Las propiedades/proposiciones seleccionadas fueron 24 (Cuadro 4), basándose en el criterio de que su frecuente aparición en *Enseñanza Fundamental* y *Enseñanza Media*.

Cuadro 04: Contenidos en cuanto Propiedades/Proposiciones presentes en la Geometría Plana (Silva y Rodrigues, 2007).

Libros / Capítulos Propiedades / Proprociciones	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
01- Propiedades de los triángulos.	x					
02- Suma de los ángulos internos del triángulo.	x					
03- Cambio: paralelogramo para triángulo y equivalencias.	x					
04- Teoremas directos y recíprocos.	x					
05- Propiedades algebraicas con simbologías actuales.		x				
06- Propiedades geométricas con simbologías actuales.		x				
07- Demostraciones de equivalencias.		x				
08- División en media y extrema razón.		x				
09- Teorema de Pitágoras.		x				
10- Propiedades de triángulos acutángulos.		x				
11- Propiedades de triángulos obtusángulos.		x				
12- Propiedades de la circunferencia.			x			
13- Teorema del producto de segmentos.			x			
14- Teorema de secantes interior y exterior.			x			
15- Polígonos regulares inscritos en la circunferencia.				x		
16- Polígonos regulares circunscritos a una circunferencia.				x		
17- Construcción de polígonos regulares con regla y compás.				x		
18- Teoría de la proporcionalidad independiente.					x	
19- Teoría de la proporcionalidad de las cantidades proporcionales.					x	
20- Proporcionalidades frente a desigualdades.					x	
21- Teoría general de las medidas.						x
22- Semejanza de polígonos.						x
23- Problemas de áreas.						x
24- Resolución de ecuaciones de segundo grado en forma geométrica.						x

Situación 2: Identificación de las Propiedades/Características de las formas Geométricas planas: Polígono, Cuadrilátero, Paralelogramo, Cuadrado, Rectángulo y Rombo.

Propósitos de la Situación 2

La intención didáctica de esta situación en términos de contenido consiste en enfocar las características relevantes, las semejanzas/diferencias y las propiedades generales y específicas de las formas siguientes geométricas: Polígonos, Cuadriláteros, Paralelogramos, Cuadrados, Rectángulos y Rombos. A continuación, a la hora de completar los cuadros, se espera que los alumnos puedan percibir con mayor claridad la relación que existe entre las seis formas geométricas anteriores, en lo que se refiere a sus propiedades. En ese momento, se busca que, a partir de las características de tales formas, y a la vista de las semejanzas/diferencias evidenciadas, sea posible que los alumnos adquieran una mejor condición para *categorizarlas*[7], y, por consiguiente, conceptuarlas también de un modo más acertado.

[7] Categorización es el proceso mediante el cual situamos en un mismo grupo ciertas entidades porque son similares entre sí con relación a algunas propiedades. Greca y Moreira (1999).

Actividad 1: Propiedades/características de las formas geométricas planas Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo.

Acción 1: enumerar las propiedades características de las formas geométricas Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo.

Acción 2: organizar tales propiedades en el Cuadro 5.

Cuadro 5: Características relevantes de los Polígonos, Cuadriláteros y Paralelogramos.

Características / Figuras	En cuanto a los lados	En cuanto a los ángulos	En cuanto a las diagonales
Polígono	Formado por línea poligonal cerrada.	Tantos cuantos sean los lados y vértices.	Segmentos que unen dos vértices cualesquiera no consecutivos.
Cuadrilátero	Tiene sólo cuatro lados.	Tiene sólo cuatro ángulos.	Tiene sólo dos diagonales.
Paralelogramo	Tiene cuatro lados, y sus lados opuestos paralelos.	Tiene cuatro ángulos, y sus ángulos opuestos son congruentes.	Tiene dos diagonales y éstas se cortan en el punto medio.

Acción 3: conceptuar las referidas formas anteriores, estudiando sus características con relación a sus semejanzas y/o diferencias.

Acción 4: organizar tales características relativas a semejanzas y/o diferencias en el Cuadro 6.

Cuadro 6: Semejanzas y Diferencias entre Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo.

Semejanzas/ Diferencias / Figuras	Semejanzas	Diferencias
Polígono y Cuadrilátero	Todo cuadrilátero es también un polígono.	No todo polígono es cuadrilátero.
Polígono y Paralelogramo	Todo paralelogramo es también un polígono.	No todo polígono es paralelogramo.
Paralelogramo y Cuadrilátero	Todo paralelogramo es también un cuadrilátero.	No todo cuadrilátero es un paralelogramo.
Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo	Todo cuadrilátero y todo paralelogramo son también polígonos.	No todo polígono es cuadrilátero y/o paralelogramo.

Acción 5: organizar las propiedades generales y específicas de los polígonos, cuadriláteros y Paralelogramos en el Cuadro 7.

El cuadro que vamos a presentar a continuación para una mejor exposición de las propiedades generales/especificidades, junto a las especificaciones de algunas de ellas cuando sea necesario, incluye necesariamente las siguientes representaciones:

Medida de un ángulo interno (a_e); Medida de un ángulo externo (a_i); Número de diagonales de un polígono (D); Número de lados del polígono (n); Suma de las medidas de los ángulos externos (S_i); Suma de las medidas de los ángulos internos (S_e).

Cuadro 7: Propiedades Generales y Especificas de Polígonos, Cuadriláteros y Paralelogramos.

Propiedades generales/específicas \ Figuras	Polígono	Cuadrilátero	Paralelogramo
Formado por poligonal cerrada	X	X	X
Posee tantos ángulos como vértices	X	X	X
Posee diagonales	X	X	X
Posee 4 lados		X	X
Posee 4 ángulos		X	X
Diagonales cortándose en el punto medio			X

Cuadro 8: Propiedades Generales y Especificas de Polígonos, Cuadriláteros y Paralelogramos.

Propiedades generales/específicas \ Figuras	Polígono	Cuadrilátero	Paralelogramo
Lados opuestos paralelos			X
Ángulos opuestos congruentes			X
$a_i + a_e \equiv 180^0$	X	X	X
$S_i = 180^0 \cdot (n-2)$	X	X	X
$D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$	X	X	X
$S_e = 360^0$	X	X	X
$a_i = \frac{180^0 \cdot (n-2)}{n}$	X	X	X
$a_e = \frac{360^0}{n}$	X	X	X

Actividad 2: Propiedades/características de los cuadriláteros (cuadrado, rectángulo y rombo).

Acción 1: enumerar las propiedades características de las formas geométricas (cuadrado, rectángulo y rombo).

Acción 2: organizar tales propiedades en el Cuadro 9.

Cuadro 9: Aspectos relevantes de los Cuadrados, Rectángulos y Rombos.

Características / Figuras	**En cuanto a los Lados**	**En cuanto a los ángulos**	**En cuanto a las diagonales**
Rectángulo	- lados opuestos paralelos congruentes	- todos los ángulos congruentes (rectos) - ángulos opuestos congruentes	- diagonales congruentes - diagonales se cortan en el centro
Cuadrado	- lados opuestos paralelos congruentes - medida de los cuatro lados congruentes	- todos los ángulos congruentes (rectos) - ángulos opuestos congruentes	- diagonales congruentes - diagonales se cortan en el centro - diagonales perpendiculares entre sí (forman ángulo recto)
Rombo	- lados opuestos paralelos congruentes - medida de los cuatro lados congruentes	- ángulos opuestos congruentes	- diagonales se cortan en el centro - diagonales perpendiculares entre sí (forman ángulo recto)

Acción 3: conceptuar las referidas formas anteriores, estudiando sus características en términos de semejanzas y/o diferencias.

Acción 4: organizar tales características en términos de semejanzas y/o diferencias en el Cuadro 10;

Cuadro 10: Semejanzas y Diferencias entre Cuadrados, Rectángulos y Rombos.

Semejanzas/ Diferencias / Figuras	**Semejanzas**	**Diferencias**
Cuadrado y Rectángulo	- Medidas de los lados opuestos congruentes; - Medidas de los ángulos opuestos congruentes; - Medidas de los cuatro ángulos congruentes (90^o).	- Medidas de todos los lados congruentes (propiedad que se da en el cuadrado y no en el rectángulo).
Cuadrado y Rombo	- Medidas de los lados opuestos congruentes; - Medidas de los ángulos opuestos congruentes; - Medidas de todos los lados congruentes.	- Medidas de los cuatro ángulos congruentes 90^o (propiedad que se da en el cuadrado y no en el rombo).
Rectángulo y Rombo	- Medidas de los lados opuestos congruentes; - Medidas de los ángulos opuestos congruentes.	- Medidas de todos los lados congruentes (propiedad que se da en el rombo y no en el rectángulo); - Medidas de todos los ángulos congruentes (propiedad que se da en el rectángulo y no en el rombo).
Cuadrado, Rectángulo y Rombo	- Medidas de los lados opuestos congruentes; - Medidas de los ángulos opuestos congruentes.	- Medidas de todos los lados congruentes (propiedad que se da en el cuadrado y en el rombo, pero no en el rectángulo); - Medidas de todos los ángulos congruentes (propiedad que se da en el rectángulo y en el cuadrado, pero no en el rombo).

Acción 5: organizar las propiedades generales y específicas de los Cuadrados, los Rectángulos y los Rombos en el Cuadro 11.

Cuadro 11: Propiedades Generales y Específicas de Cuadrados, Rectángulos y Rombos.

Figuras / Propiedades generales/específicas	Rectángulo	Cuadrado	Rombo
Lados opuestos paralelos congruentes	X	X	X
Medida de los cuatro lados congruentes		X	X
todos los ángulos congruentes (rectos)	X	X	
Ángulos opuestos congruentes	X	X	X
Diagonales congruentes	X	X	
Diagonales se cortan en el centro	X	X	X
Diagonales perpendiculares entre sí (forman ángulos rectos)		X	X

Situación 3: Conceptos, propiedades y sus implicaciones en las demostraciones.

Propósitos de la Situación 3

La tercera situación está destinada a caracterizar que la demostración puede ser concebida como algo decisivo para la consolidación de las ideas Matemáticas, lo cual se aplicará al ámbito de la posibilidad de validar informaciones confirmadas anteriormente de modo menos riguroso. La búsqueda de un camino para hacer efectiva tal validación, en términos de procedimientos más sofisticados, puede aproximarnos hacia la sensación de lo que significa el hacer matemático. En otras palabras, teniendo en cuenta las informaciones previamente adquiridas en las Situaciones 1 y 2, los propósitos del presente estudio pretenden establecer una forma capaz de hacer alusión al conocimiento matemático en lo referente a la *elaboración, comprensión y aplicación de proposiciones, teoremas y demostraciones*.

Actividad 1: Se admite la proposición (Todo ángulo raso o llano mide ciento ochenta grados) y, en consecuencia, la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.

Acciones: secuencia de procedimientos adoptados para llegar al resultado.

En este caso, se presupone que el alumno recurrirá a la proposición siguiente, que versa sobre la medida de un ángulo raso, y, a continuación, la relacionará con la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.

Proposición: Todo ángulo raso mide ciento ochenta grados (180^0).

El alumno, sabe que si $ABCD$ es un cuadrado, entonces admite la propiedad de que cada uno de sus ángulos internos mide noventa grados (90^0).

Luego, los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ son rectos, toda vez que $ABCD$ es un cuadrado y, los triángulos SAP, PBQ, QCR y RDS exteriores al cuadrilátero $PQRS$ son isósceles, pues los segmentos AS, AP, BP, BQ, CQ, CR, DR y DS son congruentes. Por lo tanto, los ángulos de la base de los referidos triángulos son congruentes y miden cuarenta y cinco grados (45^0).

Haciendo uso de la proposición 1, se puede escribir:

$$A\hat{P}S + S\hat{P}Q + B\hat{P}Q = 180^0.$$

$$Luego,\ 45^0 + S\hat{P}Q + 45^0 = 180^0.$$

$$Es\ decir\ S\hat{P}Q = 180^o - 90^o.\ Por\ lo\ \tan to,$$

$$S\hat{P}Q = 90^0.$$

Procediendo de forma análoga, se pueden obtener los ángulos $P\hat{Q}R$, $Q\hat{R}S$ y $R\hat{S}P$, garantizando con ello que el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo.

Actividad 2: se admite que los triángulos exteriores al cuadrilátero PQRS sean rectángulos isósceles.

Acciones: secuencia de procedimientos adoptados para llegar al resultado.

En este caso, se toma como punto de partida el admitir que el aluno considere los triángulos externos al cuadrilátero $PQRS$ como rectángulos isósceles.

El alumno, al tomar los puntos P, Q, R y S como enunciado en cuestión, podrá identificar que se trata de puntos equidistantes de los vértices A, B, C y D del cuadrado. O sea, S y P son equidistantes del vértice A, situados respectivamente en los lados DA y AB, y los puntos Q y R son equidistantes del vértice C, situados respectivamente en los lados BC y CD, formando los triángulos APS y CRQ, que por construcción son rectángulos isósceles congruentes exteriores al cuadrilátero $PQRS$, pues, $PS = RQ$.

Con ello, procediendo de forma análoga, podrán justificarse las congruencias de los triángulos BQP y DRS, garantizando que el cuadrilátero $PQRS$ es un cuadrado y, consecuentemente, un paralelogramo.

Actividad 3: se admite que los triángulos exteriores al cuadrilátero PQRS sean rectángulos escalenos.

Acciones: secuencia de procedimientos adoptados para llegar al resultado.

En este caso, se admitirá que el alumno considere que los triángulos exteriores al cuadrilátero $PQRS$ sean rectángulos escalenos.

Ante el enunciado de la cuestión, los alumnos pueden suponer que $SA = PB = QC = RD$ y $AP = BQ = CR = DS$, toda vez que P, Q, R y S son puntos medios tomados en el cuadrado $ABCD$. Además, cada uno de los cuatro triángulos formados por los cuadriláteros $ABCD$ y $PQRS$ son rectángulos escalenos congruentes. Ello se debe a que tienen sus lados adyacentes a un mismo vértice del cuadrado $ABCD$ congruentes, conforme lo que ya se argumentó inicialmente, y la hipotenusa de cada triángulo es el lado opuesto a un ángulo correspondiente a cada uno de los referidos vértices del cuadrado, el cual es recto, por tratarse del ángulo interno de un cuadrado.

Considerando la elaboración presentada en esta situación IV_3, es posible organizar algo que evidencie mejor tal elaboración, en los siguientes términos:

Como $ABCD$ es un cuadrado, entonces los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ son rectos y todos los triángulos exteriores al cuadrilátero $PQRS$, son rectángulos.

Luego, según las informaciones conocidas hasta entonces, tenemos que en los triángulos APS y BQP, $AP = BQ$ y $AS = PB$. Como los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son rectos, está caracterizado el caso de congruencia, pues $PS = PQ$.

Por la proposición 1, se puede escribir que $A\hat{P}S + S\hat{P}Q + B\hat{P}Q = 180^0$.

Como $A\hat{P}S$ y $B\hat{P}Q$ son los ángulos agudos del triángulo rectángulo, conjuntamente miden 90^0, con lo cual, se tiene que:

$$S\hat{P}Q + 90^0 = 180^0.$$

$$\textit{De donde,}\quad S\hat{P}Q = 180^o - 90.$$

$$\textit{Luego,}\ S\hat{P}Q = 90^0.$$

Procediendo de forma análoga, es posible obtener los otros tres ángulos, o sea, $P\hat{Q}R = 90^0$, $Q\hat{R}S = 90^0$ y $R\hat{S}P = 90^0$, que, conjuntamente, componen el cuadrilátero $PQRS$, concluyéndose que se trata de un cuadrado y, consecuentemente, de un paralelogramo.

Cuadro 12: Aspectos relevantes de los Cuadrados, Rectángulos y Rombos.

Características / Figuras	**En cuanto a los Lados**	**En cuanto a los ángulos**	**En cuanto a las diagonales**
Rectángulo	- lados opuestos paralelos congruentes.	- todos los ángulos congruentes (rectos). - ángulos opuestos congruentes.	- diagonales congruentes. - diagonales se cortan en el centro.
Cuadrado	- lados opuestos paralelos congruentes. - medida de los cuatro lados congruentes.	- todos los ángulos congruentes (rectos). - ángulos opuestos congruentes.	- diagonales congruentes. - diagonales se cortan en el centro.
Rombo	- lados opuestos paralelos congruentes.	- ángulos opuestos congruentes.	- diagonales se cortan en el centro.

3.4 Instrumentos de Evaluación de las Enseñanzas Propuestas

3.4.1 Cuestionarios Diagnósticos y de Evaluación de Aprendizaje

3.4.1.1 Cuestionarios Diagnósticos y de Evaluación de Aprendizaje de Combinatoria[8]

1- Intentando exponer su idea, ¿sabría decir que es Combinatoria?
Respuesta: Combinatoria es el campo de la Matemática que trata del recuento de los subconjuntos (agrupaciones) de un conjunto finito dado, que obedecen a una condición específica.

2- En su opinión, ¿existe alguna diferencia entre el recuento simple y la Combinatoria? Justifique la respuesta.
Respuesta: Sí, el recuento simple es un recuento elemental consistente en la simple enumeración de objetos (contar uno a uno), mientras que la Combinatoria consiste en el recuento de grupos de objetos (subconjuntos o agrupaciones) que obedecen a una condición específica.

3- En líneas generales, explique en qué consisten, respectivamente, los principios aditivo y multiplicativo.
Respuesta: El Principio Aditivo es la técnica utilizada en situaciones de recuento en las que no se pueden efectuar dos o más acciones simultáneas en una misma realización. El Principio Multiplicativo es la técnica de recuento que se utilizada, inicialmente, cuando se pueden realizar dos o más acciones independientes y sucesivas.

4- Explique en pocas palabras la diferencia que hay entre los siguientes tipos de recuento: permutación, variación y combinación.
Respuesta: <u>Variación</u> es la técnica de recuento utilizada cuando el objetivo es contar aquellos subconjuntos en que se debe considerar la naturaleza y el orden de las agrupaciones.
<u>Combinación</u> es la técnica de recuento utilizada para contar los subconjuntos en los que tan sólo debe considerarse la naturaleza de las agrupaciones, toda vez que la ordenación de los elementos en las agrupaciones no genera un nuevo subconjunto que deba ser sometido a recuento.
<u>Permutación</u> es la técnica de recuento utilizada cuando se desea determinar el número de subconjuntos en los que sólo debe considerarse el orden de las agrupaciones, dado que no hay posibilidad de que se generen nuevas agrupaciones distintas por naturaleza.

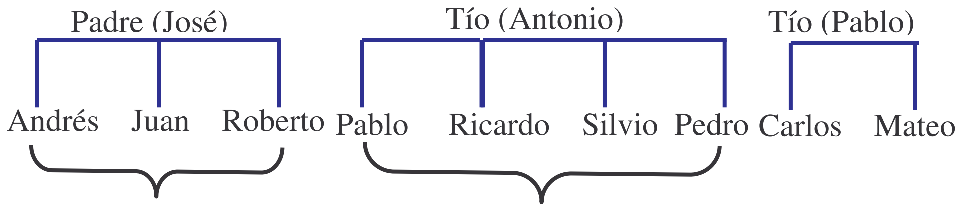
5- Se proponen, más abajo, tres situaciones. Después de haberlas solucionado, responda a las preguntas que se proponen a continuación de cada una de ellas:

[8] Este cuestionario se llevó a cabo después de la intervención; por lo tanto, sirvió a la vez como cuestionario de Evaluación del Aprendizaje.

Situación I

Mi padre, José, tiene dos hermanos: mis tíos Antonio y Pablo. Yo (Andrés) tengo dos hermanos (Juan y Roberto); mi tío Pablo tiene dos hijos (Mateo y Carlos), y mi tío Antonio, cuatro hijos (Fabio, Ricardo, Silvio y Pedro). ¿Cuántos sobrinos tiene mi tío Pablo?

Respuesta:



Sobrinos del tío Pablo: 3 + 4 = 7

a) ¿Qué es lo que está haciendo mediante la acción de determinar los sobrinos del tío Pablo?

Respuesta: Enumerando uno a uno los sobrinos del tío Pablo.

b) ¿Cuál es el motivo de la acción anterior?

Respuesta: Contar cuántos sobrinos tiene el tío Pablo.

Situación II

Vamos a admitir que usted tiene R$ 5,00 para tomar un tentempié en la cafetería de su escuela, y allí encuentra como opciones los siguientes productos: refresco (R$ 1,00), croqueta de pollo (R$ 2,00), sándwich mixto a la plancha (R$ 3,00), perrito caliente (R$ 1,00), zumo de frutas (R$ 2,00). Dada esa situación, se desea saber de cuántas formas usted puede tomar un tentempié en la cafetería, gastando exactamente R$ 5,00, sabiendo que su tentempié no puede tener más de una unidad de cada producto.

Respuesta: Solución esquemática ilustrada (Cuadro 13).

Cuadro 13: Solución esquemática.

Abreviando los productos:		**Se pueden enumerar las siguientes opciones:**	
Refresco	(**R**)	**RCpZ**	$(1{,}00 + 2{,}00 + 2{,}00 = 5{,}00)$
Croqueta de Pollo	(**Cp**)	**RMpPc**	$(1{,}00 + 3{,}00 + 1{,}00 = 5{,}00)$
Sándwich Mixto a la plancha	(**Mp**)	**CpPcZ**	$(2{,}00 + 1{,}00 + 2{,}00 = 5{,}00)$
Perrito caliente	(**Pc**)	**CpMp**	$(2{,}00 + 3{,}00 = 5{,}00)$
Zumo de frutas	(**Z**)	**MpZ**	$(3{,}00 + 2{,}00 = 5{,}00)$

Observando la lista del lado derecho del cuadro anterior, concluimos que hay 5 opciones.

¿Qué es lo que está haciendo mediante la acción de componer las posibles formas de tomar su tentempié?
Respuesta: combinando las opciones de productos ofrecidos, considerando las condiciones dadas, y observando incluso que son situaciones compuestas por dos o más decisiones, si bien cada una de tales decisiones depende de la elección que se hizo anteriormente.

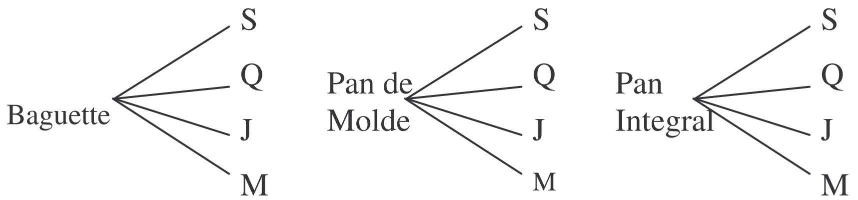
a) ¿Cuál es el motivo de la acción anterior?
Respuesta: Contar los tipos de tentempiés (subconjuntos) posibles.

Situación III

Los bocadillos y sándwiches de la panadería *Regencia* son muy famosos en el barrio. El cliente puede escoger entre tres tipos de pan: pan de molde, baguette o pan integral. Como relleno se dan cuatro opciones: salami, queso, jamón o mortadela. ¿Cuántos tipos de bocadillos y sándwiches ofrece la panadería, usando…

I- Un tipo de pan y un tipo de relleno?
Respuesta:

D_1: Escoger el pan $\longrightarrow$ 3 posibilidades
D_2: Escoger el relleno $\longrightarrow$ 4 posibilidades



$$\underbrace{\text{4 posibilidades} + \text{4 posibilidades} + \text{4 posibilidades}}_{\text{3 partes}} = \text{4 x 3 formas}$$

II- un tipo de pan y dos tipos de relleno?
Respuesta:

D_1: Escoger el pan $\longrightarrow$ 3 posibilidades
D_2: Escoger el 1er relleno $\longrightarrow$ 4 posibilidades
D_3: Escoger el 2º relleno $\longrightarrow$ 3posibilidades

$$Por\ elP.M.: \frac{3}{P}\times \underbrace{\overbrace{\frac{4}{2}\times\frac{3}{1}}^{rellenos}}_{\text{sin } el\ orden\ delos\ rellenos} = 18\ sándwiches$$

¿Qué es lo que está haciendo mediante la acción de formar los tipos posibles de sándwiches ofrecidos?
Respuesta: combinando cada una de las 3 opciones de pan con las 4 opciones de relleno, considerando que son situaciones compuestas por dos o más decisiones independientes y sucesivas.

¿Cuál es el motivo de la acción anterior?
Respuesta: Contar los tipos de sándwiches (subconjuntos) que se pueden formar.

3.4.1.2 Cuestionarios Diagnósticos y de Evaluación de Aprendizaje de Lógica Matemática

Cuestionario Diagnóstico de Lógica Matemática

1- En su opinión, ¿cuándo se pasa de una actividad ingenua, propia del sentido común, a una actitud filosófica?

Respuesta: Cuando el hombre pasa a preocuparse por la fundamentación teórica y crítica de los conocimientos y de las prácticas, estudiando las condiciones y principios de los conocimientos que sean racionales y verdaderos.

2- ¿Cuál es la importancia del silogismo para la Lógica? ¿Cuáles son sus características?

Respuesta: Su importancia radica en el hecho de que las leyes de la Lógica de sentencias están estructuradas en un formato silogístico caracterizado por dos premisas y conclusión.

3- Establezca cuál es la relación que existe entre el cálculo proporcional, la Lógica de Predicados y la Lógica de Relaciones.

Respuesta: La relación está en el hecho de que todos tratan de la cuantificación de los predicados. Así, la Lógica de Predicados permite definir las funciones del predicado; la Lógica de Relaciones va más allá, estudiando las relaciones entre el conjunto de objetos que componen el predicado; mientras que el cálculo proposicional es aún más amplio, pues establece los procedimientos por los cuales se puede determinar la verdad o la falsedad de una proposición de acuerdo con la relación que mantiene con otra o con otras.

4- Más abajo se proponen tres situaciones que deberán resolverse para, a continuación, dar respuesta a algunas preguntas referentes a tales soluciones:

Situación I

De las siguientes expresiones, indique cuáles son sentencias abiertas (SA) y cuáles proposiciones declarativas (PD):

a) $x+2=7$ (SA) c) $3>6$ *e* $3+2=4$ (PD)

b) $5+4\neq 8$ (PD) d) $2-x\leq 7$ (SA)

I - ¿Qué es lo que está haciendo mediante la acción de determinar las proposiciones declarativas?
Respuesta: Diferenciarlas de las sentencias abiertas a partir de la posibilidad de poder confirmar la veracidad o no de las frases.

II - ¿Cuál es el motivo de la acción anterior?
Respuesta: Reconocer las proposiciones declarativas como componentes esenciales en el análisis de argumentos.

Situación II

Sean las proposiciones:

- $p : n$ es un número natural par.
- $q : n$ es un número entero.

Formar sentencias, en lenguaje natural, que se correspondan con las proposiciones siguientes:

a) $\sim p$
Respuesta: n no es un número natural par.

b) $p \vee q$
Respuesta: n es un número natural par o n es un número entero.

c) $\sim p \wedge q$
Respuesta: n no es un número natural par y n es un número entero.

d) $\sim (\sim p)$
Respuesta: n es un número natural par.

e) $p \rightarrow q$
Respuesta: si n es un número natural par, entonces n es un número entero.

I - ¿Qué es lo que está haciendo mediante la acción de formar sentencias con esa simbología?
Respuesta: Traduciendo del lenguaje lógico al lenguaje natural.

II - ¿Cuál es el motivo de la acción anterior?
Respuesta: Reconocer las diversas simbologías utilizadas en el cálculo de predicados.

Situación III

Simbolice adecuadamente y verifique si el argumento siguiente es válido:
"Si 2 es primo, entonces es el menor primo. Si 2 es el menor primo, entonces 1 no es primo. 1 no es primo. Por lo tanto, 2 es primo".

Acción 1: Verificar las sentencias existentes en el argumento.
Resolución: El argumento está formado por dos sentencias condicionales:
1ª: "*Si 2 es primo, entonces es el menor primo*".
2ª "*Si 2 es el menor primo, entonces 1 no es primo*".

Acción 2: Traducir las proposiciones al lenguaje del cálculo de predicados.
Resolución:
- Pd : 2 es primo;
  Md : 2 es menor primo;
  $\sim Pu$: 1 no es primo.

Acción 3: Representar las sentencias en lenguaje simbólico.
Resolución:
1ª: "*Si 2 es primo, entonces es el menor primo*" $Pd \to Md$.
2ª: "*Si 2 es el menor primo, entonces 1 no es primo*" $Md \to \sim Pu$.

Acción 4: Construir los encadenamientos.
Resolución:
- $Pd \to Md$
  Pd
  $\therefore Md$
- $Md \to \sim Pu$
  $\sim Pu$
  $\therefore Pd$

Acción 5: Analizar la validez del argumento.
Resolución:
- $Pd \to Md$
  Pd
  $\therefore Md$

En el encadenamiento fue aplicado el *modus ponens* para verificar si existe relación entre las dos sentencias propuestas.
- $Md \to \sim Pu$
  $\sim Pu$
  $\therefore Pd$

Conclusiones:
- El antecedente (Md) de este encadenamiento es la conclusión del 1er argumento ($Pd \to Md$).
- Al afirmar el consecuente ($\sim Pu$) se cae en un razonamiento inválido, pues lo correcto sería:
- $Md \to \sim Pu$
  Pu
  $\therefore \sim Md$

O sea, la aplicación del *modus tollens*.

I - ¿Qué es lo que está haciendo mediante la acción de verificar la validez del argumento?
Respuesta: Traducir del lenguaje natural al lenguaje lógico y realizar el análisis del argumento.

II - ¿Cuál es el motivo de la acción anterior?
Respuesta: Aplicar el lenguaje lógico al análisis de argumentos condicionales y verificar la validez del encadenamiento lógico a partir de las reglas de inferencia.

Cuestionarios de Evaluación del Aprendizaje de Lógica Matemática

Las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario de verificación son idénticas a las del cuestionario diagnóstico. Por ello, se iniciará aquí a partir de la pregunta 4.

4- Más abajo se proponen tres situaciones que deberán resolverse para, a continuación, dar respuesta a algunas preguntas referentes a tales soluciones:

Situación I

De las siguientes expresiones, indique cuáles son sentencias abiertas (SA) y cuáles proposiciones declarativas (PD):

a) $3+9\neq 13$ (PD) c) $5>9\ e\ 6+1=5$ (PD)
b) $y+3=6$ (SA) d) $1-x\leq 8$ (SA)

I - ¿Qué es lo que está haciendo mediante la acción de determinar las proposiciones declarativas?
Respuesta: Diferenciarlas de las sentencias abiertas a partir de la posibilidad de poder confirmar la veracidad o no de las frases.

II - ¿Cuál es el motivo de la acción anterior?
Respuesta: Reconocer las proposiciones declarativas como componentes esenciales en el análisis de argumentos.

Situación II

Sean las proposiciones:
- q: n es un número natural par.
- p: n es un número entero (las proposiciones difieren del cuestionario diagnóstico).

Formar sentencias, en lenguaje natural, que se correspondan con las proposiciones siguientes:
a) ~ q
Respuesta: n no es un número natural par.
b) q V p

Respuesta: n es un número natural par o n es un número entero.
c) $\sim q \wedge p$
Respuesta: n no es un número natural par y n es un número entero.
d) $\sim (\sim q)$
Respuesta: n es un número natural par.
e) $q \rightarrow p$ (las sentencias difieren del cuestionario diagnóstico)
Respuesta: si n es un número natural par, entonces n es un número entero.

I - ¿Qué es lo que está haciendo mediante la acción de formar sentencias con esta simbología?
Respuesta: Traduciendo del lenguaje lógico al lenguaje natural.

II - ¿Cuál es el motivo de la acción anterior?
Respuesta: Reconocer las diversas simbologías utilizadas en el cálculo de predicados.

Situación III

Simbolice adecuadamente y verifique si el siguiente argumento es válido:
"Si 2 es par, entonces es el menor par. Si 2 es el menor par, entonces 1 no es par. 1 no es par, por lo tanto, 2 es par" (las proposiciones difieren del cuestionario diagnóstico).

Acción 1: Verificar las sentencias existentes en el argumento.
Resolución: El argumento está formado por dos sentencias condicionales:
1ª: "*Si 2 es par, entonces es el menor par*".
2ª "*Si 2 es el menor par, entonces 1 no es par*".

Acción 2: Traducir las proposiciones al lenguaje del cálculo de predicados.
Resolución:
- Pd : 2 es par;
  Md : 2 es menor par;
  $\sim Pu$: 1 no es par.

Acción 3: Representar las sentencias en lenguaje simbólico.
Resolución:
1ª: "*Si 2 es par, entonces es el menor par*" $Pd \rightarrow Md$.
2ª "*Si 2 es el menor par, entonces 1 no es par*" $Md \rightarrow \sim Pu$.

Acción 4: Construir los encadenamientos.
Resolución:

• $Pd \rightarrow Md$	• $Md \rightarrow \sim Pu$
Pd	$\sim Pu$
$\therefore Md$	$\therefore Pd$

Acción 5: Analizar la validez del argumento.
Resolución: En el encadenamiento fue aplicado el *modus ponens* para verificar si existe relación entre las dos sentencias propuestas.

$\bullet Md \rightarrow \sim Pu$

$\sim Pu$

$\therefore Pd$

Conclusiones:
- el antecedente (Md) de este encadenamiento es la conclusión del 1er argumento ($Pd \rightarrow Md$).
- al afirmar el consecuente ($\sim Pu$), se cae en un razonamiento inválido, pues lo correcto sería:

$\bullet Md \rightarrow \sim Pu$

Pu

$\therefore \sim Md$

Aplicación de los *modus tollens*.

I - ¿Qué es lo que está haciendo mediante la acción de verificar la validez del argumento?
Respuesta: Traducir del lenguaje natural al lenguaje lógico y realizar el análisis del argumento.

II - ¿Cuál es el motivo de la acción anterior?
Respuesta: Aplicar el lenguaje lógico al análisis de argumentos condicionales y verificar la validez del encadenamiento lógico a partir de las reglas de inferencia.

3.4.1.3 Cuestionarios Diagnósticos y de Evaluación de Aprendizaje de Álgebra

Cuestionario Diagnóstico de Álgebra

1- Dadas las expresiones: 1 x 2 = 2 x 1, 2 x 3 = 3 x 2; 4 x 5 = 5 x 4, y otras similares, ¿qué tipo de propiedad puede establecer?
Respuesta: a x b = b x a.

i) ¿Qué es lo que está observando en cada una de las expresiones referidas más arriba?
Respuesta: La multiplicación de dos números, donde la diferencia a ambos lados del signo de igualdad, consiste en la inversión del orden de los dos números (conmutatividad). Se verifica que, invirtiendo el orden de cualquiera de ellos, el resultado de la multiplicación (producto) continúa siendo el mismo.

ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?
Respuesta: 'Establecer la regla conmutativa de la operación de multiplicación' (Generalizar), a partir de la 'interpretación de la regularidad Aritmética' (Traducir) según las expresiones dadas.

Obs.: Cuando el alumno se refiera a generalización (generalizar) como justificar/probar/demostrar, su respuesta al ítem (ii) será considerada correcta.

2- La suma de un número con su triple es 12. Encuentre el número mencionado.
i) ¿Qué es lo que está haciendo al escribir la ecuación: $x+3x=12$?
Respuesta: Ecuacionar con variables del tipo incógnitas y/o constantes (simplificar);

ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?
Respuesta: Solucionar el problema (resolver).

3- Sabiéndose que una recta puede ser representada por ecuaciones como $y=mx+b$, encuentre la ecuación de la recta que pase por los puntos (1, 0) y (2, 1).
i) ¿Qué es lo que representa la ecuación $y=mx+b$ en esta situación?
Respuesta: un *modelo de variable* o una *fórmula*.

ii) ¿Qué es lo que está haciendo al determinar la ecuación de la recta?
Respuesta: Encontrando m y b, donde m y b son parámetros que se transformaron, respectivamente, en incógnita y constante; y *x* es un argumento.

iii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?
Respuesta: Obtener un modelo general que permita determinar cualquier punto de la recta representada por tal modelo.

4- ¿Podría decir si existe alguna diferencia y/o semejanza entre los conceptos de función afín y función lineal? Justifique la respuesta.
Respuesta: Sí.
Justificación: Las funciones polinómicas de primer grado son funciones afines y geométricamente representan rectas. Por eso, la función lineal es un caso particular de la afín, donde, en el modelo general $b=0$, lo que geométricamente significa que las rectas que representan funciones lineales pasan por el origen en el sistema de ejes cartesiano. Por otro lado, las funciones afines que son lineales representan también las funciones de proporcionalidad, mientras que las funciones afines no lineales no representan tales funciones de proporcionalidad.

Cuestionario de Evaluación del Aprendizaje de Álgebra

1- Pepito desea cercar el jardín de su chalet, que posee un área de $20m^2$. Sabiendo que empleó $36m$ de alambre para dar dos vueltas completas, ¿cuáles son las dimensiones del jardín?
Respuesta:

$$\begin{cases} S = xy \\ C = 2(2x+2y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 = xy \quad (1) \\ 36 = 2(2x+2y) \Rightarrow 18 = 2(x+y) \quad \Rightarrow (2) \end{cases}$$

Sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$\begin{aligned} 9 &= x + y \Rightarrow y = 9 - x \\ 20 &= x(9-x) \\ 20 &= 9x - x^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 9x + 20 = 0 \\ x = 4 \;\; e \;\; y = 5. \end{cases}$$

Respuesta: $x = 4$; $y = 5$.

i) ¿Qué tipo de acción, inicialmente, está haciendo para resolver este problema?
Respuesta: Ecuacionar con variables del tipo incógnitas e/o constantes (Simplificar).

ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?
Respuesta: Solucionar el problema.

2- Sean las expresiones de los productos: $1\times 2;\ 2\times 4;\ 4\times 8;\ 8\times 16$, y así en adelante. ¿Es posible establecer algún tipo de propiedad?
Respuesta: Sí.

i) ¿Qué es lo que está observando en cada una de las expresiones referidas?
Respuesta: Que tales expresiones pueden ser representadas por multiplicaciones que tienen como factor un único número, en este caso, el número dos.

ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?
Respuesta: Propiciar el establecimiento de una *generalización Aritmética* (Generalizar), evidenciada a partir de la interpretación de regularidades Aritméticas (traducir). Por ejemplo, tal regularidad permite explicitar la generalización por 2^{2n+1}, siendo n un número natural.

3- Se sabe que en la producción de mangas sin pesticidas, el productor tiene un costo fijo de R\$ 1.000,00 y a él se le añade un costo adicional de R\$ 0,20 por caja de mangas producidas. Si el costo total se da a partir de la relación del número de cajas producidas, determine:

i) El modelo que representa este fenómeno.
Respuesta: $C = 1000 + 0{,}20\,c$, donde C representa el costo total y c es un número entero que corresponderá a la cantidad de cajas de mangas producidas. Con este modelo, se puede hallar el costo a partir del número de las ya referidas cajas producidas.

ii) ¿Qué es lo que está haciendo al determinar el modelo anterior?
Respuesta: Obteniendo una fórmula (modelo).

iii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?
Respuesta: Determinar el costo a partir del modelo formulado según el valor dado por caja producida.

4- Se sabe que cada caja de mangas producida sin pesticida, se vende por R\$ 10,00. Determine:

i) El modelo que pueda representar este fenómeno de ingresos?
Respuesta: $R = 10\,c$. En este modelo, R representa los ingresos, mientras que c continúa siendo un número entero que corresponderá a la cantidad de cajas de mangas vendidas. Con este modelo se pueden determinar los ingresos a partir de la cantidad de cajas vendidas.

ii) Si existe alguna diferencia y/o semejanza entre este modelo referido a los ingresos y el modelo referido a los costos de la cuestión anterior.
Respuesta: Sí.

Los dos modelos son funciones de tipo afín, si bien el segundo de ellos es una función lineal, y, por tanto, de proporcionalidad.

3.4.1.4 Cuestionarios Diagnósticos y de Evaluación de Aprendizaje de Geometría[9]

Cuestionario Diagnóstico de Geometría

1ª Cuestión

Se sabe que "Los elementos" constan de 13 libros/capítulos que tratan sobre la Geometría Plana. Correlacione cada uno de los 06 (seis) libros/capítulos según las respectivas propiedades/proposiciones que aparecen más abajo:
(L_1) Propiedades de los triángulos.
(L_3) Propiedades de la circunferencia.
(L_2) Teorema de Pitágoras.
(L_6) Teoría general de las medidas.
(L_4) Construcción con regla y compás.
(L_5) Teorema de la proporcionalidad de las cantidades proporcionales.

Comentario: En esta cuestión, el propósito es que el alumno haga una delimitación del campo de la Geometría Plana, a partir del análisis de algunas propiedades/proposiciones que aparecen en los 6 (seis) primeros libros de Euclides, como se muestra en el Cuadro 4.
Respuesta: Identificar que *el Teorema de la Inducción Finita* no forma parte de este conjunto de propiedades/proposiciones.

i) ¿Qué es lo que está haciendo al analizar tal conjunto de propiedades en detrimento de otras?
Respuesta: Identificar las propiedades/proposiciones que forman parte del contenido de cinco de los seis capítulos (libros) que constituyen la Geometría plana.

ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?

[9] Tras la aplicación del cuestionario Diagnóstico, se percibió que podría ser mejorado en su elaboración y, debido a ello, se comentaron tales necesidades y se justificaron los cambios que aparecen en el cuestionario de evaluación del Aprendizaje.

Respuesta: Caracterizar el conocimiento matemático correspondiente a la Geometría plana.

2ª Cuestión
Comentario: El objetivo de esta cuestión es, inicialmente, enumerar las propiedades características de las formas geométricas Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo, a partir de los lados, vértices, ángulos y diagonales, conforme el Cuadro 5. Junto a ello, se busca también establecer un concepto sobre las referidas formas a partir de las semejanzas/diferencias existentes entre ellas, organizadas según el Cuadro 6.

I- ¿Qué características especifican las formas Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo?
Respuesta: *Polígono* es una figura plana, formada por una línea poligonal cerrada, con tres o más lados, vértices, ángulos y diagonales.
Cuadrilátero: es un polígono que posee 4 lados, 4 vértices y 4 ángulos.
Paralelogramo: es un cuadrilátero que posee los lados opuestos paralelos.

i) ¿Qué es lo que está haciendo al identificar tales características?
Respuesta: Identificar las propiedades de las formas Polígonos, Cuadriláteros y Paralelogramos.

ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?
Respuesta: Conceptuar tales formas geométricas.

II- a) ¿Es posible relacionar esas formas geométricas anteriores entre sí?
Respuesta: Sí.

b) En caso afirmativo, ¿cómo relacionaría tales formas geométricas entre sí?
Respuesta (Justificación): Partiendo del *1er Axioma de Euclides* (verdad evidente), que corresponde a (transitividad), donde se afirma que: **las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí**, resulta posible presentar el siguiente argumento: Si todo *cuadrilátero* es un polígono y todo *paralelogramo* es un cuadrilátero, entonces todo paralelogramo es un *polígono*.

i) ¿Qué es lo que está haciendo al identificar tales características?
Respuesta: Caracterizar las semejanzas/diferencias entre las propiedades descubiertas acerca de las formas geométricas referidas: Polígonos, Cuadriláteros y Paralelogramos.

ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?
Respuesta: Clasificar (categorizar) tales formas geométricas.

3ª Cuestión
Comentario: Esta cuestión tiene como objetivo enumerar las propiedades generales y específicas de las formas geométricas Cuadrado, Rectángulo y Rombo, a partir de sus lados, ángulos y diagonales. La organización de tales propiedades fue establecida a partir del Cuadro 9.

I- ¿Cuáles son las propiedades que especifican las formas geométricas Cuadrado, Rectángulo y Rombo?
Respuesta:

Cuadrado:

Lados opuestos paralelos y con la misma medida;
Medidas de los ángulos congruentes (rectos);
Ángulos opuestos congruentes;
Diagonales con la misma medida;
Diagonales se cortan en el centro;
Diagonales perpendiculares entre sí;
Diagonales bisectrices de los ángulos internos.

Rectángulo:

Lados opuestos paralelos y con la misma medida;
Medida de los ángulos congruentes (rectos);
Ángulos opuestos congruentes;
Diagonales con la misma medida;
Diagonales se cortan en el punto medio.

Rombo:

Lados opuestos paralelos y con la misma medida;
Ángulos opuestos congruentes;
Diagonales se cortan en el punto medio;
Diagonales perpendiculares entre sí;
Diagonales bisectrices de los ángulos internos.

i) ¿Qué es lo que está haciendo al especificar estas formas?
Respuesta: Enumerar las propiedades de Cuadrados, Rectángulos y Rombos.

ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?
Respuesta: Reconocer las propiedades de Cuadrados, Rectángulos y Rombos.
Observación: En el cuestionario diagnóstico no se pidió a los alumnos que respondieran a los ítems (i) y (ii) anteriores, o sea, los que tratan sobre el contenido de la acción y el motivo de la acción.

La razón de la no solicitación es que se pensó que el cuestionamiento en sí conllevaría de un modo subyacente a la propia respuesta algo relativo a los dos ya referidos ítems. Sin embargo, como no ocurrió lo que se esperaba se llevaron a cabo los siguientes cambios:

- En lugar de dos situaciones, como en el caso del cuestionario diagnóstico, se plantearon tres;
- En la primera y en la segunda situación se modificó la formulación de las preguntas, si bien los cuestionamientos en sí continuaron siendo los mismos, de forma que en la primera se solicitó además resolver los ítems (i) y (ii);
- En la tercera se intentó establecer, a partir de una confrontación entre las situaciones I y II, una revisión conceptual integrada sobre polígonos, cuadriláteros y paralelogramos referida a las ideas de cuadrado, rectángulo y rombo, y, para averiguar

el tipo de comprensión de los alumnos, se pidió que también se respondiera a los ítems (i) y (ii).

II- ¿Cómo relaciona estas formas geométricas entre sí?
Respuesta: Analizando las propiedades de Cuadrados, Rectángulos y Rombos.

III- ¿Es posible relacionar Cuadrado, Rectángulo y Rombo con Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo? En caso afirmativo, ¿cuáles son las afirmaciones posibles?
Respuesta: Sí.
Justificación: Para dar cuenta de esta justificación en forma de conclusión se emplearon las dos proposiciones siguientes:
Proposición 1: Todo cuadrilátero que posee los lados opuestos paralelos es un paralelogramo. Ahora bien, si todo paralelogramo es un cuadrilátero que posee los lados opuestos paralelos, entonces, el cuadrado, el rectángulo y el rombo son paralelogramos.
Proposición 2: Todo cuadrilátero que posee cuatro lados, cuatro ángulos y cuatro vértices es un polígono. Ahora bien, si todo cuadrilátero es un polígono, entonces, el paralelogramo es un polígono.

Conclusión: Llamemos cuadrado (q), polígono (P_0), rectángulo (r), cuadrilátero (Q), rombo (l) y paralelogramo (P_a).

Entonces: Si todo q, r es l y un P_a y todo P_a es un Q, entonces, q, r y l son Q;
Si todo P_a es Q y todo Q es P_0, entonces, todo P_a es un P_0.

Por lo tanto, si todo paralelogramo es un polígono, entonces, q, r y l son polígonos.

i) ¿Qué es lo que está haciendo, al desarrollar tales tipos de relaciones?
Respuesta: Identificar las propiedades/proposiciones integradoras.

ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?
Respuesta: Reconciliación integrativa de tales conceptos en cuanto formas geométricas.

4ª Cuestión[10]

La figura 29 que aparece más abajo representa un cuadrilátero inscrito en un cuadrado (Figura 28). Si los segmentos: $\overline{CR} = \overline{CQ} = \overline{AS} = \overline{AP}$, entonces:

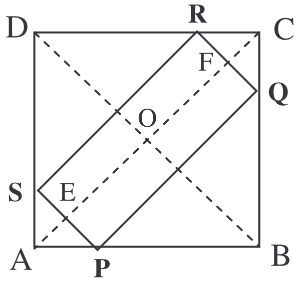


Figura 28

[10] En el cuestionario diagnóstico, esta cuestión estaba elaborada de forma muy directa y poco contextualizada. Por eso, en el cuestionario de evaluación del aprendizaje se realizaron algunas modificaciones.

i) Demuestre que el cuadrilátero PQRS es un rectángulo.
ii) Enumere las fases de desarrollo de que consta la demostración anterior; ¿cuáles son las ideas Matemáticas utilizadas?
iii) ¿Entre tales ideas hay Proposiciones, Leyes y Teoremas? En caso afirmativo, identifíquelas.

Comentario: En esta cuestión se busca justificar una demostración en el ámbito de una Actividad Didáctica. Eso puede hacerse a partir del uso de una proposición sobre la medida de un ángulo raso y la propiedad de la medida de cada uno de los ángulos internos de un cuadrado según la idea de congruencias de triángulos rectángulos, que se refiere a lados/segmentos/ángulos. Tal actividad fue estructurada conforme a las tres situaciones siguientes:

Situación I_1

En esta situación se presupone que el alumno recurrirá a la siguiente proposición, que versa sobre la medida de un ángulo raso o llano, y que, a continuación, la relacionará con la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.

Proposición 1: Todo ángulo raso mide ciento ochenta grados (180^0).

El alumno, sabe que si $ABCD$ es un cuadrado, entonces admite la propiedad de que cada uno de sus ángulos internos mide noventa grados (90^0).

Luego, los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ son rectos, toda vez que $ABCD$ es un cuadrado, y los triángulos SAP, PBQ, QCR y RDS exteriores al cuadrilátero $PQRS$ son isósceles, pues los segmentos AS, AP, BP, BQ, CQ, CR, DR y DS son congruentes. Por tanto, los ángulos de la base de los referidos triángulos son congruentes y miden cuarenta y cinco grados (45^0).

Haciendo uso de la proposición 1, se puede escribir:

$$A\hat{P}S + S\hat{P}Q + B\hat{P}Q = 180^0 \Rightarrow 45^o + S\hat{P}Q + 45^o = 180^o.$$

$$\therefore S\hat{P}Q = 180^o - 90^o,\ luego \quad S\hat{P}Q = 90^o.$$

Procediendo de forma análoga, podemos obtener los ángulos $P\hat{Q}R$, $Q\hat{R}S$ y $R\hat{S}P$, garantizando con ello que el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo.

Situación I_2

Esta situación tiene como punto de partida admitir que el alumno considere los triángulos externos al cuadrilátero $PQRS$ como rectángulos isósceles.

El alumno al tomar los puntos P, Q, R y S de la forma como se enuncia en la cuestión, podrá identificar que son puntos equidistantes de los vértices A, B, C y D del cuadrado. O sea, S y P son equidistantes del vértice A, y están situados respectivamente en los lados DA y AB, y los puntos Q y R son equidistantes del vértice C, y están situados respectivamente en los lados BC y CD, formando los triángulos APS y CRQ que, por construcción, son rectángulos isósceles congruentes exteriores al cuadrilátero $PQRS$, pues, $PS = RQ$.

Con ello, procediendo de forma análoga, podrán justificarse las congruencias de los triángulos BQP y DRS, garantizando que el cuadrilátero $PQRS$ es un cuadrado, y, consecuentemente, un paralelogramo.

Situación I_3

En el caso de esta situación se admite que el alumno considere que los triángulos exteriores al cuadrilátero $PQRS$ sean rectángulo escalenos.

Ante el enunciado de la cuestión, los alumnos pueden suponer que $SA = PB = QC = RD$ y $AP = BQ = CR = DS$, toda vez que P, Q, R y S son puntos medios tomados en el cuadrado $ABCD$. Junto a ello, que cada uno de los cuatro triángulos formados por los cuadriláteros $ABCD$ y $PQRS$ son rectángulos escalenos congruentes, pues, tienen sus lados adyacentes a un mismo vértice del cuadrado $ABCD$ congruentes, conforme ya fue argumentado inicialmente, y la hipotenusa de cada triángulo es lado opuesto a un ángulo correspondiente a cada uno de los referidos vértices del cuadrado, el cual, por su parte, es recto, por ser ángulo interno de un cuadrado.

Teniendo en cuenta la elaboración presentada en esta situación I_3, es posible organizar una exposición que evidencie mejor tal elaboración de la siguiente forma:

Como $ABCD$ es un cuadrado, entonces, los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ son rectos y todos los triángulos exteriores al cuadrilátero $PQRS$, son rectángulos.

Luego, por la figura, y según las informaciones conocidas hasta ahora, tenemos que en los triángulos APS y BQP, $AP = BQ$ y $AS = PB$. Como los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son rectos, está caracterizado el caso de congruencia, pues, $PS = PQ$.

Por la proposición 1, podemos decir que $A\hat{P}S + S\hat{P}Q + B\hat{P}Q = 180^0$.

Como $A\hat{P}S$ y $B\hat{P}Q$ son los ángulos agudos del triángulo rectángulo, y conjuntamente miden 90^0, tenemos que:

$$S\hat{P}Q + 90^0 = 180^0.$$

$$\therefore S\hat{P}Q = 180^o - 90 \Rightarrow S\hat{P}Q = 90^o.$$

Procediendo de forma análoga, se hace posible obtener los otros tres ángulos, o sea, $P\hat{Q}R = 90^0$, $Q\hat{R}S = 90^0$ y $R\hat{S}P = 90^0$, que componen el cuadrilátero $PQRS$, llegando a la conclusión de que se trata de un cuadrado y, consecuentemente, de un paralelogramo.

ii) Las mismas propiedades que presentan el cuadrado y el rectángulo en la 3ª cuestión referida más arriba.
iii) Cuadrado o rectángulo.
Observación: El cuadrilátero será rombo sólo cuando éste sea también un cuadrado.

Cuestionario de Evaluación del Aprendizaje de Geometría[11]

1ª Cuestión
Todas las propiedades que aparecen más abajo excepto una forman parte de los 6 (seis) primeros libros de Euclides y son bastante utilizadas en *Enseñanza Fundamental II*. Señale la alternativa que se corresponde con la referida excepción:
(   ) Semejanza de Polígonos.
(   ) Cambio de Paralelogramo a triángulo y equivalencia.
(   ) Teorema de las inducciones finitas.
(   ) Propiedades de la circunferencia.
(   ) Teorema de Pitágoras.
(   ) Construcción con regla y compás.

i) ¿Qué es lo que está haciendo al analizar tal conjunto de propiedades en detrimento de otras?
ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?

2ª Cuestión
I- ¿Cuáles son las propiedades que especifican las formas geométricas Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo?
i) ¿Qué es lo que está haciendo al especificar tales formas?
ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?

II- a) ¿Es posible relacionar las formas geométricas anteriores entre sí?
b) En caso afirmativo, ¿cómo las relacionaría?
i) ¿Qué es lo que está haciendo cuando relaciona tales formas geométricas?
ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?

3ª Cuestión
I) ¿Cuáles son las propiedades que especifican las formas geométricas Cuadrado, Rectángulo y Rombo?
i) ¿Qué es lo que está haciendo al especificar esas formas?
ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?

II- ¿Cómo relacionaría esas formas geométricas entre sí?

III- ¿Es posible relacionar los Cuadrados, Rectángulos y Rombos con los Polígonos, Cuadriláteros y Paralelogramos? En caso afirmativo, ¿cuáles serían las afirmaciones posibles?
i) ¿Qué es lo que está haciendo al desarrollar este tipo de relaciones?
ii) ¿Cuál es el motivo de esta acción?

4ª Cuestión
El principal objetivo de este módulo de Geometría consistió en, partiendo de los Postulados y, posteriormente, de los Axiomas de Euclides, llegar de una forma

[11] Cabe informar que los cambios no dieron lugar a nuevas resoluciones, diferentes de las ya presentadas en el cuestionario diagnóstico y de los comentarios ya establecidos en las respuestas que sobre el mismo se dieron.

significativa a la adquisición de los conceptos sobre paralelogramos. En la figura 30 representada seguidamente, $ABCD$ constituye un cuadrado, en el cual los puntos $PQRS$ están situados respectivamente sobre los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ y $\overline{DA}$, que, de modo análogo, representan el cuadrilátero $PQRS$. En función de estas informaciones

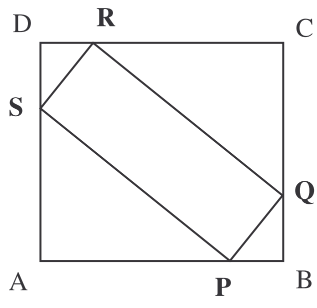


Figura 29

i) Demuestre que el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo.
ii) Establezca todas las propiedades de $PQRS$.
iii) Conceptúe/defina la forma geométrica de $PQRS$.

3.4.2 Mapas Conceptuales para Contraste con los Mapas producidos por los alumnos

La elaboración de *mapas conceptuales* de un determinado ámbito del conocimiento o de parte de él, consiste en el proceso de elaboración de estructuras sistematizadas de *complejos conceptuales* y/o *proposicionales* sobre el ámbito conceptual en cuestión. En el presunto estudio se hará un especial énfasis en el aspecto instructivo por lo que se refiere a la adquisición de conocimiento mediante la oportuna utilización de la *diferenciación progresiva* y de la *reconciliación integradora*, en cuanto elementos auxiliares integrantes en proceso evolutivo de la dinámica de la estructura cognitiva. Por lo tanto, de forma inmediata tras el comienzo, se hace necesario informar la procedencia de estas ideas acerca de la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora, así como lo que se pretende con ellas.

La diferenciación progresiva referida por Ausubel, *apud* Moreira y Buchweitz (1987, p.25) - se presenta de la siguiente forma:

"[…] *El principio de la diferenciación debe considerarse cuando se programa el contenido, esto es, las ideas más generales y más inclusivas deben ser presentadas al principio, para, sólo a partir de entonces, ser progresivamente diferenciadas en términos de detalle y especificidad*".

Por su parte, por lo que se refiere a la reconciliación integrativa, también establecida por Ausubel, según Moreira y Buchweitz (*op. cit.*, p. 25-26), ésta se produce

"[…] *Al estudiar explícitamente las relaciones entre proposiciones y conceptos buscando enfocar diferencias y similitudes importantes con el fin de aclarar, en términos de reconciliación, inconsistencias reales o aparentes*".

3.4.2.1 Mapa Conceptual de Combinatoria

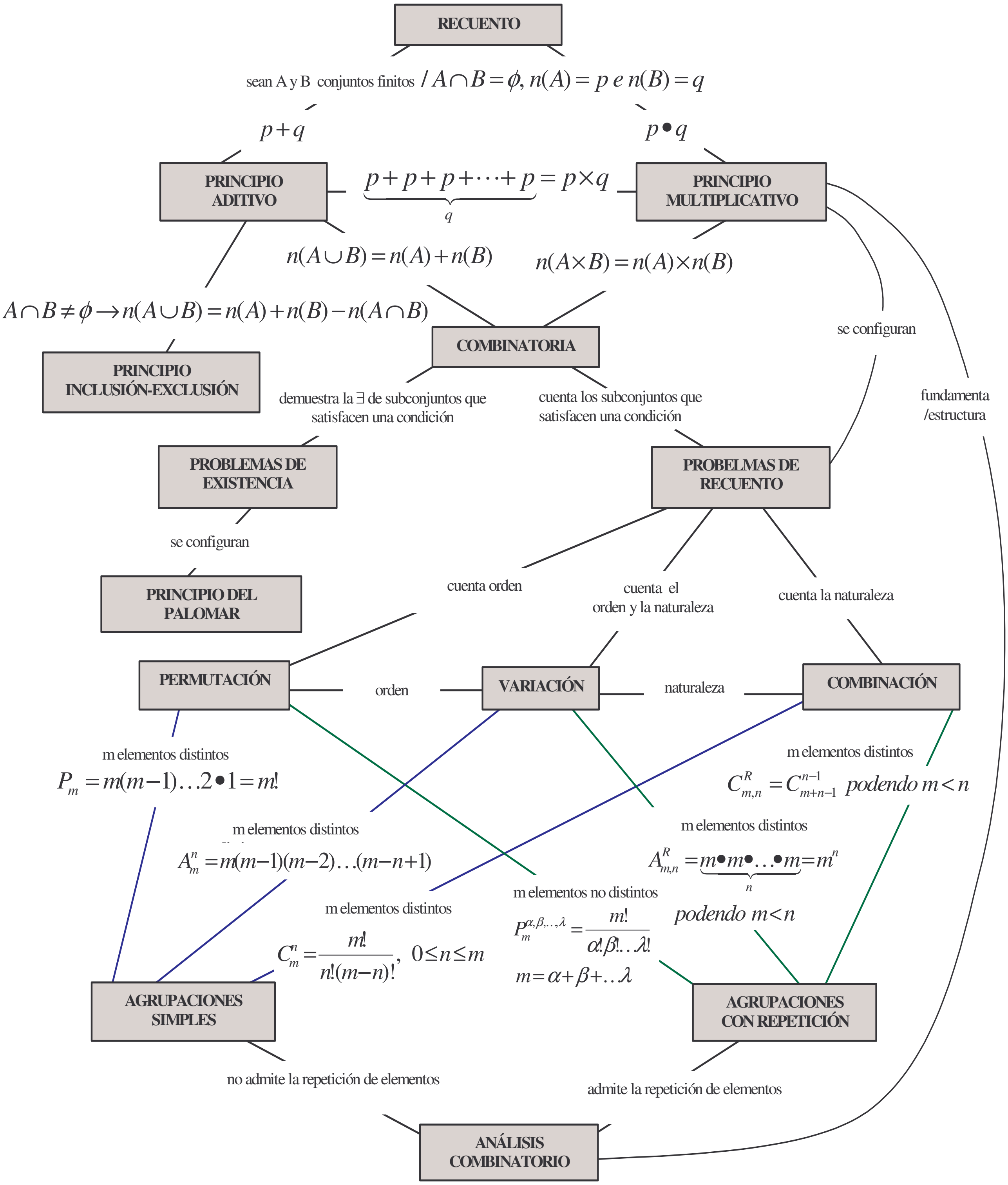


Figura 30: Mapa Conceptual de Combinatoria (Silva, Rufino y Moreira, 2007)

3.4.2.2 Mapa Conceptual de Lógica Matemática

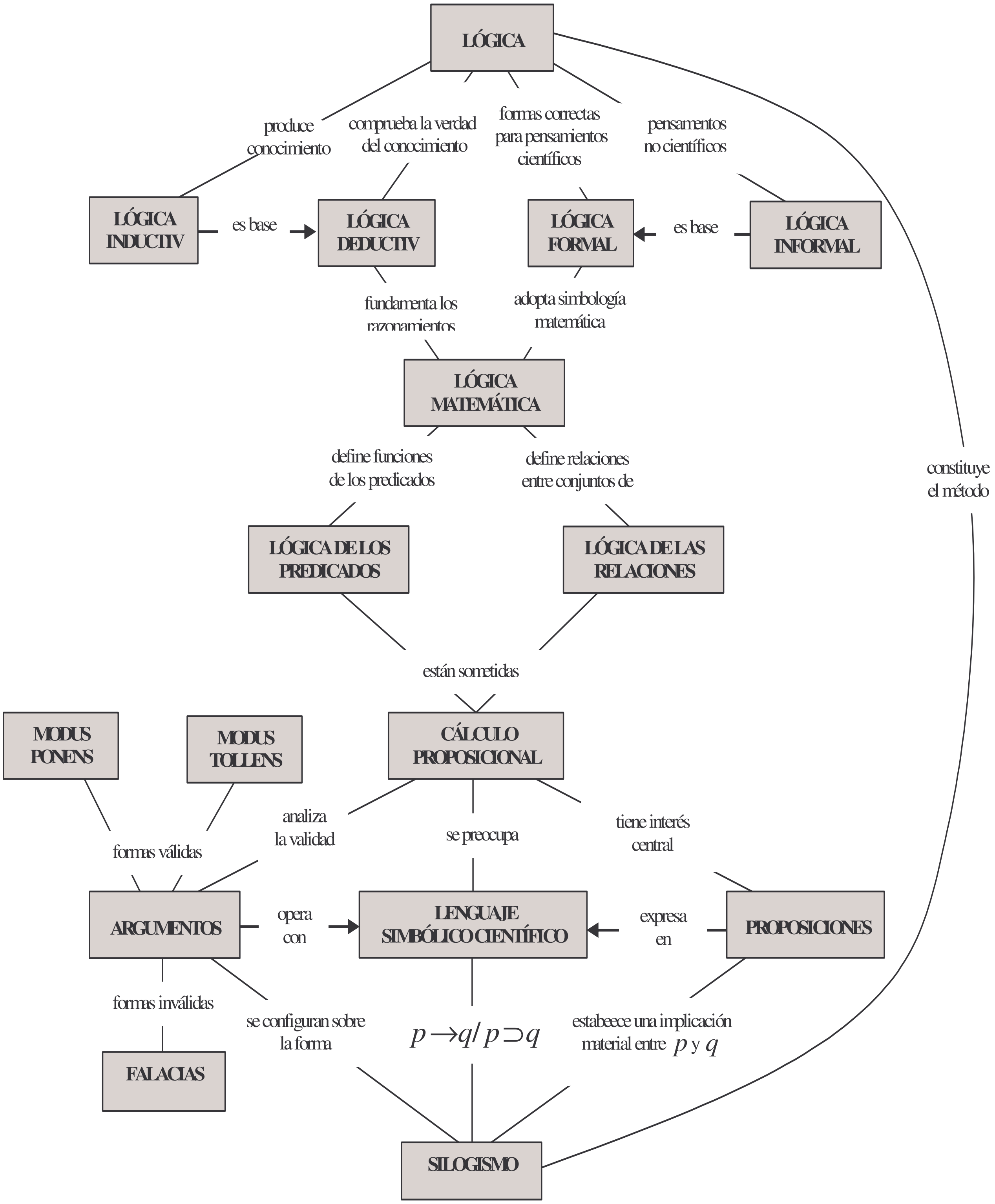


Figura 31: Mapa Conceptual de Lógica Matemática (Silva, Rufino y Lira, 2007)

3.4.2.3 Mapa Conceptual de Álgebra (Función Afín)

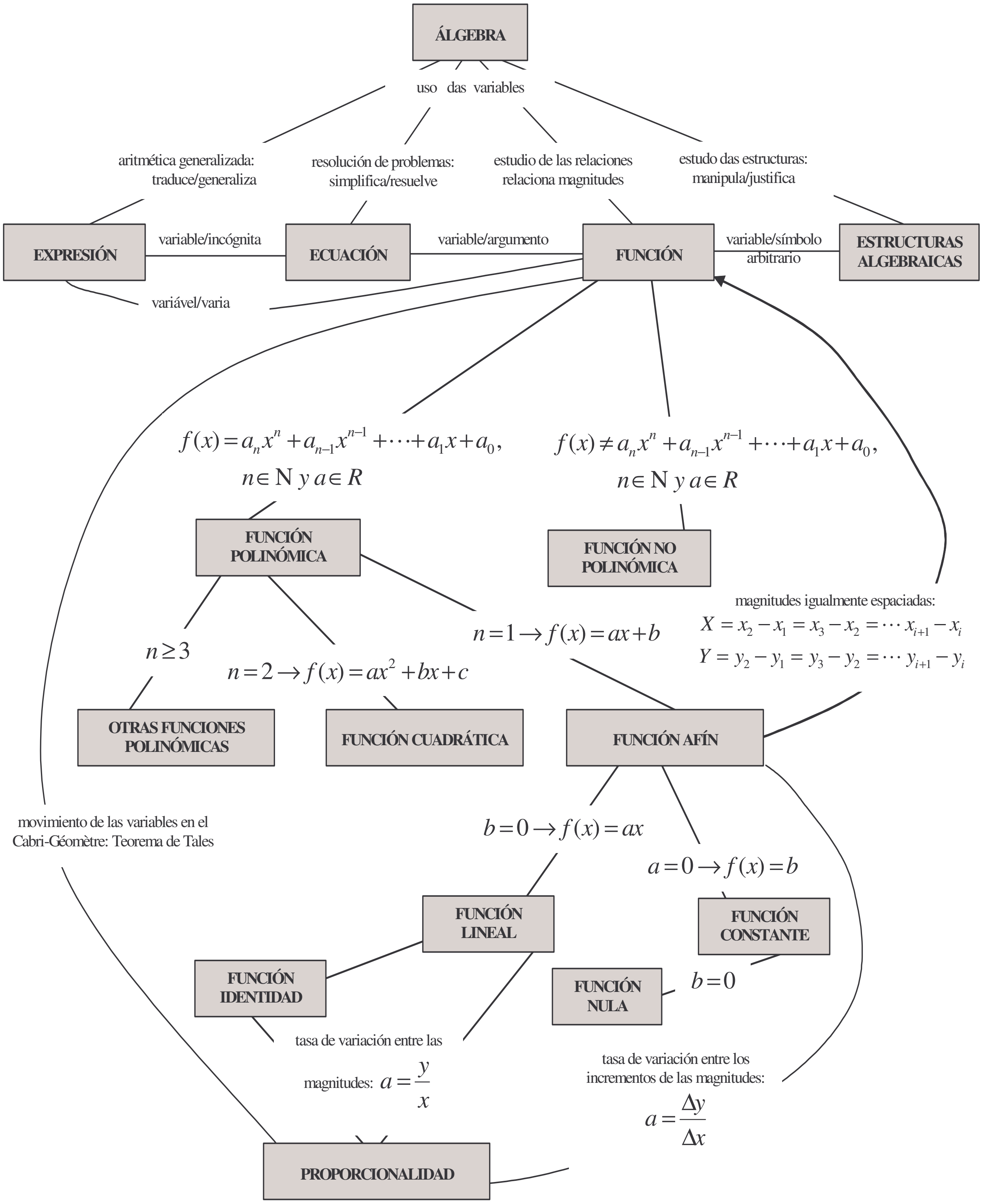
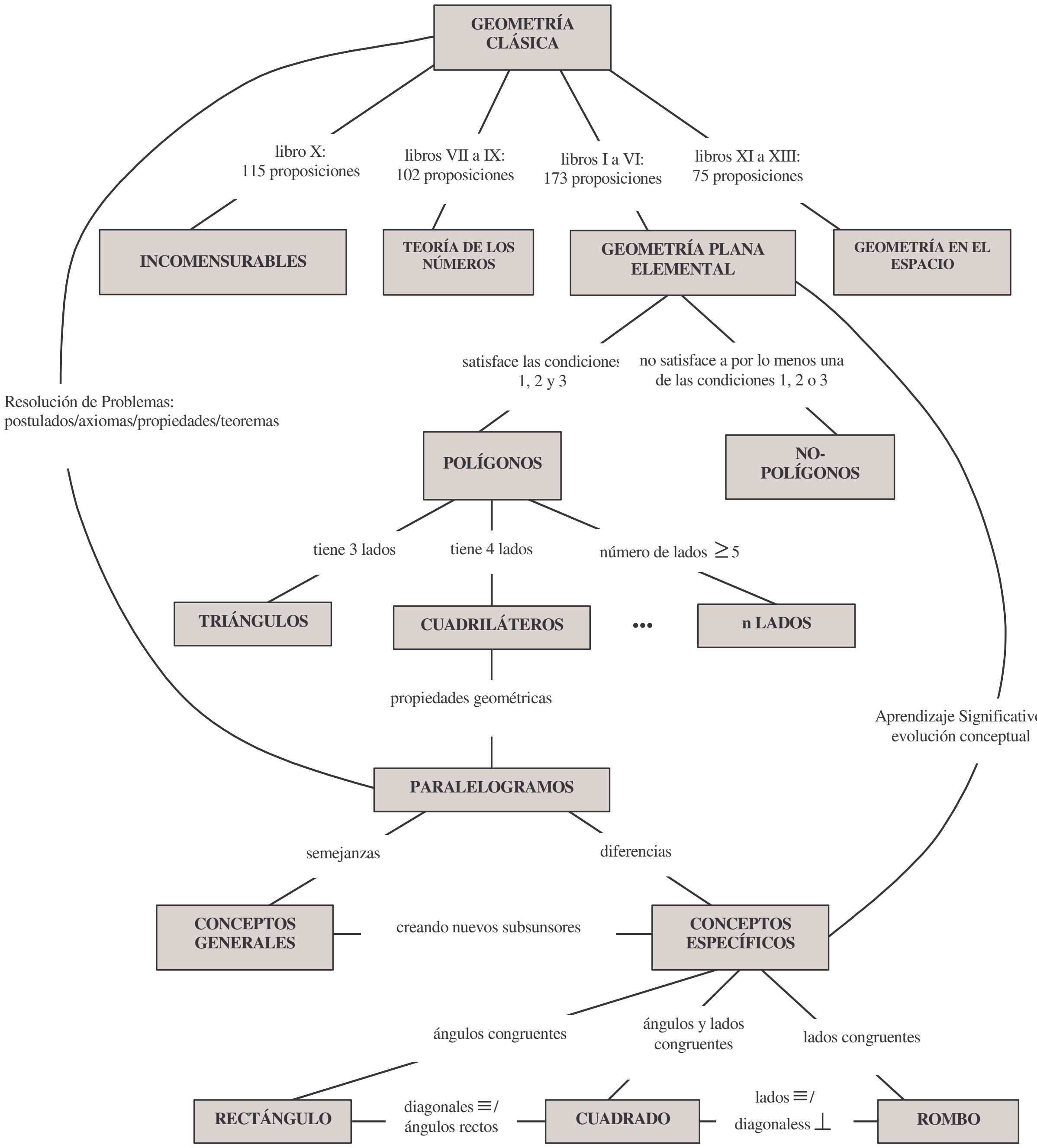


Figura 32: Mapa Conceptual de Álgebra: Función Afín (Silva, Falcão y Moreira, 2007)

3.4.2.4 Mapa Conceptual de Geometría (Paralelogramos)



1 − $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *son puntos (vértices), donde* $A_1 = A_n$;

2 − $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \cdots, \overline{A_{n-1}A_n}$ *son segmentos (lados), cuyas intersecciones se dan sólo en los extremos*;

3 − *Sea r una recta, si* $\overline{A_iA_{i+1}} \in r$, *entonces* $\overline{A_{i+1}A_{1+2}} \notin r$.

Figura 33: Mapa Conceptual de Geometría: Paralelogramos (Silva y Rodrigues, 2007)

CAPÍTULO 4

TEXTOS DE APOYO

4.1 Texto de Apoyo de Combinatoria

Introducción

La forma mecánica y limitada como aún se viene presentado el concepto de Combinatoria en algunos libros didácticos, así como en otros campos del conocimiento, ha despertado, en términos generales, el temor o el desagrado, en lugar de satisfacción e interés, en gran parte de los alumnos y profesores. Tales dificultades han dado lugar a discusiones que llegan a caracterizar nuevas maneras que posibiliten su uso para reformular la enseñanza de las Matemáticas como un todo, y más específicamente, la de la Combinatoria. Junto a ello, si, por un lado, en la *Enseñanza Fundamental*, además de no utilizarse adecuadamente el *Principio Aditivo o Regla de la Suma*[12] y el *Principio Multiplicativo o Regla del Producto*[13], se añade el hecho de que, por otro lado, en la *Enseñanza Media*, los "libros didácticos" y los profesores se han limitado a trabajar solamente las técnicas de *Variación*[14], *Permutación*[15] y *Combinación*[16], llega a dar la impresión de que el Análisis Combinatorio se limita a un juego de fórmulas complicadas, y no a desarrollar el razonamiento combinatorio implícito en esas fórmulas.

En lo referente a la enseñanza de la Combinatoria, es importante que deje de promover las dificultades que generalmente han aparecido en los contenidos de la *Enseñanza Media*, tanto para profesores cuanto para los alumnos. Especialmente en el caso de los alumnos, que la enseñanza pase a ser un requisito fundamental en la formación de ciudadanos conscientes. Esta intención que se presenta para los alumnos, en cierto modo, se buscará a partir de ejemplos concretos, con problemas que tengan significado para ellos, referente a situaciones desarrolladas en el aula como a aquellas aplicadas a sus prácticas en el día a día. La propuesta en cuestión está dirigida a profesores del *Enseñanza Fundamental* y *Media* y enfatiza la necesidad de elaboración, por parte de ellos, de textos de apoyo que posibiliten poner en claro el conocimiento de

[12] **Principio Aditivo** - *Suponga que A y B son dos conjuntos disjuntos; si el conjunto A puede realizarse de m maneras y el conjunto B de n maneras, entonces el conjunto A o el conjunto B podrá realizarse de m + n maneras distintas* (Merayo, 2001, p.230).

[13] **Principio Multiplicativo -** *Sea C un conjunto que puede descomponerse en dos etapas sucesivas A y B independientes entre sí; supongamos que la etapa A puede realizarse de m maneras, y que la etapa B puede realizarse de n maneras independientes del que sea el resultado obtenido en la etapa A. Entonces, el conjunto C podrá realizarse de m x n maneras distintas siguiendo todas las formas posibles de las dos etapas citada.* (*op. cit.*, p. 231).

[14] ***Variación ordinaria*** *de n elementos tomados p a p, donde $n \geq 1$ y p un número positivo tal que $1 \leq p \leq n$, son todos los grupos de p elementos distintos, que difieren entre sí por el orden y por la naturaleza de los p elementos que componen cada grupo (Santos, 1995, p. 42).*

[15] ***Permutación ordinaria*** *de n objetos distintos es cualquier agrupación ordenada de esos objetos (op. cit., p.32).*

[16] ***Combinación ordinaria*** *de n elementos tomados p a p, donde $n \geq 1$ y p un número natural tal que $1 \leq p \leq n$, son todas las selecciones no ordenadas de p desos n elementos (op. cit., p. 46).*

los propios profesores y, por consiguiente, el de sus alumnos. Tales textos deberán representar recursos didácticos con la calidad de un material que pueda ser calificado como potencialmente significativo. Las características que mostramos exigen un discurso que posibilite comprender la necesidad de edificación del conocimiento matemático, inicialmente para el propio individuo, y, a continuación, si fuera posible para las Matemáticas. Por eso, en este texto resolvimos exponer tales concepciones, partiendo de una breve contextualización histórica, relacionada con el estudio del recuento.

Fundamentación

La enseñanza de la Combinatoria, como otros campos del conocimiento matemático, puede ser inicialmente presentada en el marco de ciertos aspectos históricos que posibiliten una contextualización adecuada para la comprensión de esa área. En este sentido, por ejemplo, en el caso de la Combinatoria, se puede destacar que el hombre, a partir de la necesidad de contar, creó un sistema de numeración a fin de controlar la cantidad de objetos que poseía y/o producía. Usando piedritas, nudos en cuerdas y también referencias corporales fue posible llegar a los números naturales – hasta entonces la manera de contar lo que se tenía era una por una-. Los aspectos apuntados en este contexto pueden encontrarse en algunos autores que enfocan la historia de las Matemáticas como Georges Ifrah (1985), Joseph (1996), Gundlach (1992), entre otros.

La primera técnica Matemática aprendida por un niño, en el contexto escolar, sin ninguna duda es "contar", o sea, enumerar los elementos de un conjunto, para determinar cuántos son sus elementos (Morgado *et al*, 1991). Debemos añadir a eso, que hay una gran capacidad en el conocimiento de los niños incluso antes de ir a la escuela, pues muchos de ellos son capaces de identificar símbolos (reconocer) y, en un ámbito de mayor complejidad, saben que sólo tienen un padre, una madre, iniciándose así en la caracterización de la unicidad. El progreso, entretanto, ha exigido que la escuela proporcione al alumno, cada vez antes, habilidades para lidiar con el mundo. En el caso de la Combinatoria, el estudio de un tipo de recuento que necesita ser superado y la simple idea de enumeración de objetos para llegar al recuento de grupos de objetos, o sea, al recuento de los subconjuntos, en los cuales se obedece a una condición dada. Para alcanzar tal finalidad, podemos recurrir, también, a momentos históricos, justificando su aparición y desarrollo, respectivamente, cuando sea posible, con la finalidad de aguzar la curiosidad de los aprendices.

El crecimiento evolutivo en el ámbito de la Combinatoria, contextualizado en este estudio, nos invita a afirmar de forma amplia que el Análisis Combinatorio podría ser denominado como el "arte de contar". Este argumento encuentra respaldo en concepciones recientes como la presentada por Merayo (2001, p. 229):

"*El Análisis Combinatoria es la técnica de saber cuántos objetos hay en un conjunto sin realmente tener que contarlos, porque esa técnica no necesita listar o enumerar todos los elementos que forman el conjunto*".

El campo matemático de la Combinatoria que trata de problemas de recuento engloba una gran variedad de técnicas de resolución. Sin embargo, Morgado *et al*

(1991), Merayo (2001), Hazzan (1993) entre otros, no llegan a establecer una distinción entre el campo y las técnicas, o sea, entre la Combinatoria y el Análisis Combinatorio. Por su parte, Benítez & Brañas (2001, p. 125) contemplan tal aspecto al señalar para una posible evolución del campo de la Combinatoria, la ampliación de las técnicas básicas de recuento con el Análisis Combinatorio, refiriéndose a los estudios de las agrupaciones, permutaciones, combinaciones, particiones y distribuciones.

Morgado *et. al.* (*op. cit.*), además, apuntan que los primeros cursos de Análisis Combinatorio acaban privilegiando el estudio de las *combinaciones*, *variaciones* y *permutaciones*, lo que ciertamente conduce a la idea de que tal estudio en sí caracteriza el Análisis Combinatorio. Debido a esto, terminan eliminando otros abordajes, como por ejemplo las formas (técnicas) de recuento como: *el principio del palomar*, o *el binomio de Newton*, entre otras. En el ámbito de la Combinatoria, se da una gran variedad, en términos de cantidad de opciones, para resolver los problemas de recuento. Ahora bien, las diversas situaciones en sí, en lo referente a problemas distintos de Combinatoria, se encuentran subdivididas básicamente en dos tipos de problemas: los *problemas de recuento* y los *problemas de existencia*[17].

Ante la tentativa de reducción de la ya referida variedad de situaciones anteriores, resulta pertinente el siguiente argumento: ¿por qué limitarse al estudio de las variaciones, permutaciones y combinaciones? Este cuestionamiento se debe al hecho de lo que generalmente acostumbran a hacer los profesores, siguiendo las propuestas de buena parte de los libros de texto (didácticos).Además, cuando presentan los conceptos (agrupación, permutación y combinación) lo hacen de manera rigurosamente formal, muy semejante a los conceptos de variación, permutación y combinación que incluimos en nota a pie de página, en los primeros párrafos de este texto de apoyo de Combinatoria.

Porque creemos que una buena comprensión de los conceptos es algo decisivo para el desarrollo de las habilidades Matemáticas (técnicas) presentaremos los conceptos de agrupación, permutación y combinación según Merayo (2001,):

"*Sea un conjunto de m elementos distintos. Recibe el nombre de Variación de orden n de esos m elementos, todo grupo ordenado, formado por n elementos tomados m, de tal manera que dos grupos que son considerados distintos difieren en alguno de sus elementos o bien, teniendo los mismos elementos, difieren por el orden en que están colocados*" (p. 236).

"*Permutación de m objetos distintos, cualquier agrupación de esos objetos que difiere uno del otro únicamente por el orden de colocación de sus objetos*" (p. 241).

"*Sea un conjunto formado por m elementos distintos. Recibe el nombre de Combinación de orden n de esos m elementos, cada grupo formado por n elementos tomados de los m, tal que dos combinaciones se consideran distintas si difieren en alguno de sus elementos. En esta ordenación no influye el orden de colocación, lo que*

---

17 Demuestra la existencia de subconjuntos de elementos de un conjunto finito y que satisfacen una condición determinada. El Principio del Palomar (PP) también conocido como el Principio de los Cajones de Dirichlet, por ejemplo, aun con un enunciado muy simple, resulta de fundamental importancia para la resolución de varios problemas de existencia. En su forma más simple puede ser enunciado así: *Si n + 1 palomas, se colocan en n jaulas, entonces, por lo menos una jaula deberá contener 2 o más palomas* (Santos, 1995, p. 211).

quiere decir que dos agrupaciones son iguales si contienen los mismos elementos, aunque colocados en distinto orden" (p. 269).

Dentro de las especificidades sobre los conceptos de variación, permutación y combinación tratadas anteriormente, aquellas se refieren al recuento de las agrupaciones simples, o sea, al recuento de los grupos en los que no hay repetición de ningún elemento. Cabe destacar que al admitirse las repeticiones de los elementos en la composición de las agrupaciones, esas formas de recuento pasan a ser denominadas como variación con repetición[18], permutación con repetición[19] y combinación con repetición[20]. Este aspecto, por lo tanto, no determina que se esté tratando de nuevas propiedades conceptuales, sino de nuevos procedimientos en la forma de contar.

Las propiedades conceptuales de las variaciones, permutaciones y combinaciones, sin embargo, se mantienen tanto si las agrupaciones admiten repetición de elementos como si no. A veces, lo que ocurre en algunas de esas técnicas es un aumento en el número de las agrupaciones ordinarias correspondiente al recuento de las agrupaciones con repetición. Por ejemplo, en las variaciones y en las combinaciones con repetición, cuando el número de elementos del conjunto generador "m" es mayor que el número de tomas "n" de esos m elementos en los grupos generados, es decir, cuando $m > n$, e incluso se permite tomar, entre otras posibilidades, el mismo elemento más de una vez en la composición de los subconjuntos. De esa forma, aunque la denominación de la técnica vaya acompañada por el término "con repetición" no evidencia el recuento exclusivo de las agrupaciones con repetición, sino también la cuantificación de las agrupaciones ordinarias.

Otra posible demarcación de las agrupaciones con repetición en ese tipo de recuentos (en las variaciones y en las combinaciones) se produce cuando $m < n$ (el número de elementos del conjunto generador "m" es menor que el número de tomas "n" de esos m elementos), pero, en tal condición, todos los subconjuntos generados estarán compuestos con repetición de por lo menos uno de sus elementos, sin que haya ninguna posibilidad de obtenerse agrupaciones distintas. En ese caso, los términos variación con repetición y combinación con repetición contemplan, exclusivamente, el recuento de las agrupaciones con repetición.

Para la obtención de las permutaciones con repetición es suficiente que, en el propio conjunto generador (m), ya se produzca la repetición de por lo menos uno de sus elementos, lo que garantizará que todas las permutaciones generadas lo sean con repetición. Tal estructura no contempla las permutaciones simples pues, en ellas, el conjunto generador debe estar siempre compuesto por elementos distintos para que las permutaciones generadas sean todas del tipo ordinario.

---

[18] *Sea un conjunto formado por m elementos distintos. Recibe el nombre de* ***variación con repetición*** *de orden n o n-aria, cualquier grupo formado por n elementos, no necesariamente distintos, tomados entre los m del conjunto original. Al poder repetir elementos, puede ocurrir que m<n (Merayo, 2001, p.239).*

[19] *Sea un conjunto de m elementos, entre los cuales existe α objetos iguales y de un mismo tipo, β iguales, pero de otro tipo, y así sucesivamente hasta un grupo de λ objetos también idénticos entre sí. Las permutaciones distintas que pueden formarse en esas condiciones reciben el nombre de* ***permutaciones con repetición*** *de* ***m*** *elementos entre los cuales* ***α*** *son* ***iguales***, ***β*** *son también* ***iguales,*** *y así sucesivamente, hasta λ iguales (op. cit., p.239).*

[20] *Sea un conjunto formado por m elementos todos ellos distintos entre sí. Recibe el nombre de* ***combinación de orden n o n-aria con repetición*** *de los m elementos, cada grupo formado por n elementos, distintos o repetidos, tomados de los m dados, considerando como grupos iguales los formados por los mismos objetos repetidos igual número de veces (op. cit., p.277).*

En síntesis, las repeticiones en esas técnicas de recuento (variación, permutación y combinación) significan que se puede tomar el mismo elemento más de una vez en la formación de sus subconjuntos, formando de este modo una parte de la Combinatoria que muy bien puede denominarse como Combinatoria con repetición.

Por otro lado, es necesario hacer una distinción entre los términos *agrupaciones con repetición*, tratados anteriormente, y *agrupaciones repetidas*. Estas últimas son agrupaciones iguales. Por ejemplo, en las combinaciones, pues todas las posibles ordenaciones de los elementos en los grupos forman agrupaciones iguales entre sí, o sea, agrupaciones repetidas porque corresponden a una única agrupación. Computarlos como distintos, por lo tanto, acarrearía un grave error de recuento.

Como propuesta didáctica, en el ámbito de la Combinatoria, creemos que resulta más relevante explotar los aspectos que caracterizan los dos tipos de problemas, esto es, los problemas de existencia y los problemas de recuento, y, a partir de ejemplos específicos, tratar de las variaciones, las permutaciones y las combinaciones ordinarias o con repetición. Queremos resaltar que, con este argumento, no tenemos intención de establecer una crítica en la forma de abordaje de los referidos autores, sino que tratamos de presentar las informaciones con la mayor claridad posible.

Este texto se propone abordar la Combinatoria buscando tratarla tanto como campo de estudio de las Matemáticas, cuanto en sus especificidades. Como campo de estudio, se busca, de forma general, dejar claro cuáles serán sus propósitos, y, en cuanto a sus características específicas, se profundizará en los problemas de recuento, toda vez que los problemas de existencia se sirven de otras herramientas que no constituyen objetos de interés de este estudio.

Esperamos, de esta forma, conseguir despertar el interés del alumno sobre la importancia del llamado razonamiento matemático, ayudándole a comprender y a interpretar las situaciones, que versan, de modo especial, sobre las posibilidades para vislumbrar el razonamiento combinatorio. Este razonamiento está fundamentado en la idea de que aquello que ha de ser contado, ciertamente, influye en la forma de contar. Por lo tanto, es preciso esforzarse en que el alumno pueda identificar lo que va a ser objeto de recuento, obteniendo así, con mayor claridad, los resultados posibles. Para atender todos los aspectos mencionados anteriormente, esta propuesta metodológica persigue una mejora en la calidad de la enseñanza, tanto para aquellos que simpatizan con las Matemáticas como para los que no.

En toda la propuesta, se intenta conseguir un mayor acercamiento al conocimiento combinatorio, a partir de características que, por estar presentes en la cotidianeidad de ambos, profesor y alumno, presenten un grado de comprensión mayor. El objetivo matemático específico de este trabajo es aclarar los aspectos fundamentales sobre los principios aditivo y multiplicativo, en lo que hace referencia al campo de la Combinatoria, intentando que este material, recursivamente, pueda ser considerado como *potencialmente significativo*. El propósito que se tiene a lo largo de la totalidad del acto educativo es que el alumno obtenga la nueva información de manera satisfactoria, estableciendo relaciones entre los contenidos de Combinatoria aprendidos entre sí, y que esas relaciones puedan ser extendidas a otras áreas de las Matemáticas, junto a otras actividades de su propia vida.

Metodología

La estructuración adoptada para tratar la Combinatoria se ha desarrollado en el presente estudio procurando situar adecuadamente a profesores y alumnos, respectivamente, dentro del ámbito didáctico y en términos de aprendizaje. Para ello, se establecieron tres momentos pedagógicos: inicialmente, se profundiza sobre la noción de recuento (simple y combinatorio), enfocando los dos tipos de problemas existentes en esta parte de las Matemáticas: los Problemas de Existencia y los Problemas de recuento; a continuación, se presentan los dos principios básicos de recuento (aditivo y multiplicativo); y, por último, se hace hincapié en una sofistificación de las técnicas de recuento, considerando el Análisis Combinatorio como una evolución de ese campo.

Cabe destacar que el objeto de interés de este estudio, está centrado, por tanto, en el segundo tipo de problema anterior e intenta presentar con claridad, a partir de los principios básicos de recuento, las técnicas ordinarias y con repetición de Permutación, Variación y Combinación.

El desarrollo metodológico didáctico se ha estructurado a partir de tres Situaciones Didácticas que, ante las actividades propuestas que las constituyen, se registraron y sistematizaron en forma de cuadros y se usaron para analizar las respuestas. Por consiguiente, las respuestas presentadas en las actividades, los mapas y los cuestionarios constituyeron los instrumentos de registro y, mediante ellos, se llevó a cabo la evaluación/análisis, posibilitando la obtención de resultados/conclusiones.

Síntesis de las Intenciones didácticas de los procedimientos adoptados en el texto de Apoyo

De una forma amplia, podemos considerar que el estudio consta de dos momentos. El primer momento está más centrado en el establecimiento de las concepciones de los alumnos antes y después del proceso de enseñanza. Por lo tanto, inicialmente se pidió a los alumnos que respondiesen individualmente a un cuestionario diagnóstico y elaborase un mapa conceptual sobre su comprensión acerca de la Combinatoria. Y, después del proceso de enseñanza, se pidió que cada uno de ellos respondiese a un cuestionario de evaluación del aprendizaje y elaborase un nuevo mapa conceptual, incorporando las informaciones adquiridas en el proceso educativo.

El segundo momento corresponde al acto de enseñanza en sí y, metodológicamente, está compuesto por tres etapas que fueron elaboradas en forma de situaciones didácticas. Las situaciones se organizaron a partir de sus propósitos educativos matemáticos, que pueden percibirse a través de la diferencia entre ellas, en función de sus intenciones didácticas, en cuanto objetivos.

Las ya mencionadas situaciones didácticas, en cuanto propuestas, están constituidas por una o más actividades didácticas y, éstas, a su vez, se componen de una o más acciones pedagógicas que persiguen organizar las ideas de los alumnos en términos del hacer matemático en el campo de la Combinatoria. Y, ante las metas de las tres etapas que desarrollamos unas líneas más abajo, podemos percibir mejor los propósitos educativos del presente trabajo.

Visión Panorámica de las Tareas que constituyen este Texto de Apoyo

La estructuración de la construcción del conocimiento matemático en este trabajo persigue enfocar los conceptos/objetos matemáticos en el ámbito de la Combinatoria partiendo de la idea de recuento, según sus principios fundamentales. Las tareas se organizaron en tres etapas, cada una de las cuales presenta una situación compuesta por tres actividades.

1ª Etapa: En las tres actividades de esta etapa, los alumnos trabajaron en grupo, utilizando el tangram como recurso didáctico. La primera actividad pretende dar cuenta de las ideas de recuento simple, a través de la identificación de las formas geométricas que componen el tangram, previa solicitud para la realización de la actividad. La segunda actividad caracteriza los recuentos de tipo combinatorio, con la introducción alusiva al principio aditivo. Y la tercera actividad caracteriza también los recuentos de tipo combinatorio, si bien aludiendo al principio multiplicativo. Además de la idea de recuento combinatorio, empleando los dos principios aludidos, se intenta introducir la idea de existencia, también presente en el texto de apoyo.

2ª Etapa: Las dos primeras actividades de esta etapa tratan, respectivamente, de formalizar el principio aditivo y el principio multiplicativo. Y, en la tercera actividad, inicialmente se establece la presentación formal del principio de inclusión-exclusión, que no es sino una generalización del principio aditivo y, a continuación, se presenta un principio básico de distribución (Principio de Dirichlet), utilizado para delimitar algunos problemas de existencia.

3ª Etapa: El foco de esta etapa son las técnicas de recuento (variación, permutación y combinación) conocidas inicialmente como Análisis Combinatorio. La primera actividad se centra en la obtención de la resolución de problemas, utilizando el principio multiplicativo; la segunda, en la identificación de la técnica de análisis combinatorio que se empleó; y la tercera, tras la identificación anterior, en resolver la cuestión empleando la fórmula resolutiva apropiada. Cabe señalar que cada una de las tres actividades, se compone de dos cuestiones, lo que genera un total de seis. Y que tres de ellas se refieren a agrupaciones ordinarias (Variación, Permutación y Combinación), mientras que las tres restantes tratan sobre agrupaciones con repetición (Variación, Permutación y Combinación).

Propuesta Didáctica

Las dificultades enfrentadas por profesores y alumnos para lidiar con el conocimiento matemático son diversas, si bien aquí no pretendemos presentar una lista completa de ellas. Lo que sí pretendemos con esta propuesta sobre Combinatoria es proponer una sistematización conceptual básica que posibilite al profesor una buena tarea didáctica, para que, como resultado de ello, sus alumnos adquieran una comprensión adecuada en términos conceptuales, tanto sobre la estructuración del campo, como sobre la identificación y utilización de las técnicas presentadas.

La propuesta, intencionalmente, pretende posibilitar la construcción de una visión panorámica del campo de la Combinatoria a partir de las ideas de recuento simple, recuento de tipo combinatorio y principios fundamentales de recuento. La base para esta estructuración se llevó a cabo utilizando el tangram como recurso didáctico para auxiliar la distinción entre recuento simple y combinatorio. A continuación, movido por la "necesidad" de formalización, abstracción y rigor, que entre otras son inherentes al conocimiento matemático, se busca profundizar de modo sistemático, en los principios aditivos, multiplicativos, de inclusión-exclusión y de Dirichlet. Por último, se intenta caracterizar la evolución estructural del campo de la Combinatoria, estudiando el Análisis Combinatorio, o sea, las técnicas de Variación, Permutación y Recuento tanto en forma de agrupaciones simples como con repetición.

El propósito que se pretende obtener de forma conjunta por medio de estas situaciones es construir colectivamente en el acto educativo, que comprenda por igual a profesores y alumnos, un aprendizaje significativo en lo que concierne a los conceptos de la *diferenciación progresiva* y de la *reconciliación integradora* establecidos por Ausubel (*apud* Moreira, 2006). Y, junto con ello, enfocar que tal aprendizaje posibilita una evolución de las aptitudes Matemáticas en lo referente a situar el campo de la Combinatoria, identificar y utilizar los principios aditivos, multiplicativos, así como análogamente trabajar con las técnicas de Variación, Permutación y Combinación concebidas tanto en sus agrupaciones simples como con repeticiones.

Secuencia Didáctica

Situación 1: Recuento Simple, Recuento de tipo Combinatorio, Principios básicos de Recuento y Problema de Existencia.

Descripción de la Situación

La situación en sí consta de tres actividades. En tales actividades, se alude, respectivamente, al recuento simple, a los principios aditivo y multiplicativo, y a los problemas de existencia. En estas actividades, se hace hincapié en un discurso que procura, de algún modo, apuntar que el conocimiento matemático puede ser útil para ayudar a las personas a tomar decisiones en su vida diaria, tanto en el ámbito puramente escolar, como fuera de él.

Actividad 1: Aludiendo al Recuento Simple.

¿Cuántas piezas del tangram son triángulos?

Acción 1: Identificación de las formas geométricas planas tipo triángulo.

Acción 2: Contar cuántos fueron los triángulos identificados.

Actividad 2: Aludiendo al Principio Aditivo en cuanto Combinatoria.

¿Cuántos cuadrados pueden formarse por lo menos por dos piezas del Tangram?

Acción 1: Obtener todas las formas posibles de cuadrados conforme a la pregunta anterior.

Acción 2: Contar las posibles formas anteriores obtenidas.

Actividad 3: Aludiendo al Principio Multiplicativo en cuanto Combinatoria.

Actividad 3_1: Caracterizar la Existencia de la Condición de Recuento.

¿Es posible pintar el área del cuadrado constituido por todas las piezas tangram, con dos colores si consideramos que figuras de la misma área no pueden recibir el mismo color?

Acción 1: Identificar cuántas piezas del tangram poseen la misma área.

Acción 2: Constatar que, con dos colores, no es posible ejecutar la acción (pintar el área tangram) sin que se infrinja la condición de existencia.

Actividad 3_2: Uso Intuitivo del Principio Multiplicativo.

¿De cuántas maneras puede colorearse el área de todo el tangram si dos figuras de la misma área no pueden recibir el mismo color?

Acción 1: Establecer el número de posibilidades individuales de pintar cada pieza del tangram, considerando la condición de recuento;

Acción 2: Relacionar todas esas posibilidades individuales y sucesivas a partir de una expresión generalizadora intuyendo el principio multiplicativo.

Actividad 3_3: Alusión a Problemas de Existencia.

¿Cuál es el número menor de colores que permite colorear el área del tangram, si dos figuras de la misma área no pueden recibir el mismo color?

Acción 1: Determinar una menor cantidad de colores que garantice la ejecución de la tarea (pintar el área tangram) obedeciendo la condición de recuento.

Situación 2: Presentación de los Principios Aditivo, Multiplicativo, de Inclusión-Exclusión y de Dirichlet.

Descripción de la Situación

La situación en sí consta de tres actividades. En las dos primeras, se intenta sistematizar, por este orden, los Principios Aditivo y Multiplicativo significativamente. Y en la tercera, se optó por caracterizar otros principios de ese campo de conocimiento, el Principio de Inclusión-Exclusión y el Principio de Dirichlet. Con ello, se pretende resaltar que tales principios son de una gran importancia para ayudar a las personas a tomar decisiones, tanto en el ámbito escolar cotidiano, como fuera de él.

Actividad 1: Principio Aditivo.

Suponga que han aparecido en cartelera 3 películas y 2 obras de teatro, y que Carlos tiene dinero para asistir sólo a una de ellas. ¿Cuántos son los probables programas que Carlos puede hacer para el sábado?

Acción 1: Identificar cuáles son los posibles programas que Carlos puede hacer para el sábado.

Acción 2: Contar todos los posibles programas, operando con el principio aditivo.

Actividad 2: Principio Multiplicativo.

Si en la Actividad 1, Carlos hubiera tenido dinero para asistir a una película y a una obra de teatro, ¿cuántos son los programas que podrá hacer para el sábado, si los programas nunca son simultáneos?

Acción 1: Identificar cuáles son los posibles programas que Carlos puede hacer para el sábado.

Acción 2: Contar todos los posibles programas, operando con el principio multiplicativo.

Actividad 3_1: Principio de Inclusión-Exclusión.

Considere una baraja con 52 cartas distribuidas en 4 palos, tal que cada palo se compone de 13 cartas, que varían de as a rey. ¿Cuántas formas posibles existen de sacar…

a) (Rescatar el Principio Aditivo)
…un as o un rey?

b) (Rescatar el Principio Multiplicativo)
…un as y un rey?

c) (Generalización del Principio Aditivo con la anunciación del Principio de Inclusión-Exclusión)
…un as o una carta de espadas?

Actividad 3_2: Principio de Dirichlet.

En un cajón hay 8 calcetines negros y 6 calcetines blancos. ¿Cuál es el número mínimo de calcetines que deben sacarse del cajón (en la oscuridad) para garantizar que…

Acción 1: (Presentación del Principio de Dirichlet).
…los calcetines sacados del cajón contengan un par del mismo color?

Acción 2: (Generalización del Principio de Dirichlet).
…los calcetines sacados del cajón contengan dos pares del mismo color?

Acción 3: (Especificidad del Principio de Dirichlet).
…los calcetines sacados del cajón contengan un par de cada color?

Situación 3: caracterización estructural de las agrupaciones ordinarias y con repetición.

Descripción de la Situación

La situación 3 consta de tres actividades, cada una de las cuales está compuesta por dos cuestiones en las que se buscará tratar, en términos de técnicas diferentes de recuento, de la composición y cuantificación de las agrupaciones de tipo ordinario (formadas con elementos distintos) y de las agrupaciones con repetición (formadas con la repetición de por lo menos uno de sus elementos). Con esta intención, la primera actividad abordará, en la primera cuestión, la técnica denominada de variación ordinaria y, en la segunda, se abordarán las dos formas posibles para la obtención de las variaciones con repetición, esto es, cuando $m > n$, si bien, admitiéndose la repetición de los elementos y, cuando $m < n$ posibilitándose exclusivamente la formación de las agrupaciones con repetición.

En la actividad 2, las dos cuestiones se refieren a las permutaciones ordinarias y a las permutaciones con repetición abordadas en ese mismo orden, de tal forma que aún en el caso de la primera se pretende realizar un rescate del Principio de Inclusión-Exclusión, tratado anteriormente en la Actividad 3_1 de la 2ª situación de la presente secuencia didáctica.

La tercera actividad pretende dar cuenta de las combinaciones tratadas en el ámbito del recuento de las agrupaciones ordinarias y de las agrupaciones con repetición, procurando contemplar, en este último caso, las dos formas posibles para la obtención de las repeticiones de elementos en las agrupaciones (cuando $m > n$, admitiéndose la repetición de por lo menos uno de los elementos, y cuando $m < n$, posibilitando exclusivamente la formación de las agrupaciones con repetición).

Actividad 1: Variaciones Ordinarias y con Repetición.

Actividad 1_1: Variaciones Ordinarias.

Cinco atletas participaron en una carrera. ¿Cuántos resultados existen para el 1º, 2º y 3er. lugar, si dos o más atletas no pueden llegar simultáneamente?

Acción 1: Presentación de las Variaciones Ordinarias.

Acción 2: Formatación del P.M. para determinar el total de Variaciones Ordinarias.

Actividad 1_2: Variaciones con Repetición.

i) Con $m > n$: Empleando los guarismos 1, 3, 5, 7 y 9, existen x números de 4 guarismos. Si tomamos en cuenta aquellos en que por lo menos 2 guarismos son iguales, ¿cuál es el valor de x?

ii) Con $m < n$: El profesor de dibujo ha pedido a sus alumnos que pinten el cuadro representado más abajo, compuesto por cuatro cuadraditos. Si en cada uno de los cuadraditos pueden utilizarse los colores rosa o verde, ¿cuántas son las posibilidades diferentes de pintarlo?

1º	**2º**
3º	**4º**

Figura 34: Cuadrado compuesto por cuatro cuadritos.

Acción 1: Presentación de Variaciones con Repetición.

Acción 2: Formatación del P.M. para determinar el total de Variaciones con Repetición.

Actividad 2: Permutación Ordinaria y con Repetición.

Actividad 2_1: Permutación Ordinaria.

I- Con relación a la palabra BRASIL, ¿cuántos anagramas existen?

Acción 1: Presentación de las Permutaciones Ordinarias;

Acción 2: Formatación del P.M. para determinar el total de Permutaciones Ordinarias.

Actividad 2_2: Otras aplicaciones relacionadas con las permutaciones ordinarias.

a) ¿Cuántos anagramas tienen las letras B, R, A, juntas en ese orden?
b) ¿Cuántos anagramas tienen las letras B, R, A, juntas en cualquier orden?

Acción 1: Formatação del P.M. para determinar el total de Permutaciones Ordinarias.

Actividad 2_3: Rescate del Principio de Inclusión-Exclusión a partir de la idea de permutación.

¿Cuántos anagramas tienen la letra B en 1er. lugar o la letra R en 2º lugar o la letra A en 3er. lugar?

Acción 1: Aplicación del Principio de Inclusión-Exclusión a partir de la idea de permutación.

Actividad 2_3: Permutaciones con Repetición.

El siguiente diagrama ilustra el Mapa de una Ciudad en la que hay 5 Avenidas en dirección Norte-Sur y 4 Avenidas en dirección Este-Oeste (Figura 35). Las avenidas adyacentes son paralelas y equidistantes. ¿De cuántas formas puede una persona ir desde el punto A y dirigirse hasta el punto B, utilizando el camino más corto posible?

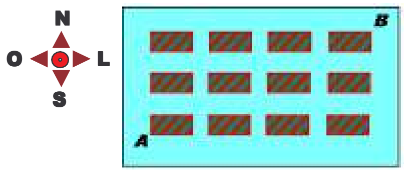


Figura 35

Acción 1: Presentación de las Permutaciones con Repetición.

Acción 2: Formatación del P.M. para determinar el total de Permutaciones con repetición.

Actividad 3: Presentación de las Combinaciones Ordinarias y con Repetición.

Actividad 3_1: Presentación de la Combinación Ordinaria.

Si hay 5 puntos sobre una recta r y 10 puntos sobre una recta s, paralela a r, calcule:

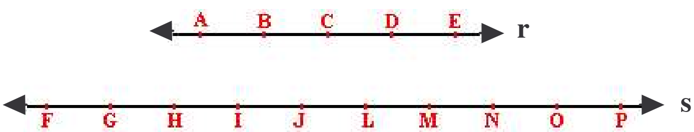


Figura 36: 5 puntos sobre una recta r y 10 puntos sobre una recta s.

a) ¿Cuántos triángulos con vértices en 3 de esos 15 puntos existen?
b) ¿Cuántos cuadriláteros con vértices en 4 de esos 15 puntos existen?

Acción 1: Presentación de las Combinaciones Ordinarias.

Acción 2: Formatación del P.M. para determinar el total de Combinaciones Ordinarias.

Actividad 3_2: Combinación con Repetición.

En un parque de atracciones donde sólo se ofrecen plazas para 4 tipos de juegos, ¿de cuántas maneras una persona podrá comprar…

i) Con $m > n$: …3 de esos billetes?

ii) Con $m < n$: …8 de esos billetes?

Acción 1: Presentación de las Combinaciones con Repetición.

Acción 2: Estrategia para el recuento de las Combinaciones con Repetición.

4.2 Texto de Apoyo de Lógica

Introducción

Desde mucho antes de la era cristiana, el hombre se ha preocupado de sus propios problemas y de los del universo. La Historia ha mostrado, a través de sus registros, esa preocupación y puede tomarse como buen ejemplo de ello el pueblo griego, en el que se observa como una de las marcas más características de su espíritu la intensa curiosidad intelectual en la búsqueda de respuestas a preguntas del tipo: ¿Qué es el hombre? ¿Qué es la verdad? ¿Qué es el amor? ¿Qué es la cantidad? ¿Qué es la cualidad? ¿Qué es el valor? ¿Qué es la moral? ¿Qué es la libertad? Tales cuestionamientos permitieron que dicha cultura desarrollara su forma de pensar y de actuar, en especial, en aquello que concierne a su cultura, a la Filosofía.

Hasta aproximadamente la mitad del siglo VII a.C. los griegos se limitaban a explicar el universo y la naturaleza recurriendo a la *Mitología*[21], pero a partir de finales del siglo VII y comienzos del siglo VI antes de Cristo, en las colonias griegas de Asia Menor se inicia, con la Escuela de Mileto, el pensamiento verdaderamente filosófico de los griegos. Y, entre los principales pensadores, Tales de Mileto es reconocido como el primero de ellos.

En su nacimiento, la filosofía es una suerte de *Cosmología*[22] de contenido conciso, que trata de ofrecer una explicación racional sobre el origen del mundo y sobre las causas de las transformaciones y repeticiones de las cosas. Por lo que se refiere a la creación de la palabra *filosofía*, se le atribuye al filósofo griego Pitágoras de Samos, que vivió en el siglo V a.C. Ahora bien, ¿Qué significa esta palabra? ¿Qué son los filósofos?

La palabra *filosofía* está compuesta por dos palabras griegas *philo* y s*ophia. Philo* deriva de *philia*, que significa "amistad", "amor fraterno", "respeto entre los iguales". *Sophia* quiere decir "sabiduría", y de ella se deriva, a su vez, la voz *sophos*, "sabio". El significado de la palabra *filosofía*, por tanto, es "amistad con la sabiduría",

---

21 Mitología: s.f. explicación e interpretación de los mitos de una nación o de un pueblo || Historia fabulosa de los dioses, semidioses y héroes de la Antigüedad || Ciencia de los mitos; conjunto de fábulas.

22 Cosmología: palabra griega compuesta por otras dos: *cosmos,* que significa mundo ordenado y organizado, y *logia* que proviene, a su vez, de la palabra *logos*, que significa pensamiento racional, discurso racional, conocimiento.

"amor y respeto por el saber". Según esto, la Filosofía es la Ciencia de los principios y las causas, que trata de la fundamentación teórica y crítica de los saberes (conocimiento) y de las técnicas (praxis) y se ocupa de las condiciones y los principios del conocimiento considerados a través de la razón y de la verdad. Debemos resaltar que ésta es tan sólo una de las múltiples definiciones que se han dado sobre Filosofía. Debemos concluir, por lo tanto, que Filósofo es todo aquel que ama la sabiduría, es decir, que desea saber o poseer el conocimiento.

La filosofía griega está dividida en cuatro períodos, en los cuales se produjeron cambios enriquecedores en los contenidos: **Período Presocrático o *cosmológico*[23]**, que va del final del siglo VII hasta finales del siglo V a.C.; **Período Socrático o *antropológico*[24]**, comprendido entre finales del siglo V y todo el siglo IV a.C.; ***Período Sistemático*[25],** del final del siglo IV a.C. al final del siglo III a.C.; y, por último, el ***Período Helenístico*[26] o grecorromano**, que comprende el final del siglo III a.C. y alcanza hasta el siglo VI d.C. Estos cuatro períodos, según Bicudo y Garnica (2001), conforman, dentro de la Historia de la Filosofía, el período denominado Filosofía Antigua (del siglo VI a.C. al siglo VI d.C.).

En el período Socrático, apogeo de la filosofía griega, Platón desarrolló la Dialéctica. Se trata de un diálogo o plática en el cual los interlocutores presentan opiniones opuestas acerca de algún tema, y deben argumentar de tal forma que, partiendo de tales opiniones contrarias y contrapuestas, se llegue a una idea común para todos los participantes en el diálogo. La dialéctica se define como el arte de razonar de forma metódica, mediante el argumento sagaz y sutil. Aristóteles sigue un camino diferente al escogido por Platón, al considerar que la dialéctica no es un procedimiento seguro para el pensamiento y el lenguaje de la filosofía y de la ciencia, toda vez que, como punto de partida, se fundamenta en las simples opiniones contrarias de los participantes en el debate. Además, la elección de una opinión en detrimento de la otra no garantiza llegar efectivamente a la esencia de la cosa investigada. La dialéctica, según Aristóteles, es adecuada para aquellos asuntos que sólo precisan de la persuasión, pero no lo es para la filosofía o para la ciencia, porque, en ellas, lo que interesa es la demostración o prueba de una verdad. Aristóteles creó la *Lógica*, sustituyendo, así, la dialéctica por un conjunto de procedimientos de demostración y prueba, que él denominaba *analítica*, si bien la palabra *lógica*, sólo comenzó a emplearse algunos siglos después.

Aristóteles no consideraba la Lógica como una ciencia, sino como un instrumento para ser aplicado a las Ciencias. Esto resulta especialmente evidente cuando consideramos el nombre que adjudicó al conjunto de sus obras que trataban sobre la Lógica (*Órganon*). Esta palabra significaba en griego "instrumento", que estudia los

---

[23] Período Cosmológico: en este período la Filosofía se ocupaba fundamentalmente del origen del mundo y las causas que provocaban las transformaciones en la naturaleza.

[24] Del griego ***ântropos,*** que significa "hombre". La filosofía investiga las cuestiones atingentes al hombre, esto es, la ética, la política y las técnicas.

[25] La filosofía intenta reunir y sistematizar todo cuanto fue vertido por la cosmología y la antropología, interesándose, en especial, por demostrar que todo puede ser objeto del conocimiento filosófico, siempre que las leyes del pensamiento y de sus demostraciones se encuentren firmemente establecidas para ofrecer los criterios de verdad y de ciencia.

[26] Este fue el período más largo, que llegó a alcanzar el Imperio Romano y el pensamiento de los primeros padres de la Iglesia. En él, la filosofía se ocupa principalmente de cuestiones como la ética, el conocimiento humano y las relaciones entre el hombre y la naturaleza; y, por último, de la relación de ambos con Dios.

métodos y principios que se usan para diferenciar el razonamiento correcto del incorrecto. Una persona que haya estudiado Lógica y haya adquirido los conocimientos que ella proporciona tiene más probabilidades de razonar correctamente que aquella que no haya profundizado en los principios generales implicados en esa actividad. Porque, dada la argucia innata del intelecto, su estudio creará en el estudiante determinadas técnicas y diversos métodos de fácil aplicación para generar la corrección o incorrección de todos los razonamientos, inclusive los propios.

La Lógica, en ocasiones, se concibe como la ciencia que engloba el estudio del *razonamiento inductivo*, de forma que hay una *Lógica Inductiva* al lado de una *Lógica Deductiva*. La distinción que entre ambas existe radica en el hecho de que la *Lógica Inductiva* es un procedimiento racional aplicado para la adquisición de conocimientos, mientras que la *Lógica Deductiva* es el procedimiento racional empleado para verificar o comprobar la verdad de un conocimiento ya adquirido. También se habla de *Lógica Informal,* cuando se trata de reglas para pensamientos no-científicos, y de *Lógica Formal* cuando define las reglas para la demostración científica verdadera. Por lo tanto, la Lógica es una disciplina filosófica que se ocupa del lenguaje formal o lenguaje simbólico-científico totalmente limpio de cualquier tipo de ambigüedad o doble sentido que acostumbra a presentar el lenguaje cotidiano. Por tratarse de un lenguaje en el ámbito de la comprensión de otro lenguaje, podemos afirmar que, en este caso, nos hallamos ante un metalenguaje.

Según Chauí (1997), esta concepción de la Lógica como relación entre el pensamiento y un lenguaje perfectamente ordenado y regulado, capaz de expresar claramente las ideas, fue intensamente desarrollada en el siglo XVII por Leibniz, que proponía un Arte Combinatorio, inspirado en el Álgebra.

Con todo, Chauí (*op. cit.*) aún añade que la relación de las Matemáticas con la Lógica también fue desarrollada en siglo XVII por el filósofo inglés Hobess, tomando como modelo la Geometría. Hobess consideraba que el razonamiento era una suerte de cálculo, en otras palabras, razonar es algo que se asemeja a adicionar, substraer, multiplicar o dividir ideas, de donde cabe a la Lógica establecer las reglas universales para afrontar ese tipo de cálculo.

El ideal de una Lógica simbólica perfecta inspirada en el lenguaje matemático sólo se concretizó a mediados del siglo XIX, cuando el alemán Frege y los filósofos ingleses Bertrand Russel y Alfred Whitehead trataron de completar y consolidar la gran transformación de la Lógica, abandonando las teorías aristotélicas de la inferencia por una nueva concepción relacionada con las proposiciones lógicas.

Con el propósito de tornarse un puro simbolismo de tipo matemático y un cálculo simbólico, la Lógica contemporánea se preocupa cada vez menos tanto en el contenido material de las proposiciones (la realidad de los objetos referidos por la proposición) como en las operaciones intelectuales del sujeto del conocimiento (estructura del pensamiento), con lo que se convierte en una disciplina plenamente formal.

De este modo, Chauí (*ibid*) establece una analogía entre la forma en la que el matemático concibe los objetos que se construyen a partir de las propias operaciones Matemáticas conforme a sus principios y reglas prefijados y aceptados por la comunidad que trabaja en ese campo del conocimiento, y la forma en la que el lógico concibe los símbolos y las operaciones elaborando el objeto lógico que es **la proposición**. La **forma** de caracterización del pensamiento en la proposición posee una gran relevancia, porque, es a través de ella como se puede atribuir valor de verdad o de falsedad, conforme represente una relación correcta o no entre pensamiento, lenguaje y realidad.

Finalmente, podemos concluir que con la inserción de la Matemática el modo de concebir la Lógica se volvió cada vez más formal. Y así, la Lógica pasa a describir las formas, las propiedades y las relaciones de las proposiciones, gracias a la construcción de un simbolismo regulado y ordenado que permita diferenciar el lenguaje cotidiano y el lenguaje lógico formalizado.

En virtud de la contextualización que hemos presentado hasta el momento, la Lógica, con las características apuntadas anteriormente, puede ser y, de hecho, ha sido de gran utilidad para el desarrollo y la enseñanza de las Matemáticas. El objeto de interés del presente estudio consistirá en focalizar algún aspecto capaz de justificar la importancia de la Lógica Matemática, y, en este sentido, se centrará en el uso de los *conectores lógicos*[27], otorgando un énfasis especial a la sentencia condicional.

Fundamentación Teórica

Continúa dominando en las clases de Matemáticas, la aplicación de fórmulas que, además de no tener sentido "práctico" para los alumnos, en la medida en que desconocen en qué circunstancias de su actividad académica o fuera de ella deberán utilizarlas, no buscan desarrollar el razonamiento lógico y, a través de él, por ejemplo, llevar a cabo la toma de decisiones. Podemos citar como ejemplo de esta situación, la enseñanza de la Combinatoria, en la que la mayoría de los profesores se ocupa de enseñar a sus alumnos a usar las fórmulas de variación, permutación y combinación, sin conducirlos previamente a la construcción de tales conceptos. Porque, generalmente, los profesores parece que no se preocupan por hacerles comprender el razonamiento que subyace en esas fórmulas y no se detienen a esclarecer su aplicabilidad en el ámbito cotidiano.

Por éste y otros motivos que no están directamente relacionados con este trabajo, emerge la necesidad de intentar cambiar la forma habitual de enseñar Matemáticas, o sea, en lugar de enfocar excesivamente el empleo de la fórmula por la fórmula, pasar a valorar el proceso mismo de enseñar y el empleo del razonamiento lógico, entre otros tópicos, todos ellos relevantes.

La importancia de la valoración anterior, del empleo del *razonamiento lógico* en la enseñanza primaria, puede justificarse, por ejemplo, si traemos a colación el hecho de que dando énfasis a los cálculos y a las fórmulas, los alumnos llegan a la enseñanza secundaria o incluso hasta la enseñanza superior con dificultades para razonar lógicamente. Esto se puede comprobar cuando, en la enseñanza secundaria, se trabaja situaciones-problema que exigen de los alumnos un razonamiento más elaborado en vez de la mera utilización de fórmulas o cálculos matemáticos.

La preocupación por querer enseñar el *razonamiento lógico* deriva del hecho de que, no sólo en Matemáticas, sino también en el resto de disciplinas, podrá servir de base para comprender con mayor facilidad, problemas simples que antes parecían verdaderos enigmas.

[27] Son expresiones que establecen una relación entre dos sentencias declarativas afirmativas; cada conector lógico está representado por un símbolo especial; a continuación, se pueden observar los conectores lógicos y los símbolos correspondientes: negación '*no es el caso*' - ($\sim$); conjunción 'y' - ($\wedge$); disyunción '*o*'- ($\vee$); condicional '*Si ... entonces...*' - ($\rightarrow$); bicondicional '*Si y sólo si*'- ($\leftrightarrow$).

Y la principal razón de centrar nuestro estudio en las sentencias condicionales radica en que, en todo momento, en diversas situaciones, escolares o no, los individuos las han utilizado de forma sofisticada o incluso ingenuamente. Esto ocurre cuando, por ejemplo, algunos individuos no comprenden determinados problemas, simplemente porque presentan ciertos tipos de sentencias. O sea, no comprenden los procesos de inferencias necesarios para poder llegar a la conclusión, y, por tanto, no entienden la estructura de sentencias en la forma *se p, entonces q*. Pero, ¿qué es, si no, en definitiva, una sentencia condicional?

Las sentencias condicionales, también denominadas enunciados condicionales, son estudiadas desde, aproximadamente, el año 300 a.C. Según Willian y Martha Kneale (1990), los primeros lógicos ya debatían acerca de la naturaleza de las frases declarativas condicionales, como por ejemplo, Dioro Crono y su discípulo Filón, ambos de Mégara. Desde entonces, muchos lógicos, filósofos y especialistas en Geometría han tratado acerca de ellas y, en las últimas décadas, además, se han incorporado a su estudio científicos del área de educación y psicólogos, como Piaget y Inhelder (1970), Copi (1972), Wason (1977), entre otros.

Tales sentencias están constituidas por dos proposiciones, de las cuales, la primera, el *antecedente*, se sitúa entre las palabras "si" y "entonces" que representan conjuntamente el mencionado conector lógico (condicional), mientras que la segunda, el *consecuente,* aparece tras la palabra "entonces". Así, en la sentencia '*si los alumnos no estudian, entonces no aprenden*', '*los alumnos no estudian*' es el antecedente, y '*no aprenden*' es el consecuente.

Debe destacarse que no siempre las sentencias condicionales aparecen bajo la forma presentada anteriormente. John Nolt y Dennis Rohatyn (1991) llaman la atención sobre aquellos casos en los que la palabra *'entonces'* está omitida en la sentencia, por ejemplo en: '*Si Marcos llega tarde, será despedido*'. Junto a ello, también se dan casos de sentencias condicionales que se presentan en orden inverso sin que, por ello, su significado se altere, como ya fue adelantado anteriormente al respecto de las sentencias condicionales, es decir, la sentencia continúa manteniendo los mismos antecedente y consecuente, respectivamente. Para aclarar este caso y mostrar que la inversión no altera lo que se pretende expresar a través de la sentencia, utilizaremos el mismo ejemplo anterior: '*Marcos será despedido si llega tarde*'.

Desde el punto de vista lógico, Copi (1972) afirma que, en los enunciados condicionales, el antecedente implica el consecuente, si bien ello no quiere decir que el antecedente sea verdadero, sino que *si el antecedente fuera verdadero, entonces su correspondiente consecuente también será verdadero*. Ahora bien, nótese que, como consecuencia de ello, no se está afirmando que el consecuente sea verdadero, sino que *lo será si fuese verdadero el antecedente*. Ahora bien, ¿qué significa implicar?

Hay varios significados para el término 'implicar', si bien recurriremos sólo a dos por encontrarse más próximos a lo que pretendemos afirmar. Los significados son: "dar a entender" y "producir como consecuencia", ambos extraídos del *Diccionario Moderno da Lengua Portuguesa, 1978, p.1307*. Por su parte, Copi (*op. cit.*), señala los cuatro tipos de implicaciones que vienen a continuación:

Conexión lógica entre el antecedente y el consecuente. *Si A es B*; *B es C, entonces A es C*:

Ej$_1$: Si Juan es niño y todo niño es guapo, entonces Juan es guapo.

Conexión de carácter definidor:

Ej$_2$: Si Pedro no es ateo, entonces Pedro es creyente.

Conexión causal:

Ej$_3$: Si colocamos en un recipiente dos volúmenes iguales de agua, uno a una temperatura de $0\ ^0C$ y el otro a $100\ ^0C$, entonces la mezcla se dará a $50\ ^0C$.

Conexión de decisión:

Ej$_4$: Si no vienes mañana, entonces no es necesario que vengas más.

Las cuatro sentencias condicionales citadas anteriormente como ejemplos son diferentes entre sí porque afirman un tipo de implicación diferente entre sus respectivos antecedentes y consecuentes. Podemos observar, no obstante, que en las cuatro sentencias hay algo que es común a todas ellas: *en ningún momento el antecedente puede ser verdadero y su consecuente falso*. Por tanto, es esto lo que le interesa a la Lógica del *cálculo sentencial*, esto es, nombrar una sentencia por *implicación material* o *condicional material*.

El cálculo sentencial o cálculo proposicional es un sistema utilizado para ejecutar cálculos lógicos con proposiciones, formado por un lenguaje propio y las reglas de inferencia que van a ser empleadas, lo que ya era una de las preocupaciones de algunos filósofos medievales y clásicos, cuando estimaban necesario cuantificar, además del sujeto de la proposición, también el predicado. Con la finalidad de hacer referencia a la evolución de la Lógica sentencial, vamos a establecer una breve reseña de algunos de sus aspectos más destacados tomados de Chauí (*op. cit.,* 1997), y que ocupan los próximos cuatro párrafos.

En la medida en que la Lógica obtuvo un nuevo sentido hasta llegar a constituir una ciencia formal del lenguaje, partiendo del modelo matemático, el cálculo con proposiciones evoluciona hacia una forma más amplia, otorgando a la noción de predicado un nuevo tratamiento.

La evolución a la que nos estamos refiriendo se establece en dos etapas diferentes. En la primera, con la introducción de las nociones de **clase** y **función**, se mantiene la idea de que la proposición es la inclusión de un sujeto en un predicado, o sea, la inclusión de toda o parte de la extensión del predicado. Con la **clase**, el predicado se convierte en una relación entre dos variables y a esa relación se le denomina **función**. La Lógica pasa a construir un simbolismo que permite definir las funciones del predicado, introduciendo nuevos cuantificadores con los cuales se calcula la función. Este cálculo constituye la llamada **Lógica de Predicados.**

En la segunda etapa, con la introducción de la idea de **relación**, se pasó de la concepción inclusiva-exclusiva de sujeto y predicado a la de equivalencia o sustitución de uno por otro. Así, la Lógica de Predicados se enriqueció y modificó con la **Lógica de Relaciones**, ocupándose, como su propio nombre indica, de las relaciones entre conjuntos de objetos: mayor que, menor que, cerca de, lejos de... Las relaciones pueden abarcar dos o más objetos, resultando ser binarias, ternarias, cuaternarias…, por más que la relación más conocida sea la binaria, expresada en la fórmula xRy, que significa: existe una relación entre x e y.

Tanto la Lógica de Predicados como la Lógica de Relaciones están sometidas a una Lógica más amplia, que es la de las proposiciones o **Lógica de Cálculo Proposicional**, toda vez que la proposición constituye el campo de la Lógica propiamente dicha. El cálculo de proposiciones consiste en establecer los procedimientos por los cuales podemos determinar la verdad o la falsedad de una proposición, de acuerdo con la relación que mantiene con otra u otras.

La implicación material, por tanto, no debe ser confundida con otros tipos más usuales de implicación, ya que se trata de una implicación particular. Por eso, en ella no se afirma una implicación lógica, definicional, causal o de decisión (Copi, 1972).

En virtud de lo expuesto acerca de la importancia de los aspectos implicativos en las sentencias condicionales, podemos, apuntar de forma inmediata algunas especificidades que se hace necesario analizar, concatenando ideas, ya sea en el ámbito de las Matemáticas, ya en otros campos del conocimiento. En el presente texto se incidirá tan sólo en los aspectos matemáticos de la Lógica, esto es, se hará hincapié en la caracterización de su evolución, como en el caso del estudio de las relaciones y de las funciones, destacando la importancia de la representación simbólica.

Para una mejor comprensión acerca de la denominación de una sentencia por implicación material, pretendiendo evaluar la Lógica del cálculo se confecciona un cuadro llamado 'tabla de verdad', donde se verificará en qué casos la implicación material es verdadera o falsa. La letra "*p*" se usa para representar el antecedente, y la letra "*q*", el consecuente; el conector entre dos sentencias se representa a través del símbolo "⊃"[28], que caracteriza la implicación material. Así, cuando se escribe $p \supset q$ debe leerse: *p implica q* y, en el caso en que la sentencia sea verdadera, se simboliza con "V"; en el caso contrario, "F" simboliza la sentencia falsa.

La tabla más abajo representa las posibilidades de veracidad de una sentencia condicional. Se puede observar que sólo en la 2ª línea la sentencia es falsa, siendo verdadera en los demás casos.

Tabla 1: Tabla Verdad.

Proposiciones / Conclusiones	**p**	**q**	**p ⊃ q**
1ª	V	V	V
2ª	V	F	F
3ª	F	V	V
4ª	F	F	V

A continuación utilizaremos un ejemplo práctico, con la finalidad de representar los datos de la tabla anterior.

Sea la siguiente sentencia:

Si Isaac no es ateo, yo no soy hombre.

P: Isaac no es ateo.

Q: yo no soy hombre.

1º Caso: Isaac no es ateo; yo no soy hombre, (V); en este caso, el antecedente es verdadero y el consecuente también es verdadero.

2º Caso: Isaac no es ateo; yo soy hombre, (F); en este caso, el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

[28] La herradura o juntor filónico es una variación del símbolo utilizado en la representación del conector lógico condicional, y recibió esa denominación en homenaje a Filón de Mégara.

3º Caso: Isaac es ateo; yo no soy hombre, (V); en este caso, el antecedente es falso y el consecuente es verdadero.

4º Caso: Isaac es ateo; yo soy hombre, (V); en este caso, el antecedente es falso y el consecuente es falso.

En la sentencia inicial, '*Si Isaac no es ateo, yo no soy hombre*', el consecuente no está causado por el antecedente, pero la verdad del antecedente supone la verdad del consecuente. Este tipo de implicación, no obstante, se usa frecuentemente, cuando se desea enfatizar la negación del antecedente, con una connotación humorística o irónica.

Las tablas de verdad, además de servir para evaluar la lógica del cálculo sentencial, también se utilizan para comprobar la validez de los argumentos. Si un argumento está sustentado en premisas verdaderas, es imposible que su conclusión sea falsa. Son éstos los llamados 'argumentos de forma válida'; cuando ocurre lo contrario, estamos ante los 'argumentos de forma inválida' (Nolt & Rohatyn, 1991). A pesar de que las tablas de verdad pueden ser utilizadas con cierta eficacia, a medida que aumenta el número de sentencias que la componen, se hace cada vez más difícil su manipulación. Existe, con todo, un método más eficiente para determinar la validez de un argumento. Consiste en exponer el argumento de forma simbolizada para extraer su estructura lógica y aplicar las reglas de deducción pertinentes.

Para expresar el argumento de una forma simbolizada, se necesita un vocabulario apropiado para el cálculo sentencial, que está constituido por las letras minúsculas del alfabeto que simbolizan las sentencias, operadores lógicos y paréntesis. Por ejemplo, consideremos la siguiente sentencia condicional: *Si Fabio presenta una reclamación a la confederación, entonces, Juan será descalificado.* Simbolizando por f la sentencia 'Fabio presenta una reclamación a la confederación'; por $\sim j$ la sentencia 'Juan será descalificado; y el operador lógico por $\supset$, la representación simbólica para la sentencia condicional será $f \supset \sim j$.

El tipo de representación que acabamos de presentar se denomina silogismo condicional (hipotético), y en él, existen dos modos de inferencias deductivas válidas, (el Modus Ponens y el Modus Tollens), junto a dos modos inválidos, (la afirmación del consecuente y la negación del antecedente).

- **Modus Ponens** (MP)
  - $p \supset q$ (si p entonces q)
    p (afirmo p)
    $\therefore q$ (afirmo q).

Ej.: Si Carla se pone la camiseta del Barcelona, entonces irá al partido.
Carla se puso la camiseta del Barcelona.
Luego, Carla irá al partido.

- **Modus Tollens** (MT)
  - $p \supset q$ (si p entonces q)
    $\sim q$ (niego q)
    $\therefore \sim p$ (niego p)

Ej.: Si el examen de Física es fácil, sacaré un diez.
No saqué un diez.

Luego, el examen de Física no fue fácil.

➢**Falacia de la afirmación del consecuente.**

Afirmando el consecuente o negando el antecedente, se comete falacia, pues la conclusión es indeterminada, al ser el argumento inválido.

- $p \supset q$ (si p entonces q)

  q (afirmo q)

  $\therefore\ p$ (afirmo p)

Ej.: Si Rosa es candidata a alcaldesa, no será reelegida.
Rosa no será reelegida.
Luego…, ?

➢ **Falacia de la Negación del antecedente.**

A partir de la afirmación de que ella no será reelegida, no podemos concluir que ella será candidata.

- $p \supset q$ (si p entonces q)

  $\sim p$ (niego p)

  $\therefore \sim q$ (niego q)

Ej.: Si Luis está en Bahía, él telefoneará a las nueve.
Luis no está en Bahía.
Luego…, ?

No podemos concluir que él no telefoneará: él puede telefonear, incluso si no se encuentra en Bahía.

Silogismo Condicional en el ámbito Escolar y fuera de él

En el llamado mundo globalizado, no existe un lugar destacado para las actitudes mecánicas, los individuos tiene que ser dinámicos y prepararse para ser capaces de razonar de forma lógica, pues sólo así las decisiones que tomen (financieras, sentimentales, etc.), se harán de un modo coherente y no por azar. El individuo, sin embargo, antes de tomar decisiones, debe analizar los pros y los contras de sus actitudes y acciones, intentando vislumbrar las posibles consecuencias, y evitar errores futuros. En ese proceso de decisión, el individuo, sin percibirlo, ante muchas situaciones de su vida cotidiana, tanto en el ámbito puramente escolar como fuera de él, está usando un conector lógico condicional del tipo *Si... Entonces...*, si bien, en la mayor parte de las veces, ni siquiera comprende los mecanismos que regulan sus argumentaciones, y por ello, lo emplean de forma errónea.

La siguiente actividad intenta establecer, dentro del ámbito de la Geometría clásica y según los conceptos que venimos tratando en el campo de la Lógica en el presente estudio, una visión panorámica de la Lógica Matemática. Para ello, se partirá de ideas básicas argumentativas sobre silogismo condicional, desde el dominio de los argumentos válidos (modus ponens y modus tollens) hasta la caracterización de los argumentos lógicos de tipo inválido (falacias).

Las aplicaciones se exponen mediante dos ejemplos, cada uno de los consta de cuatro apartados *a, b, c* y *d* que representan respectivamente las dos formas de afirmación, el modus ponens y el modus tollens, y las dos formas de negación que tratan sobre razonamientos inválidos, esto es, la falacia que afirma el consecuente y la falacia que niega el antecedente. Cabe indicar, por último, que, en el caso del primer ejemplo, las ideas están caracterizadas en el ámbito escolar y, en el segundo, en el ámbito no escolar, con lo que se pretende valorar la importancia, comprensión y empleo de los argumentos lógicos en todo ámbito de aplicación.

Ej.: 1. Si un cuadrilátero tiene los cuatro ángulos rectos, entonces los lados opuestos son paralelos.

a. Los cuatro ángulos del cuadrilátero son rectos.
Luego, los lados opuestos son paralelos.

Figura 37: Cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos y lados opuestos paralelos

Al afirmar que los cuatro ángulos son rectos, se deduce que los lados opuestos son paralelos.

b. Los lados opuestos no son paralelos.
Luego, el cuadrilátero no tiene los cuatro ángulos rectos.

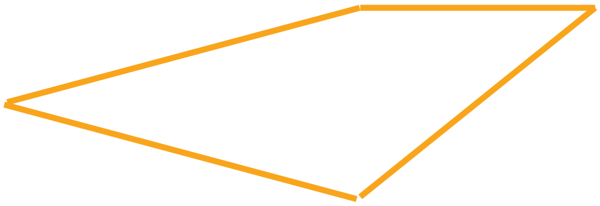


Figura 38: Cuadrilátero que no tiene los cuatro lados paralelos

Cuando se niega que los lados opuestos son paralelos, la deducción es obvia: los cuatro ángulos de la figura 38 no son rectos.

c. Los lados opuestos son paralelos.
Luego, los cuatro ángulos del cuadrilátero son rectos.

Figura 39: Cuadrilátero que tiene los cuatro ángulos rectos

Figura 40: Cuadrilátero que no tiene los cuatro ángulos rectos

Al analizar las figuras 39 y 40 y según la deducción del apartado c, ¿qué podemos concluir?

Tan sólo con relación a la afirmación: *Los lados opuestos son paralelos* no se puede deducir que los cuatro ángulos sean rectos, pues se pueden dar casos en los que, aunque los lados opuestos sean paralelos, los cuatro ángulos no son necesariamente rectos, como se aprecia en la figura 40. Es justamente en este momento cuando el individuo comete un error lógico afirmando que los cuatro ángulos son rectos.

d. Los cuatro ángulos del cuadrilátero no son rectos.
Luego, los lados opuestos no son paralelos.

Figura 41: Cuadrilátero con lados opuestos paralelos que no tiene los cuatro ángulos rectos

De esta negación no se puede deducir que los lados opuestos no son paralelos, pues pueden darse casos en los que, aunque los cuatro ángulos no sean rectos, los lados opuestos son paralelos, como se observa en la figura 41. En este caso, como en otros conceptos matemáticos, muchos alumnos, por no conocer las *reglas de inferencias*[29] caen en razonamientos inválidos al afirmar el consecuente o al negar el antecedente, como veremos a continuación.

Ej. 2 . Si **'**los salarios suben**'** entonces **'**los precios de los manufacturados suben**'**.
a) Los salarios han subido.
Luego, los precios de los manufacturados han subido.

b) Los precios de los manufacturados no han subido.
Luego, los salarios no han subido.

c) Los precios de los manufacturados han subido.
Luego...,?
¿Qué se puede deducir en c?

Nada. Pues, los manufacturados pueden haber subido a causa de la caída de la producción, del aumento de los impuestos, etc.

d) Los salarios no han subido.
Luego…, ?
En el caso de que los salarios no hayan subido, ¿qué impide a los manufacturados poder haber subido? Nada.

[29] Conjunto de deducciones a partir de determinadas premisas; Chaui (1997, p 187) afirma que "*inferir es llegar a una proposición como conclusión de otra u otras proposiciones que la anteceden y constituyen su explicación o su causa*".

Metodología

El interés por la calidad de la articulación de las ideas en los aprendices, con el fin de posibilitar un aprendizaje significativo sobre la adquisición y uso del razonamiento lógico ha sido, en cierta medida, objeto de preocupación para los elaboradores de currículos, además del hecho de aparecer registrado en documentos tan significativos como los Parámetros Curriculares Nacionales (PCN's, 2001). El aprendizaje significativo será aquí tratado siguiendo las propuestas de Ausubel (2002), Novak y Gowin (1984) y Moreira (2005). Por lo que se refiere a los PCN'S (*op. cit.*), a respecto de la Lógica, podemos destacar, entre otras, la consideración de que el r*azonamiento lógico* debe ser trabajado en la escuela con la finalidad de desarrollar en los alumnos, habilidades que les posibiliten tanto formular cuanto resolver problemas de forma adecuada.

Por otro lado, son varias las dificultades que se encuentran para alcanzar el aprendizaje que venimos caracterizando en estas líneas. Por ejemplo, puede observarse que si, por un lado, el campo de estudio didáctico que favorece tal abordaje (ejercitar el razonamiento lógico) lo constituye la didáctica de las Matemáticas, existen innumerables factores que favorecen tales dificultades. De forma amplia podemos señalar, en este sentido, la falta de preparación del propio profesor para desenvolverse en ese campo específico y, de forma muy especial, en el ámbito de la Lógica Matemática.

Al lado de lo que hemos indicado, cabe aún decir que para hacer un uso adecuado de los conectores lógicos, en cuanto forma de razonamiento, requiere que el usuario posea un dominio sobre dos aspectos fundamentales en el ámbito de la Lógica. El primero de ellos consiste en poseer una visión panorámica que le posibilite distinguir argumentaciones ingenuas de argumentaciones lógicas. Y, el segundo se refiere a poseer un sistema conceptual y simbólico que le posibilite reconocer y/o emplear ideas argumentativas lógicamente válidas e inválidas.

El presente estudio pretende a la vez clarificar y hacer posible la comprensión de los alumnos con relación al ámbito de la lógica referido al silogismo condicional. Y, para dar cuenta de ello, se establecieron tres etapas, en cada una de las cuales se construyó una situación didáctica, compuesta, a su vez, por actividades didácticas. Estas situaciones se vincularon, dentro de las Matemáticas, a las áreas de Combinatoria, Geometría y Álgebra, procurando trabajar de modo especial en los razonamientos empleados por los alumnos acerca de ciertas ideas básicas de esas áreas en el ámbito de la *Enseñanza Fundamental* y *Enseñanza Media*.

Por otro lado, es importante destacar que, por lo general, los contenidos correspondientes a las áreas anteriormente señaladas han sido presentados a los alumnos por parte de los profesores de un modo desarticulado, y otro tanto ocurre, incluso en un nivel más elevado, cuando nos referimos a la articulación de esas áreas entre sí. Pues bien, de una forma que pretende ser abarcadora, en este trabajo, además de presentar las bases del campo de la Lógica Matemática, se intenta también aportar contribuciones que minimicen la falta de articulación que ha sido apuntada con anterioridad, incidiendo en la relación entre el significado y el sentido de las acciones didácticas.

Síntesis de las Intenciones Didácticas de los procedimientos adoptados en el Texto de Apoyo

Con la intención de minimizar las desarticulaciones citadas anteriormente se planificó una actuación pedagógica que podemos describir a través de dos momentos. En el primero de ellos, se procede a una recopilación de las ideas que poseen los alumnos sobre aquello que se pretende enseñar, para lo cual se les pidió que respondiesen a un cuestionario diagnóstico y que, a continuación, elaborasen un mapa conceptual, teniendo en cuenta sus concepciones acerca de la Lógica Matemática. Al lado de ello, cabe recordar que la resolución de un cuestionario de evaluación y de un mapa conceptual realizados ambos después de la intervención forma parte también de este momento, debido a las semejanzas entre las tareas realizadas.

El segundo momento se refiere a la intervención que, en síntesis, se organizó en tres etapas constituidas por tres situaciones didácticas. La primera de ellas intenta discernir entre razonamientos que presentan encadenamientos lógicos, y aquellos razonamientos que no los presentan. La segunda etapa se refiere a la presentación de las reglas de inferencia del silogismo condicional. Y la tercera intenta posibilitar en los alumnos la profundización en las reglas de inferencia del silogismo.

Visión Panorámica de las Tareas que constituyen el presente Texto de Apoyo

La estructuración de la construcción del conocimiento matemático en nuestro trabajo pretende llamar la atención sobre la importancia de la Lógica Matemática y, en particular, sobre el uso de los conectores lógicos para la adquisición de conceptos/objetos matemáticos. Se organizaron las tareas en tres etapas, cada una de las cuales estaba constituida por una situación, compuesta, a su vez, por tres actividades, según se muestra a continuación.

1ª Etapa: En esta etapa se elaboró una situación didáctica constituida por tres actividades, con la finalidad de diferenciar argumentos lógicos de argumentos que no llegan a ser considerados como tales. En la primera actividad se lleva a cabo la presentación de razonamientos que no poseen encadenamientos lógicos. La segunda actividad está centrada en los razonamientos que presentan encadenamientos lógicos. Y la tercera actividad persigue hacer énfasis en los razonamientos lógicos a partir de sentencias abiertas y declarativas.

2ª Etapa: En la segunda etapa, la situación didáctica también consta de tres actividades didácticas y fue elaborada con la intención de presentar las reglas de inferencia del silogismo condicional. En la primera actividad, se pretende destacar la importancia de la simbología en el silogismo condicional. Por su parte, la segunda y la tercera tienen como objeto ilustrar el papel de las reglas de inferencia, respectivamente, en el ámbito académico y fuera de él.

3ª Etapa: La tercera situación, correspondiente a esta tercera etapa, también se compone de tres actividades, que inciden en un tipo de profundización en las reglas de inferencia del silogismo. La primera y la segunda tratan sobre la utilización de dichas reglas fuera del ámbito académico, respectivamente, en lo relativo al conector de implicación y a otros conectores. La tercera se centra en un tipo de interrelación entre las dos actividades anteriores, si bien ahora en el ámbito académico.

Propuesta Didáctica

Presentación

En las últimas décadas se han realizado diversos estudios con la intención de comprender el desarrollo del pensamiento lógico. La teoría psicológica de Jean Piaget, por ejemplo, clasificó el desarrollo cognitivo en las siguientes cuatro etapas: etapa sensoriomotora, etapa preoperacional, etapa de las operaciones concretas y etapa de las operaciones formales. Para Vygotsky (*apud* Pereira, 1998), que presenta una concepción diferente de la defendida por Piaget, la estructuración del pensamiento se inicia con el 'significado de la palabra', y dicho significado sufre de una influencia sociocultural.

Dentro del ámbito de interés del presente estudio, podemos citar las aportaciones de Oliveira (1987) y Pereira (1998), cuando señalan la existencia de algunos tipos de dificultad en la asimilación de problemas relacionados con las *sentencias condicionales*[30]. Pero añaden que, si se llevase a cabo una intervención adecuada en el momento oportuno, ello podría promover en los individuos la adquisición de habilidades que les posibilitara razonar coherentemente, de forma lógica.

La necesidad de concatenar ideas y establecer secuencias de comportamiento, para resolver ciertas actividades, ha sido especialmente importante para los seres humanos, si lo comparamos con el resto de los animales. En virtud de tales necesidades se puede destacar la importancia de estimular a los alumnos, inmediatamente, a partir de los cursos iniciales de la *Enseñanza Fundamental,* a utilizar el *razonamiento lógico* con el fin de mejorar su forma de pensar. Para valorar la importancia de este tipo de razonamiento, puede mencionarse el concepto de *autonomía* (independencia de acción ante lo nuevo). Una prueba de ello lo constituye el hecho de que a partir de un uso adecuado de este tipo de pensamiento, los individuos son capaces de realizar actividades sin necesidad de recurrir a un determinado modelo para repetirlo.

A través de la presentación de los principales factores que se detectan en la interferencia del razonamiento lógico, el presente estudio pretende, partiendo de algunas actividades Matemáticas referidas al uso de conectores lógicos condicionales, habilitar a los participantes para evitar la realización de razonamientos falaces (conclusiones inválidas).

---

[30] Las Sentencias Condicionales o Enunciados Condicionales están compuestos por dos proposiciones: la primera de las cuales constituye el **antecedente** y la segunda, el **consecuente**.
Ej.: *Si* **un triángulo es equilátero** (1ª parte) *entonces* **es equiángulo** (2ª parte).

Secuencia Didáctica

Situación 1: Delimitar el objeto básico de estudio de la Lógica.

Descripción de la Situación

Esta situación está constituida por tres actividades que difieren entre sí, en cuanto a su finalidad, por la forma que se emplea en la obtención de las respuestas. En la primera, se estudian los razonamientos que no presentan encadenamiento lógico; en la segunda, los razonamientos que poseen encadenamiento lógico; y, en la tercera, se establece una confrontación entre las dos primeras.

Actividad 1: Razonamientos que no presentan encadenamiento lógico.

La actividad consiste en la presentación conforme la actividad 1 (Figura 23, Capítulo 3, p. 122).

Acción 1: Lectura y análisis de todas las frases;

Acción 2: Organización de las informaciones contenidas en las frases de acuerdo con los aspectos presentados;

Acción 3: Definición, a partir de la sistematización de la organización establecida anteriormente, del morador de cada una de las cinco casas según los aspectos propuestos.

Actividad 2: Razonamientos que presentan encadenamiento lógico.

La actividad que se propone para analizar los razonamientos que presentan encadenamiento lógico se desarrolló partiendo del texto: "*La heredera*" (Mortari, 2001, pp. 2-3).

Queda claro, por tanto, que, después de leídas las informaciones contenidas en el texto anterior la pregunta que debe ser respondida es: ¿las piedras de los pendientes de Griselda son de esmeralda o de rubí? Justifique la respuesta.

Acción 1: Análisis e identificación de las sentencias que compondrán los argumentos.

Acción 2: Construcción de los encadenamientos lógicos.

Acción 3: Elaboración del argumento final.

Acción 4: Justificación (conclusión).

Actividad 3: Razonamiento lógico a partir de las sentencias abiertas y sentencias declarativas.

Se sabe que toda curva cerrada simple separa el plano en que se traza en tres conjuntos de puntos: el conjunto de puntos del exterior de la figura, el conjunto de puntos del interior de la figura (denominado región) y el conjunto de puntos de frontera entre ambos (el exterior y la región), que representa la propia curva cerrada simple.

Considerando, por lo tanto, la circunferencia (Figura 24 – Capítulo 3, p. 126) como un caso específico de una curva cerrada simple, donde el número de lados es tan grande que cada lado se confunde con un punto, se presentan algunas sentencias que deberán clasificarse como Sentencias Abiertas (SA) o Sentencias Declarativas (SD), para inmediatamente, a partir de tales sentencias, construir argumentos que deben ser analizados como poseedores o no de encadenamiento lógico.

- El interior de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos cuya distancia al centro C es menor que r unidades. ( )
- El segmento que une dos puntos de una circunferencia se denomina cuerda. ( )
- ¿El exterior de una circunferencia es el conjunto de todos los puntos cuya distancia al centro C es mayor que r unidades? ( )
- Toda cuerda que no es diámetro es menor que el doble del radio. ( )
- ¿Todos los puntos que se encuentran a una distancia de r unidades del centro C forman la circunferencia? ( )
- P es punto interno de la circunferencia. ( )
- El diámetro es la mayor cuerda de la circunferencia cuya medida es el doble del radio. ( )
- ¿Q es punto externo de la circunferencia? ( )

➢ **Si** $\overline{CP} < r$ **, entonces** P **es punto interno de la circunferencia.**
$\overline{CP} < r$.
Luego $\overline{AB}$ **es cuerda.**

➢ **Si** $\overline{AB}$ **y** $\overline{DE}$ **son cuerdas y** $\overline{DE} = 2r$ **, entonces** $\overline{DE}$ **es diámetro.**
$\overline{DE}$ **no es diámetro**.
Luego $\overline{DE} \neq 2r$.

Acción 1: Distinción entre sentencias abiertas (SA) y sentencias declarativas (SD).

Acción 2: Reconocimiento de encadenamientos lógicos**.**

Situación 2: Presentación de las reglas de inferencia del silogismo condicional.

Descripción de la Situación

La situación 2 también se estructuró en tres actividades. En la primera actividad, se pretende aclarar la importancia de la simbología en el silogismo condicional, mientras que, en la segunda y en la tercera, se persigue presentar las reglas de inferencia en el ámbito académico y fuera de él, respectivamente. Las actividades 1 y 3 anteriormente descritas, y que se presentan a continuación, están fundamentadas a partir de los conocidos problemas de las *cuatro tarjetas* y los *cuatro sobres* de Wason (1977).

Actividad 1: La importancia de la simbología en el silogismo condicional.

Al observar los cuatro cartones (Figura 25 – Capítulo 3, p. 127), pensamos que cada uno de ellos tiene una letra por una cara y un número entero por la otra. Se elaboró la siguiente afirmación: todos los cartones que tienen una vocal por una cara tienen un número por la otra. Para verificar si tal afirmación es verdadera…
a) Es necesario dar la vuelta a todos los cartones.
b) Es suficiente dar la vuelta a los dos primeros cartones.
c) Es suficiente dar la vuelta a los últimos cartones.
d) Es suficiente dar la vuelta a los dos cartones del medio.
e) Es suficiente dar la vuelta al primero y al último cartón.

Acción 1: Elaboración de la sentencia condicional a partir de la afirmación propuesta.

Acción 2: Identificación de proposiciones verdaderas o falsas.

Acción 3: Justificación de la alternativa escogida haciendo uso del cálculo proposicional.

Actividad 2: Ilustración de las reglas de inferencia en el ámbito académico.

Analice la siguiente sentencia propuesta, aplicando los *modus* de inferencias válidas e inválidas.

Sea A un conjunto formado por m elementos distintos y n el número de elementos tomados de esos m en la composición de los subconjuntos de A. *Si en los subconjuntos formados se produce* $m = n$, *entonces las variaciones ordinarias equivaldrán a permutaciones ordinarias*.

Acción 1: Traducción de las proposiciones al lenguaje del cálculo proposicional;

Acción 2: Representación del argumento en lenguaje simbólico;

Acción 3: Construcción y análisis de los encadenamientos lógicos aplicando el Modus Ponens, Modus Tollens y las falacias (afirmación del consecuente y negación del antecedente).

Actividad 3: Ilustración de las reglas de inferencia fuera del ámbito académico.

Analice la sentencia propuesta en el siguiente contexto, aplicando los modos de inferencias válidas e inválidas.

Fernando es socio de su hermano en una franquicia del Servicio de Correos y Telégrafos (Figura 26 – Capítulo 3, p. 130). Para agilizar la atención al público, resolvieron hacer la siguiente promoción: “si un sobre va lacrado, llevará un sello de treinta y cinco centavos"; el precio normal de franqueo es cincuenta centavos. Un cliente trajo los cuatro sobres que aparecen abajo y los colocó encima del mostrador.

¿A cuántos y a cuáles de esos sobres debe dar la vuelta Fernando para estar seguro de que la regla de la promoción se cumple?

Acción 1: Traducción de las proposiciones al lenguaje del cálculo proposicional.

Acción 2: Representación del argumento en lenguaje simbólico.

Acción 3: Construcción del encadenamiento lógico aplicando el Modus Ponens y el Modus Tollens.

Acción 4: Verificación y Análisis de los encadenamientos lógicos construidos buscando dar respuesta a la cuestión.

Situación 3: Profundización en las reglas de inferencia del silogismo condicional y utilización de otros conectores.

Descripción de la Situación

En esta situación el alumno, tras una preparación con las anteriores situaciones 1 y 2, referidas, respectivamente, al campo de la Lógica y a las sentencias condicionales con los modos de razonamiento válidos, va a ser motivado a emplear tales conceptos más en profundidad. Para ello, se elaboraron tres actividades; las dos primeras, situadas fuera del ámbito académico, están centradas, en el primer caso, en el uso del conector de implicación y, en el segundo, junto a él, utiliza otros tipos de conectores. La tercera actividad, difiere, en términos generales, de las anteriores por estar contextualizada en el ámbito académico, si bien se acerca a la segunda porque además del conector de implicaciones utiliza otros tipos de conectores.

Actividad 1: Consolidación de las reglas de inferencia con el conector de implicación fuera del ámbito académico.

Considere las afirmaciones: *si Patricia es una buena amiga, Víctor dice la verdad; si Víctor dice la verdad, Elena es una buna amiga; si Elena no es una buena amiga, Patricia es una buena amiga.* El análisis del encadenamiento lógico de estas tres afirmaciones permite concluir que ellas:

a) Implican necesariamente que Patricia es una buena amiga.
b) Son consistentes entre sí: que Patricia sea una buena amiga, que Patricia no sea una buena amiga.
c) Implican necesariamente que Víctor dice la verdad y que Elena no es una buena amiga.
d) Equivalen a decir que Patricia es una buena amiga.
e) Son inconsistentes entre sí.

Acción 1: Identificación de las proposiciones existentes en el argumento.

Acción 2: Traducción de las proposiciones al lenguaje simbólico.

Acción 3: Construcción de los encadenamientos lógicos.

Acción 4: Verificación y Análisis de los encadenamientos lógicos construidos buscando dar respuesta a la cuestión.

Actividad 2: Consolidación de las reglas de inferencia con la utilización de otros conectores fuera del ámbito académico.

Hay tres sospechosos de haber cometido un crimen: el cocinero, la gobernanta y el mayordomo. Se sabe que el crimen fue efectivamente cometido por uno o por más de uno de ellos, ya que pueden haber actuado individualmente o no. Se sabe además que: si el cocinero es inocente, entonces la gobernanta es culpable; o el mayordomo es culpable o la gobernanta es culpable, pero no los dos; el mayordomo no es inocente, luego:
a) La gobernanta y el mayordomo son culpables.
b) Sólo el cocinero es inocente
c) Sólo la gobernanta es culpable.
d) Sólo el mayordomo es culpable.
e) El cocinero y el mayordomo son culpables.

Acción 1: Identificación de las proposiciones existentes en el argumento.

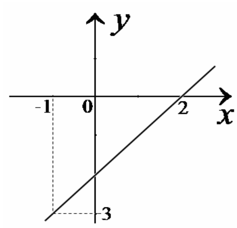
Acción 2: Traducción de las proposiciones al lenguaje simbólico.

Acción 3: Construcción de los encadenamientos lógicos.

Acción 4: Verificación y Análisis de los encadenamientos lógicos construidos buscando dar respuesta a la cuestión.

Actividad 3: Consolidación de las reglas de inferencia en el ámbito académico.

Determinar la representación algebraica de la recta trazada en el plano cartesiano siguiente:



Acción 1: Elaboración de las proposiciones a partir del análisis del gráfico.

Acción 2: Observación de la variación de las variables a partir de las proposiciones.

Acción 3: Construcción de los encadenamientos lógicos.

Acción 4: Determinación de la representación algebraica de la recta como conclusión de los encadenamientos construidos.

4.3 Texto de Apoyo de Álgebra

Introducción

Situados ante el proceso de elaboración del pensamiento del aprendiz, en el acto de la construcción de su conocimiento, una condición esencial para que se aprenda algo nuevo, entre otros muchos aspectos, es la necesidad de situar la nueva información dentro de una estructura previamente existente en el aprendiz. Este tipo de característica ha sido estudiada, a lo largo de los últimos 50 años, por la psicología cognitiva, y dicha familiaridad ha alcanzado, en término de estatus, un consenso para muchos que intentan enseñar algo a alguien como una necesidad. En este sentido, cuanto más íntimamente esté relacionada la nueva información con algo que ya se conozca y que resulte familiar, mayores serán las posibilidades de que se produzca un aprendizaje.

El proceso de enseñanza y aprendizaje no puede entenderse tan sólo como algo que importa exclusivamente al aprendiz, presentándole aquello que desconoce completamente o que conoce superficialmente. La manera de enseñar y de aprender también se fortalecen cuando el aluno es impulsado por el profesor a construir el conocimiento a través de una línea de razonamiento motivadora. Esto no se produce de forma lineal, pues de lo que se trata es de fomentar la percepción de los diversos conceptos que se relacionan de manera que el aprendiz podrá seguir sus inquietudes y alcanzar sus conclusiones, al tiempo que el profesor, en el papel de mediador, podrá provocar al alumno a través de determinadas situaciones de aprendizaje.

Esta propuesta, por tanto, intenta evidenciar el hecho de que, debido a la variación promovida por el dinamismo del ordenador considerado como instrumento de recurso, el concepto de función, a través de la informática, puede llegar a comprenderse mejor. Porque, se Valente (1993, 2004), enaltece el ordenador por ayudar en el proceso de construcción de conocimiento, Sangiacomo (1999) enfoca el dinamismo. No obstante, sin perder la especificidad que se propone alcanzar el presente trabajo, también creemos que se puede ampliar este fortalecimiento a la comprensión de conceptos geométricos y a la de otros campos de las Matemáticas como: Aritmética, Combinatoria, Álgebra. La intención es que este material producido (texto de apoyo) pueda servir como *organizador previo* en el ámbito del *aprendizaje significativo* (Ausubel, 1978), estructurando los conceptos jerárquicamente y escogiendo proposiciones que evidencien una relación adecuada entre los conceptos tratados.

El Cabri es un software educativo, especializado en la enseñanza de la Geometría que, entre sus posibles ventajas, podemos señalar la posibilidad de dinamizar la interacción entre el alumno y la máquina a través de la movilidad de las figuras. Junto a ello, y siguiendo a Bittencourt (1996) podemos afirmar que el Cabri posibilita también que el alumno efectúe un uso empírico de propiedades y teoremas, propiciando otra forma de organización mental de los conceptos y operaciones, dado que la comprensión geométrica carece de percepción visual y constructiva.

Con relación a la construcción geométrica, cuando se desplaza un objeto geométrico en el Cabri, los otros elementos con él relacionados por relaciones geométricas siguen su desplazamiento. Esto permite expandir rápidamente los ejemplos en cantidades y variedades y, ante tal diversidad, por ejemplo, como sugiere Bittencourt (1996), Cassol (1999) al analizaren casos particulares y verificar explícitamente cuáles son las relaciones que se mantienen en la figura, a pesar de los desplazamientos.

En este trabajo intentamos presentar una propuesta de enseñanza que conduzca a la construcción del concepto de función, según se trata en la *Enseñanza Fundamental II (7ª y 8ª séries)* y, en la *Enseñanza Media* (1º ano), utilizando, como recurso didáctico principal, el software *Cagri-géomètre* (*Cabri*). El empleo de este recurso pretende aclarar lo que se entiende por ese concepto a partir de la función de proporcionalidad, incidiendo en los aspectos prácticos acerca de la noción de proporcionalidad subyacente al teorema de Tales.

Fundamentación Teórica

Álgebra: una visión panorámica

En la elaboración de procedimientos para trabajar con el conocimiento formal, es necesario que el profesor tenga perfectamente claras un conjunto de ideas subyacentes a aquello que pretende enseñar, así como es preciso que sea consciente de la importancia que encierran tales ideas a la hora de construir el conocimiento del alumno. Otro factor, de no menor importancia, radica en procurar saber lo que el alumno ya conoce acerca de lo que se pretende enseñar, incluso, al respecto de las ideas subyacentes mencionadas anteriormente. A partir de aquí, se pueden identificar los significados que el alumno posee sobre cierto objeto de conocimiento, caracterizando lo que se precisa hacer para alcanzar un buen aprendizaje.

Una breve revisión acerca de las llamadas actividades Matemáticas algebraicas, nos parece de gran importancia para los propósitos que nos marcamos en el presente estudio: el Álgebra se inició con los babilonios y los egipcios (alrededor de 1700 a.C.) con el desarrollo de reglas para resolver problemas, sin que hubiese uso de notaciones para representar tales reglas de forma general. Pero, alrededor de 250 a.C. el griego Diofanto crea una señal especial para representar la incógnita en una determinada ecuación. El francés Vieta (cerca de 1550), por su parte, introdujo el cálculo con letras y con reglas propias que representaban cantidades o magnitudes geométricas. La génesis de la notación de estructura algebraica surge primeramente de forma implícita con Galois (1811–1832) y Abel (1802–1829) y, definitivamente, Bourbaki (a partir de 1940) sienta las bases de un mundo algebraico, completamente “abstracto”.

La elección de una situación que contenga la idea de función en particular, precisa tomar en consideración las ideas básicas del campo algebraico, como incógnitas, variables, variaciones, variaciones entre dos o más variables, relación entre variables, etc. El concepto de variable resulta fundamental para la comprensión del concepto de función. Las variaciones referidas anteriormente se relacionan en función de la estructura de una ecuación (ley de formación) que tiene el papel de identificar el tipo de relación existente entre las variables que aparecen.

Usiskin, (*en* Coxford y Shulte, 1995), ofrece una categorización de cuatro tipos de concepciones sobre el Álgebra en la enseñanza media, que son las siguientes: 1. *el Álgebra como Aritmética generalizada*; 2. *Álgebra como un estudio de procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas*; 3. *Álgebra como estudio de relaciones entre magnitudes*; y 4. *Álgebra como estudio de las estructuras*. Como las consideraciones de Usiskin contemplan los propósitos educativos del presente estudio, conforme lo que hemos venido caracterizado hasta ahora, presentaremos a continuación una visión panorámica de cada una de las cuatro concepciones anteriores.

Tipo 1: el objeto de interés de este primer tipo consiste en describir Matemáticamente relaciones entre números. Ejemplo: $(-1)\cdot 2=-2; (-1)\cdot 3=-3;\cdots$. Luego, es posible hacer una generalización, o sea, expresar que: $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$. Por lo tanto, las instrucciones son *traducir* y *generalizar*;

Tipo 2: en este caso, las variables pueden ser tanto incógnitas como constantes y sus instrucciones son *simplificar* y *resolver*. Ejemplo: dada la expresión $|x-1|=4$ la respuesta será $x=5$ o $x=-3$, pues, $x-1=4\Rightarrow x=5$ o $x-1=-4\Rightarrow x=-3$. Otra manera de resolución puede consistir en el recurso a la definición de módulo, o sea, hacer $(x-1)^2=4^2$, pues las sentencias son equivalentes;

Tipo 3: este caso se manifiesta de un modo diferente a los dos anteriores, pues, en lugar de ocuparse de describir relaciones Matemáticas entre números, procurando traducir y generalizar, o bien ocuparse de las variables en cuanto incógnitas y/o variables, procurando simplificar y resolver problemas, se centra en las fórmulas. Como afirma Usiskin (1995, p. 15) *"[...] la concepción de Álgebra como estudio de las relaciones puede comenzar con fórmulas [...]*". Y señala como diferencia con relación al tipo 2, que ahora las variables varían, si bien eso no puede considerarse como una redundancia.

Tipo 4: este tipo se refiere al estudio de los grupos, anillos, dominios de integridad, cuerpos y espacios vectoriales, caracterizándose "*[...] por las propiedades atribuidas a las operaciones con números reales y polinomios*". En este caso, las variables divergen de los tres tipos anteriores, ya que al no tratarse de una función o relación en lo que se refiere a algún tipo de argumento. No existe ecuación para resolverse en la que la variable aparezca como incógnita, ni tampoco existe modelo aritmético que pueda ser generalizado. No obstante, podemos decir, en este caso, acerca del Álgebra, que la variable es algo que va más allá de ser un símbolo arbitrario. Ejemplo: dada la expresión: $3x^2+4ax-132a^2$, su factorización será: $(3x+22a)(x-6a)$.

Las concepciones anteriores presentadas por Usinsky, en cierto modo, necesitan un respaldo teórico, y según la forma en que él las caracterizó, debemos buscarlo en el ámbito de la historia de las Matemáticas. Sin embargo, es necesario tomar algunas precauciones para evitar algún tipo de quiebra en el encadenamiento lógico y secuencial de tales concepciones. De ahí que la contextualización que hemos elegido está basada en Ríbnikov (1991).

Los antiguos babilonios fueron un pueblo que vivió en Mesopotamia en el período comprendido entre los años 2000 y 200 a.C. Se trata de una región situada entre los ríos Tigris y Éufrates. Actualmente, es la región que comprende Irak, junto con parte de Siria, Líbano e Israel. Las contribuciones de los babilonios en el desarrollo de las Ciencias y las Matemáticas fueron muchas y diversas. Lo que centrará nuestra atención aquí estará referido a las Matemáticas, en concreto, a los contenidos encontrados entre algunas de los centenares de *tablillas de barro* que se hallaron en Uruk, cuya datación se remonta a aproximadamente 5000 anos. Cuando se refiere al sistema de numeración de este pueblo, Ríbnikov (*op. cit.*, p. 29) destaca que:

"*El contenido de las tablillas muestra que sobre la base de este sistema se crearon muchas reglas uniformes de las operaciones Aritméticas, tanto con números enteros como con fraccionarios*".

A partir de aquí, movidos por la necesidad de facilitar el uso práctico habitual con las operaciones, los babilonios construyeron tablas de multiplicación, yendo desde 1×1 hasta 60×60 y, en el caso de la división, surgieron tablas con valores inversos, una vez que descubrieron que $b \div a = b \times \frac{1}{a}$.

Por tanto, a partir de la construcción y utilización de tablas de cuadrados de números enteros, o también de sus cubos, y de inversas, como raíces cuadradas, entre otras, se hace posible probar determinadas regularidades interpretadas por la Aritmética y, con ellas, por ejemplo, identificar las propiedades Aritméticas. De esta forma, la delimitación de la primera concepción algebraica de Usinsky (1995) se traduce como algo que se deriva de la necesidad de *traducir* y *generalizar*.

Hay otro episodio que merece ser destacado, también relacionado con las tablillas babilónicas: se trata de la existencia de *"[...] textos dedicados a la solución de problemas que, desde el punto de vista moderno, se reducen a las ecuaciones de primer y segundo grado, e incluso de tercer grado*" (*op. cit.*, p.29). Es en este pasaje donde, literalmente, aparecen extractos que aluden a la segunda concepción de Usisnky. Junto a ello, Ríbnikov (*ibid*), según Van del Waerden, presenta una clasificación de los tipos de problemas referidos a ecuaciones y sus sistemas:

a) Ecuaciones con una incógnita: $ax = b$; $x^2 = a$; $x^2 \pm ax = b$; $x^3 = a$; $x^2(x+1) = a$;

b) Sistema de ecuaciones con dos incógnitas: $x \pm y = a$; $xy = b$; $x \pm y = a$; $x^2 + y^2 = b$.

Y una última información acerca de las tablillas: en el ámbito geométrico, se documentan registros relativos a la enumeración de triángulos rectángulos con lados racionales, generalmente denominados triadas de números pitagóricos, cuya representación común es del tipo: $x^2 + y^2 = z^2$. Junto a esas ya importantes informaciones, obtenidas a partir de Ríbnikov (*ibid*), con la finalidad de posibilitar una visión panorámica del Álgebra como campo de conocimiento matemático, resulta también importante destacar dos consideraciones para contemplar la tercera concepción de Usinsky (*op. cit.*, p. 30):

En primer lugar, en lo que se refiere a las ternas pitagóricas:

"*La reconstrucción del método de selección conduce, aparentemente, a las fórmulas:* $x = p^2 - q^2$ *;* $y = 2pq$ *;* $z = p^2 + q^2$ *, conocidas en las teorías de los números como diofánticas*" (p. 30).

La segunda consideración señala que:

"*Los conocimientos geométricos de los babilonios, por lo que se ha visto, superaban a los de los egipcios, ya que en los textos, junto a los tipos generales de problemas se encontraban rudimentos de medición de ángulos y relaciones trigonométricas. Además, por lo general, contenían también cálculos de áreas y volúmenes de figuras rectilíneas, comunes para la Geometría elemental [...]*".

Referencia a la idea Matemática de función

Si al identificar la relación entre variables de un determinado fenómeno a través de ecuaciones estamos ante una actividad del campo algebraico, entonces sobre las leyes de formación podemos decir que el estudio de las funciones también forma parte del Álgebra. En este sentido, cabe afirmar que:

"*El concepto de función permite establecer una correspondencia entre las leyes Matemáticas y las leyes geométricas, entre las expresiones analíticas (ley de formación de la función) y los lugares geométricos (conjuntos de todos los puntos que gozan de una misma propiedad)*" (Caraça, 1970, p.139).

El profesor, ante todos los aspectos caracterizados en este estudio, precisa estar muy atento a las informaciones que desea transmitir, pues sus actividades y procedimientos pueden comprometer el conocimiento que desea enseñar. Por ejemplo, Lima (1998, p.81) destaca lo siguiente:

"*Prácticamente todos los textos escolares al uso en nuestro país definen una función* $f : X \to Y$ *como un subconjunto del producto cartesiano* $X \times Y$ *con las propiedades*[31] *G_1 y G_2 enunciadas más arriba. Esta definición presenta el inconveniente de ser formal, estática y de no transmitir la idea intuitiva de función como correspondencia, transformación, dependencia (una magnitud función de otra) o resultado de movimiento. ¿Quién pensaría en una rotación como un conjunto de pares ordenados?*".

Lo que ya fue indicado antes por Elon puede caracterizarse según la definición ofrecida por Bianchini y Paccola (1997, p.49):

"*Dados, por ejemplo, los conjuntos* $A = \{2,3,5\}$ *y* $B = \{1,3,4,6\}$*, vamos a considerar los conjuntos de pares* (x, y) *tales que* $x \in A$ *e* $y \in B$*. Sabemos que a cualquiera de esos conjuntos se llama* ***relación de*** A ***en*** B *; sin embargo, si la relación*

[31] G_1 y G_2 son las condiciones necesarias y suficientes para, dado un subconjunto $W \subset X \times Y$, representar el gráfico de la función $f : X \times Y$.

asocia a ***cada elemento de*** A ***un único elemento de*** B, *decimos que es una* ***función de*** A ***en*** B *"*.

En este momento podemos referirnos al objeto de estudio de este trabajo, que es presentar un procedimiento didáctico para contextualizar el concepto de función lineal. Tal contexto, de forma general, pode ser expuesto como un subconjunto de las funciones afines y, de forma más adecuada, según Lima *et. al.* (1998, p. 92):

"*La función lineal, dada por la fórmula* $f(x) = ax$, *es el modelo matemático para los problemas de proporcionalidad. La proporcionalidad es, probablemente, la noción Matemática más difundida en la cultura de todos los pueblos y su uso universal data de milenios*".

En la elaboración de procedimientos para hacer alusión al concepto de función, es preciso recurrir a ideas subyacentes, cuyos significados estén relacionados con el tipo de enseñanza que se desea realizar. Por lo tanto, el significado de función, y más específicamente el de función lineal, puede carecer de una reflexión, referida al campo de las Matemáticas en la que está inserta tal idea. Para hacer referencia a los propósitos educativos, se puede partir de algunos cuestionamientos que pueden ser decisivos. En este sentido, se elaboraron cuatro cuestiones: 1. ¿En qué campo matemático es en el que se sitúa este concepto? 2. ¿En qué parte de dicho campo se encuentran las bases de ese concepto? 3. ¿Cómo se relaciona el concepto de función con el ya referido campo? 4. ¿Cómo establecer el concepto de función lineal a partir del concepto de función en su forma más general? Éstas, entre otras cuestiones, pueden ser cruciales para posibilitar que los alumnos atribuyan un pleno sentido al concepto de función lineal.

Metodología

El acto educativo requiere del docente una implicación profunda con sus alumnos, llegando incluso a investigar sus formas de pensar con la finalidad de intentar revelar sus concepciones acerca de lo que pretende enseñar. Porque, de este modo, el profesor puede elaborar actividades/acciones que propicien al alumno una comprensión significativa sobre lo que se pretende enseñar. De esta forma, por tanto, nuestra propuesta buscará llevar a los alumnos a un ambiente informatizado, del cual se espera que pueda capacitarlos para realizar ejercicios de validación, establecer su parecer a partir de situaciones-problemas, adquiriendo habilidades Matemáticas que les posibiliten tomar decisiones, en lugar de prepararlos para repetir procedimientos conocidos.

El estudio, concebido como un todo, fue organizado a partir de tres situaciones didácticas, si bien el centro de atención, en cuanto foco, lo constituirá la tercera situación, compuesta, a su vez, por tres actividades. La sistematización de estas actividades, derivada de las consideraciones anteriores, pretende, partiendo de algunas regularidades pertenecientes al ámbito de la Geometría euclidiana plana, articulada a movimientos propiciados por el ambiente informatizado, enfocar el contenido algebraico de funciones de polinomios de 1^er^ grado, en especial, la función de proporcionalidad (función lineal).

El concepto de función lineal, como ya anunciamos, se demostrará a partir de tres actividades prácticas, que se encuentran comúnmente en el ámbito cotidiano de los alumnos dentro del contexto escolar. En la práctica, se pretende establecer la correspondencia del área total del *Tangram* en función del área de su menor triángulo. El concepto de función se desarrollará por parte del aprendiz, según fue anunciado, a partir de tres situaciones: la primera de ellas versa sobre la familiarización de los alumnos con el software (Cabri-géomètre); la segunda, intenta profundizar en el análisis de la proporcionalidad existente en la función área del tangram citado anteriormente; y la tercera alberga el propósito de la enseñanza de la proporcionalidad haciendo uso del *Teorema de Tales*, presente en la construcción gráfica de la *Función Lineal*, en la que la *Tasa de Variación* representa la *Constante de Proporcionalidad*.

Síntesis de las Intenciones didácticas de los procedimientos adoptados en el texto de Apoyo

La organización de este texto fue concebida en dos momentos, uno de orden investigativo, que intenta establecer las concepciones de los alumnos antes y después de la enseñanza, y otro de orden didáctico, en el que se desarrolló la propuesta didáctica.

El primer momento consiste, inicialmente, en la resolución de un cuestionario diagnóstico y en la elaboración de un mapa conceptual por parte dos alumnos antes del acto educativo. A la parte final del primero momento realizada después del acto educativo le corresponde la resolución de un cuestionario de evaluación del aprendizaje y la elaboración de un mapa conceptual. Los cuestionarios diagnósticos y los mapas iniciales tienen como propósito el identificar las concepciones de los alumnos sobre aquello que se pretende enseñar, mientras que los cuestionarios de evaluación del aprendizaje y los mapas finales tienen por objeto el posibilitar el contraste entre las informaciones anterior y posterior a la intervención.

El segundo momento, como ya anticipamos, trata del desarrollo de la propuesta en sí, elaborada a través de tres etapas que se estructuraron en forma de situaciones didácticas. Tales situaciones están constituidas por actividades didácticas, en las que en la mayor parte de los procedimientos de enseñanza adoptados se utiliza el ordenador como recurso didáctico, haciendo uso del software Cabri-géomètre.

Las actividades didácticas anteriormente mencionadas constituyen un conjunto de acciones acerca de las cuales es importante resaltar, debido al planteamiento de los procedimientos adoptados para el desarrollo del estudio, que no debe ser en modo alguno considerado como una especie de “receta”. Al contrario, se trata de procedimientos que se consideró como necesarios, y que fueron organizados en forma de actividades y estructurados como situaciones que pudieran ser apreciadas, incluso por personas que ni siquiera tenían conocimientos informáticos, tanto de ordenadores como del propio software.

Visión Panorámica de las Tareas que constituyen este Texto de Apoyo

El campo de estudio del Álgebra que en este trabajo enfoca el estudio de la función afín, en especial, el caso de la función lineal, está organizado en tres etapas. En síntesis, se trata de buscar e identificar las concepciones previas de los alumnos acerca de lo que se pretende enseñar para, inmediatamente después, intentar organizar sus ideas de acuerdo con aquellas que comparten quienes trabajan en el ámbito de las

Matemáticas. Para ello se establecieron tres situaciones didácticas conforme a las tres etapas siguientes:

1ª Etapa: En esta etapa, la situación didáctica incide en la familiarización de los participantes con el software. Esto se consiguió a partir de la elaboración de dos actividades didácticas. La primera actividad se centra en la construcción y denominación de puntos, segmentos y rectas; y la segunda, se ocupa de la obtención de rectas paralelas y transversales, así como de la medición de segmentos.

2ª Etapa: En la situación correspondiente a esta etapa, se pretende que los participantes perciban hasta qué punto esta herramienta puede propiciar una visión más adecuada acerca de la noción de función, en particular, sobre la función lineal, considerando la dinámica establecida a través de los movimientos provenientes del recurso utilizado, analizando la proporcionalidad según el teorema de Tales. Este procedimiento se llevó a cabo mediante la realización de cuatro actividades. En la primera se busca obtener la distancia y la longitud de los segmentos entre las rectas de la segunda actividad de la etapa anterior. En la segunda, se utiliza la herramienta calculadora para determinar algunas razones, mientras que en la tercera se intenta identificar la proporcionalidad a través del movimiento de rectas construidas como en la actividad 2 de la ya mencionada primera etapa. Por último, la cuarta actividad didáctica tiene el propósito de organizar las ideas Matemáticas subyacentes a las actividades desarrolladas en esta etapa sobre proporcionalidad.

3ª Etapa: La tercera situación consta de cuatro actividades didácticas encaminadas a ayudar a los alumnos a elaborar una visión panorámica del concepto de función de proporcionalidad, manejando el teorema de Tales con el software Cabri-géomètre. La primera actividad trata de la construcción del tangram, usando el Cabri-géomètre para rescatar aspectos relevantes de las dos etapas anteriores con el fin de propiciar la idealización de la función de proporcionalidad. La segunda actividad se centra en la obtención de un gráfico, usando relaciones apropiadas para ejecutar la función de proporcionalidad. Y la tercera actividad persigue estudiar la idealización de lugar geométrico, para que en la cuarta actividad el alumno esté en condiciones de utilizar tales recursos para analizar la función de proporcionalidad.

Propuesta Didáctica

Para contribuir a la adquisición de conocimientos sobre función, y en particular, sobre la función de proporcionalidad, la presente propuesta atribuye, inicialmente, cierta relevancia a la repaso de algunos conceptos geométricos básicos. Para ello, se sirvió del software Cabri-géomètre, buscando esclarecer tales relevancias. En la medida en que esos conocimientos básicos geométricos son trabajados mediante la manipulación de la máquina en función de las actividades estructuradas de una forma adecuada, se podrá llegar a una mejor comprensión del concepto de función por parte de los alumnos.

El presente estudio, por lo tanto, desde el punto de vista pedagógico, pretende repasar, mediante el empleo del ordenador (Software Cabri-géomètre), los conceptos de Punto, Recta, Plano, segmento de recta y lugar geométrico, gracias a la dinámica que el Cabri proporciona. Además de esos conceptos, también se estudiará la posición relativa entre rectas en el plano, toda vez que ello constituirá la base estructural conceptual para aclarar el concepto de función a partir de la noción de proporcionalidad. Para tal, se pretende fortalecer tanto el concepto de proporcionalidad cuanto la relación existente entre dicho concepto y el teorema de Tales. Es en este momento cuando se espera que sea produzca, a partir del teorema de Tales, por la comparación entre la medida de segmentos, la construcción del concepto de proporcionalidad, mediante la utilización del computador (software Cabri-géomètre).

Inicialmente, se trabajará en un ejemplo de relación de dependencia entre dos magnitudes proporcionales, usando como recurso el tangram, con el que se comprobará la composición y descomposición. A través de tal procedimiento se puede vislumbrar la proporcionalidad existente entre el área de cada una de las figuras que componen el tangram y el área total del mismo, considerando, como unidad de medida, el área del triángulo menor. Posteriormente, usando el recurso de la informática, se llevará a cabo una *actividad didáctica* relacionada con la función ya trabajada, buscando no sólo facilitar la construcción gráfica de función, sino también permitir que el alumno pueda conjeturar con relación a los resultados obtenidos.

En la medida en que los conceptos mencionados anteriormente vayan siendo trabajados de manera interactiva, tendremos la certeza de que la función de proporcionalidad será asimilada de forma más significativa. A continuación, presentamos las tres situaciones didácticas de que consta esta propuesta, y que están constituidas por su(s) actividad(es) en función de su(s) acción(es).

Secuencia Didáctica

Situación 1: Repaso de Entes Geométricos con el uso del Cabri-géomètre.

Descripción de la Situación

En esta situación, el aluno será invitado, efectivamente, a construir puntos, segmentos e rectas (transversales y paralelas), y también a nombrarlos, colorearlos y manipularlos. La actividad 1 (Revisión de Entes Geométricos con el uso del Software Cabri-géomètre: Construir, Nombrar Puntos y Segmentos), está constituida por un conjunto de ocho acciones y se ocupa de familiarizar al aluno con el ya citado Software. La actividad 2 (Medida de Segmentos y Construcción de Rectas Transversales y Paralelas) consta de dos momentos de especulación, el primero con cuatro acciones y el segundo con ocho acciones, y ambos se ocupan particularmente de establecer condiciones para que se perciban regularidades a través del punto que las originó en el movimiento de la recta *t* (o *m*), vislumbrando la existencia de proporcionalidad.

Actividad 1: Construir y Nombrar Puntos y Segmentos de Recta.

Acción 1: Cree dos puntos y denomínelos A y B.

Acción 2: Cree el segmento AB. Pinte y mida el segmento.

Acción 3: Desplace el punto A (o B) y observe lo que ocurre.

Acción 4: Escriba sus observaciones:

Acción 5: Cree una recta y denomínela *r*.

Acción 6: Desplace la recta *r* usando el punto que la originó.

Acción 7: Desplace la recta *r* tomando cualquier parte que no sea el punto que la originó.

Acción 8: Escriba sus observaciones:

Actividad 2: Medida de Segmentos y Construcción de Rectas Transversales y Paralelas.

Actividad 2_1 (Especulación 1): Construcción de punto y segmento sobre la recta.

Acción 1: Cree una recta y denomínela *s*.

Acción 2: Construya cuatro puntos sobre la recta. Construya y mida dos segmentos cualesquiera, tomando como puntos extremos dos de los cuatro puntos creados.

Acción 3: Desplace los puntos extremos de cada segmento.

Acción 4: Escriba sus observaciones y dificultades:

Actividad 2_2 (Especulación 2): Construcción de rectas transversales y paralelas.

Acción 1: Cree una recta *r* transversal a una recta *s*.

Acción 2: Cree una tercera recta *t* transversal a las rectas *r* y *s* y denomine A y B a los puntos de intersección de *t* con *r* y *s*.

Acción 3: Mueva la recta *t* sin usar los puntos A y B.

Acción 4: Escriba sus observaciones:

Acción 5: Mueva los puntos A o B. ¿Qué es lo que observa?

Acción 6: Cree la recta *m*, paralela a la recta *t*, cortando las rectas *r* y *s* en puntos distintos. Denomine C y D a los puntos de intersección de la recta *m* con las rectas *r* y *s*.

Acción 7: Mueva la recta *t* y después la recta *m* sin tocar en los puntos de intersección. ¿Qué es lo que observa?

Acción 8: Mueva los puntos A, B, C y D (uno cada vez). ¿Qué es lo que observa?

Situación 2: Conceptuando la Proporcionalidad.

Descripción de la Situación

Al alumno, después de una preparación con la situación anterior, se le motivará en la actividad 1 a crear rectas paralelas cortadas por transversales y medir segmentos; más tarde, en la actividad 2, calculará, usando la calculadora del Software Cabri-géomètre, y comparará los resultados obtenidos; después, en la actividad 3, desplazará las rectas, con el fin de identificar si se produce algún tipo de regularidad. Por último, en la actividad 4, se tratará de estimular/poner en práctica las ideas subyacentes a la de proporcionalidad en el ámbito conceptual, mediante la construcción de un mapa conceptual. En síntesis, con respecto al movimiento de rectas transversales con el uso del ya mencionado software, aplicando el Teorema de Tales, se espera que el alumno consiga identificar la constante de proporcionalidad a partir de variaciones de carácter directo, y que así, pueda comprender significativamente, el concepto de proporcionalidad.

Actividad 1: Obtención de Distancia y Longitud de Segmentos entre tales rectas.

Acción 1: Cree tres rectas paralelas *a*, *b*, *c*, de forma que sean cortadas por dos rectas transversales *u*, *v*.

Acción 2: Mida todos los segmentos posibles, contenidos en las rectas *u* o *v*, teniendo como puntos extremos las intersecciones de las cinco rectas.

Actividad 2: Uso de la Calculadora.

Acción 1: Con ayuda de la Calculadora del Cabri, calcule todas las razones posibles entre las medidas de los segmentos contenidos en la recta *u*, y los segmentos contenidos en la recta *v*.

Acción 2: Compare los resultados. Escriba sus observaciones:

Actividad 3: Identificación de la Proporcionalidad a través del movimiento de las rectas.

Acción 1: Mueva cualquiera de las rectas *a*, *b*, *c*.

Acción 2: A continuación, mueva la recta *u* o *v*. Escriba sus observaciones:

Actividad 4: Elaborar un mapa conceptual, tomando como base Moreira y Buchweitz (1987, pp.29-30), contextualizando lo aprendido sobre el concepto de proporcionalidad que se pretende en las 3 actividades anteriores de esta situación.

Acción 1: *Se localizan los conceptos*.

Acción 2: *Se establece una lista con los conceptos en orden jerárquico*.

Acción 3: *Se distribuyen los conceptos en dos dimensiones*.

Acción 4: *Se trazan las líneas que indican las relaciones entre los conceptos*.

Acción 5: *Se describe la naturaleza de las relaciones*.

Acción 6: *Se revisa y se rehace el mapa*.

Acción 7: *Se prepara el mapa final*.

Situación 3: Visión panorámica de la idea de Función y el Concepto de Función de Proporcionalidad a partir del Teorema de Tales con el uso del Cabri-géomètre.

Descripción de la Situación

En esta situación, se llevarán a cabo cuatro actividades de tipo teórico y práctico, relativas a los conceptos de plano cartesiano y función, valiéndonos tanto de material impreso como del software Cabri-géomètre. En dichas actividades se pondrá en práctica un tipo de contraste entre la dinámica en tiempo real, correspondiente al recurso dinámico Cabri-géomètre, y el recurso estático de pizarra blanca y rotulador, pretendiéndose aclarar el concepto de función, a partir de una mejor estructuración de las concepciones de los aprendices basados en las acciones anteriores. Teóricamente, estos objetivos, dentro del ámbito de la informática, están respaldados, de algún modo, por, Lévy (1990), Laborde (2001) y Baldin y Villagra (2002). Las actividades que se llevarán a cabo buscan enfatizar y consolidar, a partir de los aspectos seleccionados en las dos situaciones anteriores, la abstracción del concepto de la función de proporcionalidad. La abstracción se conformará mediante la idea de lugar geométrico, partiendo de la representación gráfica en el plano cartesiano con el uso del Software Cabri-géomètre.

En la actividad 1, los alumnos se situarán frente a acciones constructivas que les permitan, a continuación, comparar áreas de figuras geométricas planas distintas así como acciones que recuerden propiedades subyacentes al concepto del teorema de Tales. La actividad 2, compuesta por tres acciones, pretende una estructuración del concepto de función derivada de la exposición por parte de los alumnos de sus propias concepciones sobre números reales, abscisa, punto geométrico, plano cartesiano y tasa de variación, construyendo dos tablas. En la actividad 3, se estudiará el concepto de lugar geométrico. La actividad 4, teniendo en cuenta todo lo realizado hasta ahora, y a partir de las relaciones existentes entre los temas abordados, a través del movimiento proporcionado por el software Cabri-géomètre durante la construcción del lugar geométrico, según las regularidades, busca posibilitar la identificación de la función de proporcionalidad. En todas las situaciones, se permitirá al alumno conjeturar sobre los temas en cuestión y también sobre temas que no precisan formar parte de la programación, pero que están relacionados por la propia epistemología del tema.

Actividad 1: Construcción del Tangram usando el Cabri-Géomètre.

En este momento, se tomaron en consideración algunos de los aspectos apuntados por Henriques (2000).

Acción 1: construir un cuadrado identificando su ponto medio y su diagonal.

Acción 2: determinar los cuatro vértices, dos puntos medios de dos lados adyacentes y dividir la diagonal en 4 partes iguales.

Acción 3: obtener una recta paralela a la diagonal, que contenga los dos puntos medios anteriores y determine su punto medio.

Acción 4: obtener un segmento que pase por el punto medio de la diagonal, que tenga como origen el punto medio determinado anteriormente y como extremo el vértice del cuadrado.

Acción 5: obtener el segmento que tiene como origen uno de los dos puntos medios obtenidos en la Acción 2, y como extremo uno de los cuatro puntos que constituyen la división obtenida en la misma Acción 2, sabiendo que tal segmento forma con la diagonal un ángulo recto.

Acción 6: obtener el segmento que tiene como origen el punto medio determinado en la Acción 3, y como extremo uno de los cuatro puntos que constituyen la división de la diagonal de la Acción 2, sabiendo que tal segmento es paralelo a dos de los lados del cuadrado inicial.

Actividad 2: Construcción Gráfica de la Función de Proporcionalidad usando el Tangram y el Cabri-Géomètre.

Acción 1: Construya una tabla, presentando para cada una de las formas (piezas) que constituyen el tangram, cuantas sean necesarias de entre ellas para cubrir toda su área.

Acción 2: Construya una tabla, relacionando en forma fraccionaria cada uno de los números 1, 2, 3, ..., 8, 9, 10, ..., 17, 18, 19... (variables independientes, que representan múltiplos del triángulo pequeño en términos de unidad de área), con la cantidad de área fija del triángulo pequeño necesaria para cubrir toda el área del tangram. A continuación, construya el gráfico cartesiano de esta relación. Se es posible, calcule la tasa de variación, escriba la sentencia Matemática que generaliza tal relación e identifique si es función.

Acción 3: Usando el Software Cabri-géomètre (recurso nuevo eje), ejecute las siguientes acciones:

Acción 3_1: Construir el gráfico de la relación área del Tangram en función del área del triángulo menor que lo compone.

Acción 3_2: Calcule la tasa de variación, usando la calculadora del Cabri.

Acción 3_3: Escriba con sus palabras cual es la relación que existe entre la tasa de variación y el teorema de Tales.

Acción 3_4: ¿Qué tipo de conclusión, en este contexto, puede usted establecer sobre la tasa de variación a partir del Teorema de Tales?

Actividad 3: Fundamentación Teórica sobre el Lugar Geométrico.

Con la ayuda de material impreso y retroproyector, se hará una exposición teórica, procurando hacer referencia al concepto de lugar geométrico, ejemplificando con la circunferencia y la mediatriz de un segmento.

Acción 1: construir una circunferencia.

Acción 2: construir un segmento y obtener su mediatriz.

Actividad 4: Análisis de la Función de Proporcionalidad en el Tangram, usando el Recurso Lugar Geométrico del Cabri-Géomètre.

Construya el gráfico anterior, usando el Cabri, considerando la idea de lugar geométrico. Se recomienda que se cree un sistema de rectas en el que, variando la abscisa en un punto del eje horizontal, su ordenada en el eje vertical también varíe, obedeciendo a la ley de formación de la función.

Acción 1: crear un sistema de ejes cartesiano.

Acción 2: crear con los datos de la Actividad 2 la recta que representa la función.

Acción 3: crear una recta r auxiliar con intersecciones B (1, 0) en la abscisa y A (x, y) en la ordenada.

Acción 4: el punto C $(1, \frac{1}{16})$ de intersección de r con t es punto de la función de proporcionalidad.

4.4 Texto de Apoyo de Geometría

Introducción

El carácter práctico se incorporó desde el comienzo al hacer matemático, y esto puede constatarse desde los primeros registros pictográficos alrededor de 3.500 a.C. Sin embargo, más específicamente para lo que se refiere a la Geometría clásica, podemos caracterizarlo, conforme señalan Pastor y Babini (2000, p.18-19) en Heródoto:

"*El rey de Egipto dividió la tierra de su país entre sus habitantes, otorgando parcelas cuadradas de igual extensión a cada uno de ellos y obteniendo sus principales recursos de las rentas que cada dueño pagaba anualmente. Si un río inviabilizaba una parte de la parcela de un habitante, éste se presentaba ante el rey y le exponía lo ocurrido, en cuyo caso el rey enviaba personas para examinar y medir la extensión exacta de la pérdida y, en lo sucesivo, la renta exigida era proporcional al tamaño efectivo de la parcela. Es en virtud de esta práctica por lo que pienso que comenzó a conocerse la Geometría en Egipto, desde donde se extendió a Grecia*".

Por otro lado, según Ronan (2001), podemos señalar una característica importante acerca del conocimiento matemático dentro del llamado período de la ciencia primitiva, como es, la visión, aunque preliminar, acerca de la abstracción, sobre la cual, después de enfocar los fundamentos de la Aritmética, argumenta que:

"*Inicialmente, surgió la idea de contar: una idea abstracta que se pode pensar sin la presencia de cualquier objeto material. Se podría pensar en el uno o en el dos, o en cualquier número*" (p.17).

Al lado de ello, para enfatizar aún más el carácter práctico, cabe destacar que:

"En cuanto a la Geometría, los egipcios la empleaban sólo para resolver problemas prácticos. Cuando los topógrafos querían parcelar la tierra y medir ángulos rectos, usaban la regla 3-4-5, trazando un ángulo recto con el auxilio de un triángulo de cuerda con lados de 3, 4 y 5 unidades" (p.28).

Los griegos, por su parte, aunque realizaban también problemas derivados de necesidades prácticas como mediciones, ya percibían, de alguna forma, que las Matemáticas debían liberarse de los conocimientos adquiridos de modo exclusivamente empírico. Ribnikov (1991, p.52) indica que a partir de los problemas prácticos se obtuvo la logística que, como atribuciones, tenía las operaciones con números enteros y la extracción de raíces, entre otras y, que, concomitantemente, los pitagóricos recopilan hechos abstractos y los asocian en sistemas teóricos. Por ejemplo, de la Aritmética surge una rama independiente: la teoría de los números.

Los argumentos siguientes pueden ser considerados comunes a todos los libros de historia de las Matemáticas así como a aquellos estudios que se ocupan de clarificar informaciones sobre la llamada Geometría Euclidiana. Alrededor de 300 a.C. a pesar de que se sabe poco sobre la vida de este gran icono, se conoce lo suficiente acerca de sus trabajos científicos y, de entre ellos, el más célebre, la obra popularmente conocida como los *Elementos de Euclides*.

El referido trabajo no contiene toda la Geometría griega ni se trata de una síntesis de la misma, pero representa una parte considerable de la producción Matemática de los griegos. Uno de los aspectos que merecen ser destacados con respecto a este trabajo es el criterio que fue adoptado por Euclides para seleccionar el conjunto de conocimientos en un sistema estructurado por un método. El soporte de esta estructura fue la Lógica Aristotélica, la cual, además de instituir una base que resistió hasta el siglo XIX, también consolidó el llamado método axiomático, del que, a su vez, resultó el método científico.

Los elementos de Euclides inspiraron a muchos pensadores y científicos en la elaboración de sus filosofías y leyes naturales en diferentes campos del conocimiento. Tomando como punto de partida la estructura de la Geometría euclidiana, se hizo posible admitir que las Matemáticas pueden ser construidas a partir de un sistema de axiomas, proposiciones y definiciones, y que tal sistema ayudó a este campo del conocimiento a liberarse del mundo material. Como muy bien advertía ya Platón en alguna de sus argumentaciones al comprobar que las "figuras concretas", en el caso de la Geometría plana, los triángulos, los cuadrados, etc., con sus respectivas propiedades Matemáticas, no existen en el mundo real, pero pueden ser reconocidos por sus propiedades.

Y podemos afirmar que, con el paso del tiempo, como reflejan Davis & Hersh (1985), esta construcción comenzó a incorporar en su estructura sofisticaciones en términos de *rigor*, *abstracción* y *formalismo*. Tales sofisticaciones, entre otras, cuando se han tomado de manera exagerada han ocasionado, incluso para quines aprecian y/o se dedican a las Matemáticas, cierto tipo de dificultades a la hora de comprender determinados aspectos que caracterizan este tipo de conocimiento. Al lado de este hecho, en el caso de la adquisición de conceptos/objetos matemáticos geométricos, tomar en consideración el carácter meramente empírico puede ocasionar también serias dificultades. Por ejemplo, el acceso a la comprensión de las ya mencionadas sofisticaciones o reformulaciones, en cuanto adquisición de conocimiento y de fundamento para comprender adecuadamente ideas Matemáticas más avanzadas, puede comprometer la actividad evolutiva Matemática de alguien interesado en esta área de conocimiento.

En este contexto, entre otros muchos aspectos, y ante la falta de aclaraciones de carácter didáctico acerca de las referidas sofisticaciones, los profesores, en su convivencia diaria en las aulas, han constatado que sus alumnos, incluso al final de la *Enseñanza Fundamental* y/o *Enseñanza Media*, demuestran aún dificultades básicas del tipo: identificar y clasificar figuras geométricas planas como triángulos y cuadriláteros. Y, como consecuencia de tales dificultades, les siguen otras que, añadidas a las anteriores, generan una mala comprensión acerca de las propiedades geométricas, lo que ocasiona una deficiente adquisición de tales conceptos/objetos matemáticos.

Los desafíos ante las dificultades y consecuencias que venimos anunciando, a pesar de ser variadas, necesitan superarse. En sentido general, en la esfera del conocimiento matemático, el presente trabajo pretende, a partir de los postulados de Euclides, no sólo estudiar aspectos relevantes e inherentes al conocimiento matemático, sino también, proporcionar las condiciones necesarias para la adquisición de conceptos geométricos/objetos matemáticos, que estén destinadas a la elaboración y comprensión de Proposiciones, Leyes y Teorías. Para ello, tomamos en consideración, dentro del ámbito matemático, los llamados *problemas internos de la Matemática* apuntados por Davis & Hersh (1985) y, para el caso particular de la Geometría, nos inspiramos en el trabajo de Barbosa (1997).

Por su parte, en el ámbito pedagógico, la fundamentación teórica se centra en la teoría de los *campos conceptuales* (Vergnaud, 1990a) y se inspira en la teoría de las *situaciones didácticas* (Brousseau, 1986) y en la *teoría antropológica* de Chevallard (1992) analizándolas a partir de una reconstrucción de los aspectos fundamentales de la Geometría euclidiana.

El presente estudio se sitúa dentro del campo de la Didáctica de las Matemáticas e intenta investigar si una propuesta didáctica referente a la Enseñanza de la Geometría Plana, que siguió los parámetros que expusimos brevemente en esta introducción, puede propiciar un *Aprendizaje Significativo*[32] en Matemáticas. Más concretamente, se trata de la elaboración, del uso y de la averiguación de si el recurso didáctico de tipo Texto de Apoyo puede considerarse como un *material potencialmente significativo*.

Fundamentación

Aprendizaje Significativo y Materiales Potencialmente Significativos

El abordaje teórico de este estudio se establecerá a través de la teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel, la cual, entre otros factores, afirma que el hombre vive en un mundo de conceptos en lugar de objetos, acontecimientos y situaciones. Según Moreira (2000), para Ausubel, el aprendizaje significativo es un proceso a través del cual las nuevas ideas e informaciones pueden ser aprendidas y retenidas en la medida en que conceptos relevantes o adecuados e inclusivos se encuentren adecuadamente claros y disponibles en la estructura cognitiva del individuo, y de esta forma, sirvan de anclaje para nuevas ideas y conceptos.

[32] Tiene el mismo sentido de aprendizaje significativo propuesto por Ausubel (2002).

Podemos, entonces, destacar que existen dos procesos relacionados con el anclaje de conceptos durante el aprendizaje significativo. El primero de ellos se denomina diferenciación progresiva, y se trata de un proceso casi siempre presente en el *aprendizaje significativo de tipo subordinativo*, cuando los conceptos subsumidores (subsunsores) no se modifican y la nueva información es corroborada o directamente derivada de esa estructura de conocimiento. El segundo proceso es el conocido como reconciliación integrativa, que si bien está relacionado con el *aprendizaje significativo de superordenado*, en él un nuevo subsumidor se construye y pasa a subordinar a aquellos conceptos o proposiciones que permitieron tal construcción.

El presente estudio aplica el *aprendizaje significativo* (Ausubel, 2002) a algunos principios básicos de la Geometría euclidiana. En síntesis, se pretenden aclarar algunos aspectos que posibiliten una mejor comprensión de las propiedades Matemáticas a partir de sus particularidades, en virtud de sus diferencias y similitudes con el fin de llegar a una reestructuración conceptual/objeto matemático y a una reestructuración proposicional entre ellos.

Cabe resaltar que la utilización de recursos didácticos no estará dirigida hacia un estudio simplista de aspectos concretos, como se acostumbra a hacer didácticamente en general, pues tal hecho reforzaría el empirismo exacerbado que ya se criticó anteriormente en este mismo estudio, y sí se realizará un intento por aclarar, a partir de algunas de las distintas formas posibles de utilización de materiales didácticos, como regla y compás, geoplano, dobladura, etc., posibilitar que los alumnos vislumbren propiedades geométricas y, a partir de ellas, que entiendan las propiedades del *rigor*, de la *abstracción*, y del *formalismo,* necesarias para el conocimiento matemático académico.

Este estudio tiene como finalidad específica evaluar si este material producido, es decir, este texto de apoyo, puede ser considerado como *material potencialmente significativo*. Para investigar la posibilidad de tal potencialidad, se solicitará a los alumnos que elaboren mapas conceptuales antes y después de la intervención, buscando determinar si hubo o no evolución conceptual en términos de *diferenciación progresiva* y de sus interrelaciones en términos de *reconciliación integradora*. Y, para complementar lo que se refiere al hacer matemático, se intentó, a partir de un conjunto de 3 actividades, averiguar si se produjo o no evolución con respecto a él, según las intenciones ya mencionadas, analizando tales propósitos desde la perspectiva del aprendizaje significativo.

Geometría Euclidiana: la adquisición de conceptos y la estructuración de leyes y teorías

A los alumnos, ya desde las series iniciales de la *Enseñanza Fundamental*, les son presentadas nociones sobre *formas geométricas* y llegan al final de este nivel de enseñanza aún confusos con respecto a esas formas geométricas. Por este motivo, los alumnos, al no percibir ciertas peculiaridades (propiedades) geométricas, no alcanzan una comprensión adecuada de determinados conceptos. Este tipo de preocupación, como apunta Passos (1998), ha ocasionado dificultades en la actividad docente, tanto por parte del profesor en el acto de enseñanza, como por parte del alumno, en términos de aprendizaje.

La preocupación es mucho más amplia de lo que parece y más antigua de lo que muchos suponen. Por ejemplo, por lo que se refiere a la calidad de la comprensión Matemática adquirida por un individuo, Dieudonné (1990) cita ya a Sócrates, en su diálogo *Menón,* cuando pretende aclarar aspectos importantes sobre una *demostración Matemática*. Por lo tanto, las dificultades para trabajar con el conocimiento bien estructurado han sido un desafío tanto para los sistematizadores, como para aquellos que se dedican a entender en profundidad un determinado conocimiento.

Y, junto a ello, aunque no nos proponemos adentrarnos en aspectos como las numerosas discusiones sobre la revisión de los fundamentos de la Geometría, realizadas en el siglo XVIII, centradas en la revisión científica de los fundamentos de la Geometría euclidiana, sí que podemos rescatar ciertos juicios de valor derivados de tales críticas, que merecen ser destacados. Por ejemplo, uno de ellos dice que:

"*El análisis riguroso de los fundamentos de los "Elementos" de Euclides y, en particular, los axiomas sobre las paralelas y sus numerosas "demostraciones", condujo a los matemáticos al convencimiento de la insuficiencia de todas las "demostraciones" de este axioma*" (Ríbnikov, 1991, p.307-308).

Por otro lado, prestando atención a aspectos desarrollados a lo largo del referido siglo XVIII, podemos aún hacer referencia a algo que anima a desarrollar las intenciones didácticas presentes en la elaboración del presente texto de apoyo. Pues, para Ríbnikov (1991), en dicho período, autores franceses de renombre, como D'Alembert, Bezout o Legendre, entre otros, confeccionaron textos escolares que separaban la enseñanza de la Geometría del sistema geométrico esquemático de Euclides. En síntesis, introdujeron la métrica y el movimiento, una aritmetización de la teoría de las relaciones y proporciones, el simbolismo algebraico y los elementos algebraicos y el empleo de los radicales. Por lo tanto, cabe indicar que, todavía, los textos escolares de Geometría de hoy están organizados según las bases que se establecieron a finales del siglo XVIII.

Por el momento, no se tiene la intención de analizar aspectos referentes a la caracterización de las dificultades didácticas de la Geometría euclidiana, sino que se pretende centrar todos los esfuerzos en hacer entender la estructuración básica de la mencionada Geometría y, con ello, intentar enfocar aquellos aspectos que puedan auxiliar didácticamente a profesores y alumnos de la *Enseñanza Fundamental* y *Enseñanza Media* para trabajar con este tipo de conocimiento.

Presentando los presupuestos que Fundamentan la Geometría Euclidiana

Los argumentos que exponemos a continuación han sido compartidos por autores como Brunschvicg (1929), Boyer (1996), y Pastor y Babini, (2000), entre otros, y el presente trabajo tiene por objeto enfatizar la importancia que puede encerrar, a la hora de caracterizar las dificultades que deben enfrentarse, el momento histórico en el que surgió y/o se utilizó un determinado objeto/concepto matemático. Más en particular, a partir de una visión global de la Geometría clásica, en cuanto a la capacidad de sistematización y su influencia en el desarrollo de las Matemáticas, así como de las otras ciencias, se intenta promover una mejor comprensión del hacer matemático en profesores y alumnos.

Los elementos de Euclides no conforman la totalidad de la Geometría de la época, tampoco representan un resumen de la Geometría griega, pero contienen gran parte de las Matemáticas elaboradas por matemáticos griegos anteriores a Euclides e, incluso, por él mismo. Cabe destacar que, utilizando un criterio prefijado, los elementos se sistematizaron a partir de la selección de un conjunto de conocimientos estructurados por un sistema de métodos que se benefició de varios factores, entre los cuales se pueden destacar dos. El primero fue la disponibilidad de tiempo que se tuvo para desarrollar este trabajo científico; y el segundo se refiere al conocimiento de que se disponía, es decir, la gran cantidad de propiedades Matemáticas ya desarrolladas especialmente por los pitagóricos, Arquitas, Teeteto y Eudoxo.

Los dos factores destacados anteriormente posibilitaron una selección cuidadosa de todo el material adecuado para organizar un sistema de conocimientos matemáticos. Se optó por una estructura unitaria que tenía como base de sustentación la Lógica Aristotélica. De esa forma, Euclides construyó un modelo matemático que consiguió resistir durante muchos siglos a las críticas más variadas. Tal método hoy se conoce con el término *axiomático* y fue el responsable del surgimiento del llamado *método científico*. Las consideraciones que hemos establecido hasta ahora respecto de este método se consolidan cuando consideramos el argumento de Aristóteles y, siguiendo a Pastor y Babini (2000), dicho método científico debe ser considerado:

"[...] Como el único a seguir en toda ciencia deductiva y que fue adoptado por otros científicos griegos y más tarde por científicos modernos, para convertirse hoy en el método general empleado en las Matemáticas y en otras ciencias. Consiste en el anuncio previo de las propiedades que han de admitirse sin demostración para deducir de ellas, sin otro recurso que no sea la lógica, el conjunto de todas las proposiciones del sistema. Estas propiedades básicas se llaman 'axiomas' y Euclides las designó con el nombre de 'postulados' y 'nociones comunes' " (p. 72).

Organización estructural de la Geometría euclidiana

La estructuración del conocimiento geométrico por Euclides, como ya fue explicado anteriormente, se realizó partiendo de cinco postulados y cinco axiomas, los cuales, debido a las pretensiones pedagógicas del presente estudio, serán presentadas respectivamente a continuación, siguiendo a Machado (2001).

Postulados (p.31):

1. *Es posible trazar una línea recta desde cualquier punto hasta cualquier punto;.*

2. *Cualquier segmento de recta finito puede ser prolongado indefinidamente para construir una línea recta;*

3. *Dados un punto cualquiera y una distancia cualquiera, se puede trazar un círculo de centro en aquel punto y radio igual a la distancia dada.*

4. *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí;*

5. *Si una línea recta corta a otras dos, de modo que la suma de los dos ángulos interiores de un mismo lado sea menor que dos ángulos rectos, entonces las otras dos rectas se cruzarán, si son prolongadas indefinidamente, del lado de la primera recta en la que se encuentran los dos ángulos citados.*

Axiomas (p.32):
1. *Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí;*
2. *Si partes iguales fueran aumentadas en cantidades iguales, los resultados obtenidos serán iguales;*
3. *Si cantidades iguales fueran substraídas por cantidades iguales, los restos obtenidos serán iguales;*
4. *Cosas que coinciden unas con otras son iguales entre sí;*
5. *El todo es mayor que cada una de las partes.*

Partiendo de estos postulados y axiomas, Euclides consiguió elaborar 465 proposiciones, de las cuales 372 son teoremas y 93 son problemas. Durante este proceso constructivo, pudo tanto conceptuar como elaborar tales proposiciones, pero seguramente esta producción, en su totalidad, no representa el conocimiento matemático griego producido hasta entonces, ni tampoco se trata de una síntesis del mismo. Además, cabe destacar que los elementos de Euclides tuvieron y aún conservan un elevado valor didáctico, debido, en gran parte, a la forma en como fue organizado tal conocimiento. No obstante, es importante alertar acerca de una confusa difusión relativa a esta obra, sobre la cual Boyer (1996, p.78) inmediatamente al comienzo del tema que aborda la Teoría de los Números, la resume en una sola línea: "*Frecuentemente se piensa, de forma equivocada, que Los elementos de Euclides sólo tratan de Geometría*".

Los Elementos de Euclides: alusión al objeto de estudio de los 13 volúmenes o capítulos.

Existen algunas aportaciones relativas a los Elementos de Euclides que pueden ayudar a la comprensión de los campos de la Geometría plana y de la Geometría espacial, así como de otros asuntos tratados que no son esencialmente geométricos. Boyer (*ibid*) y Pastor y Babini (2000), entre otros, de forma panorámica, señalan que la obra titulada *Los Elementos de Euclides* está constituida por 13 libros en los que se contienen 465 proposiciones, de las cuales, 93 pueden ser consideradas como problemas, mientras que las 372 restantes son teoremas.

Según estos mismos autores, también de forma general, indican con relación a los 13 (trece) libros o capítulos, que los seis primeros tratan de la Geometría plana elemental, sobre la que se emiten 173 proposiciones; el libro I contiene los teoremas familiares sobre congruencia de triángulos y sobre construcciones simples con regla y compás; el libro II, si bien de forma simple, ya alude a la estructura de un Álgebra geométrica; los libros III y IV están dedicados al estudio de la Geometría del círculo; el libro V se dedica a tratar tópicos geométricos relativos a la Matemática de la época; y, finalmente, en el libro VI, el objeto de interés consiste en la prueba de teoremas en el ámbito de las razones y proporciones subyacentes a los triángulos, paralelogramos y otros polígonos. Los libros VII, VIII y IX se dedican al estudio de las proporcionalidades, subyaciendo a tal estudio ideas sobre la teoría de los números. Junto a ello, es importante destacar que el libro X, además de ser el que contiene más proposiciones, 115 en total, trata también de la inconmensurabilidad. Por último, los libros XI, XII y XIII versan, principalmente, sobre la Geometría en el espacio.

El propósito de esta propuesta pretende cumplir, en una dimensión muy preliminar, algo que se asemeje al valor didáctico en relación con la obra Los elementos de Euclides. Por eso, en cuanto meta, no puede confundirse como un intento de reconstrucción de la Geometría euclidiana.

Al principio se busca caracterizar una visión panorámica de ese campo de conocimiento y, en virtud de la meta anunciada anteriormente, no siempre se llevará a cabo una profundización de los contenidos abordados. El mayor interés de la propuesta radica en la intención de organizar la comprensión de los profesores de la *Enseñanza Fundamental* y *Enseñanza Media* sobre cómo podrán iniciar a sus alumnos en el mundo matemático, a partir de la Geometría.

Resumiendo, pretendemos establecer las propiedades necesarias para la adquisición de conceptos geométricos/objetos matemáticos (cuadrado, rectángulo y rombo), que incluye la Elaboración, la Comprensión de Proposiciones y Teoremas, partiendo del importante papel de las Demostraciones en la construcción del conocimiento matemático.

En función de la visión panorámica que hemos presentado anteriormente sobre los elementos, ya es posible percibir magnitud que posee la obra, pero, en todo caso, no se pretende en este estudio analizar todos esos contenidos matemáticos. Por tanto, e intentando de nuevo ofrecer una visión global, en este caso sobre acerca del contenido de la Geometría euclidiana plana, tal y como fue presentada anteriormente, contenida en los libros I al VI, se seleccionaron, a partir de Pastor y Babini (*ibid*), veinticuatro propiedades/proposiciones (Cuadro 04 – Capítulo, p. 149) con la finalidad de situar los propósitos de la Geometría euclidiana plana en cuanto campo matemático de interés del presente estudio.

Metodología

El acto educativo, considerado de una forma abarcadora, ha experimentado diversos tipos de dificultades, tanto por parte de los alumnos en sus aprendizajes, como por parte de los profesores en sus enseñanzas. La didáctica surge, en cierto modo, con la finalidad de minimizar estas dificultades y, en esta dirección, los esfuerzos de profesores e investigadores han resultado ser de una gran importancia y aún más en este contexto, en particular en el ámbito de la didáctica de las Matemáticas, que se encaja con la elaboración y concretización del presente texto de apoyo.

La organización acerca de la comprensión de la construcción do conocimiento matemático se desarrolló en este trabajo procurando enfocar los conceptos/objetos matemáticos dentro del ámbito de la Geometría euclidiana, según las propiedades de las formas geométricas de cuadrilátero del tipo paralelogramo. Durante el proceso demostrativo (acto/acción de la Demostración), se tiene la perspectiva de concatenar conceptos/objetos matemáticos con la elaboración/comprensión de proposiciones y Teoremas.

Lo que se pretende con la organización/perspectiva anterior es propiciar a los alumnos una visión formal global del modo en como el conocimiento matemático se encuentra institucionalizado en sus bases. Y para dar cuenta de estas intenciones fue elaborada una secuencia didáctica constituida por tres situaciones didácticas que serán adecuadamente explicadas más adelante en los dos subapartados siguientes.

Síntesis de las Intenciones didácticas en los procedimientos adoptados en el texto de Apoyo.

La idealización organizacional de este texto fue concebida en tres etapas que estructuradas a partir de tres situaciones didácticas, constituidas a su vez por actividades didácticas. Los propósitos educativos matemáticos de dichas actividades pueden percibirse a través de la diferencia que presentan entre ellas, según los propósitos de sus intenciones pedagógicas.

El conjunto de las tres situaciones busca, en términos axiomáticos, aludir al campo del conocimiento matemático a partir del hacer matemático en el ámbito de la Geometría plana. Y, además, señalar que el rigor, la abstracción y la utilización formal que deben aplicarse a las propiedades, proposiciones, leyes y teorías son aspectos necesarios para una comprensión adecuada de la "construcción" del conocimiento matemático. Y que todo ello puede muy bien caracterizarse mediante una explanación adecuada por parte del profesor a través de una ejecución didáctica conveniente de lo que se denomina demostración Matemática.

Las actividades propuestas persiguen contemplar en sus acciones, en lo que se refiere a su ejecución, la necesidad/posibilidad de vislumbrar las propiedades a partir de las construcciones geométricas. Y, con ello, ofrecer condiciones al alumno de poder identificar regularidades al analizar cuidadosamente las semejanzas y diferencias entre las formas geométricas y, a partir de las propiedades concebidas, comprender mejor los conceptos o/y objetos matemáticos. Y por último, se intenta discutir en un nivel más profundo lo que señalamos anteriormente, a través de la resolución de un problema, procurando contextualizar el papel de las propiedades y conceptos adquiridos para enfocar el hacer matemático en términos de proposiciones, teoremas y demostraciones.

Visión Panorámica de las Tareas que constituyen este Texto de Apoyo

El campo matemático de este estudio procura enfocar la Geometría, en especial, la Geometría plana; y, para dar cuenta de ello, se organizaron tres etapas. Inicialmente, antes de la primera etapa, ya se habían detectado las concepciones de los alumnos sobre lo que se pretende enseñar, para a continuación, intentar enseñarlo de acuerdo con lo que ellos ya saben, buscando conducirlos hacia lo que es compartido por quienes trabajan con este tipo de conocimiento. Y, para una mejor comprensión de los propósitos delineados por estas intenciones didácticas, se presentan las siguientes tres etapas:

Etapa 1: Esta etapa consta de una situación que está compuesta por dos actividades. En la primera actividad, al estudiar los movimientos y construcciones con regla y compás, los alumnos entran en contacto de forma expositiva con los axiomas básicos, y también con la definición de congruencia y con el teorema de los ángulos externos. En la segunda actividad se pretende repasar las propiedades/proposiciones más frecuentes en el ámbito de la Geometría plana en la *Enseñanza Fundamental* y *Enseñanza Media*.

Etapa 2: En esta etapa hay tres actividades. En las dos primeras se utilizan regla y compás. En ambas, se pide a los alumnos que con tales recursos construyan formas geométricas planas, si bien la diferencia entre ambas radica en el tipo de formas que son solicitadas. Así, en la primera actividad, las formas solicitadas fueron: polígonos, cuadriláteros y rombo, mientras que en la segunda fueron: rectángulo, cuadrado y rombo. La tercera actividad está referida al uso de las propiedades adquiridas, con la intención de probar una proposición.

Etapa 3: La situación 3 consta de tres actividades, todas ellas referidas a la demostración de un mismo problema, relacionado con las ideas edificadas en las situaciones 1 y 2 anteriores. Lo que tienen de diferente entre sí las tres actividades en cuestión, se refiere a los procedimientos adoptados que conducen a la obtención de la respuesta, y que derivan de las condiciones delineadas en cada una de las actividades propuestas.

Propuesta Didáctica

Presentación

Los argumentos anteriores posibilitan imaginar que un conjunto de rectas también puede conducir a la noción de plano. Cabe preguntar: ¿cómo hacer para organizar tales ideas e incrementarlas con otras? Por ejemplo, ¿hay otras formas geométricas además de planas y/o espaciales? El punto de partida, conforme vimos inicialmente, es procurar identificar las propiedades de cada una das formas estudiadas e, a continuación, averiguar cuáles de ellas son comunes y cuáles son específicas.

El respaldo teórico geométrico presentado anteriormente, así como los aspectos metodológicos del presente estudio son compatibles con las apreciaciones de Barbosa (1997) que utiliza sistemáticamente los axiomas seleccionados por Pogorélov con la intención de posibilitar a los alumnos adquirir, de forma mucho más rápida, la comprensión de los teoremas más importantes de la Geometría plana. En síntesis, presenta los cuatro axiomas de Euclides por este orden: *incidencia y orden*, *medición de segmentos*, *medición de ángulos* y *congruencia*; a continuación, introduce el *teorema del ángulo externo* con la finalidad de aportar teóricamente aspectos que le permitan aclarar el quinto y último axioma de Euclides, el axioma de las paralelas. Cabe destacar que las formas de presentación utilizadas para presentar tales axiomas no se corresponden exactamente ni con la forma original de los axiomas de Euclides, ni con la utilizada por Barbosa.

Por lo que respecta a los postulados originales de Euclides, el axioma de incidencia y orden tiene la finalidad de dar cuenta de los postulados I y II; los axiomas de medición de segmento y de ángulo, se refieren al postulado III; el de congruencia, al postulado IV; y, por último, el axioma de las paralelas, por su parte, al V postulado. Por tanto, lo que se busca con esta propuesta es utilizar la regla y el compás para, a partir de la construcción de cuadrados, rectángulos y rombos, en función de las propiedades geométricas indicadas, comprender el papel de los postulados en la organización del conocimiento matemático geométrico.

El uso del teorema del ángulo externo en el texto de Barbosa (1997) sugiere, como consecuencia, la "*proposición: la suma de las medidas de dos ángulos internos cualesquiera de un triángulo es menor que 180º*." (p. 50), de la cual derivan dos corolarios. Sin embargo, interesa al presente estudio utilizar tan sólo el siguiente corolario: *"[…] si dos rectas distintas m y n son perpendiculares a una tercera, entonces m y n no se interceptan*" (p.51), pues alude a comprender de forma directa la condición de paralelismo. Con ello, se hace posible definir rectas paralelas. Como se indicó anteriormente, se puede percibir el motivo por el cual dicho teorema aparece dentro del axioma V, esto es, en el axioma de las paralelas.

Secuencia Didáctica

Situación 1: Proposiciones/propiedades presentes en los 6 primeros libros de Euclides que posibilitan aludir al campo de la Geometría plana.

Descripción de la Situación

La situación está compuesta por dos actividades y se centra en presentar y/o representar, un conjunto de Axiomas que según Barbosa (*op. cit.*, p. i) *"[...] tienen la ventaja de conducir al aluno rápidamente hacia los teoremas más importantes de la Geometría Plana*". Y, a continuación, analiza la significación en la medida en que revisa algunas de las propiedades empleadas en la presentación de los ya mencionados axiomas.

Actividad 1: Alusión a la Geometría plana.

Acción 1: Presentación de los Axiomas de Incidencia y Orden.

Acción 2: Presentación de los Axiomas sobre Medición de Segmentos.

Acción 3: Presentación de los Axiomas sobre Medición de Ángulos.

Acción 4: Definición de Congruencia.

Acción 5: Teorema del Ángulo Externo.

Acción 6: Presentación del Axioma de las Paralelas.

Actividad 2: Propiedades de la Geometría Plana.

Acción 1: Identificar algunas propiedades/proposiciones que forman parte del contenido de cinco de los seis capítulos (libros) que constituyen la Geometría plana.

Situación 2: Identificación de las Propiedades/características de las formas geométricas planas: Polígono, Cuadrilátero, Paralelogramo, Cuadrado, Rectángulo y Rombo.

Descripción de la Situación

La situación se compone de dos actividades, con las que se busca identificar y sistematizar las características y/o propiedades para concebir de forma adecuada las formas geométricas planas: Polígono, Cuadrilátero, Paralelogramo, Cuadrado, Rectángulo y Rombo. La primera actividad se ocupa de conceptuar y relacionar las tres primeras formas mencionadas, mientras que la segunda se ocupa de las otras tres. Además, de modo conjunto, se profundiza en la selección de aspectos en términos de semejanzas/diferencias con el fin de posibilitar la construcción de significados o la resignificación de las propiedades generales y específicas de las seis formas geométricas tratadas en esta situación, y que constituyen objetos de estudio habituales en la *Enseñanza Fundamental* y *Enseñanza Media*.

Actividad 1: Propiedades/características de las formas geométricas planas Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo.

Acción 1: establecer una lista con las propiedades características de las formas geométricas Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo.

Acción 2: organizar tales propiedades en el Cuadro 14.

Cuadro 14: Características relevantes de los Polígonos, Cuadriláteros y Paralelogramos.

Características / Figuras	En cuanto a los lados	En cuanto a los ángulos	En cuanto a las diagonales
Polígono			
Cuadrilátero			
Paralelogramo			

Acción 3: conceptuar las referidas formas anteriores, estudiando sus características en términos de semejanzas y/o diferencias.

Acción 4: organizar tales características en términos de semejanzas y/o diferencias en Cuadro 15.

Cuadro 15: Semejanzas y Diferencias entre Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo.

Semejanzas/ Diferencias Figuras	Semejanzas	Diferencias
Polígono y Cuadrilátero		
Polígono y Paralelogramo		
Paralelogramo y Cuadrilátero		
Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo		

Acción 5: organizar las propiedades generales y específicas de los polígonos, cuadriláteros y paralelogramos en el Cuadro 16.

Cuadro 16: Propiedades Generales y Especificas de Polígonos, Cuadriláteros y Paralelogramos.

Figuras Propiedades generales/específicas	Polígono	Cuadrilátero	Paralelogramo

Actividad 2: Propiedades/características de los cuadriláteros (cuadrado, rectángulo y rombo).

Acción 1: establecer una lista con las propiedades características de las formas geométricas (cuadrado, rectángulo y rombo).

Acción 2: organizar tales propiedades en el Cuadro 17.

Cuadro 17: Aspectos relevantes de los Cuadrados, Rectángulos y Rombos

Características / Figuras	En cuanto a los Lados	En cuanto a los ángulos	En cuanto a las diagonales
Rectángulo			
Cuadrado			
Rombo			

Acción 3: conceptuar las referidas formas anteriores, estudiando sus características en términos de semejanzas y/o diferencias.

Acción 4: organizar tales características en términos de semejanzas y/o diferencias en el Cuadro 18.

Cuadro 18: Semejanzas y Diferencias entre Cuadrados, Rectángulos y Rombos

Semejanzas/ Diferencias / Figuras	Semejanzas	Diferencias
Cuadrado y Rectángulo		
Cuadrado y Rombo		
Rectángulo y Rombo		
Cuadrado, Rectángulo y Rombo		

Acción 5: organizar las propiedades generales y específicas de los polígonos, cuadriláteros y paralelogramos en el Cuadro 19.

Cuadro 19: Propiedades Generales y Específicas de Cuadrados, Rectángulos y Rombos.

Figuras / Propiedades generales/específicas	Rectángulo	Cuadrado	Rombo
Lados opuestos paralelos congruentes	X	X	X
Medida de los cuatro lados congruentes		X	X
todos los ángulos congruentes (rectos)	X	X	
Ángulos opuestos congruentes	X	X	X
Diagonales congruentes	X	X	
Diagonales se cortan en el centro	X	X	X
Diagonales perpendiculares entre sí (forman ángulos rectos)		X	X

Actividad 3: Prueba de la proposición: "Si todo cuadrilátero es un polígono, y todo paralelogramo es un cuadrilátero, entonces todo paralelogramo es un polígono".

Acción 1: Presentación de la Proposición 1 - Todo cuadrilátero que posee los lados opuestos paralelos es un paralelogramo.

Acción 2: Presentación de la Proposición 2 - Todo cuadrilátero que posee cuatro lados, cuatro ángulos y cuatro vértices es un polígono.

Acción 3: Uso del *1er. Axioma de Euclides* (verdad evidente).

Situación 3: Conceptos, propiedades y sus implicaciones en las demostraciones

La 3ª Situación se desarrolló a través de tres Actividades consistentes en destacar una de las características fundamentales del conocimiento matemático como son las demostraciones. Tales actividades, a pesar de ser distintas, tratan sobre el mismo problema en términos de demostración y difieren tan sólo en la forma que adoptan para llegar a la conclusión. En particular, esto depende de la elección de los conceptos y/o propiedades que son seleccionados en cada una de las actividades, para, conjuntamente, organizarse con la intención de encontrar un procedimiento seguro a partir del cual poder edificar las tres demostraciones.

Actividad 1: Si admite la proposición: *"Todo ángulo raso o llano mide ciento ochenta grados"* y, como consecuencia, la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.

Acciones: secuencia de procedimientos adoptados para llegar al resultado.

Actividad 2: Si admite que los triángulos exteriores al cuadrilátero PQRS sean rectángulos isósceles.

Acciones: secuencia de procedimientos adoptados para llegar al resultado.

Actividad 3: si admite que los triángulos rectángulos exteriores al cuadrilátero PQRS sean rectángulos escalenos.

Acciones: secuencia de procedimientos adoptados para llegar al resultado.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

El presente capítulo está organizado en tres partes. La primera trata del análisis de los cuestionarios diagnósticos y de las evaluaciones de aprendizaje de los alumnos, que se caracterizaron conforme a dos aspectos. Uno de ellos, el más inmediato, se refiere a los porcentajes, tanto de las respuestas a las preguntas en sí, cuanto de los contenidos y motivos de las Acciones. El segundo aspecto pretende identificar, a través de las interrelaciones entre los contenidos y motivos de las acciones, hasta qué punto los alumnos consiguen o no atribuir sentido ante los significados construidos a partir de actividades didácticas elaboradas que buscan contemplar ese aspecto. Cabe destacar que estos elementos, conjuntamente con el análisis de los porcentajes, se ocupan también del análisis de resultados extraídos tanto de las respuestas a los cuestionarios como de los contenidos y motivos de la acción.

La segunda parte del análisis trata sobre los mapas conceptuales producidos por los alumnos antes y después de la intervención. Se adoptaron como parámetro los cuatro mapas conceptuales sobre cada uno de los campos de las Matemáticas abordados en este estudio, tomando como criterios, de una forma amplia, la *selección conceptual* (1); la *inclusividad* (2) y las *relaciones significativas* (3). Es importante destacar que, tanto los criterios como los citados mapas, están pormenorizadamente descritos en el Capítulo 4.

La tercera parte de este análisis busca asimismo utilizar los ya referidos mapas del Capítulo 4 a modo de parámetros, y que, representados en sus versiones finales, caracterizan los cambios que en ellos se han producido desde sus primeras versiones.

5.1 Análisis y Discusión de los Resultados de Combinatoria

En este análisis, se pretende evaluar si hubo o no una evolución en las aptitudes Matemáticas de los alumnos en lo referente a su desempeño en el campo de la Combinatoria, llegando a diferenciar los recuentos simples de los recuentos combinatorios. Y, junto a ello, se busca también evaluar la forma en que los alumnos conciben los principios aditivos, multiplicativos, así como las técnicas de Variaciónes, Permutaciones y Combinaciones ordinarias y con repetición.

5.1.1 Análisis de los Cuestionarios Diagnósticos y Evaluación del Aprendizaje

Análisis de la 1ª Cuestión

En esta parte se realizará el *análisis de los cuestionarios diagnósticos y de la evaluación del aprendizaje*, para, a continuación, establecer la *delimitación del campo de la Combinatoria*. En la Tabla 1, (**1**) representa *Recuento según condición específica*, (**2**) *Recuento de Subconjuntos y/o Agrupaciones*; (**R**) las *Ideas Relevantes, como Posibilidades, Decisiones, etc.* y, (**I_1**) las *Ideas Irrelevantes por no-adecuación con el* *recuento*. Además, **a** corresponde al número de veces que cada una de las características fue referida por los alumnos, mientras que **b** indica el número de veces que tal referencia no se llegó a hacer.

Tabla 2: Ideas Matemáticas. Características del Campo.

Criterios / Intervención		otras				1		2	
		I_1		R					
		a	b	a	b	a	b	a	**b**
Antes	Ideas	7	15	6	16	9	13	0	22
	%	31,82	68,18	27,27	72,73	40,91	59,09	0,00	100
Después	Ideas	3	19	12	10	19	3	11	11
	%	13,64	86,36	54,55	45,45	86,36	13,64	50,00	50,00

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas en la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 02: "Es la parte de las Matemáticas que estudia las relaciones de recuento".
Alumno 11: "Combinatoria es el estudio de los principios de recuento".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 21: "Es el estudio de las variaciones, permutaciones y combinaciones".
Alumno 06: "Es algo sobre lo que tenemos respuestas sólo a partir de otro condicionamiento".

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 19: "Es la parte del Álgebra que estudia las relaciones de recuento".
Alumno 25: "Técnica Matemática por la cual se consiguen solucionar problemas lógicos referidos al recuento".

Presentación de Algunas Respuestas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 06: "Es el campo de las Matemáticas que estudia el recuento de elementos de un conjunto bajo una condición determinada"
Alumno 25: "Campo de las Matemáticas que se ocupa del recuento de los subconjuntos mediante condiciones dadas".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 19: "Es el campo de las Matemáticas que trata sobre problemas de recuento".
Alumno 21: "Es el campo matemático que trabaja con agrupaciones de conjuntos finitos".

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 16: "Asociar de varias maneras un conjunto con algunos elementos con sus formas (permutación, recuento, etc.)".
Alumno 31: "Es la parte da Matemática que trabaja con las posibilidades".

Discusión de los Valores Porcentuales

Al llevar a cabo una comparación entre 'las ideas irrelevantes referidas al recuento', respectivamente antes y después de la intervención, se percibe una disminución de I_1 (a) (31,82%) a I_1 (a) (13,64%), mientras que se produce un aumento de I_1 (b) (68,18%) a I_1 (b) (86,36%) con lo que no hay indicios de mejora, según este criterio. Por otro lado, las variaciones contrarias siguientes acerca de las 'ideas relevantes' señalan la aparición de una mejora por parte de los alumnos en relación a este criterio, cuando se comparan, también de forma semejante, respectivamente, los resultados obtenidos antes y después de la intervención, es decir, R (a) (27,27%) con R (a) (54,55) y R (b) (72,73%) con R (b) (45,45%). Y sobre las ideas de 'Recuento según condición específica' y de 'Recuento de Subconjuntos y/o Agrupaciones' se registran, respectivamente, un aumento seguido de una disminución antes y después de la intervención: **1**(**a**) del (40,91%) pasó al (86,36%), **1**(**b**) del (59,09%) pasó al (13,64%) y **2**(**a**) del (00,00%) pasó al (50,00%), **2**(**b**) del (100%) pasó al (50,00%). Tales variaciones registran que se produjo una mejora por parte de los alumnos también en estos dos criterios.

Discusión de las Respuestas

Considerando que (**1**) *representa recuento según condición específica*, (**2**) *recuento de subconjuntos y/o agrupaciones*; (**R**) *las ideas relevantes como posibilidades, decisiones, etc*. y, (**I_1**) *las ideas irrelevantes por no-adecuación con el recuento*, fue posible identificar que antes de la enseñanza los alumnos (**02**) y (**11**) representan ejemplos 'compatibles con los propósitos educativos'. Los alumnos (**21**) y (**06**) representan ejemplos de lo que se denominó como 'poco compatibles con los propósitos educativos', también en función de esos mismos criterios. Por último, los alumnos (**19**) y (**25**) están incluidos entre aquellos que presentan 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Después de la intervención, los alumnos (**06**) y (**25**) pasan, respectivamente, de 'poco compatibles con los propósitos educativos' y 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'compatibles con los propósitos educativos'. El alumno (**19**) pasó de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'poco compatible con los propósitos educativos', mientras que el alumno (**21**) se mantuvo como parte de aquellos 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Por último, los alumnos (**16**) y (**31**) son ejemplos de quienes, después de la enseñanza, continuaron con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Resultado: La concepción de los alumnos sobre algunas ideas que hacen posible aludir a las bases del campo matemático de la Combinatoria, tales como *recuento según condición específica, recuento de subconjuntos y/o agrupaciones, posibilidades, decisiones, etc*., observadas anteriormente en la discusión acerca de la comparación porcentual de las informaciones y de las respuestas extraídas sobre las concepciones encontradas en los alumnos antes y después de la intervención, vino a caracterizar el hecho de que se produjo una buena adquisición/comprensión de tales ideas.

Análisis de la 2ª Cuestión

En esta cuestión, se pretendía establecer la cuantificación, teniendo en cuenta los siguientes aspectos, en función de las respuestas de los alumnos: *no justificó* (**NJ**); *justificación inadecuada* (**JI**); *justificación adecuada* (**JA**).

Tabla 3: Identificación de recuento de Tipo Combinatorio.

Intervención \ Criterios		NJ	Justificación	
			JI	JA
Antes	alumnos	5	17	0
	%	22,73	77,27	0,00
Después	alumnos	2	6	14
	%	9,09	27,27	63,63

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 01: "Sí, pues en el recuento simple no existen métodos, reglas para realizar el contenido matemático".
Alumno 21: "Sí, el recuento simples no requiere de normas, pero la Combinatoria sí".

Respuestas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 02: "No, porque no sé".
Alumno 13: "Sí. En el recuento simple las condiciones son más visibles".

Presentación de Algunas Respuestas extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 02: "Sí, recuento simple es un recuento realizado uno por uno, o una enumeración de objetos. Combinatoria es un recuento de grupos de objetos, donde se obedece una condición dada".
Alumno 21: "¡Sí! En el recuento simple sólo adicionamos uno a uno. Y en la Combinatoria el recuento se produce después de combinar objetos de un determinado conjunto respetando el enunciado de la cuestión".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 01: "Sí, pues existe recuento, pero tiene en cuenta la naturaleza del recuento (de cada uno)".
Alumno 13: "Sí. Combinatoria es un recuento con una condición de existencia a través de grupos en los que se da la tal condición".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 06: "¡Sí! Pues en el recuento simple no entran los casos de combinación de elementos!".
Alumno 30: "No, porque recuento simple también es Combinatoria".

Discusión de los Valores Porcentuales

Ante las afirmaciones anteriores, podemos apuntar que se produjo una disminución superior a la mitad de **NJ**, pasando del (22,73%) al (9,09%). Además, se dio también una disminución de **JI**, pasando del (77,73%) al (27,27%), seguido de un aumento considerable de **JA,** que pasó del (0,00%) al (63,63%). Este encadenamiento de reducción de las no-identificaciones y de las justificaciones inadecuadas, acompañado por el aumento en las identificaciones justificadas adecuadamente, nos está hablando de una buena evolución en lo que se refiere a este criterio de delimitación del campo de la Combinatoria.

Discusión de las Respuestas

Al comienzo, antes de la intervención, ningún alumno presenta justificación adecuada (**JA**); por lo tanto, no hubo entre ellos ejemplos que resultasen 'compatibles con los propósitos educativos'. Por su parte, los alumnos (**01**) y (**21**) representan ejemplos de lo que denominamos como 'poco compatibles con los propósitos educativos' y se encuentran entre quienes presentaron justificación inadecuada (**IJ**). Por último, los alumnos (**02**) y (**13**) forman parte de los que no justificaron (**NJ**) y se incluyen entre los que se manifiestan 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Después de la intervención, los alumnos (**02**) y (**21**) pasan de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' y 'poco compatibles con los propósitos educativos' a 'compatibles con los propósitos educativos'. El alumno (**13**) pasó de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'poco compatible con los propósitos educativos', mientras que el alumno (**01**) se mantuvo formando parte de los 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Por último, los alumnos (**06**) y (**30**) representan ejemplos de aquellos que se manifiestan "con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Resultado: La discusión de los datos derivados de la comparación porcentual de las informaciones con los de las respuestas extraídas, expresadas por los alumnos antes y después de la intervención, asociados entre sí, nos indican que se produjo una excelente *identificación y/o comprensión del recuento de tipo combinatorio* por parte de algunos de estos alumnos.

Análisis de la 3ª Cuestión

En la tabla empleada para analizar esta cuestión (**IA**), (**DU**) y **D** (**I_2 y S**) representan, respectivamente, *identificación adecuada*, *decisión única* y *decisiones* (*independientes* (**I_2**) y *sucesivas* (**S**)).

Tabla 4: Principios Fundamentales de Recuento.

Intervención \ Criterios		Identificación			Utilización			
		NR	RI	IA	NR	RI	DU	D(I_2 e S)
Antes	alumnos	4	18	0	22	0	0	0
	%	18,18	81,82	0,00	100	0,00	0,00	0,00
Después	alumnos	2	9	11	2	12	2	6
	%	9,09	40,91	50,00	9,09	54,54	9,09	27,27

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 13: no respondió.
Alumno 21: "Aditivo→cuando se adicionan elementos de varios conjuntos. Multiplicativo →cuando multiplicamos un determinado elemento".

Presentación de Algunas Respuestas extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 10: "En el principio aditivo es atribuida una única condición y en el multiplicativo son atribuidas varias condiciones".
Alumno 21: "Aditivo →cuando tenemos sólo una naturaleza. Multiplicativo →cuando tenemos dos naturalezas independientes, luego multiplicamos".

Respuestas extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 13: "Aditivo – conjunto de recuentos. Multiplicativo – producto de recuentos independientes".
Alumno 26: "Aditivo: no respondió. Multiplicativo: tomamos decisiones independientes y aleatorias".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 01: "Principio aditivo→trata de la adición y sustracción. Principio Multiplicativo →trata de la multiplicación y división".

Alumno 16: "Aditivo: número posible de recuentos. Multiplicativo: número de eventos que pueden ocurrir".

Discusión de los Valores Porcentuales

La comparación de los datos antes y después de la intervención acerca de la identificación de los principios aditivos y multiplicativos ante la disminución de **NR**, pasando del (18,18%) al (9,09%) y también de **RI**, que pasa del (81,82%) al (40,91%), seguida del aumento de **IA** del (0,00%) al (50,00%), hace posible la afirmación de que buena parte de los alumnos logró identificar tales principios. Y, en lo que atañe a la utilización de tales principios, la disminución de **NR** del (100%) al (9,09%), de **RI** del (0,00%) al (54,54%), seguida del aumento de **DU** del (0,00%) al (9,09%) y de **D(I_3 y S)** del (0,00%) al (27,27%), indican, respectivamente, una pequeña mejora en la caracterización del principio aditivo, seguida de otra mucho más acentuada del principio multiplicativo.

Discusión de las Respuestas

Antes de la intervención, ningún alumno presenta justificación adecuada (**IA**), ni registro de utilización de decisión única (**DU**) ni decisiones (independientes (**I_2**) y sucesivas (**S**)). Por eso, entre los alumnos no se dan ejemplos 'compatibles con los propósitos educativos', ni 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Los alumnos (**13**) y (**21**) representan ejemplos de lo que fue denominado como 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', incluso, el alumno (**13**) ni siquiera dio una respuesta.

Después de la intervención, los alumnos (**10**) y (**21**) aparecen como representantes de aquellos que presentan 'compatibilidad con los propósitos educativos'. Cabe destacar que el alumno (**21**) partía de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'. Los alumnos (**13**) y (**26**) representan ejemplos de respuestas presentadas como 'poco compatibles con los propósitos educativos', si bien es de destacar que el alumno (**13**) proviene de la clasificación de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' y que no había presentado al comienzo ninguna respuesta. Los alumnos (**01**) y (**16**) aparecen como ejemplos de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Resultado: La capacidad para *identificar y utilizar los principios fundamentales de recuento*, por parte de los alumnos, en función de la discusión de los datos derivados de la comparación porcentual de las informaciones con los de las respuestas extraídas, expresadas por los alumnos antes y después de la intervención, nos informan de que, a partir de la enseñanza, algunos de esos alumnos consiguen llegar a una adquisición muy aceptable de tales capacidades.

Análisis de la 4ª Cuestión

En esta cuestión, los datos deberían aparecer representados en una única tabla, sin embargo, para respetar los márgenes de página, se optó por confeccionar una tabla para cada una de las técnicas de recuento (Variación, Combinación y Permutación), que de cierta manera, caracterizan una evolución de la Combinatoria. Y también, para que se produjera una buena presentación de los datos en las tablas, se optó por adoptar los símbolos **O** (*orden*), e **IO** (*identificó el orden*); **N** (*naturaleza*) e **IN** (*identificó la naturaleza*).

Tabla 5: Referencia Evolutiva del Campo de la Combinatoria (Variación)

Técnicas/Propiedades		Variación					
		O			N		
Intervención		NR	RI	IO	NR	RI	IN
Antes	alumnos	10	9	3	10	12	0
	%	45,45	40,91	13,64	45,45	54,55	0,00
Después	alumnos	0	5	17	0	8	14
	%	0,00	22,73	77,27	0,00	36,36	63,64

Tabla 6: Referencia Evolutiva del Campo de la Combinatoria (Combinación)

Técnicas/Propiedades		Combinación		
		N		
Intervención		NR	RI	IN
Antes	alumnos	10	12	0
	%	45,45	54,55	0,00
Después	alumnos	0	11	11
	%	0,00	50,00	50,00

Tabla 7: Referencia Evolutiva del Campo de la Combinatoria (Permutación)

Técnicas/Propiedades		Permutación		
		O		
Intervención		NR	RI	IO
Antes	alumnos	10	10	2
	%	45,45	45,45	9,10
Después	alumnos	0	11	11
	%	0,00	50,00	50,00

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Sólo hay un ejemplo.
Alumno 23: "Por el orden y por la naturaleza".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 02: "No sé definir".
Alumno 03: "No recuerdo en este momento, pues hasta hoy nunca conseguí distinguir cada uno".

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 02: "Permutación: cuenta sólo el orden; Variación: cuenta la naturaleza y el orden de los elementos; Combinación: cuenta sólo la naturaleza".
Alumno 06: "Permutación $\rightarrow$ cuenta sólo el orden de los elementos. Variación $\rightarrow$ cuenta el orden y la naturaleza de los elementos. Combinación $\rightarrow$ cuenta sólo la naturaleza de los elementos.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 03: "Permutación: se diferencia por el orden; Variación: se diferencia por la naturaleza y por el orden; Combinación: se diferencia por la naturaleza".
Alumno 23: "Sólo cambia el orden. Variación = orden + naturaleza (importa). Combinación = naturaleza (importa)".

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 05: "Permutación: recuento de elementos distintos; variación: recuento en el que el orden y la naturaleza no son los mismos; combinación: recuento con elementos iguales".
Alumno 07: "Permutación: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \Rightarrow$ usa el principio multiplicativo. Combinación: se diferencia de la variación por la naturaleza".

Discusión de los Valores Porcentuales

Referencia Evolutiva del Campo de la Combinatoria – Variación: Al llevar a cabo una comparación entre lo que ocurrió con los alumnos antes y después de la enseñanza, se puede decir que hubo una excelente evolución en lo que se refiere a la técnica de variación. Esto se demuestra cuando se comprueba la brusca reducción de **NR**, que pasa del $(45{,}45\%)$ al $(0{,}00\%)$, y de **RI** que bajó del $(40{,}91\%)$ al $(22{,}73\%)$, por lo que respecta a la naturaleza y, de modo análogo, en lo que se refiere al orden **NR,** se pasó del $(45{,}45\%)$ al $(0{,}00\%)$, mientras que **RI** se redujo del $(54{,}55\%)$ al $(36{,}36\%)$. Sin embargo, el factor que más evidencia dicha evolución es el aumento de la **IO,** que aumenta del $(13{,}64\%)$ hasta el $(77{,}27\%)$, seguida del aumento de la **IN,** desde el $(0{,}00\%)$ hasta el $(63{,}64\%)$.

Referencia Evolutiva del Campo de la Combinatoria – Combinación: Se produjo una mejor percepción por parte de los alumnos en lo que se refiere a la identificación de la naturaleza en la técnica de la combinación, lo que se puede observar cuando comprobamos la reducción de **NR**, del $(45{,}45\%)$ al $(0{,}00\%)$, seguida por el aumento de **IN,** que pasa del $(0{,}00\%)$ al $(50{,}00\%)$.

Referencia Evolutiva del Campo de la Combinatoria – Permutación: Acerca de la identificación del orden en la técnica de la permutación, se puede percibir que los alumnos, después de la enseñanza, pasaron a percibirla mejor, lo cual puede advertirse si consideramos la reducción de **NR**, que pasó del (45,45%) al (0,00%), seguida por el aumento de **IO**, que pasó del (9,10%) al (50,00%).

De modo general, con relación a las técnicas de variación, combinación y permutación, según las interpretaciones presentadas anteriormente sobre cada una, se puede sugerir que se produjo un buen aprovechamiento por parte de los alumnos tras la intervención.

Discusión de las Respuestas

Antes de la intervención, ningún alumno consiguió identificar adecuadamente el orden (**IO**) ni la naturaleza (**IN**) relacionadas con las técnicas de Variación, Combinación y Permutación. De ahí la ausencia de ejemplos 'compatibles con los propósitos educativos'. Por lo que se refiere a los ejemplos 'poco compatibles con los propósitos educativos', sólo el alumno (**13**) aparece de forma muy difuminada, mientras que los ejemplos que fueron calificados como 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' están representados por los alumnos (**02**) y (**03**).

Los alumnos (**02**) y (**06**), después de la intervención pasan a ser representantes de las respuestas que presentan 'compatibilidad con los propósitos educativos', sin que debamos olvidar que el alumno (**02**) proviene de la 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', lo mismo que ocurre con el alumno (**06**). Los alumnos (**03**) y (**23**) son ejemplos de respuestas extraídas que se definen como 'poco compatibles con los propósitos educativos', proviniendo los dos de la 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'. Por último, los alumnos (**05**) y (**07**) pasan a figurar como ejemplos de respuestas con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', si bien con respuestas un poco mejores que las que realizaron antes de la enseñanza.

Resultado: Al considerar la discusión sobre la comparación porcentual con las respuestas obtenidas de los alumnos presentados, antes y después de la intervención, *acerca del discernimiento sobre el orden y la naturaleza* relacionados con las técnicas de recuento del tipo *Variación, Combinación y Permutación*, se puede observar que se produce una notable adquisición/comprensión sobre tales ideas en una parte considerable del alumnado.

Análisis de la 5ª Cuestión

En este segundo ítem correspondiente a la primera parte del análisis, a través de la indagación mediante tres actividades didácticas, se pretende analizar el campo de la Combinatoria, haciendo hincapié, en la primera de ellas, en la idea de recuento simple, y en las dos siguientes, respectivamente, en los conceptos de recuentos de tipo combinatorio conocidos como principio aditivo y principio multiplicativo.

Situación I

Tabla 8: Caracterización de la idea de Recuento Simple

Recuento de tipo Simple / Intervención		Recuento Simple			Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**
Antes	**Total**	0	0	22	2	20	0	5	8	9
	%	0,00	0,00	100	9,09	90,91	0,00	22,73	36,36	40,91
Después	**Total**	0	0	22	1	4	17	2	9	11
	%	0,00	0,00	100	4,55	18,18	77,27	9,09	40,91	50,00

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05:
Contenido de la acción: "Juntando cuántos hijos tienen José y su hermano Antonio".
Motivo de la acción: "Verificar cuántos sobrinos tiene Pablo a través de la adición".
Alumno 30:
Contenido de la acción: "Contando".
Motivo de la acción: "Determinar el número de sobrinos".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 01:
Contenido de la acción: "Responder a la pregunta".
Motivo de la acción: "Llegar al resultado de la pregunta".
Alumno 10:
Contenido de la acción: "Usando el principio aditivo".
Motivo de la acción: "Identificar las sentencias".

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 01:
Contenido de la acción: "Agrupando los sobrinos del tío Pablo".
Motivo de la acción: "Agrupar/contar".
Alumno 05:
Contenido de la acción: "Contando uno por uno los sobrinos".
Motivo de la acción: "Verificar cuántos sobrinos tiene el tío Pablo a través de la adición".

Respuestas extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 10:
Contenido de la acción: "Enumerando los elementos".
Motivo de la acción: "Usar el recuento simple".
Alumno 30:
Contenido de la acción: "Contando".
Motivo de la acción: "Saber la cantidad de sobrinos del tío Pablo".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 07:
Contenido de la acción: "Principio aditivo".
Motivo de la acción: "Hacer un recuento".
Alumno 31:
Contenido de la acción: "Utilizando el recuento".
Motivo de la acción: "Mostrar el sistema de recuento y desarrollar el razonamiento en el alumno".

Discusión de los Valores Porcentuales

Incluso no habiéndose producido un cambio en lo que se refiere al recuento simple, pues, al comienzo, **RA** alcanzó el (100%) y, al final, se mantuvo en el (100%), las variaciones de **RA** en el contenido de la acción, pasaron del (0,00%) al (77,27%), y en el motivo de la acción, del (40,91%) al (50,00%), lo que, a pesar de sus disparidades, viene a caracterizar una buena comprensión por parte de los alumnos en esta dirección.

Los comentarios anteriores acerca de las respuestas dadas por los alumnos, en especial, aquellos que se refieren al contenido y al motivo de la acción, hacen posible argumentar a favor de la existencia de una mejora en el sentido construido por ellos dentro del ámbito del recuento simple.

Discusión de las Respuestas

Al comienzo, antes de la intervención, ningún alumno presenta una caracterización de la idea de recuento simple de manera adecuada, lo que ocasiona la no existencia de alumnos que representen ejemplos considerados 'compatibles con los propósitos educativos'. Y, por lo que se refiere a los ejemplos de la idea anterior, que fueron calificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos', se encuentran los alumnos (**05**) y (**30**). Por su parte, los alumnos (**01**) y (**10**) fueron clasificados dentro del apartado 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Los alumnos (**01**) y (**05**), después de la intervención, evolucionan, respectivamente, de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' y 'poco compatibles con los propósitos educativos' a 'compatibles con los propósitos educativos'. Por su parte, el alumno (**10**) pasó de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'poco compatibles con los propósitos educativos' y el alumno

(**30**) se mantuvo dentro del apartado 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Por último, los ejemplos representados por los alumnos incluidos en el apartado 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' fueron el (**07**) y el (**31**).

Resultado: La discusión acerca de la comparación porcentual de las informaciones junto con la discusión de las respuestas obtenidas que expresan las concepciones de los alumnos, consideradas antes y después de la intervención, permite afirmar, a partir de la articulación entre el contenido de la acción y el motivo, que dichos alumnos consiguen atribuir sentido a la adquisición/comprensión de la *caracterización de la idea de recuento simple*.

Situación II

Tabla 9: Caracterización de la Combinatoria según el Principio Aditivo

Intervención \ Recuento de tipo Simple		Recuento Simple			Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**
Antes	**Total**	9	8	5	7	10	5	8	12	2
	%	40,91	36,36	22,73	31,82	45,45	22,73	36,36	54,54	9,09
Después	**Total**	4	9	9	2	8	12	2	15	5
	%	18,18	40,91	40,91	9,09	36,36	54,54	9,09	68,18	22,73

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05:
<u>Contenido de la acción</u>: "Combinando las posibles soluciones".
<u>Motivo de la acción</u>: "Verificar cuántas combinaciones yo puedo escoger pagando 5,00 reales".
Alumno 25:
<u>Contenido de la acción</u>: "Utilizando un recuento por combinación".
<u>Motivo de la acción</u>: "Descubrir las combinaciones posibles en función de la situación presentada".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 06:
<u>Contenido de la acción</u>: "Una combinación de elementos".
<u>Motivo de la acción</u>: "Para descubrir las posibles combinaciones de tentempié".
Alumno 11:
<u>Contenido de la acción</u>: "Variación".
<u>Motivo de la acción</u>: "Descubrir de cuántas y de qué maneras se puede tomar el tentempié".

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 30:
Contenido de la acción: "Combinando el tentempié".
Motivo de la acción: "Escoger el tentempié cuyo precio corresponda a 5,00 reales".
Alumno 13:
Contenido de la acción: No respondió.
Motivo de la acción: No respondió.

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención.

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 06:
Contenido de la acción: "Combinando los posibles tipos de tentempiés".
Motivo de la acción: "Para determinar las posibles formas de tentempié, tenemos que hacer esa combinación de modo que la combinación de los elementos no sobrepase el valor de 5,00 reales".
Alumno 11:
Contenido de la acción: "Combinatoria".
Motivo de la acción: "Contar los subconjuntos obedeciendo a una condición dada".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 13:
Contenido de la acción: "Un recuento".
Motivo de la acción: "Saber de cuántas formas puedo tomar un tentempié en un café con sólo 5,00 reales en el bolsillo".
Alumno 30:
Contenido de la acción: "Combinando el tentempié".
Motivo de la acción: "Saber de cuántas formas se puede hacer el tentempié".

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 22:
Contenido de la acción: "Posibilidades".
Motivo de la acción: "El motivo sería que yo sólo podría gastar exactamente 5,00 reales, y no puedo tomar más de un producto".
Alumno 31:
Contenido de la acción: "Utilizando la variación".
Motivo de la acción: "Trabajar la variación utilizando las posibilidades, sin la utilización de la técnica, para una mejor comprensión del contenido".

Discusión de los Valores Porcentuales

La comparación entre las respuestas presentadas por los alumnos acerca del recuento de tipo combinatorio (principio aditivo), respectivamente, antes de la enseñanza - **NR** (40,91%), **RI** (36,36%), **RA** (22,73) - y después de la enseñanza - **NR** (18,18%), **RI** (40,91%) y **RA** (40,91%) - representa algo más del doble en lo que se refiere a la reducción de **NR**, seguida por un ligero aumento de **RI** y uno mucho mayor de **RA** (en una proporción de casi el doble). En cuanto al contenido de la acción, **NR** (31,82%), **RI** (45,45%) y **RA** (22,73%) pasaron a **NR** (9,09%), **RI** (36,36%), **RA** (54,54%), lo que significa que **NR** se reduce más de la tercera parte, **RI** aumenta un (4,54%) y **RA** experimenta un aumento que roza el doble. El contenido de la acción, por su parte, **NR** (36,36%), **RI** (54,54%), **RA** (9,09%), pasó a **NR** (9,09%), **RI** (68,18%), **RA** (22,73%); en estas condiciones, **NR** presenta reduce su porcentaje en cuatro veces, **RI** aumenta un 13,64% y **RA** experimenta un aumento superior al doble.

Los comentarios anteriores, y en particular, los aumentos de **RA** en el contenido de la acción y en el motivo de la acción, en función de las respuestas presentadas por parte de los alumnos acerca del recuento de tipo combinatorio (principio aditivo) permiten afirmar que la intención pedagógica favoreció de algún modo a los alumnos en la atribución de sentido a la profundización del significado del principio aditivo, en cuanto Combinatoria.

Discusión de las Respuestas

Antes de la intervención los alumnos (**05**) y (**25**) ya poseían una caracterización de la concepción de la idea de Combinatoria según el principio aditivo, lo que los incluye como parte integrante de los ejemplos 'compatibles con los propósitos educativos'. Por su parte, los alumnos (**06**) y (**11**) representan ejemplos acerca de la misma idea anterior, que quedaron encuadrados dentro del apartado 'poco compatibles con los propósitos educativos', mientras que los alumnos (**13**) y (**30**) son representantes de los seleccionados como 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Tras la intervención, los alumnos (**06**) y (**11**), que inicialmente aparecían como ejemplos calificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos', cambian de grupo para formar parte de los ejemplos 'compatibles con los propósitos educativos'. Los alumnos (**13**) y (**30**), en este momento, pasan a situarse entre aquellos 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Y, por último, los ejemplos de alumnos seleccionados con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' están representados por el (**22**) y el (**31**).

Resultado: La adquisición/comprensión de la *caracterización de la Combinatoria referida al principio aditivo* en función de la discusión de la comparación porcentual junto con la discusión de las respuestas extraídas presentadas antes y después de la intervención, en lo que toca a la articulación ente el contenido de la acción y el motivo de la acción, permite defender la idea de que hubo construcción de sentido por parte de los alumnos acerca de dicha caracterización.

Situación III

En esta actividad, en lugar de emplear una sola tabla, con el fin de establecer una mejor presentación de los datos, se consideró necesario presentarlos conforme aparecen en las tablas 09ª y 10ª. Además de eso, en lugar de realizar una presentación de las respuestas extraídas de los alumnos inmediatamente después de la discusión de los valores porcentuales en las etapas anterior y posterior a la intervención, ahora sólo procederemos de forma semejante, y en el mismo orden, una vez que hayamos presentado la Tabla 10.

En la Tabla 10, el número **1** representa los alumnos que sólo utilizaron el principio multiplicativo, y **2** representa los que, además de utilizar dicho principio, percibieron que, al utilizarlo, algunos de los recuentos se estaban realizando por duplicado.

Tabla 10: Caracterización del Principio Multiplicativo.

Intervención \ Principio Multiplicativo		NR		RI		RA	
		1	2	1	2	1	2
Antes	Total	2	5	15	14	5	3
	%	9,09	22,73	68,18	63,64	22,73	13,64
Después	Total	2	3	6	13	14	6
	%	9,09	13,64	27,27	59,09	63,64	27,27

Tabla 11: Caracterización del Principio Multiplicativo (Contenido/ Motivo de la acción)

Intervención \ Criterios		Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	RI	RA	NR	RI	RA
Antes	Total	8	13	1	9	10	3
	%	36,36	59,09	4,55	40,91	45,45	13,64
Después	Total	3	12	7	5	12	5
	%	13,64	54,54	31,82	22,73	54,54	22,73

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 18:
Contenido de la acción: “Combinación”.
Motivo de la acción: “Determinar la cantidad de sándwiches y bocadillos que se pueden servir”.
Alumno 28:
Contenido de la acción: “Combinando pan con relleno”.
Motivo de la acción: “Saber la cantidad de sándwiches y bocadillos que la panadería puede ofrecer”.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 21:
Contenido de la acción: No respondió.
Motivo de la acción: “Saber cuántos tipos de sándwiches y bocadillos vamos a tener sin repetir”.
Alumno 25:
Contenido de la acción: “Utilizando el principio multiplicativo”.

Motivo de la acción: "Descubrir las proposiciones posibles".

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 01:
Contenido de la acción: "Agrupando los ingredientes".
Motivo de la acción: "Ofrecer al cliente diversos sabores".
Alumno 06:
Contenido de la acción: "El proceso multiplicativo".
Motivo de la acción: "El de multiplicar, pues para determinar el número de sándwiches y bocadillos debemos usar esa técnica".

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 06:
Contenido de la acción: "Un recuento por el principio multiplicativo".
Motivo de la acción: "Determinar el número de sándwiches y bocadillos a través del principio multiplicativo entre los elementos".
Alumno 21:
Contenido de la acción: "Combinando".
Motivo de la acción: "Para saber los posibles tipos de tentempié que pueden ser ofrecidos".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 01:
Contenido de la acción: "Combinando".
Motivo de la acción: "Una Combinatoria".
Alumno 25:
Contenido de la acción: "Recuento que utiliza el principio multiplicativo".
Motivo de la acción: "Determinar las posibilidades de recuento por medio del principio multiplicativo".

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 02:
Contenido de la acción: "Agrupando elementos".
Motivo de la acción: "Ordenar ideas sobre recuentos".
Alumno 19:
Contenido de la acción: "Principio del recuento".
Motivo de la acción: "Enumerar los elementos utilizando el principio fundamental del recuento".

Discusión de los Valores Porcentuales

La comparación entre las respuestas presentadas por los alumnos sobre el recuento de tipo combinatorio (principio multiplicativo), en el criterio **1**, el valor inicial y final de **NR** se mantuvo sin alteración (9,09%), mientras que **RI** presentó una reducción que fue desde el (68,18%) al (27,27%), seguida por un aumento del **RA** del (22,73) al (63,64%). Por su parte, el criterio **2** presenta una reducción del **NR** que pasa del (22,73%) al (13,64%), lo mismo que del **RI,** del (63,64%) al (59,09%), seguida por el aumento del **RA** desde el (13,64%) hasta el (27,27%).

Los comentarios anteriores, y en particular, los respectivos aumentos de **RA**, que en **1** se aproxima al triple, mientras que en **2** alcanza el doble, demuestran que se produjo un mejor aprovechamiento de los alumnos respecto al criterio **1**.

Contenido de la acción: (*NR*) presenta una reducción pasando del (36,36%) al (13,64%), seguida por el aumento de (*RA*) desde el (4,54%) hasta el (31,82%), lo que indica que hubo una mejora en la comprensión de los alumnos acerca del contenido de la acción.

Motivo de la acción: la disminución de (*NR*) del (40,91%) al (22,73%), seguida por el aumento de (*RA*) del (13,64%) al (22,73%), también representa, por su parte, una mejora en la comprensión por parte de los alumnos del motivo de la acción.

Discusión de las Respuestas

Al comienzo, antes de la intervención, los alumnos (**18**) y (**28**) ya conseguían caracterizar el principio multiplicativo, incluyéndose entre los ejemplos ‘compatibles con los propósitos educativos’. Por su parte, los ejemplos referentes a esa misma idea, que fueron calificados como ‘poco compatibles con los propósitos educativos’ están representados por los alumnos (**21**) y (**25**), mientras que los alumnos (**01**) y (**06**) forman parte del grupo ‘con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’.

Después de la intervención, el alumno (**06**) pasa del grupo ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ al denominado ‘compatibles con los propósitos educativos’, y el alumno (**21**) sale del grupo de los que son ‘poco compatibles con los propósitos educativos’ para entrar a formar parte de los ‘compatibles con los propósitos educativos’. El alumno (**01**) pasa de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ a ‘poco compatibles con los propósitos educativos’, y el alumno (**25**) se mantiene como ‘poco compatibles con los propósitos educativos’. Los ejemplos representados por los alumnos seleccionados dentro del grupo ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ fueron (**02**) y (**19**).

Resultado: La adquisición/comprensión de la *caracterización del principio multiplicativo* en función de la discusión de la comparación porcentual junto con la discusión de las respuestas extraídas presentadas por los alumnos antes y después de la intervención, en referencia a la articulación entre el contenido de la acción y el motivo de la acción, permite apuntar la idea de que se produjo construcción de sentido por parte de los alumnos a propósito de tal caracterización.

5.1.2 Análisis de los Mapas Conceptuales de los Alumnos

En esta segunda etapa correspondiente a la primera parte del análisis, se observan los mapas conceptuales anteriores y posteriores al proceso de enseñanza de los alumnos, buscando evaluar en qué medida tales enseñanzas les auxiliaron o no en la organización de sus ideas acerca del campo de la Combinatoria.

1er Criterio: Selección Conceptual.

Tabla 12: Selección Conceptual (Combinatoria).

Intervención / Criterios		a	b	c	$(b)\times 7$		
					$b<7$	$b=7$	$b>7$
Antes	**Total**	92	132	18	15	4	6
	%	26,29	37,71	5,14	60,00	16,00	24,00
Después	**Total**	79	199	3	9	4	12
	%	22,57	56,86	0,86	36,00	16,00	48,00

Etapa Anterior a la Intervención:

Los conceptos equivalentes (b) ($37{,}71\%$) desde el comienzo ya presentan una cierta supremacía sobre los conceptos inferiores (a) ($26{,}29\%$) y que se hace aún mayor sobre los conceptos superiores (c) ($5{,}14\%$).
Comparación de los conceptos equivalentes a siete (7): En el cuadro anterior, se observa que el número de conceptos equivalentes iguales a siete ($b=7$) ($16{,}00\%$) y el de los conceptos equivalentes mayores a siete ($b>7$) ($24{,}00\%$) son ($12{,}00\%$) más de tres veces y dos veces menores, respectivamente, en comparación con los conceptos equivalentes menores de siete ($b<7$) ($60{,}00\%$).

Etapa Posterior a la Intervención:

En el momento correspondiente a la etapa posterior a la enseñanza, aun considerando alguna pequeña variación hacia debajo de los conceptos inferiores (a) ($22{,}57\%$) y de los conceptos superiores (c) ($0{,}86\%$), se produjo un cambio razonable en los conceptos equivalentes (b) ($56{,}86\%$), lo que, de por sí, ya apunta hacia una evidente mejora conceptual por parte de los alumnos.
Comparación de los conceptos equivalentes a siete (7): Los conceptos equivalentes inferiores a siete ($b<7$) ($36{,}00\%$), cuantitativamente, continuaron siendo mayores que los conceptos equivalentes iguales a siete ($b=7$) ($16{,}00\%$), pero quedaron por debajo de los conceptos equivalentes superiores a siete ($b>7$) ($48{,}00\%$).

Comparación entre los datos de las Etapas Anterior y Posterior a la Intervención:

Existe una disminución en los conceptos inferiores a, del ($26{,}29\%$) al ($22{,}57\%$), seguida por un aumento en los conceptos equivalentes b, del ($37{,}71\%$) al ($56{,}86\%$).

Comparación de los conceptos equivalentes a siete (7):

Los registros anteriores apuntan una reducción de los conceptos equivalentes inferiores a siete ($b < 7$), del ($60,00\%$) al ($36,00\%$). Por su parte, los conceptos equivalentes iguales a siete ($b = 7$), desde el punto de vista porcentual, se mantuvieron en el ($16,00\%$), y los conceptos equivalentes superiores a siete ($b > 7$) pasaron de un ($48,00\%$) a un ($24,00\%$).

A la vista de las caracterizaciones hasta aquí enumeradas, teniendo en cuenta incluso la comparación entre las informaciones presentadas antes y después de la intervención, se puede percibir que se produjo una evolución considerable en lo referente a la selección conceptual de los alumnos acerca de los conceptos que se estudiaron en el proceso de enseñanza propuesto sobre Combinatoria.

2º Criterio: La Inclusividad

General

Tabla 13: Conceptos Generales (Combinatoria)

Intervención \ Criterios		Análisis Combinatorio	Combinatoria	Recuento	Otros Conceptos
Antes	Total	1	17	0	7
	%	4,00	68,00	0,00	28,00
Después	Total	4	9	8	4
	%	16,00	36,00	32,00	16,00

Etapa Anterior a la Intervención:

Los conceptos de Recuento ($0,00\%$), Análisis combinatorio ($4,00\%$) y Otros Conceptos ($28,00\%$) quedaron muy por debajo del porcentaje atribuido al concepto de Combinatoria ($68,00\%$).

Etapa Posterior a la Intervención:

Después de la enseñanza, el concepto de Combinatoria ($36,00\%$) continúa siendo superior a los conceptos de Análisis combinatorio ($16,00\%$), Recuento ($32,00\%$) y a los denominados bajo el epígrafe general Otros Conceptos ($16,00\%$).

Comparación entre los datos de las Etapas Anterior y Posterior a la Intervención, respectivamente.

Se puede observar que se produjo una gran variación en los conceptos seleccionados por los alumnos como concepto de carácter general, pues Análisis combinatorio, Combinatoria, Recuento y Otros Conceptos, en este orden, pasaron del (4,00%) al (16,00%); del (68,00%) al (36,00%); del (0,00%) al (32,00%), y del (28,00%) al (16,00%).

El aumento en la elección por parte de los alumnos de los posibles conceptos adecuados como conceptos generales, el caso de recuento, resultó privilegiado por ser más abarcador, y acabó destacándose entre los demás. Considerando estos datos que exponemos, y a pesar del aumento producido en el concepto de Análisis combinatorio, la idea es reforzada, además, por la reducción que se advierte en los llamados Otros conceptos y, principalmente, por el sensible aumento que se produce en el concepto de Recuento.

Intermedio

Tabla 14: Conceptos Intermedios (Combinatoria)

Criterios / **Intervención**		*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	69	78	9
	%	23,00	26,00	3,00
Después	**Total**	56	131	1
	%	18,67	43,67	0,33

Etapa Anterior a la Intervención:

Los alumnos, desde el comienzo, ya presentan cuantitativamente con relación a los conceptos equivalentes, b, un porcentaje del (26,00%) que se sitúa por encima del porcentaje correspondiente a los conceptos inferiores a (23,00%) y al de los conceptos superiores c (3,00%).

Etapa Posterior a la Intervención:

En este momento, los conceptos inferiores a (18,67%) y los conceptos superiores c (0,33%) continúan por debajo, desde el punto de vista porcentual, de los conceptos equivalentes b (43,67%).

Comparación entre los datos de las Etapas Anterior y Posterior a la Intervención:

En virtud de las informaciones anteriores, y prestando atención de manera especial a la creciente variación producida en los conceptos equivalentes, del (26,00%) al (43,67%), todo parece indicar que en los alumnos se produjo un significativo aumento en lo que a la adquisición conceptual sobre Combinatoria se refiere, a partir de la propuesta didáctica de enseñanza propuesta en el presente estudio.

Horizontalidad

Tabla 15: Horizontalidad según los Niveles 1 y 2 (Combinatoria)

Intervención	Criterios	Nivel 1			**Nivel 2**		
		a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	31	25	1	22	36	4
	%	41,33	33,33	1,33	29,33	48,00	5,33
Después	**Total**	18	36	0	10	46	0
	%	24,00	48,00	0,00	13,33	61,33	0,00

Etapa Anterior a la Intervención:

Nivel 1: este nivel presenta un (8,00%) de diferencia porcentual entre los conceptos inferiores a (41,33%) y los conceptos equivalentes b (33,33%), así como refleja una pequeña representatividad en relación a los conceptos superiores c (1,33%).

Nivel 2: los conceptos equivalentes b (48,00%) superan a los conceptos inferiores a (29,33%) en más del doble respecto de la diferencia registrada en el nivel anterior, mientras que, por su parte, los conceptos superiores c (5,33%) resultan ser más expresivos. No obstante, los conceptos adoptados por los alumnos en este nivel, evidenciaron, desde el principio, un buen criterio de selección.

Etapa Posterior a la Intervención:

Nivel 1: se observa un amplio margen porcentual de los conceptos equivalentes b (48,00%) con relación a los conceptos inferiores a (24,00%) y a los superiores c (0,00%).

Nivel 2: tras la intervención, la supremacía de los conceptos equivalentes b (61,33%) sobre los conceptos inferiores a (13,33%) es aún, si cabe, mayor, superando el (8,01%), lo que representa cuatro veces más, mientras que los conceptos superiores c (0,00%) no presentaran ningún registro.

Comparación entre los datos de las Etapas Anterior y Posterior a la Intervención:

Nivel 1: se observa una sensible reducción de los conceptos inferiores a, del (41,33%) al (24,00%), seguida por un aumento razonable (14,67%) de los conceptos equivalentes b, que pasan del (33,33%) al (48,00%). Teniendo en cuento tanto esta comparación como los comentarios anteriores, es posible afirmar que hubo una mejora apreciable en lo referente a la elección conceptual en este nivel, después de la intervención.

Nivel 2: los conceptos equivalentes b presentan un aumento razonable del (13,33%), pasando del (48,00%) al (61,33%), mientras que los conceptos inferiores a experimentan una reducción superior a la mitad, pasando del (29,33%) al (13,33%) y, de igual modo, los conceptos superiores c también experimentan una leve reducción, pasando del $(5{,}33\%)$ al $(0{,}00\%)$. Este nivel, en comparación con el nivel 1, presenta una evolución similar.

Tabla 16: Horizontalidad según los Niveles 3 y 4 (Combinatoria)

Intervención \ Criterios		Nivel 3			Nivel 4		
		a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	11	10	0	3	5	1
	%	14,67	13,33	0,00	4,00	6,67	1,33
Después	**Total**	11	23	0	5	25	1
	%	14,67	30,67	0,00	6,67	33,33	1,33

Etapa Anterior a la Intervención:

Nivel 3: antes de la enseñanza, los conceptos inferiores $a(14{,}67\%)$ estaban porcentualmente situados ligeramente por encima de los conceptos equivalentes $b(13{,}33\%)$, y no hubo resultados de conceptos superiores $c(0{,}00\%)$.
Nivel 4: los valores porcentuales iniciales en este nivel resultan poco reveladores, de acuerdo con los valores siguientes organizados en orden creciente: conceptos superiores c $(0{,}00\%)$, conceptos inferiores $a(4{,}00\%)$ y conceptos equivalentes $b(6{,}67\%)$.

Etapa Posterior a la Intervención:

Nivel 3: los conceptos equivalentes $b(30{,}67\%)$ representan un $(1{,}33\%)$ por encima del doble que los conceptos inferiores $a(14{,}67\%)$, sin que tampoco se registren conceptos superiores c $(0{,}00\%)$.
Nivel 4: los valores porcentuales de los conceptos equivalentes $b(33{,}33\%)$ se sitúan claramente por encima de los conceptos inferiores $a(6{,}67\%)$ y de los conceptos superiores c $(1{,}33\%)$.

Comparación entre los datos de las Etapas Anterior y Posterior a la Intervención:

Nivel 3: este nivel presenta una estabilidad en los conceptos inferiores a $(14{,}67\%)$, seguida por un aumento considerable de los conceptos equivalentes b, que pasan de un porcentaje del $(13{,}33\%)$ al $(30{,}67\%)$, mientras que los conceptos superiores c se mantienen como al principio en el $(0{,}00\%)$. Esta comparación, que presenta un $(4{,}01\%)$ más del doble para los conceptos equivalentes, teniendo en cuenta los comentarios anteriores, permite afirmar que hubo una apreciable evolución en este nivel.
Nivel 4: este nivel registra un ligero aumento $(2{,}67\%)$ en los conceptos inferiores a, al pasar del $(4{,}00\%)$ al $(6{,}67\%)$, manteniéndose los conceptos superiores c en un porcentaje del $(1{,}33\%)$. Por otro lado, los conceptos equivalentes b registraron un avance representativo, pasando del $(6{,}67\%)$ al $(33{,}33\%)$. Esta comparación revela un aumento en los conceptos equivalentes equivalente a casi cinco veces. Por tanto,

considerando los comentarios anteriores, todo indica que se produjo aquí una evolución mejor que en el nivel 3, pues las diferencias fueron mucho mayores.

3$^{\underline{er}}$ **Criterio**: Relaciones Significativas.

Tabla 17: Proposiciones Encontradas (Combinatoria)

Intervención \ Criterios		No presenta	*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	21	13	0	0
	%	84,00	2,17	0,00	0,00
Después	**Total**	14	2	39	0
	%	56,00	0,33	6,50	0,00

Etapa Anterior a la Intervención:

Al comienzo, un (84,00%) de los alumnos no presentaron en sus mapas conceptuales ninguna relación, y entre aquellos que la presentaron, se redujeron a los conceptos inferiores, representando sólo un (2,17%).

Etapa Posterior a la Intervención:

Se puede observar que el (56,00%) continúa no presentando ninguna relación y que los conceptos superiores se mantuvieron sin registros (0,00%); además, en este momento, además de registrarse conceptos inferiores (0,33%), pasa a haber también registro de los conceptos equivalentes (6,50%).

Comparación entre los datos de las Etapas Anterior y Posterior a la Intervención:

Se produce una variación hacia abajo tanto en los alumnos que no presentaron ningún tipo de relación -pasando del (84,00%) al (56,00%)- como en los conceptos inferiores – pasando del (2,17%) al (0,33%)-, mientras que, por su parte, los conceptos equivalentes experimentaron una considerable variación positiva, evolucionando desde el (0,00%) hasta el (6,50%). En general, si consideramos el ligero aumento en las relaciones encontradas en los mapas de los alumnos, así como la reducción por parte de aquellos que, inicialmente, no presentaron ningún tipo de relación, se hace posible afirmar que efectivamente se produjo un cambio positivo con relación a la caracterización de este criterio por parte de los alumnos.

5. 2 Análisis y Discusión de los Resultados de Lógica

En este análisis se persigue evaluar básicamente dos aspectos sobre cómo los alumnos están utilizando el razonamiento lógico. El primero se refiere a si ellos poseen una visión panorámica que les posibilite distinguir argumentaciones ingenuas de argumentaciones lógicas. Y, el segundo, se refiere a si poseen un sistema conceptual y simbólico que les posibilite reconocer y/o emplear ideas argumentativas lógicamente válidas e inválidas.

5.2.1 Análisis de los Cuestionarios Diagnósticos y Evaluación del Aprendizaje

En esta parte del trabajo, se establecerá el *análisis de los cuestionarios diagnósticos y evaluación del aprendizaje*, para, a continuación, establecer la *delimitación del campo de la Lógica*. En la mayor parte de las tablas que ilustrarán este análisis, los alumnos representados por (**NR**) son aquellos que *no respondieron a la pregunta*, (**RI**) representa a los que *respondieron inadecuadamente* y (**RA**), a los que *respondieron adecuadamente*.

Análisis de la 1ª Pregunta

Tabla 18: Identificación de Procedimientos: Sentido Común *vs.* Filosófico

Intervención \ Respuesta		NR	RI	RA
Antes	Ideas	19	11	00
	%	63,33	36,67	00,00
Después	Ideas	02	17	09
	%	7,14	60,71	32,15

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención.

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 15: "Cuando la Lógica requiere una forma más elaborada de pensar".
Alumno 31: "Cuando la actividad está mejor trabajada exigiendo un mayor razonamiento".

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 10: No respondió.
Alumno 11: "Cuando pasa a hablar en un lenguaje más profundo".

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 10: "Cuando se pasa del conocimiento empírico, o sea, del "yo pienso", "yo creo", a una posición basada en el estudio, fruto de lecturas, búsquedas e investigación científica".

Alumno 31: “En una actividad ingenua no existe una fundamentación, y en la filosófica existe una fundamentación lógica y una estructura bien elaborada”.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 11: “Cuando se exige un conocimiento más profundo y conceptual”.
Alumno 15: “Cuando el sentido común precisa de fundamentos y argumentos lógicos”.

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 07: “Cuando existe algo para el razonamiento”.
Alumno 17: “Cuando hay una actividad fácil, para hacerla más complicada”.

Discusión de los Valores Porcentuales

En esta comparación, se observa una considerable disminución de (NR), que pasa del $(22{,}22\%)$ al $(7{,}14\%)$, mientras que (RI) y (RA) presentan un apreciable aumento, en el caso de (RI), pasando del $(36{,}67\%)$ al $(60{,}71\%)$, y en el caso de (RA), desde el $(0{,}00\%)$ al $(32{,}15\%)$. Estas informaciones corroboran la idea de que se produjo una evolución en los alumnos acerca de la identificación de la diferencia que existe entre el mero razonamiento que usa el sentido común y aquel otro tipo de razonamiento que se encuentra más relacionado con el ámbito filosófico, en concreto, el llamado razonamiento lógico.

Discusión de las Respuestas

Al comienzo, antes de la intervención, por lo que se refiere a la identificación de las características de los procedimientos de sentido común y del conocimiento filosófico no aparece ninguna respuesta adecuada (**RA**) o, lo que es lo mismo, no se encontró ningún ejemplo ‘compatible con los propósitos educativos’. (**15**) y (**31**) representan ejemplos de aquellos alumnos calificados como ‘poco compatibles con los propósitos educativos’, siempre con relación a la referida identificación, mientras que los alumnos (**10**) y (**11**) se encuentran entre los componentes caracterizados como ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’.

Después de la intervención, los alumnos (**10**) y (**31**) pasan de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ y ‘poco compatibles con los propósitos educativos’ a ‘compatibles con los propósitos educativos’. El alumno (**11**) pasó de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ a ‘poco compatibles con los propósitos educativos’, mientras que el alumno (**15**) se mantuvo formando parte del grupo de aquellos ‘poco compatibles con los propósitos educativos’. Por su parte, los alumnos (**07**) y (**17**) representan ejemplos correspondientes a ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’.

Resultado: La discusión de la comparación porcentual de las informaciones presentadas antes y después de la intervención, unida a la discusión de las respuestas obtenidas, transmite la idea de que se produjo adquisición de información por parte de algunos alumnos acerca de la *identificación de las características de los procedimientos de sentido común y de conocimiento filosófico*.

Análisis de la 2ª Pregunta

Tabla 19: Importancia del Silogismo para la Lógica y sus Características

Intervención \ Criterios		Importancia			Características		
		NR	RI	RA	NR	RI	RA
Antes	Ideas	18	10	02	25	05	00
	%	60,00	33,33	6,67	83,33	16,67	0,00
Después	Ideas	06	15	07	13	13	2
	%	21,43	53,57	25,00	46,43	46,43	7,14

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 10: "Argumentación. Tener dos premisas y una conclusión".
Alumno 11: "La demostración de falsedad o verdad depende del silogismo. Sus características son: si ..., entonces ...".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 05: "Transformar el lenguaje natural en simbólico".
Alumno 19: no respondió.

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 11: "Traducir un argumento a la forma simbólica. Dos premisas y una conclusión".
Alumno 19: "Para el lógico Aristóteles, el silogismo es la forma categórica de presentación de un argumento. En general está compuesta por una premisa mayor y una premisa más particular, seguido por una conclusión. Esta conclusión se deduce de premisas ligadas a un término medio, presentes en el ámbito de los términos antecedentes y omitidos, pues se sobreentienden en el interior de los términos consiguientes (conclusión)".

Respuestas extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05: "Verificar la veracidad de las premisas y de la conclusión. Posee premisas y conclusiones empleadas en el argumento".
Alumno 10: "Su importancia se encuentra en la argumentación. Consta de dos premisas y una conclusión".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 03: “Es interpretar. Son los símbolos”.
Alumno 15: “Nos permite afirmar o negar el consecuente y el antecedente”.

Discusión de los Valores Porcentuales

La comparación referida al tema de la importancia del silogismo en la Lógica presenta una disminución en el porcentaje de (NR), pasando del $(60{,}00\%)$ al $(21{,}43\%)$, y, por otro lado, en el caso de (RI), se produce un aumento de los porcentajes de (RI), pasando del $(33{,}33\%)$ al $(53{,}57\%)$; algo semejante ocurrió con (RA) que pasó del $(6{,}67\%)$ al $(25{,}00\%)$.

Y en lo que hace referencia a las características del silogismo, se aprecia una disminución del valor porcentual de (NR), que pasa del $(83{,}43\%)$ al $(46{,}43\%)$; con respecto a (RI), el cambio representa un aumento en el porcentaje, pasando del $(16{,}67\%)$ al $(53{,}57\%)$, mientras que (RA) no sufrió alteración alguna.

Las informaciones sobre las comparaciones entre las informaciones presentadas antes y después de la intervención permiten indicar que, incluso no habiéndose producido alteración porcentual en (RA), en lo referente a las características del silogismo la variación porcentual del $(36{,}90\%)$ representa un aceptable comportamiento con referencia a los valores de (NR) a (RI). Y, en cuanto a los porcentajes referidos a la cuestión de la importancia del silogismo en la Lógica, las alteraciones en los valores porcentuales de (NR), (RI) y de (RA) después de la intervención fueron favorables a la caracterización de una evolución de los alumnos en esa dirección. Por lo tanto, ante tales argumentaciones, se justifica la afirmación de que se produjo un buen rendimiento por parte de los alumnos acerca de la adquisición de la importancia del silogismo para la Lógica y sus características.

Discusión de las Respuestas

Antes de la intervención sobre la importancia y las características del silogismo para la Lógica, no se dan casos de respuestas adecuadas (**RA**), ni referidas a la importancia del silogismo, ni sobre sus características. Por ello, no existe ningún ejemplo ‘compatible con los propósitos educativos’. Los alumnos (**10**) y (**11**) fueron identificados como ejemplos de los denominados ‘como poco compatibles con los propósitos educativos’, según los valores y características anteriores. Por su parte, los alumnos (**05**) y (**19**) forman parte de los que denominamos como ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’.

Después de la intervención, el alumno (**19**) pasó de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ al grupo de ‘compatibles con los propósitos educativos’, y el alumno (**11**) pasó del grupo ‘poco compatibles con los propósitos educativos’ a ‘compatibles con los propósitos educativos’. El alumno (**05**) pasó de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ a ‘poco compatibles con los propósitos educativos’, mientras que el alumno (**10**) se mantuvo formando parte de aquellos casos ‘poco compatibles con los propósitos educativos’. Los alumnos (**03**) y (**15**) representan ejemplos clasificados con ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’.

Resultado: La discusión acerca de la comparación porcentual de las informaciones presentadas antes y después de la intervención, unida a la discusión sobre las respuestas extraídas permite dar por buena la idea de que se produjo una adquisición de información por parte de algunos alumnos en lo referente al concepto *importancia y características del silogismo para la Lógica*.

Análisis de la 3ª Pregunta

Tabla 20: Interrelación entre Cálculo Proposicional (CP); Lógica de Predicados (LC) y Lógica de las Relaciones (LR)

Intervención \ Criterios		CP x LP			CP x LR			LP x LR		
		NR	RI	RA	NR	RI	RA	NR	RI	RA
Antes	Ideas	24	06	00	24	06	00	24	06	00
	%	80,00	20,00	0,00	80,00	20,00	0,00	80,00	20,00	0,00
Después	Ideas	23	05	00	23	05	00	23	05	00
	%	82,14	17,86	00,00	82,14	17,86	00,00	82,14	17,86	00,00

Presentación de Algunas Respuestas Seleccionadas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas seleccionadas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 11: “La relación del silogismo”.
Alumno 25: “Operativa lógica”.

Presentación de Algunas Respuestas Seleccionadas de la Etapa Posterior a la Intervención.

Respuestas seleccionadas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 11: “No sé”.
Alumno 25: “El razonamiento lógico”.

Discusión de los Valores Porcentuales

La comparación sobre la interrelación entre cálculo proposicional (CP), Lógica de Predicados (LC) y Lógica de las relaciones (LR), presenta, cuando se establece entre CP y LP, una disminución en el porcentaje de (RI), que pasó del $(20{,}00\%)$ al $(17{,}86\%)$ y, por otro lado, en el caso de (NR), se produce un ligero aumento en los valores porcentuales, pasando del $(80{,}00\%)$ al $(82{,}14\%)$, mientras que los valores porcentuales de (RA) no sufrieron ningún tipo de alteración y se mantuvieron en el $(25{,}00\%)$.

Discusión de las Respuestas

Antes de la intervención acerca de las interrelaciones entre cálculo proposicional (CP), Lógica de Predicados (LC) y Lógica de las relaciones (LR), no había ejemplos ni de alumnos seleccionados como 'compatible con los propósitos educativos', ni tampoco de alumnos considerados 'como poco compatibles con los propósitos educativos'. En este caso, sólo apareció un ejemplo calificado como con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'. De entre todos ellos, escogimos a los alumnos (**11**) y (**25**).

Después de la intervención continuó sin haber ejemplos de alumnos 'compatible con los propósitos educativos', ni tampoco de aquellos pertenecientes al grupo denominado 'como poco compatibles con los propósitos educativos'. En esta etapa sólo se encontraron, de igual modo que al comienzo de la intervención, ejemplos de alumnos 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', entre los cuales, y con el fin de caracterizar la inexistencia de alteración, se seleccionó de nuevo al número (**11**) y al (**25**).

Resultado: La discusión sobre la comparación porcentual de las informaciones presentadas antes y después de la intervención, unida a la discusión de las respuestas seleccionadas, nos invita a considerar que las ideas de las *interrelaciones entre cálculo proposicional (CP), Lógica de Predicados (LC) y Lógica de las relaciones (LR)* no llega a ser adquirida adecuadamente por parte de los alumnos.

Análisis de la 5ª Cuestión

Este segundo ítem correspondiente a la primera parte del análisis, presenta tres indagaciones en forma de actividades didácticas, buscando hacer referencia a ideas básicas sobre Lógica. La primera actividad está referida a ideas que tratan sobre *razonamientos que no presentan encadenamiento lógico*; en la segunda, se abordan *razonamientos que presentan encadenamiento lógico*; y en la tercera, se alude a la *traducción de proposiciones del lenguaje lógico al lenguaje natural, analizando la validez.* Por último, se incluye una actividad que pretende interrelacionar las tres actividades anteriores.

Situación I

Tabla 21: Identificación de las Sentencias Abiertas y Proposiciones Declarativas

Intervención \ Criterios		Respuesta			Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**
Antes	**Ideas**	00	18	12	17	12	01	19	11	00
	%	00,00	60,00	40,00	56,67	40,00	3,33	63,33	36,67	00,00
Después	**Ideas**	00	10	18	04	18	06	07	19	02
	%	00,00	35,71	64,29	14,28	64,29	21,43	25,00	67,86	7,14

Presentación de Algunas Respuestas Seleccionadas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas seleccionadas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Sólo hay un ejemplo.
Alumno 11:
Contenido de la acción: "Diferenciándolas de las otras sentencias".
Motivo de la acción: "Clasificar las proposiciones declarativas".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 05:
Contenido de la acción: "Identificando las sentencias abiertas y las proposiciones declarativas".
Motivo de la acción: "Diferenciar".
Alumno 10:
Contenido de la acción: "Afirmando".
Motivo de la acción: "Identificar las sentencias".

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:
Sólo hay un ejemplo.
Alumno 10:
Contenido de la acción: "Verificando que ellas pueden clasificarse como verdaderas o falsas".
Motivo de la acción: "Mostrar que las sentencias abiertas no pueden ser inmediatamente clasificadas como verdaderas o falsas y, por el contrario, las proposiciones declarativas sí que pueden".

Respuestas extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05:
Contenido de la acción: "Diferenciando las proposiciones declarativas de las sentencias abiertas".
Motivo de la acción: "Identificar las proposiciones declarativas".
Alumno 11:
Contenido de la acción: "Diferenciar proposiciones declarativas de sentencias abiertas".
Motivo de la acción: "Reconocer tales tipos de sentencias a través del ejemplo y no del concepto".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 03:
Contenido de la acción: "Resolviendo Matemáticamente y sabiendo que sus respuestas son posibles".
Motivo de la acción: "Interpretar y resolver".
Alumno 17:
Contenido de la acción: "Analizando cada pregunta".
Motivo de la acción: "Descubrir si la sentencia es abierta o cerrada".

Análisis y Discusión de los Resultados

Discusión de los Valores Porcentuales

Se produce una estabilidad por parte de aquellos que no respondieron a la pregunta, pues ni antes ni después ningún alumno dejó de responder, si bien se puede observar que hubo una reducción en los porcentajes de (RI), pasando del ($60{,}00\%$) al ($35{,}71\%$), y, por contra, (RA) aumentó desde el ($40{,}00\%$) hasta el ($64{,}29\%$).

El contenido de la acción presenta una excelente reducción de (NR), pasando del ($56{,}67\%$) al ($14{,}28\%$). Por otro lado, (RI) y (RA) registran un aumento del ($40{,}00\%$) al ($64{,}29\%$) y del ($3{,}33\%$) al ($21{,}43\%$), respectivamente. Por su parte, el motivo de la acción, a pesar de que las diferencias porcentuales no son las mismas que en el caso anterior, presenta una reducción de (NR), que va desde un ($63{,}33\%$) al ($25{,}00\%$), seguido de los respectivos aumentos de (RI) y (RA), que alcanzaron cifras que van del ($36{,}67\%$) al ($67{,}86\%$) y del ($00{,}00\%$) al ($7{,}14\%$).

Discusión de las Respuestas

Antes de la intervención, ningún alumno presenta una respuesta adecuada acerca de la *identificación de las sentencias abiertas y proposiciones declarativas*. Por ello, no se dieron ejemplos que resultaran 'compatibles con los propósitos educativos'. Sin embargo, en cuanto a los alumnos que representan ejemplos del grupo que fue clasificado como 'poco compatibles con los propósitos educativos', se encontró sólo un alumno, el (**11**). Por su parte, con respecto a aquellos que están incluidos en el grupo ‘con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’, seleccionamos a los alumnos (**05**) y (**10**).

Después de la intervención, el alumno (**10**) pasa de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ a ‘compatibles con los propósitos educativos’. El alumno (**05**) pasó de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ a ‘poco compatibles con los propósitos educativos’; por su parte, el alumno (**11**) continuó formando parte de aquellos clasificados ‘como poco compatibles con los propósitos educativos’. Los alumnos (**03**) y (**17**) representan ejemplos clasificados con ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ después del proceso de enseñanza.

Resultado: La discusión acerca de la comparación porcentual de las informaciones presentadas antes y después de la intervención indica que hay un buen desempeño por parte de los alumnos en lo que se refiere a la *identificación de las sentencias abiertas y proposiciones declarativas*. Sin embargo, en lo que atañe al sentido construido, identificado a partir de la relación entre el contenido de la acción y el motivo de la acción, a pesar de leve cambio para mejor, éste no se produjo como la misma intensidad que la caracterizada en el porcentual de (**RA**).

Situación II

Tabla 22: Traducción de Proposiciones del Lenguaje Lógico al Lenguaje Natural

Criterios / Intervención		Respuesta			Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**
Antes	**Ideas**	02	17	11	12	12	06	18	12	00
	%	6,66	56,67	36,67	40,00	40,00	20,00	60,00	40,00	0,00
Después	**Ideas**	00	02	26	04	06	18	10	11	07
	%	00,00	7,14	92,86	14,28	21,43	64,29	35,71	39,29	25

Presentación de Algunas Respuestas Seleccionadas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas seleccionadas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas seleccionadas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 11:
<u>Contenido de la acción</u>: “Mostrar en otro lenguaje las proposiciones”.
<u>Motivo de la acción</u>: “Interpretar el lenguaje simbólico”.
Alumno 31:
<u>Contenido de la acción</u>: “Utilizando el lenguaje natural para escribir el lenguaje simbólico”.
<u>Motivo de la acción</u>: “Utilizar los conocimientos sobre lenguaje simbólico”.

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 15:
<u>Contenido de la acción</u>: No respondió.

Motivo de la acción: No respondió.
Alumno 20:
Contenido de la acción: “Una situación resumida y reflexiva”.
Motivo de la acción: No respondió.

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 15:
Contenido de la acción: “Transformando los lenguajes simbólicos en lenguaje natural”.
Motivo de la acción: “Lenguaje de los predicados”.
Alumno 31:
Contenido de la acción: “Transformando el lenguaje simbólico al lenguaje natural”.
Motivo de la acción: “Verificar los conocimientos sobre los símbolos empleados en la lógica cerrada”.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 11:
Contenido de la acción: “Traduciendo las proposiciones”.
Motivo de la acción: “Identificar las proposiciones usando el silogismo”.
Alumno 20:
Contenido de la acción: “Pasando las sentencias del silogismo al lenguaje natural”.
Motivo de la acción: “Formar sentencias que correspondan a las proposiciones”.

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 03:
Contenido de la acción: “Interpretando”.
Motivo de la acción: “Verificar paso a paso”.
Alumno 13:
Contenido de la acción: “Estoy representando proposiciones”.
Motivo de la acción: “Facilitar la comprensión de las proposiciones”.

Discusión de los Valores Porcentuales

Se llegó a producir, si bien de forma reducida, una disminución porcentual a cero de (NR), pasando del $(6{,}66\%)$ al $(00{,}00\%)$. Junto a ello, también se dio una excelente reducción de (RI), pasando del $(56{,}67)$ al $(7{,}14\%)$, y, en sentido inverso, (RA) aumentó asimismo de forma excelente desde el $(36{,}67\%)$ hasta el $(92{,}86\%)$.

En el contenido de la acción se produce una apreciable reducción de (NR), pasando del $(40{,}00\%)$ al $(14{,}28\%)$, lo mismo que de (RI), que pasa del $(40{,}00\%)$ al $(21{,}43\%)$, mientras que el apartado que (RA) registra un excelente crecimiento al pasar del $(20{,}00\%)$ al $(64{,}29\%)$. Por lo que se refiere al motivo de la acción, se produjo una fuerte reducción de (NR), que pasó del $(60{,}00\%)$ al $(35{,}71\%)$, mientras que el apartado (*RI*) aumentó desde el (33,33%) hasta el (39,29%) y, por último, (*RA*) pasó del (6,67%) al (25,00%).

Discusión de las Respuestas

Al comienzo, antes de la intervención, ningún alumno ofrece una respuesta adecuada acerca de la *traducción de proposiciones del lenguaje lógico al lenguaje natural*. Por eso, no hubo entre sus respuestas ejemplos que respondiesen al epígrafe 'compatibles con los propósitos educativos'. Sin embargo, en lo que toca a los alumnos que representan ejemplos clasificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos', sólo encontramos dos casos: (**11**) y (**31**). Por su parte, entre los que podemos incluir dentro del grupo 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', seleccionamos a los alumnos (**15**) y (**20**).

Después de la intervención, los alumnos (**15**) y (**31**) pasan, respectivamente, de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' y de 'poco compatibles con los propósitos educativos' a 'compatibles con los propósitos educativos'. El alumno (**20**) pasó de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'poco compatibles con los propósitos educativos', y el alumno (**11**) continuó formando parte del grupo denominado 'como poco compatibles con los propósitos educativos'. Por último, como ejemplos de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', seleccionamos a los alumnos (**03**) y (**13**).

Resultado: La discusión acerca de la comparación porcentual de las informaciones presentadas antes y después de la intervención indica que se ha producido un excelente desempeño por parte de los alumnos en el apartado correspondiente a la *traducción de proposiciones del lenguaje lógico al lenguaje natural*. Y, además, hubo también un aceptable desempeño por parte de los alumnos en la atribución de sentido, si consideramos las observaciones realizadas a partir de la relación entre el contenido de la acción y el motivo de la acción.

Situación III

Tabla 23: Traducción de Proposiciones del Lenguaje Lógico al Lenguaje Natural analizando la Validez

Criterios / Intervención		Respuesta			Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**
Antes	**Ideas**	14	15	01	14	15	01	18	12	00
	%	46,67	50,00	3,33	46,67	50,00	3,33	60,00	40,00	00,00
Después	**Ideas**	06	20	02	02	21	05	08	13	07
	%	21,43	71,43	7,14	7,14	75,00	17,86	28,57	46,43	25

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 01:
Contenido de la acción: "Verificando y transformando el lenguaje natural en lenguaje simbólico".
Motivo de la acción: "Validar el Argumento".
Alumno 06:
Contenido de la acción: "Verificando si este argumento tiene sentido lógico".
Motivo de la acción: "Ver si este argumento es válido".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 08:
Contenido de la acción: No respondió.
Motivo de la acción: No respondió.
Alumno 31:
Contenido de la acción: "Utilizando conceptos de Lógica".
Motivo de la acción: "Trabajar con los conceptos de Lógica".

Presentación de Algunas Respuestas Seleccionadas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas compatibles con los propósitos educativos:
Sólo hay un ejemplo.
Alumno 31:
Contenido de la acción: "Empleando el lenguaje simbólico para verificar el argumento".
Motivo de la acción: "Emplear el lenguaje simbólico para saber si el argumento es válido".

Respuestas extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 06:
Contenido de la acción: "Determinando si las proposiciones y la conclusión son verdaderas".
Motivo de la acción: "Verificar si el argumento es válido".
Alumno 08:
Contenido de la acción: "Determinar las premisas y la conclusión".
Motivo de la acción: "Identificar la validez del argumento".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 03:
Contenido de la acción: "Esta siendo utilizado el silogismo".

Motivo de la acción: “Interpretando la simbología”.
Alumno 13:
Contenido de la acción: “Continúo representando proposiciones para facilitar el entendimiento”.
Motivo de la acción: “Confirmar que si 2 es par, entonces es el menor par”.

Discusión de los Valores Porcentuales

Se produce una reducción porcentual considerable de (NR), pasando del ($46{,}67\%$) al ($21{,}43\%$). También se dio una apreciable reducción de (RI), pasando del ($50{,}00\%$) al ($71{,}43\%$), seguida por un ligero aumento de (RA), que pasa del ($3{,}33\%$) al ($7{,}14\%$).

El contenido de la acción presenta una apreciable reducción en el porcentaje de (NR), pasando del ($46{,}67\%$) al ($7{,}14\%$), acompañada de un considerable aumento de (RI), del ($50{,}00\%$) al ($75{,}00\%$), mientras que (RA) registra un aumento un poco menor, pasando del ($3{,}33\%$) al ($17{,}86\%$). En el motivo de la acción, se dio una gran reducción de (NR), pasando del ($60{,}00\%$) al ($28{,}57\%$), seguida por dos aumentos, el de (RI), que fue desde el ($40{,}00\%$) hasta el ($46{,}43\%$), y el de (RA), que pasó del ($0{,}00\%$) al ($25{,}00\%$).

Discusión de las Respuestas

Antes de la intervención, ningún alumno presenta una respuesta adecuada acerca de la *traducción de proposiciones del lenguaje lógico al lenguaje natural analizando la validez*, por lo que no hubo, entre ellos, ejemplos que fueran ‘compatibles con los propósitos educativos’. En cuanto a los alumnos que representan ejemplos de los denominados como ‘poco compatibles con los propósitos educativos’, sólo se hallaron los casos de (**01**) y (**06**). Por su parte, los incluidos en el grupo de aquellos clasificados ‘con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’, son los casos de los alumnos (**08**) y (**31**).

Después de la intervención, el alumno (**31**) pasa de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ a ‘compatibles con los propósitos educativos’. El alumno (**08**) pasó de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ a ‘poco compatibles con los propósitos educativos’, y el alumno (**06**) continuó entre aquellos considerados ‘como poco compatibles con los propósitos educativos’. Los alumnos (**03**) y (**13**), entre otros, representan ejemplos de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ después del proceso de enseñanza.

Resultado: La discusión acerca de la comparación porcentual de las informaciones presentadas antes y después de la intervención indica que no se da un desempeño adecuado por parte de los alumnos en el epígrafe correspondiente a *traducción de proposiciones del lenguaje lógico al lenguaje natural analizando la validez*. Por otro lado, la actuación de los alumnos en lo que se refiere a la atribución de sentido, si consideramos las respuestas ofrecidas a las cuestiones contenido de la acción y motivo de la acción, puede ser considerada como ligeramente más satisfactoria.

5.2.2 Análisis de los Mapas Conceptuales de los Alumnos

En esta segunda etapa correspondiente a la primera parte del análisis, se observan los mapas conceptuales anteriores y posteriores al proceso de enseñanza de los alumnos, pretendiendo evaluar si dicho proceso de enseñanza los ayudó o no a organizar sus ideas sobre el campo de la Lógica.

1$^{\underline{er}}$ Criterio: Selección Conceptual.

Tabla 24: Selección Conceptual (Lógica)

Criterios / Intervención		*a*	*b*	*c*
Antes	Total	207	91	6
	%	46,21	20,31	1,34
Después	Total	105	141	23
	%	23,44	31,47	5,13

Etapa Anterior a la Intervención:

Al comienzo, se observa un amplio margen de (a) (46,21%) sobre (b) (20,31%), o sea, en términos porcentuales (a) representa más del doble (b) en un (5,59%). Y, en cuanto a (c) (1,34%), a pesar de presenta un valor porcentual pequeño, toda vez que se refiere a conceptos considerados como más allá de los propósitos del proceso de enseñanza, puede ser interpretado como un buen registro.

Etapa Posterior a la Intervención:

En ese momento, (b) (31,47%) supera, respectivamente, a (a) (23,44%) y (c) (5,13%) en un (8,03%) y en algo más que seis veces.

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

En este momento, se verifica una reducción de aproximadamente la mitad en (a), que pasa del (46,21%) al (23,44%), seguida por el crecimiento de (b), que va desde el (20,31%) hasta el (31,47%) y de (c), desde el (1,34%) al (5,13%). A pesar de que estas variaciones porcentuales no resultan especialmente expresivas, permiten afirmar que se produjo una razonable adquisición conceptual por parte de los alumnos después del proceso de enseñanza.

2º Criterio: La Inclusividad.

General

Tabla 25: Conceptos Generales (Lógica)

Intervención \ Criterios		Lógica	Lógica Matemática	Lógica Moderna	Lógica Elemental	Otros Conceptos
Antes	**Total**	14	7	2	1	4
	%	50,00	25,00	7,14	3,57	14,29
Después	**Total**	25	0	0	0	3
	%	89,29	0,00	0,00	0,00	10,71

Etapa Anterior a la Intervención:

El concepto de Lógica (50,00%) supera a los conceptos de Lógica Matemática (25,00%), Lógica Moderna (7,14%), Lógica Elemental (3,57%) y Otros Conceptos (14,29%).

Etapa Posterior a Intervención:

En este momento, el concepto de Lógica (89,29%), juntamente con Otros Conceptos (10,71%), constituyen los conceptos generales encontrados en los mapas conceptuales de los alumnos.

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

El concepto de Lógica pasó del (50,00%) al (89,29%), el de Lógica Matemática del (25,00%) al (0,00%), el de Lógica Moderna, del (7,14%) al (0,00%), el de Lógica Elemental del (3,57%) al (0,00%) y Otros Conceptos del (14,29%) al (10,71%). Estas variaciones, caracterizadas por la convergencia en la opción de los alumnos después de la enseñanza sobre el concepto de Lógica, en virtud de la reducción a cero producida en los porcentajes correspondientes a los conceptos de Lógica Matemática, Lógica Moderna y Lógica Elemental, unido también a la pequeña reducción porcentual de un (3,58%) en los denominados otros conceptos, indican una buena adquisición de informaciones sobre los propósitos conceptuales en línea con los propósitos trazados en la propuesta didáctica.

Intermedio

Tabla 26: Conceptos Intermedios (Lógica)

Intervención \ Criterios		*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	132	53	5
	%	33,67	13,52	1,28
Después	**Total**	88	79	18
	%	22,45	20,15	4,59

Etapa Anterior a la Intervención:

El número de conceptos inferiores, en términos porcentuales, a a (33,67%) llega a superar el doble de los conceptos equivalentes b (13,52%) en un (6,63%) y a los conceptos superiores c (1,28%), en más de veintiséis veces.

Etapa Posterior a la Intervención:

El número de conceptos inferiores a (22,45%) continúa superando al de conceptos equivalentes b (20,15%), si bien ahora en tan sólo un (2,30%), y al de conceptos superiores c (4,59%), en un porcentaje cercano a cinco veces.

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Se produjo una reducción del (33,67%) al (22,45%) en los conceptos inferiores a, seguido por un aumento en los conceptos equivalentes b del (13,52%) al (20,15%) y en los conceptos c del (1,28%) al (4,59%). La variación positiva de b y c, a pesar de que a continua al frente de ambos, caracteriza una mejora de la comprensión por parte de los alumnos en lo que se refiere a los conceptos intermedios.

Horizontalidad

Tabla 27: Horizontalidad según los Niveles 1 y 2 Encontrados (Lógica)

Intervención \ Criterios		**Nivel** 1			**Nivel** 2		
		a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	49	21	2	50	18	0
	%	50,00	21,43	2,04	51,02	18,37	0,00
Después	**Total**	26	33	9	34	19	2
	%	26,53	33,67	9,18	34,69	19,39	2,04

Etapa Anterior a la Intervención:

Nivel 1: al principio, el valor porcentual de los conceptos inferiores $a\,(50{,}00\%)$ supera a los conceptos equivalentes $b\,(21{,}43\%)$ en un $(7{,}14\%)$, más del doble, y a los conceptos superiores c $(2{,}04\%)$ más de veinticuatro veces.
Nivel 2: el valor porcentual de los conceptos inferiores $a\,(51{,}02\%)$ supera a los conceptos equivalentes $b\,(18{,}37\%)$ en un $(14{,}28\%)$, más del doble, y no apareció ningún concepto superior c.

Etapa Posterior a la Intervención:

Nivel 1: los conceptos equivalentes $b\,(33{,}67\%)$, en términos porcentuales, se sitúan un $(7{,}14\%)$ por encima de los conceptos inferiores $a\,(26{,}53\%)$, y un $(6{,}13\%)$ por encima del triple de los conceptos superiores c $(9{,}18\%)$.
Nivel 2: los conceptos inferiores $a\,(34{,}69\%)$, en este momento, se sitúan por encima de los conceptos equivalentes $b\,(19{,}39\%)$, un $(15{,}30\%)$ más, y los conceptos superiores c $(2{,}04\%)$ pasaron a tener representación.

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Nivel 1: se produjo una disminución de los conceptos inferiores a, del $(50{,}00\%)$ al $(26{,}53\%)$, y, por otro lado, un aumento de los conceptos equivalentes b, del $(21{,}43\%)$ al $(33{,}67\%)$, así como de los conceptos superiores c, del $(2{,}04\%)$ al $(7{,}14\%)$. La reducción de a, casi a la mitad, seguida por el crecimiento de b, del $(12{,}24\%)$, y de c, del $(5{,}10\%)$, aun considerando que no se trata de un gran aumento porcentual, hace posible afirmar que hubo una mejora por parte de los alumnos en este nivel.
Nivel 2: en este nivel, se produjo una disminución del $(16{,}33\%)$ en los conceptos inferiores a, pasando del $(51{,}02\%)$ al $(34{,}69\%)$ y un ligero aumento en los conceptos equivalentes b desde el $(18{,}37\%)$ hasta el $(19{,}39\%)$, así como en los conceptos superiores c, pasando del $(0{,}00\%)$ al $(2{,}04\%)$. En función de esta descripción, no es posible establecer una argumentación similar a la que se hizo anteriormente, para el nivel 1.

Tabla 28: Horizontalidad, según los Niveles 3 y 4 Encontrados (Lógica)

Criterios / **Intervención**		**Nivel** 3			**Nivel** 4		
		a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Antes	Total	20	10	2	10	2	0
	%	20,41	10,21	2,04	10,21	2,04	0,00
Después	Total	17	13	5	7	9	3
	%	17,35	13,27	5,10	7,14	9,18	3,06

Etapa Anterior a la Intervención:

Nivel 3: al principio, el valor porcentual de los conceptos inferiores a (20,41%) supera a los conceptos equivalentes b (10,21%), esto es, cerca del doble, y a los conceptos superiores c (2,04%), lo que corresponde aproximadamente a diez veces.
Nivel 4: el valor porcentual de los conceptos inferiores a (10,21%) supera a los conceptos equivalentes b (2,04%) en aproximadamente cinco veces, no registrándose ningún concepto superior c.

Etapa Posterior a la Intervención:

Nivel 3: los conceptos inferiores a (17,35%) superan en un (4,08%) a los conceptos equivalentes b (13,27%), así como a los conceptos superiores c (5,10%), en aproximadamente tres veces.
Nivel 4: en este momento, los conceptos equivalentes b (9,18%) permanecieron por encima de los conceptos inferiores a (7,14%) y de los conceptos superiores c (3,02%).

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Nivel 3: se produjo una disminución de los conceptos inferiores a, del (20,41%) al (17,35%), y, por otro lado, un aumento de los conceptos equivalentes b, del (10,21%) al (13,27%), y de los conceptos superiores c, del (2,04%) al (5,10%). Aun habiéndose producido una reducción de a en un (3,06%), su valor, después de la intervención, continúa siendo superior a b en términos porcentuales. Por otro lado, se produjo un crecimiento de b en un (3,06%) y de c en un (2,04%); no obstante, tales variaciones no se corresponden con un elevado aumento porcentual, lo que no hace posible afirmar que se haya llegado a producir una mejora considerable en los alumnos en este nivel.
Nivel 4: en este nivel, se dio una disminución del (3,07%) en los conceptos inferiores a, pasando del (10,21%) al (7,14%), así como un pequeño aumento en los conceptos equivalentes b del (2,04%) al (9,18%) y en los conceptos superiores c del (0,00%) al (3,06%). En virtud de la descripción que acabamos de establecer, y a pesar de que los valores resultan ser ligeramente mejores que los del nivel 3, tampoco podemos construir una argumentación evolutiva como la que se dio en el nivel 1.

3$^{\underline{er}}$ Criterio: Relaciones Significativas.

Tabla 29: Relaciones Significativas (Lógica)

Intervención \ Criterios		No presenta	a	b	c
Antes	**Total**	22	6	8	0
	%	78,57	0,97	1,30	0,00
Después	**Total**	16	18	36	0
	%	57,14	2,92	5,84	0,00

Etapa Anterior a la Intervención:

Inicialmente, el $(78{,}57\%)$ de los alumnos no presentaron, en sus mapas, ningún tipo de relaciones, y, entre aquellos que presentaron relaciones significativas b $(1{,}30\%)$, superan a las relaciones inferiores a $(0{,}97\%)$ en sólo un $(0{,}33\%)$.

Etapa Posterior a la Intervención:

El $(57{,}16\%)$ no presentó ningún tipo de relaciones entre los conceptos, y, en cuanto a aquellos alumnos que presentaron las relaciones equivalentes b $(5{,}84\%)$, llegan a representar el doble de las relaciones inferiores (a) $(2{,}92\%)$.

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Se produjo un aumento en las relaciones encontradas en los mapas de los alumnos caracterizado por la reducción del ítem "no presenta", pasando del $(78{,}57\%)$ al $(57{,}14\%)$. Por otro lado, se produjo un aumento en las relaciones inferiores a del $(0{,}97\%)$ al $(2{,}92\%)$, así como en las relaciones equivalentes b del $(1{,}30\%)$ al $(5{,}84\%)$, mientras que no hubo ninguna variación en c $(0{,}00\%)$. Las variaciones cuantitativas anteriores en referencia a las relaciones existentes en los mapas de los alumnos, según los criterios a y b, fueron pequeñas, seguidas por el crecimiento caracterizado al comienzo de este primer párrafo permite indicar, si bien con ciertas restricciones, que se ha producido una razonable mejora con respecto a este tercer criterio.

5. 3 Análisis y Discusión de los Resultados de Álgebra

En este apartado se realizará el *análisis de los cuestionarios diagnósticos y evaluación del aprendizaje*, para, después, establecer la *delimitación del campo del Álgebra*. En términos amplios, este análisis pretende evaluar los tipos de concepciones que sobre el Álgebra se tiene en las escuelas de nivel medio, siguiendo los tipos caracterizados por Usiskin, *apud* Coxford y Shulte (1995), y más en concreto, las tres primeras concepciones de referencia: *el Álgebra como Aritmética generalizada* (1); *Álgebra como un estudio de procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas* (2); *Álgebra como estudio de relaciones entre magnitudes* (3).

5.3.1 Análisis de los Cuestionarios Diagnósticos y Verificación del Aprendizaje

En la mayor parte de las tablas presentadas en el presente análisis, los alumnos representados por (**NR**) son aquellos que *no respondieron a la pregunta*, (**RI**) los que *respondieron inadecuadamente* y (**RA**) los que *respondieron adecuadamente*.

Análisis de la 1ª Pregunta del cuestionario diagnóstico *vs.* 2ª Pregunta de evaluación del aprendizaje

Tabla 30: Aritmética Generalizada: Traducir/Generalizar

Intervención \ Criterios		Respuesta			Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	RI	RA	NR	RI	RA	NR	RI	RA
Antes	Ideas	6	0	21	0	14	13	1	13	13
	%	22,22	0,00	77,78	0,00	51,85	48,15	3,70	48,15	48,15
Después	Ideas	9	10	8	7	9	11	11	10	6
	%	33,33	37,04	29,63	25,93	33,33	40,74	40,74	37,04	22,22

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención sobre la Respuesta a la pregunta

Respuestas Seleccionadas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05: “Propiedad conmutativa de la multiplicación”.
Alumno 26: “Propiedad conmutativa de la multiplicación”.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 01: “Conmutativa de la Multiplicación”.
Alumno 08: “Propiedad conmutativa”.

Respuestas Extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 24: “Conmutativa”.
Alumno 18: “Conmutatividad”.

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención sobre el Contenido de la Acción y el Motivo de la Acción

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 18:
Contenido de la acción: “Que el orden de los factores no altera el producto”.
Motivo de la acción: “Mostrar la propiedad conmutativa”.
Alumno 24:
Contenido de la acción: “Que el orden de los factores no altera el producto”.
Motivo de la acción: “Comprobar la propiedad conmutativa”.

Respuestas seleccionadas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 01:
Contenido de la acción: “La inversión de los factores en la multiplicación dará el mismo resultado”.
Motivo de la acción: “Encontrar los resultados”.
Alumno 08:
Contenido de la acción: “El orden de los factores no altera el producto”.
Motivo de la acción: “Usar la propiedad conmutativa de la multiplicación”.

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 17:
Contenido de la acción: "Existe una Aritmética destacada en el Álgebra".
Motivo de la acción: "Colocar operaciones simples con visiones numéricas".
Alumno 29:
Contenido de la acción: "El proceso de la multiplicación usando la conmutativa".
Motivo de la acción: No respondió.

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención sobre la Respuesta a la pregunta

Respuestas seleccionadas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 18: "Sí. 2^{2n-1}".
Alumno 24: "Sí. $n \times 2n$".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 13: "Si yo estuviese trabajando con secuencia, sí".
Alumno 23: "Sí. Una progresión Geométrica de razón 4".

Respuestas Extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 06: "Sí, conmutatividad. Pues, la multiplicación es conmutativa".
Alumno 07: "No".

Presentación de Algunas Respuestas Seleccionadas de la Etapa Posterior a la Intervención sobre el Contenido de la Acción y el Motivo de la Acción

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 18:
Contenido de la acción: "Una regularidad de característica exponencial".
Motivo de la acción: "Identificar y formular una regularidad implícita en la pregunta".
Alumno 31:
Contenido de la acción: "Que es el producto de un número por el doble del mismo número".
Motivo de la acción: "Observar, en una situación Aritmética, una generalización".

Respuestas Obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 24:
Contenido de la acción: "Que está siendo multiplicado el número por su valor doble".
Motivo de la acción: "Descubrir el doble de cada resultado".
Alumno 27:
Contenido de la acción: "Un factor de la 1ª se repite en la 2ª, una de la 2ª se repite en la 3ª, etc., siempre el 2º factor".
Motivo de la acción: "Elegir un tipo de propiedad para los productos".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 01:
<u>Contenido de la acción</u>: "Que en la multiplicación el inverso de los números dará el mismo resultado".
<u>Motivo de la acción</u>: "Demostrar la propiedad conmutativa".
Alumno 17:
<u>Contenido de la acción</u>: "Existe una propiedad multiplicativa".
<u>Motivo de la acción</u>: "Distinguir si se da algún tipo de propiedad".

Discusión de los Valores Porcentuales

La comparación de las respuestas anteriores y posteriores a la intervención presenta una reducción de (RA) superior en más de dos veces y media, pasando del (77,78%) al (29,63%), además, se produjeron también reducciones de (RA), en el contenido de la acción, del (48,15%) al (40,74%), y en el motivo de la acción, del (48,15%) al (22,22%).

Discusión de las Respuestas

Al comienzo, antes de la intervención, en lo que atañe a la *concepción algebraica Aritmética generalizada: traducir/generalizar,* los alumnos (**18**) y (**24**) se encuentran entre los ejemplos 'compatible con los propósitos educativos'. Por su parte, los alumnos (**13**) y (**23**) constituyen ejemplos de los alumnos que se encuentran entre los clasificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos', y los alumnos (**06**) y (**07**) se encuentran entre los que componen el grupo 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Después de la intervención, el alumno (**18**) continúa en el mismo nivel, si bien algo más elevado que en la etapa inicial, lo que se puede observar comparando los dos ejemplos; por su parte, el alumno (**31**), que ni siquiera había dado una respuesta, pasó de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'compatibles con los propósitos educativos'. El alumno (**24**), que inicialmente no había respondido, evolucionó desde el grupo 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' al grupo 'poco compatibles con los propósitos educativos'; mientras que el alumno (**27**), que experimenta una evolución de calificación idéntica, inicialmente había presentado respuesta. Por su parte, los alumnos (**01**) y (**17**) representan ejemplos de aquellos denominados con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Resultado: Los resultados obtenidos, a partir de la comparación porcentual de las respuestas, en conjunto con los porcentajes relativos al contenido de la acción y al motivo de la acción, considerando los momentos anterior y posterior a la intervención sobre la *concepción algebraica Aritmética generalizada: traducir/generalizar*, parecen indicar, en un primer análisis, un cierto tipo de regresión en la comprensión por parte de los alumnos. Sin embargo, al considerar también las respuestas obtenidas acerca del contenido de la acción y el motivo de la acción, se percibe que se produjo una atribución de sentido por parte de esos mismos alumnos. Por otro lado, cabe destacar que la existencia de la dificultad (no-preparación) para la formulación de propiedades a partir de regularidades, identificada en los alumnos que participaron en este estudio, es lo que les impidió obtener un mejor resultado.

Análisis de la 2ª Pregunta del cuestionario diagnóstico *vs.* 1ª Pregunta de evaluación del aprendizaje

Tabla 31: Resolución de Problemas: Simplificar/Resolver

Criterios / Intervención		Respuesta			Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**
Antes	**Ideas**	7	4	16	2	10	15	3	10	14
	%	25,93	14,82	59,26	7,41	37,04	55,56	11,11	37,04	51,85
Después	**Ideas**	6	3	18	9	7	11	6	3	18
	%	22,22	11,11	66.67	33,33	25,93	40,74	22,22	11,11	66,67

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención sobre la Respuesta a la pregunta

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 21: $4x = 12$

$x = \frac{12}{4} \Rightarrow x = 3$

Alumno 31: $x + 3x = 12$

$4x = 12 \Rightarrow x = 3$

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 07: $x + 3 \cdot x = 12, o\ sea, 3 + 3 \cdot 3 = 12$
Alumno 18: $x = 18$. No justificó.

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 11: No respondió.
Alumno 12: No respondió.

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención sobre el Contenido de la Acción y el Motivo de la Acción

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 07:
Contenido de la acción: "Ecuacionando".
Motivo de la acción: "Encontrar el valor desconocido".
Alumno 24:
Contenido de la acción: "Creando una expresión para descubrir el valor desconocido".
Motivo de la acción: "Encontrando el valor desconocido".

Respuestas seleccionadas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 01:
<u>Contenido de la acción</u>: "Utilizando la parte algebraica de las Matemáticas para obtener un resultado numérico".
<u>Motivo de la acción</u>: "Encontrar el número mencionado, descubriendo el valor de la variable".

Alumno 11:
<u>Contenido de la acción</u>: "Ecuacionando el problema para que se pueda obtener de forma más simple el resultado".
<u>Motivo de la acción</u>: "Demostrar que el uso de las letras facilita la resolución de problemas que presentaban números desconocidos".

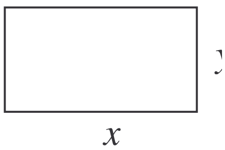
Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 18:
<u>Contenido de la acción</u>: "Escribiendo el contexto que aparece más arriba, en un lenguaje matemático".
<u>Motivo de la acción</u>: "Simbolizar algunas expresiones que se encuentran en la forma verbal textual".

Alumno 30:
<u>Contenido de la acción</u>: No respondió.
<u>Motivo de la acción</u>: "Es encontrar el número que satisfaga la ecuación".

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención sobre la Respuesta a la pregunta

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:

Alumno 18:

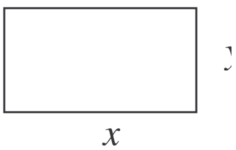


$$\begin{cases} x \times y = 20 \\ 2(x+y) \Rightarrow x+y=9 \end{cases}$$

realizando el sistema de ecuaciones llegamos al resultado

$$\begin{cases} x+y=9 \\ x \times y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4m \\ y = 5m \end{cases}$$

Alumno 31:



$$4x+4y=36$$
$$\begin{cases} x+y=9 \Rightarrow x = 9-y \\ x \times y = 20 \Rightarrow (9-y)\times y = 20 \end{cases}$$
$$9y - y^2 - 20 = 0$$
$$-y^2 + 9y - 20 = 0$$
$$\Delta = 81 - 4\times(-1)\times(-20) \Rightarrow \Delta = 1$$

$$y = \frac{-9 \pm \sqrt{1}}{2\times(-1)} = \frac{-9\pm 1}{-2}$$
$$\begin{cases} y' = \dfrac{-9+1}{-2} = 4 = x \\ y'' = \dfrac{-9-1}{-2} = 5 = y \end{cases}$$

Respuestas seleccionadas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 11:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18 \\ x \times y = 20 \end{cases}$$

$$x = 9 - y$$

$$y^2 - 9y + 20 = 0 \Rightarrow \Delta = 1$$

$$y_1 = 5 \Rightarrow x_1 = 4$$

$$y_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 5$$

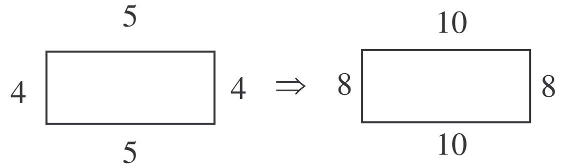
Alumno 07:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \Rightarrow x + y = 18 \\ x \times y = 20 \end{cases}$$

$$x + y = 9 \Rightarrow y = 9 - x$$

$$x \times (9 - x) = 20 \Rightarrow -x^2 + 9x + 20 = 0$$

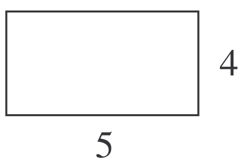
$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ x'' = 4 \end{cases}$$



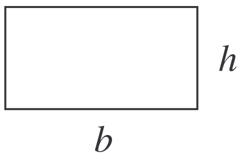
$$\boxed{respuesta: 2\times(5+5)+2\times(4+4)=20+16=36}$$

Respuestas Extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:

Alumno 05:



Alumno 24:



$$A = b \times h = 20$$

$$p = \frac{36}{2} = 18$$

$$5 \times 4 = 20$$

$$5+5+4+4$$

$$A = a \times b = 20$$

$$p = 2a + 2b = 18$$

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención sobre el Contenido de la Acción y el Motivo de la Acción

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 07:
Contenido de la acción: “Ecuacionando”.
Motivo de la acción: “Descubrir las dimensiones”.
Alumno 18:
Contenido de la acción: “Encontrando ecuaciones que den soporte para resolver la cuestión”.
Motivo de la acción: “Utilizar recursos algebraicos para encontrar el valor de cada dimensión del terreno”.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 24:
Contenido de la acción: "Usando variables para representar las dimensiones".
Motivo de la acción: "Encontrar el resultado".
Alumno 30:
Contenido de la acción: "Resolver una ecuación".
Motivo de la acción: "Determinar las dimensiones del jardín usando la fórmula algebraica".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:

Alumno 10:
Contenido de la acción: "Usando la resolución de un sistema para resolver el problema".
Motivo de la acción: "Usar el Álgebra como medio de resolución".
Alumno 17:
Contenido de la acción: "Calculando el área del rectángulo".
Motivo de la acción: "Determinar el número desconocido".

Discusión de los Valores Porcentuales

Al comparar los datos anteriores y posteriores a la intervención, se puede observar que (RA) presenta un ligero aumento, tanto en las respuestas, que pasan del ($59{,}26\%$) al ($66{,}67\%$), cuanto en el motivo de la acción, que pasa del ($51{,}85\%$) al ($66{,}67\%$); y, contrariamente, (RA), cuando se refiere al contenido de la acción, presenta una reducción del ($55{,}56\%$) al ($40{,}74\%$).

Discusión de las Respuestas

Al principio, antes de la intervención, en lo que atañe a las respuestas que se refieren a la concepción algebraica acerca de la *resolución de problemas: simplificar/resolver,* el alumno (**11**) pasó de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'poco compatible con los propósitos educativos'. El alumno (**18**) pasó de los ejemplos que representan el grupo de los 'poco compatibles con los propósitos educativos' al grupo de los 'compatibles con los propósitos educativos'. Por su parte, los alumnos (**07**) y (**31**), a pesar de que tras la intervención se mantuvieron en sus respectivas calificaciones de 'poco compatible con los propósitos educativos' y de 'compatible con los propósitos educativos', presentaron una evolución en sus respuestas.

Después de la intervención, en lo que se refiere al contenido de la acción y al motivo de la acción con respecto a la concepción algebraica sobre *resolución de problemas: simplificar/resolver,* los alumnos (**18**) y (**30**) pasan de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'compatibles con los propósitos educativos' y 'poco compatibles con los propósitos educativos' respectivamente. El alumno (**07**) se mantiene con la calificación de 'compatible con los propósitos educativos', si bien en un nivel más avanzado. Por su parte, el alumno (**24**), que inicialmente no había presentado ninguna respuesta, entra a formar parte entre los 'poco compatibles con los propósitos educativos'; por último, los alumnos (**10**) y (**17**) representan ejemplos del grupo con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Resultado: La comparación porcentual de las respuestas extraídas, así como los porcentajes del contenido de la acción y el motivo de la acción antes y después de la intervención, indican la existencia de un ligero cambio para mejor en lo que atañe a la concepción de los alumnos sobre la *resolución de problemas: simplificar/resolver*. Y, por lo que se refiere a las respuestas obtenidas acerca de los contenidos y motivos de la acción, los cambios producidos en la evolución de los alumnos, ya sea en las formas ascendentes o incluso cuando se mantienen en una misma clasificación, viene, de algún modo, a caracterizar el hecho de que se produjo una atribución de sentido por parte de los alumnos en lo que a tal concepción algebraica se refiere.

Análisis de la 3ª Pregunta del cuestionario diagnóstico *vs.* 3ª Pregunta de evaluación del aprendizaje

Tabla 32: Estudio de las Relaciones: Relacionar Magnitudes

Criterios / Intervención		Respuesta			Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**
Antes	**Ideas**	12	10	5	14	11	2	18	8	1
	%	44,44	37,04	18,52	51,85	40,74	7,41	66.67	29,63	3,70
Después	**Ideas**	1	6	20	5	3	19	7	7	13
	%	3,70	22,22	74,07	18,52	11,11	70,37	25,93	25,93	48,15

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención sobre la Respuesta a la pregunta

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05:
Respuesta (i): "Una función lineal".
Contenido de la acción (ii): "Verificar cuáles son los puntos por los que la recta está pasando".
Motivo de la acción (iii): "Descubrir el tipo de función y los puntos por donde pasa".
Alumno 23:
Respuesta (i): "Ecuación de la recta".
Contenido de la acción (ii): "Encontrando los coeficientes (angular y lineal)".
Motivo de la acción (iii): "Determinar la ecuación de la recta".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 09:
Respuesta (i): "Ella representa una función".
Contenido de la acción (ii): "Estoy preparando la sentencia para preparar la función y, así justifico lo que se solicitaba en el problema".

Motivo de la acción (iii): "Promovió una interacción entre el problema y una función lineal".
Alumno 29:
Respuesta (i): "Representa una función afín".
Contenido de la acción (ii): "Encontrar el valor de x y y, utilizando los valores dados".
Motivo de la acción (iii): No respondió.

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 11:
Respuesta (i): "Una recta".
Contenido de la acción (ii): "Calculando con números y letras".
Motivo de la acción (iii): "Mostrar que el Álgebra trabaja también sobre cuestiones de este tipo".
Alumno 28:
Respuesta (i): "Yo sé que esto es fácil, pero en este momento no me acuerdo".
Contenido de la acción (ii): No respondió.
Motivo de la acción (iii): No respondió.

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención sobre la Respuesta a la pregunta

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05:
Respuesta (i): "$y = 0,20x + 1000$".
Contenido de la acción (ii): "Transformando los datos del problema en una ecuación".
Motivo de la acción (iii): "Resolver y descubrir la variación de la ecuación".
Alumno 09:
Respuesta (i): "$f(x) = 1000 + 0,20 \cdot x$ *función afín.*".
Contenido de la acción (ii): "Creando una ley".
Motivo de la acción (iii): "A través de la ley, determinar lo que fue expuesto por el problema".

Respuestas seleccionadas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 11:
Respuesta (i): "$y = 1000 + 0,20x$".
Contenido de la acción (ii): "Representando la fórmula que determina el coste total de la relación anterior, para cualquier cantidad de cajas".
Motivo de la acción (iii): "Generalizar el problema cuando el mismo posee variables".
Alumno 28:
Respuesta (i): "$y = 1000 + 20x$".
Contenido de la acción (ii): "Estableciendo una ecuación para facilitar la resolución".
Motivo de la acción (iii): "Determinar el coste a partir de la relación del número de cajas".

Respuestas Extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 16:
Respuesta (i): "$y = 1000 + R \qquad Siendo\ R\ una\ \mathrm{var}iable.$".
<u>Contenido de la acción</u> (ii): "Ecuacionando el problema".
<u>Motivo de la acción</u> (iii): "Encontrar una ecuación que resuelva el problema".
Alumno 17:
Respuesta (i): "$R\$\,1000 + R\$\ \ x$".
<u>Contenido de la acción</u> (ii): "Relacionándolo con la adición".
<u>Motivo de la acción</u> (iii): "Descubrir el valor de cada caja de mangas producida".

Discusión de los Valores Porcentuales

La comparación entre los datos anteriores y posteriores a la intervención puede ser perfectamente caracterizada, en virtud de las grandes variaciones observadas, a partir de los valores porcentuales de las respuestas de (RA), que pasan del ($18{,}52\%$) al ($74{,}07\%$), seguida por los valores porcentuales del contenido de la acción, que pasó del ($7{,}41\%$) al ($70{,}37\%$), y del motivo de la acción, que pasó del ($3{,}70\%$) al ($48{,}15\%$). Tales variaciones justifican una aceptable evolución conceptual acerca de esta concepción algebraica.

Discusión de las Respuestas

Al comienzo, antes del proceso de enseñanza de la concepción algebraica sobre el *estudio de las relaciones: relacionar magnitudes,* los alumnos (**05**) y (**23**) están incluidos entre los calificados como 'compatible con los propósitos educativos'. Por su parte, los alumnos (**09**) y (**29**) representan ejemplos de los calificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos', mientras que los alumnos (**11**) y (**28**) figuran entre los que componen el grupo calificado con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Después del proceso de enseñanza, el alumno (**05**) se mantiene como 'compatible con los propósitos educativos', si bien se advierte una mejor comprensión. Los alumnos (**11**) y (**28**) pasan de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Y los alumnos (**16**) y (**17**), a pesar de ser calificados como integrantes del grupo con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', y permanecer, por tanto, dentro de este mismo grupo, inicialmente ni siquiera habían esbozado un intento de respuesta.

Resultado: Los resultados a partir de la comparación porcentual de las respuestas extraídas de los trabajos realizados por los alumnos, unidos a los porcentajes correspondientes al contenido de la acción y al motivo de la acción, obtenidos antes y después de la intervención sobre el *estudio de las relaciones: relacionar magnitudes,* indica un excelente progreso en la comprensión de los alumnos. A su lado, las respuestas seleccionadas sobre el contenido de la acción y el motivo de la acción,

permiten caracterizar el hecho de que los alumnos consiguieron atribuir sentido acerca de la concepción algebraica en cuestión.
Análisis de la 5ª Cuestión: Articulación de las ideas de Álgebra tratadas Enseñanza

El análisis que se realiza en este apartado está referido a las concepciones que acerca del Álgebra se tienen en la escuela de nivel medio, y que fueron caracterizadas por Usiskin, *apud* Coxford y Shulte (1995), en concreto, las relacionadas con las ideas de función afín y función lineal, dentro del ámbito de la tercera concepción apuntada por Usiskin, que es *el Álgebra como estudio de relaciones entre magnitudes*.

Tabla 33: Función Proporcionalidad: Lineal *vs.* Afín

Criterios / Intervención		Respuesta (i)			Respuesta (ii) y justificación		
		NR	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**
Antes	**Ideas**	-x-	-x-	-x-	06	8	13
	%				22,22	29,63	48,15
Después	**Ideas**	08	06	13	7	11	09
	%	29,63	22,22	48,15	25,93	40,74	33,33

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención (i)

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 06: "$C_M = 10 \cdot Cantidad\ de\ Cajas.\ O\ sea,\ C_M = 10 \cdot x \Rightarrow f(x) = 10 \cdot x$".
Alumno 19: "$R(x) = 10x \qquad Siendo\ x = n^{\underline{o}}\ de\ cajas\ de\ mangas.$"

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 02: "$R(x) = 10 \cdot x$".
Alumno 18: "$y = 10 \cdot x$".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:

Aluno 03: "$\begin{cases} a\ Cajas\ de\ mangas \\ b\ Valor\ \ fijo \\ c\ Coste\ total \end{cases} \Rightarrow a + b = c$".
Alumno 05: "$y = 0,20 \cdot 10 + 100 \Rightarrow y = 102$".

Presentación de Algunas Respuestas Elaboradas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas elaboradas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 06: "No; una función afín es una función del tipo $y = a \cdot x + b$, y una función lineal es del tipo $y = a \cdot x$, donde $b = 0$. Luego, una función lineal es un tipo de función afín".

Alumno 19: "Sí; Los ingresos vienen dados por una ley que está definida como una función lineal, y, ésta es función afín, como es el caso de la función coste. O sea, ambas funciones son afines".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 18: "En mi concepción, una función de 1$^{\underline{er}}$ grado es una función lineal. Y toda función afín es una función lineal, pues afín es una función de 1$^{\underline{er}}$ grado. Con todo, no toda función lineal es una función afín; éste es el caso de la función constante".
Alumno 27: "Semejanzas: ambas son funciones de 1$^{\underline{er}}$ grado. Diferencia: en la función lineal $b = 0$, siendo, así, que su representación gráfica pasa por el punto $(0,0)$".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 02: "Existe semejanza, pues ambas resultan en gráficos lineales".
Alumno 08: No respondió.

Presentación de Algunas Respuestas Elaboradas de la Etapa Posterior a la Intervención (ii)

Respuestas Elaboradas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 06: "No hay diferencia. Pues, en ambos casos, estamos tratando de funciones afines, siendo específicamente la segunda una función lineal."
Alumno 08: "En el modelo ingresos, la función es lineal, luego también es afín; en el modelo anterior, la función es afín".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 18: "La semejanza radica en que las dos son funciones de 1$^{\underline{er}}$ grado".
Alumno 02: "Semejanza: ambas son afines, siendo que la función ingresos es lineal".

Respuestas Seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 20: "Existe una diferencia. Pues, para calcular el coste, se basa sólo en un precio fijo."
Alumno 28: "Hay semejanza. Ambas pueden ser representadas por tablas y a través de ecuaciones".

Discusión de los Valores Porcentuales

La comparación, a partir de las informaciones anteriores y posteriores a la intervención, según las variaciones de los valores de (RA) en las respuestas dadas, que pasan del ($18{,}52\%$) al ($55{,}56\%$), y también teniendo en cuenta la conclusión de las mismas, que pasa del ($22{,}22\%$) al ($33{,}33\%$), a pesar de ser pequeñas, caracteriza una efectiva evolución en la comprensión de los alumnos.

Discusión de las Respuestas Obtenidas correspondientes a la 4$^{\underline{a}}$ pregunta del cuestionario diagnóstico y del ítem (ii) de la 4$^{\underline{a}}$ pregunta del cuestionario de evaluación del aprendizaje

Al comienzo, antes de la intervención, por lo que se refiere a la interrelación entre las *ideas de función lineal y afín,* identificando sus características, los alumnos (**06**) y (**19**) representan ejemplos ‘compatibles con los propósitos educativos’. Los alumnos (**18**) y (**27**) representan ejemplos de los que fueron calificados como ‘poco compatibles con los propósitos educativos’, y los alumnos (**02**) y (**08**) se encuentran entre quienes comparten la calificación de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’.

Después de la intervención, el alumno (**06**), si bien en un estadio más desarrollado, continuó entre los calificados como ‘compatibles con los propósitos educativos’; por su parte, el alumno (**08**) pasó de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ a ‘compatible con los propósitos educativos’. El alumno (**18**), a pesar de haber mejorado en su respuesta, no varió su calificación inicial, que fue ‘poco compatible con los propósitos educativos’; sin embargo, el alumno (**02**) pasó de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ a ‘poco compatible con los propósitos educativos’. Por su parte, los alumnos (**20**) y (**28**) representan ejemplos calificados como ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’.

Discusión de las Respuestas Extraídas del ítem (i) de la 4ª pregunta del cuestionario de evaluación del aprendizaje:

Después de la intervención, los alumnos (**06**) y (**19**), son calificados como ‘compatibles con los propósitos educativos’, mientras que los alumnos (**02**) y (**08**) se encuentran entre aquellos que presentan ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’, y los alumnos (**03**) y (**05**) presentan ejemplos que los adscriben al grupo de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’.
Resultado: La comparación de los valores porcentuales de las respuestas con justificación presentadas en la 4ª pregunta del cuestionario diagnóstico y en el ítem (ii) de la 4ª pregunta del cuestionario de evaluación del aprendizaje, caracteriza el hecho de que se produjo un buen desempeño por parte de los alumnos al respecto de la interrelación entre las *ideas de función lineal y afín*. Por su parte, la comparación de los porcentajes obtenidos en las respuestas seleccionadas sobre el ítem (ii) de la 4ª pregunta del cuestionario de evaluación del aprendizaje, viene a caracterizar asimismo un buen desempeño por parte de los alumnos en cuanto a la formulación del modelo obtenido con referencia a la concepción algebraica del estudio de las relaciones: relacionar magnitudes.

5.3.2 Análisis de los Mapas Conceptuales de los Alumnos

En esta segunda etapa de la primera parte del análisis, se observan los mapas conceptuales anteriores y posteriores al proceso de enseñanza de los alumnos, con el propósito de evaluar si dicha enseñanza les ayudó o no a la hora de organizar sus ideas acerca del campo del Álgebra en el ámbito de la enseñanza secundaria, como ya anunciamos anteriormente, en función de la caracterización de Usiskin, recogida en Coxford y Shulte (1995).

1er **Criterio**: Selección Conceptual.

Tabla 34: Comparaciones entre n(C.E.), 8 y n(C.I.) (Álgebra)

Intervención \ Criterios		a	b	c	$(b)\times 7{,}5$		$(y=b+c)\times 7{,}5$	
					$b<7{,}5$	$b>7{,}5$	$y<7{,}5$	$y>7{,}5$
Antes	**Total**	59	87	33	21	1	17	5
	%	17,88	26,36	10,00	95,45	4,55	77,27	22,73
Después	**Total**	39	92	83	20	2	10	12
	%	11,82	27,88	25,15	90,91	9,09	45,45	54,55

Etapa Anterior a la Intervención:

Los conceptos equivalentes (b) (26,36%) superan en un (8,48%) a los conceptos inferiores (a) (17,88%) y a los conceptos superiores (c) (10,00%) en un (16,36%).

Comparación de los conceptos equivalentes (b) con siete y medio (7,5):

Al comienzo, se puede observar que los conceptos equivalentes inferiores a siete y medio ($b<7{,}5$) (95,45%) representan una supremacía abrumadora sobre los conceptos equivalentes ($b>7{,}5$) (4,55%).

Comparación de la suma de los conceptos equivalentes y los conceptos superiores ($y=a+b$) con siete (7,5):

En la misma dirección anterior, la suma de los conceptos equivalentes y superiores inferiores a siete y medio ($y<7{,}5$) (77,27%) supera el triple de ($y>7{,}5$) (22,73%) en un (9,08%).

Etapa Posterior a la Intervención:

Los conceptos equivalentes (b) (27,88%) superan a los conceptos inferiores (a) (11,82%) en un (4,24%), es decir, en más del doble, y los conceptos superiores (c) (25,15%) en sólo un (2,73%).

Comparación de los conceptos equivalentes (b) con siete y medio (7,5):

En este momento, los conceptos equivalentes inferiores a siete y medio ($b<7{,}5$) (90,91%) continúan presentando una evidente supremacía sobre los conceptos equivalentes ($b>7{,}5$) (9,09%).

Comparación de la suma de los conceptos equivalentes y los conceptos superiores ($y=a+b$) con siete (7,5):

Ahora, la suma de los conceptos equivalentes y superiores inferiores a siete y medio ($y < 7,5$) ($45,45\%$) pasa a ser superada por la suma de los conceptos equivalentes y superiores mayores que siete y medio ($y > 7,5$) ($54,55\%$) en un ($9,01\%$), lo que representa, desde un punto de vista cuantitativo, la misma diferencia inicial.

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Se produjo una variación decreciente en los conceptos inferiores (a), del ($17,88\%$) al ($11,82\%$), y, a la vez, un ligero crecimiento en los conceptos equivalentes (b), del ($26,36\%$) al ($27,88\%$), mientras que los conceptos superiores (c) pasaron del ($10,00\%$) al ($25,15\%$), esto es, aumentaron más del doble.

Comparación de los conceptos equivalentes (b) con siete y medio (7,5):

Por su parte, la comparación numérica, anterior y posterior al proceso de enseñanza, realizada entre los conceptos equivalentes menores que siete y medio ($b < 7,5$) descendió desde el ($95,45\%$) hasta el ($90,91\%$); por otro lado, los conceptos equivalentes ($b > 7,5$) pasaron del ($4,55\%$) al ($9,09\%$).

Comparación de la suma de los conceptos equivalentes y los conceptos superiores ($y = a + b$) con siete (7,5):

Y, en el caso de la suma de los conceptos equivalentes y superiores ($y < 7,5$), bajó del ($77,27\%$) al ($45,45\%$), fenómeno que vino a añadirse al aumento producido en la suma de los conceptos equivalentes y superiores ($y > 7,5$), que pasó del ($22,73\%$) al ($54,54\%$).

Aun considerando las pequeñas variaciones habidas en la comparación con la media, al sumar los conceptos equivalentes con los conceptos superiores, es posible caracterizar una buena evolución de las ideas que pueblan la mente de los alumnos al respecto de tales conceptos.

2º Criterio: La Inclusividad.

General

Tabla 35: Conceptos Generales (Álgebra)

Intervención \ Conceptos		Álgebra	Otros Conceptos	
			Algebraicos	No Algebraicos
Antes	Total	19	0	3
	%	86,36	0,00	13,64
Después	Total	19	1	2
	%	86,36	4,54	9,09

Etapa Anterior a la Intervención:

El concepto de Álgebra $(86{,}36\%)$ fue superior a los Otros Conceptos (no-algebraicos) $(13{,}64\%)$.

Etapa Posterior a la Intervención:

El concepto de Álgebra $(86{,}36\%)$, cuantitativamente hablando, no se modificó, si bien se produjo una leve reducción de los Otros Conceptos (no algebraicos) $(9{,}09\%)$, produciéndose también la aparición del ítem Otros Conceptos (Algebraicos) $(4{,}54\%)$.

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

En el caso de este estudio, podemos observar que, desde el principio, los alumnos participantes ya poseían como concepto más abarcador un concepto equivalente al que aparecía en el mapa conceptual del texto de apoyo.

Intermedio

Tabla 36: Conceptos Intermedios (Álgebra)

Intervención \ Criterios		*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	32	46	26
	%	10,39	14,94	8,44
Después	**Total**	33	51	62
	%	10,71	16,58	20,13

Etapa Anterior a la Intervención:

El número de conceptos inferiores $a\,(10{,}39\%)$ y de conceptos superiores $c\,(9{,}14\%)$ resultaron menores que los conceptos equivalentes $b\,(15{,}59\%)$.

Etapa Posterior a la Intervención:

El número de conceptos inferiores $a\,(10{,}71\%)$ continuó siendo prácticamente el mismo, si bien los conceptos equivalentes $b\,(16{,}58\%)$ fueron inferiores en número a los conceptos superiores $c\,(20{,}13\%)$.

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

La variación en los conceptos equivalentes del $b\,(14{,}94\%)$ al $b\,(16{,}58\%)$ fue muy pequeña; sin embargo, la de los conceptos superiores pasó del $c\,(8{,}44\%)$ al $c\,(20{,}13\%)$, lo que representa una razonable adquisición conceptual.

Horizontalidad

Tabla 37: Horizontalidad según los Niveles 1 y 2 Encontrados (Álgebra)

Intervención \ Criterios		Nivel 1			Nivel 2		
		a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	25	14	7	3	8	11
	%	34,72	19,44	9,72	4,17	11,11	15,28
Después	**Total**	17	11	29	1	10	19
	%	26,61	15,28	40,28	1,39	13,89	26,39

Etapa Anterior a la Intervención:

Nivel 1: el valor porcentual de los conceptos inferiores $a\,(34{,}72\%)$ fue un $(15{,}28\%)$ mayor que el de los conceptos equivalentes $b\,(19{,}94\%)$ y un $(5{,}56\%)$ más que el triple de los conceptos superiores c $(9{,}72\%)$.
Nivel 2: los conceptos inferiores $a\,(4{,}17\%)$ son menores en un $(3{,}66\%)$ más que el triple de los valores porcentuales de los conceptos superiores $c\,(15{,}28\%)$, mientras que los conceptos equivalentes $b\,(11{,}11\%)$, por su parten, difieren porcentualmente de los superiores, en un porcentaje exactamente igual al de los conceptos inferiores, o sea, en un $(4{,}17\%)$.

Etapa Posterior a la Intervención:

Nivel 1: los conceptos inferiores $a\,(26{,}61\%)$ fueron mayores, en términos de porcentaje, que los conceptos equivalentes $b\,(15{,}28\%)$ en un $(11{,}33\%)$, y los conceptos inferiores $a\,(40{,}28\%)$ superan a los conceptos equivalentes en un $(6{,}13\%)$ por encima del doble.
Nivel 2: los conceptos equivalentes $b\,(13{,}89\%)$ superan a los conceptos inferiores $a\,(1{,}39\%)$ en aproximadamente diez veces, y los conceptos superiores $c\,(26{,}39\%)$ quedan por debajo del doble de los conceptos equivalentes con sólo el $(1{,}39\%)$.

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Nivel 1: se produjo una disminución en los conceptos inferiores a, del $(34{,}72\%)$ al $(26{,}61\%)$, así como en los conceptos equivalentes b, del $(19{,}94\%)$ al $(15{,}28\%)$, y un crecimiento razonable en los conceptos superiores c, del $(9{,}72\%)$ al $(40{,}28\%)$. La reducción de a representó un $(8{,}11\%)$, la de b, un $(4{,}66\%)$, y el crecimiento de c fue del $(30{,}56\%)$. Aun habiéndose producido una reducción en el porcentaje de los conceptos equivalentes, el considerable aumento habido en los conceptos superiores indica una aceptable evolución en este nivel.
Nivel 2: en este nivel, hubo una disminución del $(2{,}78\%)$ en los conceptos inferiores a, pasando del $(4{,}17\%)$ al $(1{,}39\%)$, así como un pequeño aumento del $(2{,}78\%)$ en los conceptos equivalentes b, pasando del $(11{,}11\%)$ al $(13{,}89\%)$, seguido también por el

aumento del $(11,11\%)$ en los conceptos superiores c, que pasaron del $(15,28\%)$ al $(26,39\%)$. Ante la descripción anterior, debido al pequeño aumento producido en los conceptos equivalentes y, principalmente, de modo semejante, al crecimiento en los conceptos superiores, análogo al ocurrido en el nivel 1, podemos mantener las mismas afirmaciones que hacíamos más arriba.

Tabla 38: Horizontalidad según los Niveles 3 y 4 Encontrados (Álgebra)

Intervención \ Criterios		Nivel 3			Nivel 4		
		a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	2	4	0	0	0	0
	%	2,78	5,56	0,00	0,00	0,00	0,00
Después	**Total**	1	8	8	0	2	0
	%	1,39	11,11	11,11	0,00	2,78	0,00

Etapa Anterior a la Intervención:

Nivel 3: los conceptos equivalentes $b\,(5,56\%)$ son porcentualmente mayores que los conceptos inferiores $a\,(2,78\%)$ y también que los conceptos superiores c $(0,00\%)$.
Nivel 4: no hay ningún registro referente a cualquiera de los tres criterios conceptuales adoptados, esto es, los conceptos inferiores, los conceptos equivalentes b y los conceptos superiores c.

Etapa Posterior a la Intervención:

Nivel 3: los conceptos equivalentes b y los conceptos superiores c presentan el mismo porcentaje $(11,11\%)$, superando a los conceptos inferiores $a\,(1,39\%)$ en aproximadamente ocho veces.
Nivel 4: en este momento, sólo hubo registro en los conceptos equivalentes b, lo que representó un $(2,78\%)$, mientras que los conceptos inferiores a y los conceptos superiores c continuaron presentando un valor porcentual igual al $(0,00\%)$.

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Nivel 3: se produjo una disminución en los conceptos inferiores a, pasando del $(2,78\%)$ al $(1,39\%)$, acompañada de un leve aumento en los conceptos equivalentes b, del $(5,56\%)$ al $(11,11\%)$, y de un aumento mayor que en los conceptos superiores c, que pasaron del $(0,00\%)$ al $(11,11\%)$. La reducción a la mitad de a, unida a los respectivos crecimientos de b $(5,55\%)$ y de c $(11,11\%)$, a pesar de no tratarse de fuertes variaciones, indican una cierta mejora, razonable para este nivel.
Nivel 4: en este nivel se produjo tan sólo una leve variación en los conceptos equivalentes b, que pasaron del $(0,00\%)$ al $(2,78\%)$. Tal variación no permite establecer consideraciones, como en los casos anteriores, acerca de la evolución de los alumnos en este nivel.

3^{er} **Criterio**: Relaciones Significativas.

Tabla 39: Relaciones Significativas (Álgebra)

Intervención \ Criterios		No presenta	*a*	*b*	*c*
Antes	Total	16	14	5	0
	%	72,73	2,89 3,03	1,03 1,08	0,00
Después	Total	16	4	17	0
	%	72,73	0,83 0,87	3,51 3,68	0,00

Etapa Anterior a la Intervención:

El número de relaciones (proposiciones) encontradas en los mapas de los alumnos fue muy reducido; así, en las relaciones inferiores (a) representó un ($3{,}03\%$) y en las relaciones equivalentes (b), un ($1{,}08\%$), mientras que en lo que se refiere a las relaciones superiores c, no apareció ningún registro.

Etapa Posterior a la Intervención:

Las relaciones, después del proceso de enseñanza, fueron también pequeñas, encontrándose registros en los mismos casos anteriores, esto es, en las relaciones equivalentes (b), ($3{,}68\%$), y en las relaciones inferiores (a), ($0{,}87\%$).

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Las relaciones, después del proceso de enseñanza, también fueron pequeñas, dándose variaciones en las relaciones equivalentes (b), del ($1{,}08\%$) al ($3{,}68\%$), y en las relaciones inferiores (a), del ($3{,}03\%$) al ($0{,}87\%$). A la vista de tales informaciones, se percibe una ligera variación negativa en el caso de las relaciones inferiores a, equivalente a un ($2{,}16\%$), seguida por un ligera variación positiva en el caso de las relaciones equivalentes b, del ($2{,}60\%$), así como la no-variación que se manifiesta en los alumnos que no presentaron relaciones de ningún tipo, un ($72{,}73\%$). En este sentido, no es posible realizar afirmaciones relevantes acerca de la evolución de los alumnos, con respecto a este criterio.

5. 4 Análisis y Discusión de los Resultados de Geometría

En este *análisis de los cuestionarios diagnósticos y evaluación del aprendizaje*, seguido por la *delimitación del campo de la Geometría euclidiana* en el ámbito de la Geometría plana, se busca profundizar en los conceptos/objetos matemáticos relacionados con las ideas de polígonos, cuadriláteros, paralelogramos, cuadrados, rectángulos y rombos. Y, a partir de tales ideas posibilitar una caracterización del hacer matemático a partir de la demostración, conforme a las propiedades/proposiciones sobre tales ideas.

5.4.1 Análisis de los Cuestionarios Diagnósticos y Verificación del Aprendizaje
Análisis de la 1ª Cuestión.

La primera cuestión que aparece en los cuestionarios iniciales (diagnóstico) y finales (verificación del aprendizaje) pretende averiguar la comprensión de los alumnos acerca de una caracterización que alude al campo de la Geometría Plana, según las propiedades/proposiciones presentes en los 6 (seis) primeros libros de Euclides. Cabe señalar que, en el cuestionario inicial, se presentaron seis propiedades/proposiciones y se pidió correlacionarlas con los ya citados seis primeros libros de Euclides, mientras que, en el cuestionario final, se presentaron seis propiedades/proposiciones y se pidió identificar, de entre ellas, aquellas que no formaban parte de los seis libros.

Las respuestas se sistematizaron en los cuadros que siguen. En los dos primeros se contienen las informaciones correspondientes al cuestionario inicial; por eso, en realidad, se trata del mismo cuadro, si bien, debido a los márgenes de página, fue necesario dividirlo en dos partes. El tercer cuadro corresponde a las informaciones sistematizadas del cuestionario final. En los cuadros que aparecen a continuación, los libros se representan a través de la letra L, que va acompañada por un índice que corresponde a cada uno de los seis libros; por su parte, las respuestas se clasificaron en tres categorías: NR (no respondió), RI (respondió inadecuadamente) y RA (respondió adecuadamente).

Visión panorámica de la Geometría Plana

Tabla 40: Caracterización referente a la Geometría Plana (L_1, L_2 e L_3).

Intervención \ Propiedades		Identificación de Propiedades/Proposiciones en los seis Libros de Euclides						
		NR	L_1		L_2		L_3	
			RI	RA	RI	RA	RI	RA
Antes	Alumnos	11	17	0	16	1	16	1
	%	39,28	60,71	0,00	57,14	3,57	57,14	3,57

Tabla 41: Caracterización referente a la Geometría Plana (L_4, L_5 e L_6).

Intervención \ Propiedades		Identificación de Propiedades/Proposiciones en los seis Libros de Euclides					
		L_4		L_5		L_6	
		RI	RA	RI	RA	RI	RA
Antes	Alumnos	16	1	15	2	15	2
	%	57,14	3,57	53,57	7,14	53,57	7,14

Presentación de Algunas Respuestas Seleccionadas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas Seleccionadas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05:
Correlacionó sólo una de las seis propiedades presentadas como parte integrante de uno de los seis libros de Euclides con su respectivo libro correspondiente.

Alumno 21:
Correlacionó solamente una de las seis propiedades presentadas como parte integrante de uno de los seis libros de Euclides con su respectivo libro correspondiente.

Respuestas extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 02:
No correlacionó ninguna de las seis propiedades presentadas como parte integrante de alguno de los seis libros de Euclides con su respectivo libro correspondiente.
Alumno 17:
No correlacionó ninguna de las seis propiedades presentadas como parte integrante de alguno de los seis libros de Euclides con su respectivo libro correspondiente.

Tabla 42: Caracterización referente a la Geometría Plana (L_1, L_3, L_4 e L_6).

Intervención \ Propiedades		Identificación de Propiedades/Proposiciones en los seis Libros de Euclides		
		NR	L_1, L_3, L_4 e L_6	
			RI	RA
Después	Alumnos	0	5	23
	%	0,00	17,86	82,14

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 02:
Identificó, entre las seis propiedades presentadas, la que no pertenece a los seis primeros libros de Euclides.
Alumno 05:
Identificó, entre las seis propiedades presentadas, la que no forma parte de los seis primeros libros de Euclides.

Respuestas seleccionadas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 04:
Identificó, entre las seis propiedades presentadas, la que no pertenece a los seis primeros libros de Euclides.
Alumno 23:
Identificó, entre las seis propiedades presentadas, la que no forma parte de los seis primeros libros de Euclides.

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 21:
No identificó, entre las seis propiedades presentadas, la que no pertenece a los seis primeros libros de Euclides.

Alumno 09:
No identificó, entre las seis propiedades presentadas, la que no pertenece a los seis primeros libros de Euclides.

Discusión de los Valores Porcentuales

La comparación entre la variación de los valores porcentuales antes y después de la intervención de (*NR*), del (39,28%) al (0,00%), a la vez que la reducción de la media de (*RI*), del (56,54%) al (17,86%), junto al también aumento de la media de (*RA*), del (4,16%) al (82,14%), son factores que representan una sólida evolución de la comprensión por parte de los alumnos en el ámbito de tal caracterización, alusiva al campo de la Geometría Plana.

Discusión de las Respuestas

Al principio, antes de la intervención, ningún alumno ofrece una respuesta *que haya correlacionado las seis propiedades presentadas como partes integrantes de uno de los seis libros de Euclides con su respectivo libro*, es decir, no se produjo entre los alumnos ningún caso que fuese ‘compatible con los propósitos educativos’. Por lo que se refiere a los alumnos que representan ejemplos calificados como ‘poco compatibles con los propósitos educativos’, se señalan, entre otros, los casos de los alumnos (**05**) y (**21**). Por último, en cuanto a los incluidos entre aquellos ‘con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’, fueron elegidos los alumnos (**02**) y (**17**).

Después de la intervención, hubo varios alumnos que *identificaron, entre las cinco propiedades presentadas, la que no formaba parte de los seis primeros libros*, que se centraban en el estudio de la Geometría plana. Los alumnos (**02**) y (**05**) se encuentran entre los que la identificaron, pasando, respectivamente, de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ y ‘poco compatibles con los propósitos educativos’ a ‘compatibles con los propósitos educativos’. Los alumnos (**04**) y (**23**) antes del proceso de enseñanza, aparecen incluidos dentro del grupo que presenta ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’, y después del proceso de enseñanza, pasan a figurar entre aquellos calificados como ‘poco compatibles con los propósitos educativos’. Los alumnos seleccionados como ejemplos que presentan ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ fueron los alumnos (**21**) y (**09**).

Resultado: La discusión de la comparación porcentual de las informaciones presentadas antes y después de la intervención, de forma amplia, acerca de la concepción de los alumnos en cuanto al *reconocimiento de algunas propiedades encontradas en los seis primeros libros de Euclides, referente al estudio de la Geometría plana*, mostró que se llevó a cabo un buen desempeño por parte de los alumnos en esta dirección.

Tabla 43: Análisis del Contenido de la Acción y Motivo de la Acción 1ª Cuestión

Intervención \ Criterios		Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**
Antes	**Ideas**	19	08	1	19	9	1
	%	60,71	28,57	3,57	67,86	32,14	3,57
Después	**Ideas**	6	17	5	11	13	4
	%	21,43	60.71	17,86	39,28	46,43	14,29

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Sólo aparece un ejemplo.
Alumno 11:
Contenido de la acción: “Relacionando cada libro con las respectivas propiedades”.
Motivo de la acción: No respondió.

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 08:
Contenido de la acción: No respondió.
Motivo de la acción: No respondió.
Alumno 17:
Contenido de la acción: “Colocando en orden el contenido, organizando el contenido”.
Motivo de la acción: “Conceptuar, prepararse con antecedencia para una mejor comprensión”.

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Hay sólo un ejemplo.
Alumno 17:
Contenido de la acción: “Identificando la proposición que no se usa frecuentemente en la enseñanza primaria”.
Motivo de la acción: “Especificar la proposición que no pertenece al libro de la Enseñanza Primaria”.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05:
Contenido de la acción: “Indicando una de las proposiciones que no está en el libro de Euclides”.
Motivo de la acción: “Identificar la proposición que no aparece en los seis primeros libros de Euclides”.
Alumno 29:
Contenido de la acción: “Que esa propiedad no pertenece”.
Motivo de la acción: No respondió.

Respuestas Extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 06:
Contenido de la acción: “Estableciendo un orden, pues, según Euclides, los asuntos deberían ser explicados en el orden que él establece”.

Motivo de la acción: “Ver dónde se aplican los contenidos en su orden correspondiente”.
Alumno 23:
Contenido de la acción: “Que esa propiedad forma parte del programa correspondiente al *Enseñanza Fundamental II*”.
Motivo de la acción: “Verificar que se conoce dicha propiedad”.

Discusión de los Valores Porcentuales

Contenido de la acción: (NR) experimenta una reducción desde el $(60{,}71\%)$ al $(21{,}43\%)$, que viene acompañada por el crecimiento de (RI), del $(28{,}57\%)$ al $(60{,}71\%)$, y de (RA), que aumenta del $(3{,}57\%)$ al $(17{,}86\%)$, lo que indica que se produjo una mejora en la comprensión de los alumnos dentro del ámbito del contenido de la acción.
Motivo de la acción: se produjo una reducción de (NR) del $(67{,}86\%)$ al $(39{,}29\%)$; por su parte, (RI) pasó del $(32{,}14\%)$ al $(46{,}43\%)$, y (RA) aumentó desde el $(3{,}57\%)$ al $(14{,}29\%)$, lo que representa también una mejora en la comprensión de los alumnos en el ámbito del motivo de la acción.

Discusión de las Respuestas

Al principio, antes de la intervención, ningún alumno presenta una respuesta adecuada referente al *reconocimiento de algunas propiedades encontradas en los seis primeros libros de Euclides que analiza el estudio de la Geometría plana*. No hay ningún alumno que aparezca como representante del grupo ‘compatibles con los propósitos educativos’. Sin embargo, en cuanto a los alumnos que representan ejemplos de los que fueron calificados como ‘poco compatibles con los propósitos educativos’, se encontró, al menos, un alumno, el (**11**). Como parte integrante de los alumnos incluidos dentro del grupo ‘con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’, seleccionamos los casos de los alumnos (**08**) y (**17**).

Después de la intervención, el alumno (**17**) pasa de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ a ‘compatible con los propósitos educativos’. Los alumnos (**05**) y (**29**) pasan de ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ a ‘poco compatibles con los propósitos educativos’. Y los alumnos seleccionados como ejemplos con ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’, están representados por el número (**06**) y el (**23**).

Resultado: La discusión acerca de la comparación porcentual de las informaciones presentadas antes y después de la intervención indica que hay un buen aprovechamiento por parte de los alumnos acerca del *reconocimiento de algunas propiedades encontradas en los seis primeros libros de Euclides que analiza el estudio de la Geometría plana*. Y, junto a ello, se produjo también un considerable aprovechamiento por parte de los alumnos cuando se responde a las cuestiones que tienen que ver con el contenido de la acción y el motivo de la acción, lo que caracteriza, considerando las observaciones realizadas en la discusión de las respuestas seleccionadas, un camino que conduce hacia la elaboración de sentido, a pesar de la apreciable disparidad que, con relación a la respuesta concreta, apunta el porcentaje de (**RA**).

Análisis de la 2ª Cuestión

2ª Cuestión (II_1)

Se desea averiguar en qué medida los alumnos son capaces de identificar las propiedades características de las formas geométricas: *polígono*, *cuadrilátero* y *paralelogramo*, atendiendo a sus lados, vértices, ángulos y diagonales, a partir de las definiciones de las referidas formas. Para ello, se establecieron tres cuadros que registraban las propiedades de cada una de ellas. De esta forma, en el caso del *polígono,* se obtiene: figura plana (P_1); curva cerrada simple, constituida por tres o más segmentos (P_2); elementos del polígono (P_3): lados (L), vértices (V), ángulos (A) y diagonales (D); para los *cuadriláteros*: ser polígono (P_1); elementos del cuadrilátero (P_2): lados (4L), vértices (4V), ángulos (4A); y, por último, para los *paralelogramos*: ser polígono (P_1) y tener los lados opuestos paralelos (P_2).

Tabla 44: Características/Propiedades de los Polígonos

Criterios / Intervención		Polígono					
		P_1	P_2	P_3			
				L	V	A	D
Antes	Alumnos	6	7	2	0	1	0
	%	21,43	25,00	7,14	0,00	3,57	0,00
Después	Alumnos	8	8	9	0	7	5
	%	28,57	28,57	32,14	0,00	25,00	17,86

Tabla 45: Características/Propiedades de los Paralelogramos

Criterios / Intervención		P_1	P_2
Antes	Alumnos	4	9
	%	14,29	32,14
Después	Alumnos	11	20
	%	39,29	71,43

Tabla 46: Características/Propiedades de los Cuadriláteros

Criterios / Intervención		P_1	P_2		
			4L	4V	4A
Antes	Alumnos	5	10	2	5
	%	17,86	35,71	7,14	17,86
Después	Alumnos	7	24	2	16
	%	25,00	85,71	7,14	57,14

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Sólo hay un ejemplo.
Alumno 18:
Respuesta: "Polígono: Figura plana constituida por una línea cerrada que forma tres o más ángulos; Cuadrilátero: Figura plana cerrada constituida por cuatro lados y cuatro ángulos; Paralelogramo: figura plana cerrada con lados opuestos paralelos".

Respuestas extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 11:
Respuesta: "Polígono: Figura geométrica plana formada por segmentos de recta; Cuadrilátero: Polígono formado por semirrectas. Paralelogramo: Polígono formado por cuatro semirrectas y que tiene los lados opuestos paralelos".
Alumno 26:
Respuesta: "Polígonos: Figuras geométricas formadas por segmentos de recta; Cuadrilátero: Polígono formado por cuatro lados. Paralelogramo: Polígono formado por cuatro lados que son opuestos paralelos".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 03:
Respuesta: "Que tiene siempre lados paralelos".
Alumno 14:
Respuesta: No presenta respuesta.

Presentación de Algunas Respuestas obtenidas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas obtenidas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 11:
Respuesta: "Polígono: figura geométrica formada por segmentos de recta; Cuadrilátero: Polígono que posee cuatro lados. Paralelogramo: cuatro lados opuestos paralelos".
Alumno 18:
Respuesta: "Polígono: Figura plana constituida por una línea cerrada formando tres o más ángulos; Cuadrilátero: polígono constituido por cuatro lados; Paralelogramo cuadrilátero formado por opuestos paralelos".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 26:
Respuesta: "Polígono: los lados son segmentos de recta; Cuadrilátero: posee cuatro lados. Paralelogramo: Lados opuestos paralelos".
Alumno 03:
Respuesta: "Aquel que tiene cuatro lados, siendo que el Paralelogramo posee lados paralelos dos a dos, y el Cuadrilátero es cualquier figura que tenga cuatro lados".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 14:
Respuesta: "Polígono: lados y ángulos iguales. Cuadrilátero: cuatro lados".
Alumno 05:
Respuesta: "Lados opuestos paralelos".

Discusión de los Valores Porcentuales

Características/Propiedades de los Polígonos: Las propiedades P_1 (21,43%) y P_2 (25,00%) experimentaron un ligero aumento, dado que ambas pasaron a representar el (28,57%), si consideramos que, en media, los cuatro ítems de P_3 presentan un crecimiento mucho mayor, pasando del (2,68%) al (18,75%). De los cuatro ítems de que consta P_3, los registros producidos que tratan acerca de los lados y de los ángulos, aumentan, respectivamente, antes y después de la intervención, del (7,14%) al (32,14%) y del (3,57%) al (25,00%); los vértices no fueron mencionados ni antes ni después, y las diagonales, por su parte, pasaron del (0,00%) al (17,86%). En vista de los pequeños aumentos presentados por P_1 y P_2, unidos al considerable crecimiento medio de P_3, es posible caracterizar que, aun pudiendo ser considerado como elemental, se produjo una reorganización de las ideas de los alumnos.

Características/Propiedades de los Paralelogramos: Se produce un gran crecimiento en la variación de las propiedades P_1 y P_2, que pasan, respectivamente, del (14,29%) al (39,29%) y del (32,14%) al (71,43%). Esto indica que, numéricamente, P_1 se aproxima a más del triple de P_2. En este caso, sin lugar a dudas, se produjo una buena mejora en la identificación de estas propiedades por parte de los alumnos.

Características/Propiedades de los Cuadriláteros: La propiedad P_1 pasó del (17,86%) al (25,00%) y P_2, en media, presenta realmente una variación apreciable, toda vez que evolucionó desde (20,24%) hasta prácticamente el (50,00%), o lo que es lo mismo, aumentó en más del doble. De forma específica, P_2 no presentó variación en (4V), manteniéndose en el (7,14%), si bien en (4L) pasó del (35,71%) al (85,71%), y en (4A), del (17,86%) al (57,14%). Por lo que se refiere a la propiedad P_2, excepto en el ítem (4V), se produjo una mejora en el desempeño de los alumnos.

Discusión de las Respuestas

Al comienzo, antes de la intervención tan sólo el alumno (**18**) presenta una respuesta adecuada sobre la *identificación de las propiedades características de las formas geométricas: polígono, cuadrilátero y paralelogramo*. Ello significa que sólo hubo un representante de entre los alumnos que resultó ser 'compatible con los propósitos educativos'. Y, por lo que se refiere a los ejemplos de los que son calificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos', fueron elegidos aleatoriamente los alumnos (**11**) y (**26**) entre todos los posibles. De modo semejante al de la elección anterior, para representar al grupo caracterizado 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', fueron seleccionados los alumnos (**03**) y (**04**).

Después de la intervención, el alumno (**11**) pasa de 'poco compatible con los propósitos educativos' a 'compatible con los propósitos educativos', y el alumno (**18**) se mantiene entre los 'compatibles con los propósitos educativos'. Por su parte, el alumno (**26**) se mantuvo como 'poco compatible con los propósitos educativos' y el (**03**) pasó de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a formar parte del grupo de los 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Los representantes seleccionados con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' fueron los alumnos (**05**) y (**14**).

Resultado: La discusión acerca de la comparación porcentual de las respuestas presentadas por los alumnos antes y después de la intervención, unida al análisis de las respuestas efectivamente realizadas por parte de los alumnos, indica que se produjo un buen desempeño por su parte acerca de la *identificación de las propiedades características de las formas geométricas: polígono, cuadrilátero y paralelogramo*.

Tabla 47: Análisis del Contenido de la Acción y Motivo de la Acción 2ª Cuestión (II_1)

Criterios / Intervención		Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**
Antes	**Ideas**	11	15	2	13	12	3
	%	39,29	53,57	7,14	46,43	42,86	10,71
Después	**Ideas**	05	12	11	10	5	13
	%	17,86	42,86	39,29	35,71	17,86	46,42

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Hay sólo un ejemplo.
Alumno 17:
Contenido de la acción: "Identificando las propiedades de cada uno".
Motivo de la acción: "Mejorar y conceptuar el contenido".

Respuestas Obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 04:
Contenido de la acción: "Identificar las características de cada forma geométrica".
Motivo de la acción: No respondió.
Alumno 11:
Contenido de la acción: "Conceptuando polígonos".
Motivo de la acción: "Mostrar las definiciones de estos elementos".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 24:
Contenido de la acción: No respondió.

Motivo de la acción: No respondió.
Alumno 10:
Contenido de la acción: No respondió.
Motivo de la acción: No respondió.

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 04:
Contenido de la acción: "Analizando las características de cada forma geométrica".
Motivo de la acción: "Validar cada forma geométrica".
Alumno 24:
Contenido de la acción: "Identificando sus propiedades".
Motivo de la acción: "Conceptuar esas figuras geométricas".

Respuestas Extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 10:
Contenido de la acción: "Identificando una forma geométrica".
Motivo de la acción: "Establecer una correcta definición de polígono, cuadrilátero y paralelogramo".
Alumno 11:
Contenido de la acción: "Definiendo polígono, cuadrilátero y paralelogramo".
Motivo de la acción: "Conceptuar tales formas geométricas".

Respuestas Obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 21:
Contenido de la acción: "Comparándolas".
Motivo de la acción: "Establecer la relación que existe entre ellas".
Alumno 25:
Contenido de la acción: "Denominando con especificidad la construcción geométrica".
Motivo de la acción: "Especificar con propiedades pertinentes el establecimiento de parámetros que conceptualicen la formación geométrica".

Discusión de los Valores Porcentuales

Contenido de la acción: (NR) experimenta una reducción próxima a la mitad, pasando del $(39{,}29\%)$ al $(17{,}86\%)$, acompañada por la también reducción de (RI), que pasa del $(53{,}57\%)$ al $(42{,}86\%)$; por su parte, (RA) pasó del $(7{,}14\%)$ al $(39{,}29\%)$, alcanzando un aumento de casi cinco veces y media.

Motivo de la acción: (NR) y (RI) se redujeron, respectivamente, del $(46{,}43\%)$ al $(35{,}71\%)$ y del $(42{,}86\%)$ al $(17{,}86\%)$; por su parte, (RA) tuvo un aumento del $(10{,}71\%)$ al $(46{,}42\%)$, lo que representa más de cuatro veces el porcentaje inicial.

El crecimiento de (RA) registrado con relación al contenido de la acción y motivo de la acción indican un mejor desempeño por parte de los alumnos acerca de la caracterización de las propiedades de las formas geométricas: polígonos, cuadriláteros y paralelogramos, en el intento de conceptuarlas adecuadamente.

Discusión de las Respuestas

Al principio, antes de la intervención, tan sólo el alumno (**17**) presenta una respuesta adecuada sobre la *identificación de las propiedades características de las formas geométricas: polígono, cuadrilátero y paralelogramo, buscando la conceptualización de las mismas*, representado así el único ejemplo 'compatible con los propósitos educativos'. Los alumnos (**04**) y (**11**) representan ejemplos calificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos', mientras que los alumnos (**24**) y (**10**) forman parte del grupo calificado 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

A continuación, después de la intervención, los alumnos (**04**) y (**24**) pasan, respectivamente, de 'poco compatibles con los propósitos educativos' y 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'compatibles con los propósitos educativos'. En el caso del alumno (**10**), pasó de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'poco compatibles con los propósitos educativos', y el alumno (**11**) continuó formando parte de los calificados 'como poco compatibles con los propósitos educativos'. Por último, como representantes de la calificación de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' se sitúan los alumnos (**21**) y (**25**).

Resultado: La discusión acerca de la comparación porcentual de las respuestas referentes al contenido de la acción y al motivo de la acción presentadas por los alumnos antes y después de la intervención, unida al análisis de las respuestas seleccionadas correspondientes a los formularios completados por los alumnos, indica que se produjo una elaboración de sentido por parte de éstos acerca de la *identificación de las propiedades características de las formas geométricas: polígono, cuadrilátero y paralelogramo*.

2ª Cuestión (II_2)

Lo que se perseguía en esta cuestión era una clasificación según una categorización de las formas: polígono, paralelogramo y cuadrilátero, conforme a la respuesta realizada en los instrumentos utilizados para la evaluación de los cuestionarios diagnósticos y de verificación de aprendizajes que se organizaron en el Capítulo 3 de la presente tesis. No obstante, se pedía que la justificación de la respuesta estuviera basada en el *1er Axioma de Euclides* (verdad evidente), toda vez que quienes están implicados en este estudio son profesores de *Enseñanza Fundamental* y de *Enseñanza Media*.

Tabla 48: Interrelación entre las formas: Polígonos, Cuadriláteros y Paralelogramos.

Intervención \ Respuestas		NR	RI	RA
Antes	Alumnos	10	13	4
	%	37,04	48,15	14,81
Después	Alumnos	2	13	12
	%	7,41	48,15	44,44

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas Extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 18:
Respuesta: "Polígono: figura plana constituida por una línea cerrada formando 3 o más ángulos; Cuadrilátero: figura plana cerrada constituida por cuatro lados y cuatro ángulos. Paralelogramo: figura plana cerrada con lados opuestos paralelos".
Alumno 27:
Respuesta: "Polígono: formado por varios segmentos de rectas; Cuadrilátero: formado por 4 segmentos/4 lados. Paralelogramo: lados opuestos //, y ángulos opuestos congruentes".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 09:
Respuesta: "Sus lados".
Alumno 30:
Respuesta: "Polígono: es un cuadrilátero formado por lados paralelos dos a dos; Cuadrilátero: figura plana formada por cuatro lados, con lados paralelos dos a dos".

Presentación de Algunas Respuestas Seleccionadas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas seleccionadas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 18:
Respuesta: "Polígono: figura plana, constituida por una línea cerrada, formando 3 o más ángulos; Cuadrilátero: polígono constituido por 4 lados. Paralelogramo: cuadrilátero formado por lados opuestos paralelos".
Alumno 27:

Respuesta: "Polígono: figura geométrica formada por segmentos de rectas; Cuadrilátero: figura geométrica formada por 4 lados. Paralelogramo: lados // con medidas diferentes 2 a 2, ángulos de 90^0, diagonales se interceptan en el punto medio".

Respuestas Extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 09:
Respuesta: "Los lados congruentes, ángulos congruentes, punto medio, lados opuestos y paralelos, ortogonales".
Alumno 30:
Respuesta: "Lados paralelos, ángulos internos que miden 90^0, las diagonales del cuadrado forman 90^0".

Discusión de los Valores Porcentuales

En tal comparación, aun manteniéndose fijo RI con un $(48{,}15\%)$, se observa una importante reducción de NR, que pasa del $(37{,}04\%)$ al $(7{,}41\%)$, al lado de una apreciable variación de RA, que pasó del $(14{,}81\%)$ al $(44{,}44\%)$. Esto hace posible afirmar que se produjo una cierta evolución en relación a la manera de interrelacionar las formas: Polígonos, Cuadriláteros y Paralelogramos por parte de los alumnos.

Discusión de las Respuestas

Antes de la intervención, ningún alumno presenta una respuesta adecuada sobre la *interrelación entre las formas geométricas: polígonos, cuadriláteros y paralelogramos*; por lo tanto, no hay ejemplos del tipo 'compatible con los propósitos educativos'. Por otro lado, los alumnos (**18**) y (**27**) representan ejemplos de los calificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos', y los alumnos (**09**) y (**30**) están incluidos entre aquellos clasificados 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Después de la intervención, los alumnos (**18**) y (**27**) continúan formando parte de los calificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos', si bien ahora se observa que las respuestas obtenidas están mejor elaboradas. Algo semejante ocurre con la mejora que se percibe en la elaboración de las respuestas de los alumnos (**09**) y (**30**) en relación con relación a los casos calificados con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Resultado: La discusión de la comparación porcentual de las respuestas y de las elaboraciones efectivamente emitidas por parte de los alumnos, antes y después de la intervención, aun considerando la no aparición de ningún caso del tipo 'compatible con los propósitos educativos', indica que se produjo un desempeño razonable de los alumnos referente a la *interrelación entre las formas geométricas: polígonos, cuadriláteros y paralelogramos*.

Tabla 49: Análisis del Contenido de la Acción y
Motivo de la Acción 2ª Cuestión (II_2).

Intervención \ Criterios		Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	RI	RA	NR	RI	RA
Antes	Ideas	13	11	3	16	10	2
	%	46,43	39,29	10,71	57,14	35,71	7,14
Después	Ideas	10	11	7	11	13	4
	%	35,71	39,29	25,00	39,29	46,43	14,28

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Hay sólo un ejemplo.
Alumno 04:
Contenido de la acción: "Demostrando que tales formas tienen características comunes".
Motivo de la acción: "Relacionando las características comunes de cada forma geométrica".

Respuestas Extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 26:
Contenido de la acción: "Comparando sus propiedades".
Motivo de la acción: "Aplicación, correlación de conceptos".
Alumno 18:
Contenido de la acción: "Mostrando características comunes entre cuadriláteros y polígonos".
Motivo de la acción: "Mostrar a través de las características de los polígonos, la relación entre las figuras en cuestión".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 31:
Contenido de la acción: "Mostrando cómo se relacionan las figuras planas".
Motivo de la acción: "Mostrar cómo están subdivididos los polígonos según la Geometría plana".
Alumno 05:
Contenido de la acción: No respondió.
Motivo de la acción: No respondió.

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas extraídas compatibles con los propósitos educativos:

Alumno 24:
Contenido de la acción: “Identificando sus propiedades”.
Motivo de la acción: “Construir el concepto de tales formas”.
Alumno 31:
Contenido de la acción: “Usando las propiedades de cada figura”.
Motivo de la acción: “Relacionar las figuras para identificar las particularidades de cada una de ellas”.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05:
Contenido de la acción: “Identificando las semejanzas y diferencias”.
Motivo de la acción: “Relacionar cuáles son las propiedades de esas formas geométricas”.
Alumno 26:
Contenido de la acción: “Verificando semejanzas y diferencias”.
Motivo de la acción: “Verificación de conceptos adquiridos”.

Respuestas Extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 07:
Contenido de la acción: “Comparando figuras geométricas”.
Motivo de la acción: “Identificar figuras geométricas”.
Alumno 17:
Contenido de la acción: “Diferenciando cada una”.
Motivo de la acción: “Ver las principales características”.
Análisis y Discusión de los Resultados

Discusión de los Valores Porcentuales

Contenido de la acción: (NR) experimenta una reducción ligeramente superior a la mitad, pasando del ($46{,}43\%$) al ($35{,}71\%$). Por otro lado, (RI) se mantiene, antes y después de la intervención, con un porcentaje fijo del ($39{,}29\%$), mientras que (RA) pasa del valor porcentual del ($10{,}71\%$) al ($25{,}00\%$).
Motivo de la acción: (NR) presenta una acusada reducción porcentual, pasando del ($57{,}14\%$) al ($39{,}29\%$). Por su parte, (RI) experimenta un crecimiento de su valor porcentual, pasando del ($35{,}71\%$) al ($46{,}43\%$), y, de igual modo, (RA) también registró un aumento en su porcentaje, pasando del ($7{,}14\%$) al ($14{,}28\%$).

Discusión de las Respuestas

Antes del proceso de enseñanza, tan sólo el alumno (**04**) aparece como ejemplo del grupo que presenta una respuesta ‘compatible con los propósitos educativos’, referente al motivo y al contenido de la acción acerca de la *interrelación entre las formas: polígonos, cuadriláteros y paralelogramos*. Los alumnos (**26**) y (**18**) representan ejemplos de los calificados como ‘poco compatibles con los propósitos educativos'; por su parte, los alumnos (**31**) y (**05**) están incluidos entre aquellos calificados 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Después del proceso de enseñanza, el alumno (**24**), que ni siquiera había respondido en el momento anterior, así como el alumno (**31**), que sí respondió, pero que aparecía entre aquellos calificados 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', pasan a formar parte del grupo considerado como 'compatibles con los propósitos educativos'. Los alumnos (**05**) y (**26**), que inicialmente se encontraban entre los considerados con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', pasaron a estar incluidos entre los calificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Y por lo que se refiere a los ejemplos que representan 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', los alumnos (**07**) y (**17**) quedaron incluidos en dicho grupo.

Resultado: En lo que se refiere a la *interrelación entre las formas: polígonos, cuadriláteros y paralelogramos,* la discusión de la comparación porcentual de las respuestas al contenido de la acción y al motivo de la acción presentadas por los alumnos antes y después de la intervención, a la par que el análisis de las respuestas efectivamente emitidas por los alumnos, indica que se produjo elaboración de sentido por parte de algunos de ellos.

Análisis de la 3ª Cuestión

Las respuestas de los alumnos a las propiedades entre los lados, los ángulos y las diagonales que pretende enfocar las ideas sobre: cuadrados, rectángulos y rombos, presentaron cierta dificultad para ser organizadas sólo en una tabla. Por ello, se hizo necesaria la elaboración de las tablas 54, 55 y 56. En ellas, tener los cuatro lados y/o ángulos congruentes se representa por (Os 4), mientras que tener los lados opuestos y/o ángulos opuestos se representa mediante (Op).

Análisis del ítem I de la 3ª Cuestión del cuestionario de Evaluación del Aprendizaje

Tabla 50: Caracterización de las Propiedades de los Cuadrados

Propiedades / Intervención		Lados		Ángulos		Diagonales	
		Os 4	Op	Os 4	Op	sí	no
Antes	Alumnos	2	1	0	0	0	0
	%	7,14	3,57	0,00	0,00	0,00	0,00
Después	Alumnos	13	3	13	2	2	0
	%	46,43	10,71	46,43	7,14	7,14	0,00

Tabla 51: Caracterización de las Propiedades de los Rectángulos

Propiedades / Intervención		Lados		Ángulos		Diagonales	
		Os 4	Op	Os 4	Op	sí	no
Antes	Alumnos	1	1	1	0	0	0
	%	3,57	3,57	3,57	0,00	0,00	0,00
Después	Alumnos	1	10	12	2	3	0
	%	3,57	35,71	42,86	7,14	10,71	0,00

Tabla 52: Caracterización de las Propiedades de los Rombos

Intervención \ Propiedades		Lados		Ángulos		Diagonales	
		Os 4	**Op**	**Os 4**	**Op**	**sí**	**no**
Antes	**Alumnos**	1	2	0	0	0	0
	%	3,57	7,14	0,00	0,00	0,00	0,00
Después	**Alumnos**	8	3	0	6	0	3
	%	28,57	10,71	0,00	21,43	0,00	10,71

Tabla 53: Propiedades de las formas: Cuadrado, Rectángulo y Rombo.

Intervención \ Criterios		Respuesta			Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**	**NR**	**RI**	**RA**
Antes	**Ideas**	-x-	-x-	-x-	-x-	-x-	-x-	-x-	-x-	-x-
	%									
Después	**Ideas**	04	18	06	06	15	07	07	17	04
	%	14,29	64,29	21,43	21,43	53,57	25,00	25,00	60,71	14,29

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención sobre la Respuesta a la cuestión

Etapa Anterior a la Intervención:

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 02:
Respuesta: "Cuadrado: es una figura geométrica que tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales; Rectángulo: es una figura geométrica que tiene lados paralelos iguales y 4 ángulos rectos; Rombo: lados opuestos paralelos y ángulos opuestos iguales".
Alumno 27:
Respuesta: "Cuadrado: cuatro lados paralelos y congruentes dos a dos, ángulos de noventa grados, diagonales congruentes y que se cortan en el punto medio; Rectángulo: lados opuestos paralelos y congruentes, ángulos de noventa grados, diagonales congruentes y que se cortan en el punto medio; Rombo: lados opuestos paralelos y congruentes, ángulos opuestos congruentes y diagonales congruentes".

Respuestas seleccionadas poco compatibles con los propósitos educativos:
Sólo hay un ejemplo.
Alumno 18:
Respuesta: "Rectángulo: cuatro lados con la misma medida y 4 ángulos rectos; Rectángulo: 4 ángulos rectos, con lados opuestos paralelos y base y altura diferente; Rombo: cuatro lados congruentes y lados opuestos paralelos".
Alumno 28:
Respuesta: "Son cuadriláteros, la suma de sus ángulos mide trescientos sesenta grados, sus lados opuestos son paralelos entre sí".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 04:
Respuestas: "Dos lados, ángulos y diagonales".
Alumno 24:
Respuestas: "Posee cuatro ángulos rectos, diagonal y dos pares de triángulos iguales".

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención sobre el Contenido y el motivo de la acción

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Sólo hay un ejemplo.
Alumno 05:
Contenido de la acción: "Identificando sus propiedades".
Motivo de la acción: "Reconocer la semejanza de cada uno".
Alumno 24:
Contenido de la acción: "Identificando sus propiedades".
Motivo de la acción: "Facilitar la comprensión del concepto de cada figura".

Respuestas seleccionadas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 17:
Contenido de la acción: "Identificando sus propiedades".
Motivo de la acción: "Reconocer las propiedades del rectángulo, cuadrado y rombo.".
Alumno 31:
Contenido de la acción: "Verificando las propiedades de la existencia de cada figura".
Motivo de la acción: "Saber relacionar las figuras de acuerdo con las particularidades de cada una".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 14:
Contenido de la acción: "Estoy poniendo en práctica mis conocimientos."
Motivo de la acción: "Receptividad del contenido".
Alumno 31:
Contenido de la acción: "Dando validez a cada forma geométrica".
Motivo de la acción: "Crear formas geométricas".

Discusión de los Valores Porcentuales

Caracterización de las Propiedades de los Cuadrados: La comparación de los datos anteriores y posteriores a la intervención acerca de la identificación de su caracterización/propiedades con relación a los lados, arroja el dato de que la variación porcentual de (Os 4) pasó (7,14%) al (7,14%), y los valores porcentuales de (Op) se modificaron, aumentando del (3,57%) al (10,71%). Por su parte, por lo que se refiere a los ángulos, se producen las siguientes variaciones en los porcentajes: (Os 4) pasó del (0,00%) al (46,13%) y también experimentó variación (Op), pasando del (0,00%) al

(7,14%). Acerca de las diagonales, el valor porcentual del criterio (**no**) no se modificó, permaneciendo en el (0,00%). Por otro lado, el valor porcentual del criterio (**sí**) se modificó desde el (0,00%) hasta el (7,14%).

Caracterización de las Propiedades de los Rectángulos: La comparación de los datos presentados antes y después de la intervención sobre la identificación de su caracterización/propiedades con relación a los lados, no presenta variaciones en los porcentajes de (Os 4), que permanecen en el (3,57%); los valores porcentuales de (Op) pasaron del (3,57%) al (35,71%). Por lo que se refiere a los ángulos, se produjeron variaciones en los porcentajes de (Os 4), pasando del (3,75%) al (42,86%), así como también en los valores de (Op), aumentando del (0,00%) al (7,14%). Por último, acerca de las diagonales, no se produjo ninguna variación en el valor porcentual correspondiente al criterio (**no**), que se mantuvo fijo en el (0,00%), pero el criterio (**sí**) aumentó desde el (0,00%) al (10,71%).

Caracterización de las Propiedades de los Rombos: La comparación de los datos, antes y después de la intervención, presenta, acerca de la identificación de su caracterización/propiedades con relación a los lados, un cambio en los valores porcentuales de (Os 4), que pasaron del (3,57%) al (28,57%), así como en los valores de (Op), que pasaron del (7,14%) al (10,71%); en el caso de los ángulos, (Os 4) aumenta del (0,00%) al (21,43%) y (Op) se mantiene en el (0,00%). En cuanto a las variaciones de los porcentajes en las diagonales, el criterio (**sí**) se mantuvo fijo en el (0,00%); por su parte, el criterio (**no**) pasó del (0,00%) al (10,71%).

Análisis del ítem i) de la 3ª Cuestión del cuestionario Diagnostico con su correspondiente, ítem III del cuestionario de Evaluación del Aprendizaje

Tabla 54: Relación entre las formas: Cuadrado, Rectángulo y Rombo Con Polígono, Cuadrilátero y Paralelogramo.

Intervención \ Criterios		Respuesta			Contenido de la acción			Motivo de la acción		
		NR	RI	RA	NR	RI	RA	NR	RI	RA
Antes	Ideas	13	15	00	-x-	-x-	-x-	-x-	-x-	-x-
	%	46,43	53,57	0,00						
Después	Ideas	09	18	01	13	09	06	16	08	04
	%	32,14	64,29	3,57	46,43	32,14	21,43	57,14	28,57	14,29

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención sobre la Respuesta a la cuestión

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
No hay ejemplos.

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Hay tan sólo un ejemplo.
Alumno 18:
Respuesta: "Rectángulo, cuadrado y rombo son polígonos con cuatro lados y dos lados opuestos paralelos".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 31:
Respuestas: "Las formas están insertas como si fueran paralelogramos".
Alumno 05: "A través de la definición: cuatro lados opuestos y paralelos".

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención sobre la Respuesta a la cuestión

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Tan sólo hay un ejemplo.
Alumno 18:
Respuesta: "Sí. El cuadrado es un cuadrilátero, un polígono y un paralelogramo, lo mismo que el rectángulo y el rombo".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05: "Sí. A través de los lados, ángulos y diagonales".
Alumno 31: "Sí. Todos son polígonos, cuadriláteros y paralelogramos".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 16: "Sí. Pues son cuadriláteros, poseen ángulos rectos, etc.".
Alumno 08: "Sí. Pues todo cuadrado es polígono, todo rectángulo es cuadrilátero, y todo paralelogramo es rombo".

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención sobre el Contenido y Motivo de la acción

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Hay tan sólo un ejemplo.
Alumno 23:
Contenido de la acción: "Viendo que todos ellos tienen algunas propiedades iguales".
Motivo de la acción: "Conocer polígonos y sus propiedades".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 03:
Contenido de la acción: "Identificando la semejanza entre cada uno".
Motivo de la acción: "Clasificar".
Alumno 04:
Contenido de la acción: "Observando cuáles son sus propiedades semejantes".
Motivo de la acción: "Verificando algunas semejanzas entre ellos".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 29:
<u>Contenido de la acción</u>: "Identificando en particular cada polígono".
<u>Motivo de la acción</u>: No respondió.
Alumno 31:
<u>Contenido de la acción</u>: "Usando los conocimientos acerca de los polígonos, especificando cada figura de la lista anterior".
<u>Motivo de la acción</u>: "Percibir el conocimiento que se tiene acerca de las propiedades de los citados polígonos".

Discusión de los Valores Porcentuales

Cuando se comparan los porcentajes, aun considerando el apenas perceptible aumento de RA, que pasa del (0,00%) al (3,57%), junto con el crecimiento de RI, que pasó del (53,57%) al (64,29%), y, principalmente, si se tiene en cuenta la disminución de NR, que pasó del (46,43%) al (32,14%), se puede percibe que la manera en que *los alumnos interrelacionan las formas: polígonos, cuadriláteros y paralelogramos* no resulta satisfactoria.

Discusión de las Respuestas

En la Respuesta a la Cuestión: Al principio, antes de la intervención, ningún alumno presenta una respuesta adecuada acerca de la *relación entre las formas: cuadrado, rectángulo y rombo con polígono, cuadrilátero y paralelogramo*; por ello, no hay ningún ejemplo correspondiente al tipo 'compatibles con los propósitos educativos'. No obstante, el alumno (**18**) aparece como el único representante del grupo 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Y en cuanto a los que se incluyen entre aquellos calificados 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', encontramos a los alumnos (**05**) y (**31**).

En la Respuesta a la Cuestión: Después de la intervención, el alumno (**18**) presenta una respuesta más elaborada que antes, no obstante lo cual, continúa formando parte integrante del grupo de los 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Por su parte, los alumnos (**05**) y (**31**) pasan de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'poco compatibles con los propósitos educativos', mientras que los alumnos (**16**) y (**08**), que no habían presentado ningún tipo de respuesta, a pesar de presentarla en este momento, permanecen incluidos entre los clasificados 'como poco compatibles con los propósitos educativos'.

En la Respuesta al Contenido de la acción y Motivo de la acción: El alumno (**23**) presentó una respuesta acerca del contenido de la acción y motivo de la acción que lo sitúa como 'compatible con los propósitos educativos'; por su parte, los alumnos (**03**) y (**04**) se sitúan entre los clasificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Por último, como representantes de las respuestas clasificadas con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos', aparecen los alumnos (**29**) y

(**31**). Cabe destacar, que aun no habiendo datos iniciales para poder caracterizar evolución o no en el desempeño de los alumnos, dado que hubo representación en las dos primeras calificaciones, tenemos indicios de que se produjo una adquisición de comprensión adecuada.

Resultado: La discusión de la comparación porcentual de las respuestas, antes y después de la intervención, acerca de la *relación entre las formas: cuadrado, rectángulo y rombo con polígono, cuadrilátero y paralelogramo*, unida al análisis de las respuestas efectivamente producidas por los alumnos, indica que hay una pequeña mejora en el desempeño de los alumnos. Por lo que se refiere al contenido de la acción y motivo de la acción, a la vista de las respuestas efectivamente formuladas, se observa que se produjo atribución de sentido referente a las interrelaciones que existen entre las anteriores formas geométricas.

Análisis del ítem ii) de la 3ª Cuestión del Cuestionario Diagnostico con su correspondiente, ítem II del Cuestionario de Evaluación del Aprendizaje

Tabla 55: Relación entre las formas: Cuadrado, Rectángulo y Rombo.

Intervención \ Respuestas		NR	RI	RA
Antes	Alumnos	04	21	03
	%	14,29	75,00	10,71
Después	Alumnos	03	19	06
	%	10,71	67,86	21,43

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 31:
Respuesta: "Todos se clasifican como paralelogramos".
Alumno 15:
Respuesta: "Como cuadriláteros".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 05:
Respuesta: "A través de la definición de cuadrilátero".
Alumno 18:
Respuesta: "A través de las características de lados opuestos paralelos".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 24:
Respuesta: No respondió.
Alumno 07:
Respuesta: "Cuadriláteros y paralelogramos por paralelismo".

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 06:
Respuesta: "Todo rectángulo y todo rombo son paralelogramos".
Alumno 31:
Respuesta: "Todos son cuadriláteros, paralelogramos y se diferencian tan sólo por las particularidades del rectángulo y el rombo".

Respuestas obtenidas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 18:
Respuestas: "A través de propiedades semejantes que ellas presentan".
Alumno 24:
Respuestas: "Figuras que poseen cuatro lados, cuatro ángulos rectos, y que son formas geométricas diferentes".

Respuestas seleccionadas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:
Alumno 29:
Respuesta: "Todos están formados por semirrectas".
Alumno 07:
Respuesta: "podemos relacionar los ángulos, los lados y las diagonales".

Discusión de los Valores Porcentuales

En la comparación de los valores porcentuales se observó que NR y RI presentaron, respectivamente, una reducción desde el (14,29%) al (10,71%) y desde el (75,00%) al (67,86%); por otro lado, RA experimentó un crecimiento del (10,72%), pasando del (10,71%) al (21,43%). Esto significa que se produjo un mejor desempeño por parte de los alumnos con respecto a la *relación entre las formas: cuadrado, rectángulo y rombo*.

Discusión de las Respuestas

Antes del proceso de enseñanza, los alumnos (**31**) y (**15**) ya presentan respuestas 'compatibles con los propósitos educativos' acerca de la *relación entre las formas: cuadrado, rectángulo y rombo*. Por su parte, los alumnos (**05**) y (**18**) representan ejemplos de los que fueron calificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Por último, los alumnos (**07**) y (**24**), forman parte del grupo de los clasificados como 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Después de la intervención, el alumno (**06**) pasa de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'compatible con los propósitos educativos', mientras que el alumno (**31**) se mantiene como 'compatible con los propósitos educativos', esbozando una respuesta un poco más elaborada. El alumno (**18**), a pesar de que presenta una respuesta más estructurada, continúa dentro del grupo de los calificados con ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’; por su parte, el alumno (**24**) sale del grupo ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’ para entrar a formar parte de los ‘poco compatibles con los propósitos educativos’. Los alumnos (**07**) y (**29**) experimentan una leve mejora si se comparan sus respuestas efectuadas antes y después de la intervención, pero, a pesar de ello, no abandonan su pertenencia al grupo calificado con ‘ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos’.

Resultado: La discusión acerca de la *relación entre las formas: cuadrado, rectángulo y rombo* a partir de la comparación porcentual de las informaciones presentadas en el cuadro anterior, unida al análisis de las respuestas efectuadas por los alumnos, antes y después de la intervención, indican una mejora en el desempeño de los alumnos en esta dirección.

Análisis de la 5ª Cuestión: Articulación de las ideas de Geometría tratadas Enseñanza

En el caso de la pregunta en sí, se dan, en primera instancia, tres situaciones posibles que pueden utilizarse con la finalidad de llevar a cabo la demostración que se propone. Tales situaciones son: **Situación I**: En ella, se presupone que el alumno va a recurrir a la proposición sobre la medida de un ángulo raso y a la propiedad de la medida del ángulo interno que sigue; en la **Situación II** se toma como punto de partida admitir que el alumno considera los triángulos externos al cuadrilátero $PQRS$ como si fueran rectángulos isósceles; y, por último, en la **Situación III** se admitirá que el alumno considere los triángulos rectángulos, exteriores al cuadrilátero $PQRS$, como si fueran equiláteros. En el cuadro que aparece más abajo, y que recoge las respuestas presentadas, aparecen tres posibles tipos de registros referentes a la demostración solicitada: no respondió (**NR**), la respuesta fue inadecuada (**I**) y la respuesta fue adecuada (**A**); a su vez, en este último caso, puede resultar: incompleta ($\mathbf{I_c}$) o completa (**C**).

Tabla 56: Cuadro Respuesta a la 4ª Cuestión

Respuestas / Intervención		NR	I	A	
				$\mathbf{I_c}$	**C**
Antes	**Alumnos**	25	1	2	0
	%	89,29	3,57	7,14	0,00
Después	**Alumnos**	12	7	6	3
	%	42,86	25,00	21,43	10,71

Tabla 57: Análisis de las Soluciones por sus Congruencias. 4ª Cuestión

Intervención \ Congruencia: Situación		a_2: Situación I	b_3 e b_4: Situación II	c_3: Situación III
Antes	**Alumnos**	0	1	1
	%	0,00	3,57	3,57
Después	**Alumnos**	0	4	5
	%	0,00	14,29	17,86

Presentación de Algunas Respuestas Extraídas de la Etapa Anterior a la Intervención

Respuestas Extraídas compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 18:
Respuestas:

i) a) "En el triángulo QCP, y en el triángulo SAP, $\overline{CQ} // \overline{SA}$ y $\overline{AP} // \overline{RC}$, luego $\overline{RQ} // \overline{SP}$. (Caso de paralelismo usado implícitamente)".

b) "En el triángulo PBQ, y en el triángulo RDS, $\overline{QB} // \overline{DS}$ y $\overline{DR} // \overline{PB}$, luego $\overline{PQ} // \overline{SR}$. (Caso de paralelismo usado implícitamente)".

c) "Por lo tanto, la figura posee lados opuestos paralelos".

d) Como los triángulos mencionados son isósceles, entonces poseen dos ángulos de 45^0 y uno de 90^0. Por lo tanto, la figura inscrita tiene ángulos de 90^0, a causa del teorema: la suma de los ángulos internos de un triángulo es la del ángulo raso.

ii) "Ángulo raso, teorema de la suma de los ángulos internos, paralelismo, clasificación de triángulos en cuanto a los lados".

iii) "Paralelismo, suma de los ángulos internos de un triángulo".

Respuestas Extraídas poco compatibles con los propósitos educativos:
Alumno 07:
Respuestas:

i) "Una forma de demostración, sería a través del cálculo de áreas (faltan valores numéricos para tal)".

ii) "¿Enumere?".

iii) a)"Sí: propiedades, teoremas y axiomas".

Respuestas obtenidas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:

Todos los alumnos, con excepción de **07** y **18**.

Presentación de Algunas Respuestas obtenidas de la Etapa Posterior a la Intervención

Respuestas seleccionadas compatibles con los propósitos educativos:

Alumno 07:

$p+q=90^0$ $\quad$ $Q+m+q=180^0$

$p+p=90^0$ $\quad$ $45^0+m+45^0=180^0$

$p=45^0$ $\quad$ $m=90^0$

Si $\alpha+\beta=90^0$, $\alpha=\beta$ e $\theta+\theta=90^0 \Rightarrow \theta=45^0$

$\alpha+\alpha=90^0$

$\alpha=90^0$

Si $\alpha+\theta+\gamma+180^0$

$45^0+45^0+\gamma=180^0$

$\gamma=45^0$

$a+p+r=180^0$ $\quad$ $\beta+n+j=180^0$

$45^0+45^0+r=180^0$ $\quad$ $45^0+n+45^0=180^0$

$r=90^0$ $\quad$ $n=90^0$

i) Si $\gamma=m=r=n=90^0 \Rightarrow$ *PQRS es un rectángulo.*

ii) Propiedades:

1) Todos los ángulos son iguales a 90^0;
2) Todos los lados opuestos son paralelos;
3) Las diagonales se cortan;
4) Las diagonales son congruentes.

iii) La forma geométrica de *PQRS* es una figura geométrica euclidiana del tipo polígono.

Alumno 23:

i) $\alpha+\alpha=90^0$ $\quad$ $Q+Q=90^0$ $\quad$ Si $\beta+\gamma+n=180^0$ $\quad$ Si $m+n+p+Q=360^0 \Rightarrow$

$\alpha=45^0$ $\quad$ $Q=45^0$ $\quad$ $n=90^0$ $\quad$ $\Rightarrow$ Re*ctángulo*

Si $J+Q+p=180^0$

$p=90^0$

ii) Cuatro lados opuestos; Paralelos dos a dos; Cuatro ángulos y dos diagonales.

iii) Es un cuadrilátero con lados opuestos paralelos.

Respuestas seleccionadas poco compatibles con los propósitos educativos:

Alumno 06:

i) $\overline{DR}=\overline{DS}\neq\overline{RS}$

$\overline{BQ}=\overline{BP}\neq\overline{PQ}$

Como $\Delta\, PBQ$ es semejante al $\Delta\, SRD$ tenemos que

$\overline{RS}=\overline{PQ}$

$\overline{SA}=\overline{AP}\neq\overline{PS}$

$\overline{RC} = \overline{CQ} \neq \overline{RQ}$

Como el $\Delta\ ASP$ es semejante al $\Delta\ CQR$, tenemos que $\overline{PS} = \overline{RQ}$.

Luego, los lados paralelos son iguales y paralelos entre sí. Luego se deduce que $PQRS$ es un paralelogramo.

ii) Lados paralelos iguales; Diagonales concurrentes; Dos pares de lados paralelos.
iii) Es un cuadrilátero que presenta dos pares de lados paralelos.

Alumno 09:

i) Lados opuestos paralelos ($\overline{SP} // \overline{RQ}$ y $\overline{PQ} // \overline{RS}$) siendo ambos paralelos. Luego, se prueba que $PQRS$ es un paralelogramo.

ii) Lados opuestos paralelos; La suma de sus ángulos ($\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} = 360^0$); Sus diagonales son congruentes; Tiene un punto medio.

iii) Cuadrado: figura geométrica de 4 lados iguales;
Rectángulo: figura geométrica de 4 lados, que constituyen su base y altura.
Rombo: Figura geométrica de 4 lados iguales con diagonales mayor y menor.

Respuestas Extraídas con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos:

Alumno 26:

i) No respondió.

ii) 4 ángulos iguales; lados opuestos paralelos; diagonales que se cortan en el punto medio.

iii) Paralelogramo, pues presenta lados opuestos //, rectangular por las propiedades anteriormente citadas.

Alumno 30:

i) No respondió.

ii) Los ángulos $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}, \hat{S}$ son congruentes; lados paralelos $\overline{SR} // \overline{PQ}$ y $\overline{RQ} // \overline{SP}$; Las diagonales forman ángulos opuestos por el vértice.

iii) Rectángulo es un polígono que presenta lados opuestos paralelos.

Discusión de los Resultados

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Respuesta a la cuestión: La comparación de los datos, antes y después de la intervención, presenta un crecimiento en los valores de I, (A (I_c)) y (A (C)), que pasan, respectivamente, del (3,57%) al (25,00%), del (7,14%) al (21,43%) y del (0,00%) al (10,71%). Junto a ello, se produjo también una reducción de los porcentajes de (**NR**), que pasó del (89,29%) al (42,86%). Además, la mejora en el desempeño de los alumnos se puede observar asimismo, tanto por la disminución de las preguntas no-respondidas, como por la ligera supremacía de (**A**) (32,14%) sobre (**I**) (25,00%).

Análisis de las Soluciones por sus Congruencias: A la vista de los datos obtenidos, a partir de las variaciones de b_3 y b_4, correspondientes a la situación II, que pasan del (3,57%) al (14,29%) y de c_3, correspondiente a la situación III, que pasa del (3,57%) al (17,86%), se puede observar que hubo un buen desempeño de los alumnos en este ámbito.

Discusión de las Respuestas

Antes de la intervención, en la presente cuestión referida a la *caracterización del hacer matemático a partir de aspectos inherentes estudiados durante el curso de la elaboración de razonamiento para efectuar una demostración, destacando el papel de la utilización de conceptos y/o idealización de objetos matemáticos, propiedades/proposiciones,* se observó que tan sólo el alumno (**18**) respondió de forma 'compatible con los propósitos educativos'. Por su parte, en lo que atañe a los alumnos que representan a los calificados como 'poco compatibles con los propósitos educativos', sólo se encontró, asimismo un alumno, el (**07**). Todos los otros alumnos, excepción hecha de los dos ya mencionados, quedaron incluidos entre los que se presentan 'con ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Tras la intervención, los alumnos (**07**) y (**23**) pasan, respectivamente, de 'poco compatibles con los propósitos educativos' y de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'compatibles con los propósitos educativos'. Los alumnos (**06**) y (**09**) pasaron de 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos' a 'poco compatibles con los propósitos educativos'. Y los alumnos (**26**) y (**30**), a pesar de haber presentado un cierto tipo de idealización acerca de los propósitos educativos, forman parte de los ejemplos calificados con 'ausencia de compatibilidad con los propósitos educativos'.

Resultado: La discusión de la comparación porcentual de las informaciones presentadas antes y después de la intervención en los cuadros 58 y 59 indica un buen desempeño de los alumnos con referencia a la *caracterización del hacer matemático a partir de aspectos inherentes estudiados durante el curso de la elaboración de razonamiento para efectuar una demostración, destacando el papel de la utilización de conceptos y/o idealización de objetos matemáticos, propiedades/proposiciones*. Además, las respuestas efectivamente realizadas por los alumnos a los ítems (i), (ii) y (iii) corroboran ese buen desempeño anunciado anteriormente.

5.4.2 Análisis de los Mapas Conceptuales de los Alumnos

En la segunda etapa de la primera parte del análisis, se procede a la observación de los mapas conceptuales anteriores y posteriores al proceso de enseñanza de los alumnos, con la intención de evaluar se dicha enseñanza los ayudó o no a organizar conceptualmente las ideas geométricas: polígono, cuadrilátero, paralelogramo, cuadrado, rectángulo y rombo, dentro del ámbito de la Geometría euclidiana.

1er **Criterio**: Selección Conceptual.

Tabla 58: Comparaciones entre n(C.E.), 8 y n(C.I.) (Geometría)

Intervención \ Criterios		a	b	c	$b \times 8$			$(y=b+c) \times 8$		
					$b<8$	$b=8$	$b>8$	$y<8$	$y=8$	$y>8$
Antes	**Total**	253	101	50	30	0	1	25	1	5
	%	51,01	20,36	10,08	96,77	0,00	3,23	80,65	3,23	16,13
Después	**Total**	55	150	92	29	1	1	19	5	7
	%	11,01	30,24	18,55	93,55	3,23	3,23	61,29	16,13	22,58

Etapa Anterior a la Intervención:

Los conceptos inferiores a $(51{,}01\%)$ superan a los conceptos equivalentes $b\,(20{,}36\%)$ en un $(10{,}29\%)$, más del doble, y, de forma similar, superan a los conceptos superiores $c\,(10{,}08\%)$ en un $(0{,}61\%)$, más de cinco veces.

Comparación de los conceptos equivalentes a ocho (8):

En el cuadro superior, se puede observar que, casi en su totalidad, los conceptos equivalentes inferiores a ocho $(b<8)$, el $(96{,}77\%)$, quedan muy por encima de los conceptos equivalentes mayores que ocho $(b>8)$, el $(3{,}23\%)$; mientras que los conceptos equivalentes iguales a ocho $(b=8)$ carecen de representatividad.

Comparación de la suma de los conceptos equivalentes y superiores ($y=a+b$) a ocho (8):

La suma de los conceptos equivalentes y superiores menores que ocho $(y=b+c<8)$ $(80{,}65\%)$ supera la suma de los conceptos equivalentes y superiores mayores que ocho $(y=b+c>8)$ $(16{,}13\%)$ en, exactamente, cinco veces, y a la suma de los conceptos equivalentes y superiores iguales a ocho (8) $(y=b+c=8)$ $(3{,}23\%)$, en cerca de veinticinco veces.

Etapa Posterior a la Intervención:

Los conceptos equivalentes $b\,(30{,}24\%)$ quedan por encima de los conceptos inferiores a $(11{,}01\%)$, en un $(8{,}22\%)$ más del doble, y en un $(11{,}69\%)$ de los conceptos superiores $c\,(18{,}55\%)$.

Comparación de los conceptos equivalentes a ocho (8):

En este momento, se observa que los conceptos equivalentes inferiores a ocho $(b<8)$ $(93{,}55\%)$ superan en veintiocho veces más, $(3{,}11\%)$, a los conceptos equivalentes iguales a ocho $(b=8)$ e, igualmente, superan a los conceptos mayores de ocho $(b>8)$ $(3{,}23\%)$.

Comparación de la suma de los conceptos equivalentes y superiores ($y = a + b$) a ocho (8):

La suma de los conceptos equivalentes y superiores menores que ocho ($y = b + c < 8$) ($61{,}29\%$) supera a la suma de los conceptos equivalentes y superiores mayores que ocho ($y = b + c > 8$) ($22{,}58\%$) en un ($16{,}13\%$) por encima del doble, y a la suma de los conceptos equivalentes y superiores iguales a ocho (8) ($y = b + c = 8$) ($16{,}13\%$) en un ($12{,}90\%$) un poco más del doble.

Discusión de los Resultados

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Fue posible verificar que se produjo una importante reducción de los conceptos inferiores a, del ($51{,}01\%$) al ($11{,}01\%$), seguida por el crecimiento de los conceptos equivalentes b, del ($20{,}36\%$) al ($30{,}24\%$) y de los conceptos superiores c, del ($10{,}08\%$) al ($18{,}55\%$).

Comparación de los conceptos equivalentes a ocho (8):

Puede observarse una leve reducción de los conceptos equivalentes por debajo de ocho ($b < 8$), del ($96{,}77\%$) al ($93{,}55\%$), seguida de un muy pequeño aumento de los conceptos equivalentes iguales a ocho ($b = 8$), del ($0{,}00\%$) al ($3{,}23\%$).

Comparación de la suma de los conceptos equivalentes y superiores ($y = a + b$) a ocho (8):

Se produjo una disminución de los conceptos equivalentes y superiores menores que ocho ($y = b + c < 8$), del ($80{,}65\%$) al ($61{,}29\%$), seguida por un considerable aumento de la suma de los conceptos equivalentes y superiores iguales a ocho ($y = b + c = 8$), del ($3{,}23\%$) al ($16{,}13\%$).

2º Criterio: La Inclusividad.

General

Tabla 59: Conceptos Generales (Geometría)

Intervención \ Criterios		Geometría	Geometría Plana	Geometría Espacial	Otros Conceptos
Antes	Total	21	3	1	6
	%	64,74	9,68	3,23	19,35
Después	Total	23	5	0	3
	%	74,19	16,13	0,00	9,68

Etapa Anterior a la Intervención:

Los conceptos de Geometría Plana (9,68%) y Geometría Espacial (3,23%) aparecen con poca representatividad, mientras que los llamados Otros Conceptos (19,35%), y Geometría (64,74%) sobresalen entre los otros.

Etapa Posterior a la Intervención:

El concepto de Geometría (74,19%) supera porcentualmente en cuatro veces al concepto de Geometría Plana (16,13%), y en aproximadamente ocho veces a Otros Conceptos (9,68%). Además, el concepto de Geometría Espacial pasa a no ser considerado como concepto general.

Discusión de los Resultados

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Otros Conceptos presenta una variación decreciente del (19,35%) al (9,68%); por otro lado, los conceptos de Geometría y Geometría Plana experimentan un crecimiento, respectivamente, del (64,74%) al (74,19%), y del (9,68%) al (16,13%), registrando aumentos en ese mismo orden del (9,45%) y del (6,68%). A la vista de tales variaciones y de los comentarios anteriores, se puede observar que los alumnos, en cierto modo, reorganizan mejor la opción selectiva de su concepto abarcador.

Intermedio

Tabla 60: Conceptos Intermedios (Geometría)

Intervención \ Criterios		*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	158	57	34
	%	42,47	15,32	9,14
Después	**Total**	42	90	65
	%	11,29	24,19	17,47

Etapa Anterior a la Intervención:

El número de conceptos inferiores a (42,47%) registrados en los mapas conceptuales de los alumnos, está un (11,83%) por encima del doble de los conceptos equivalentes b (15,32%) y un (5,91%) por encima de cuatro veces los conceptos superiores c (9,14%).

Etapa Posterior a la Intervención:

El número de conceptos equivalentes b (24,19%) es un (0,39%) menor del doble de los conceptos inferiores a (12,29%) y un (6,72%) mayor que los conceptos superiores c (17,47%).

Discusión de los Resultados

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

La reducción de los conceptos inferiores a del (42,47%) al (12,29%), seguida por el aumento de los conceptos superiores c del (9,14%) al (17,47%), y el mucho mayor de los conceptos equivalentes b, del (15,32%) al (24,19%), indican una mejor estructuración de los conceptos intermedios por parte de los alumnos después de la intervención.

Horizontalidad

Tabla 61: Horizontalidad según los Niveles 1 y 2 Encontrados (Geometría)

Intervención \ Criterio		*Nivel* 1			**Nivel** 2		
		a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	48	25	11	65	16	10
	%	51,61	26,88	11,83	69,89	17,20	10,75
Después	**Total**	15	25	13	18	36	36
	%	16,13	26,88	13,98	19,35	38,71	38,71

Etapa Anterior a la Intervención:

Nivel 1: los conceptos inferiores a (51,61%) quedan un (24,73%) por encima de los conceptos equivalentes b (26,88%), y un (4,29%) más que cuatro veces los conceptos superiores c (11,83%).
Nivel 2: los conceptos inferiores a (69,89%) son un (1,09%) más que cuatro veces los conceptos equivalentes b (17,20%) y un (4,39%) más que seis veces los conceptos superiores c (10,75%).

Etapa Posterior a la Intervención:

Nivel 1: los conceptos equivalentes b (26,88%) superan a los conceptos inferiores a (16,13%) en un (10,55%), y a los conceptos superiores c (13,98%) en un (12,90%).
Nivel 2: los conceptos equivalentes b (38,71%) y c (38,71%) superan a los conceptos inferiores a (19,35%) en aproximadamente el doble.

Discusión de los Resultados

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Nivel 1: se produjo una disminución de los conceptos inferiores a del $(51{,}61\%)$ al $(16{,}13\%)$, así como de los conceptos superiores c del $(11{,}83\%)$ al $(13{,}98\%)$; por otro lado, no hay variación en los conceptos equivalentes b, que se mantuvieron en el $(26{,}88\%)$.
Nivel 2: hubo una reducción del $(11{,}80\%)$, más del triple, en los conceptos inferiores a, pasando del $(69{,}89\%)$ al $(19{,}35\%)$, seguida por el aumento del $(4{,}31\%)$, más del doble, en los conceptos equivalentes b, que pasaron del $(17{,}20\%)$ al $(38{,}71\%)$, produciéndose también un aumento del $(6{,}46\%)$, más del triple, en los conceptos superiores c, que pasaron del $(10{,}75\%)$ al $(38{,}71\%)$.

Ante tales descripciones, caracterizadas en el nivel 1 por la importante reducción de a así como por un ligero aumento de c, y en el nivel 2 por una importante disminución de a y considerables aumentos de b y c, podemos confirmar la buena evolución que se produjo en estos niveles.

Tabla 62: Horizontalidad según los Niveles 3 y 4 Encontrados (Geometría)

Intervención \ Criterios		Nivel 3			Nivel 4		
		a	b	c	a	b	c
Antes	**Total**	32	9	8	21	4	6
	%	34,41	9,68	8,60	22,58	4,30	6,45
Después	**Total**	6	19	9	3	10	6
	%	6,45	17,93	9,68	3,47	10,75	6,45

Etapa Anterior a la Intervención:

Nivel 3: al principio, los conceptos inferiores $a\,(34{,}41\%)$ superan en un $(5{,}37\%)$, más del triple a los conceptos equivalentes $b\,(9{,}68\%)$, y en aproximadamente cuatro veces, a los conceptos superiores $c\ (8{,}60\%)$.
Nivel 4: los conceptos inferiores $a\,(22{,}58\%)$ representan porcentualmente un $(3{,}23)$ por encima del triple de los conceptos superiores $c\,(6{,}45\%)$ y un $(1{,}08\%)$ más de cinco veces que los conceptos equivalentes $b\,(4{,}30)$.

Etapa Posterior a la Intervención:

Nivel 3: en este caso, los conceptos equivalentes $b\,(17{,}93\%)$ fueron mayores, un $(5{,}03\%)$ más del doble que los conceptos inferiores $a\,(6{,}45\%)$, y un $(8{,}25\%)$ más que los conceptos superiores $c\,(9{,}68\%)$.
Nivel 4: los conceptos equivalentes $b\,(10{,}75\%)$ superan a los conceptos inferiores $a\,(3{,}47\%)$ en tres veces $(0{,}34\%)$, y a los conceptos superiores $c\,(6{,}45\%)$ en un $(4{,}30\%)$.

Discusión de los Resultados

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

Nivel 3: se pode observar una notable reducción de los conceptos inferiores a, del $(34{,}41\%)$ al $(6{,}45\%)$, al lado de un pequeño aumento en los conceptos superiores c, del $(8{,}60\%)$ al $(9{,}68\%)$, así como el también aumento, si bien en un porcentaje algo mayor, en los conceptos equivalentes b, del $(9{,}68\%)$ al $(17{,}93\%)$.
Nivel 4: en este nivel, se puede notar una considerable disminución en los conceptos inferiores a, pasando del $(22{,}58\%)$ al $(3{,}47\%)$, así como un pequeño aumento en los conceptos equivalentes b, que pasan del $(4{,}30)$ al $(10{,}75\%)$, mientras que los conceptos superiores c se mantuvieron en el $(6{,}45\%)$.

Los comentarios que hemos vertido hasta el momento acerca del análisis de los niveles 3 y 4, según la comparación establecida entre las informaciones presentadas antes y después de la intervención, permite afirmar que en el nivel 3 evidencia un mejor desempeño evolutivo por parte de los alumnos que en el nivel 4.

3$^{\text{er}}$ Criterio: Relaciones Significativas.

Tabla 63: Relaciones Específicas (Geometría)

Intervención \ Criterios		No presenta	*a*	*b*	*c*
Antes	**Total**	28	8	0	1
	%	90,32	1,29	0,00	0,16
Después	**Total**	27	0	16	0,00
	%	87,10	0,00	2,42	0,00

Etapa Anterior a la Intervención:

El número de relaciones (proposiciones) encontradas en los mapas de los alumnos se reveló como muy incipiente, pues veintiocho alumnos, esto es, el $(90{,}32\%)$, no presentaron ningún tipo de relación, y, entre las tres que presentaron, hubo ocho $(1{,}29\%)$ referidas a a, y tan sólo 1, $(0{,}16\%)$, referida a c.

Etapa Posterior a la Intervención:

Después del proceso de enseñanza, las relaciones no aparecieron en los mapas de veintisiete alumnos, que representan el $(87{,}10\%)$ del total; por otro lado, se registraron quince relaciones $(2{,}42\%)$ tipo b.

Comparación de las informaciones presentadas antes y después de la intervención:

A la vista de los comentarios anteriores, es posible afirmar la existencia de una dificultad muy grande por parte de los alumnos a la hora de establecer relaciones entre conceptos. Por lo que se refiere a las variaciones numéricas ocurridas en a, que pasó del $(1{,}29\%)$ al $(0{,}00\%)$, en c, que pasó del $(0{,}16\%)$ al $(0{,}00\%)$, y, principalmente, al crecimiento de b, que pasó del $(0{,}00\%)$ al $(2{,}42\%)$, a pesar de tratarse de valores pequeños, parece indicar un ligero cambio acerca de este criterio.

5.5 Análisis Evolutivo de los Mapas Conceptuales de los cuatro Textos de Apoyo

En esta parte del análisis, el propósito que se busca es caracterizar si durante el desarrollo del presente estudio, tanto quien lo ha elaborado como sus colaboradores, consiguieron producir una evolución a lo largo del proceso. Por ello, se estableció una comparación entre las primeras versiones de los mapas conceptuales elaborados por ellos sobre cada uno de los cuatro campos matemáticos y sus últimas versiones.

5.5.1 Versión Inicial del Mapa Conceptual de Combinatoria

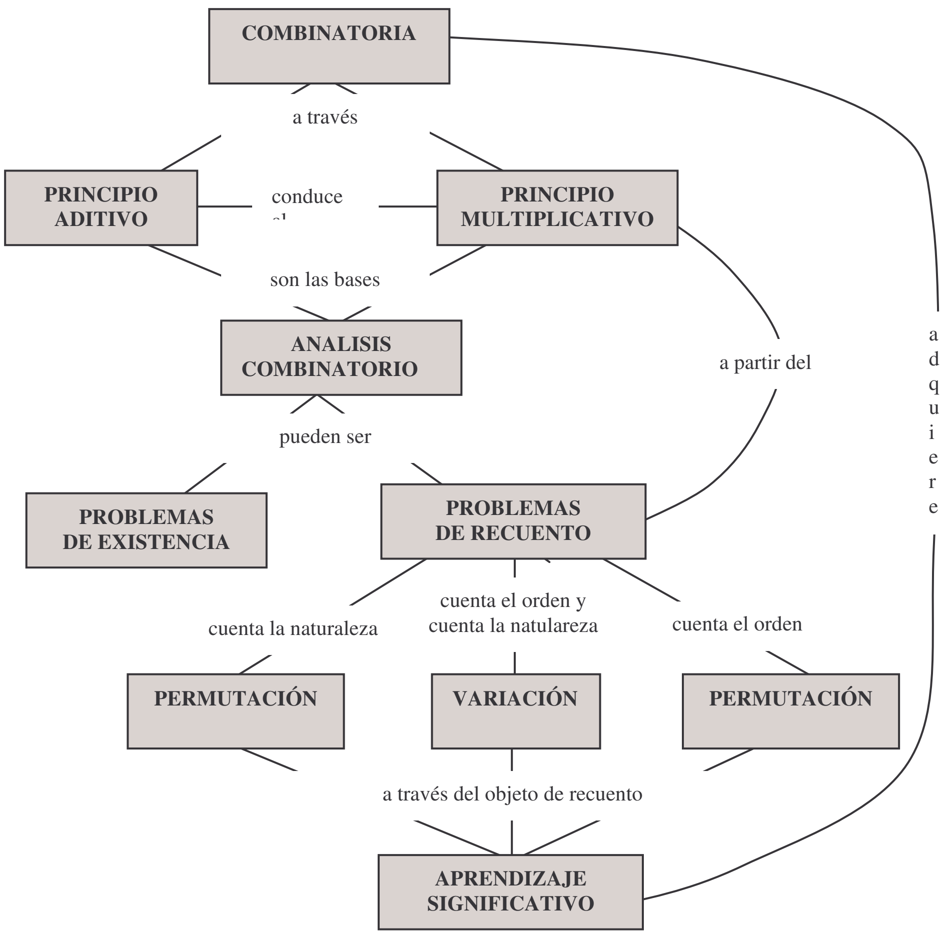


Figura 42: 1ª Versión del Mapa Conceitual de Combinatoria (Silva y Rufino, 2004)

Discusión de los Resultados

El número de conceptos del mapa anterior, denominado como primera versión de Combinatoria, posee un total de diez conceptos, así como también diez relaciones. Por su parte, el mapa conceptual denominado como versión final de Combinatoria posee un total de catorce conceptos y veinticuatro relaciones. El cuadro que aparece más abajo registra los conceptos (C^1 y C^2) y las relaciones (R^1 y R^2), donde C^1 corresponde a los conceptos que no pertenecen al dominio del área de estudio de la Combinatoria, mientras que C^2 representa conceptos que sin ninguna duda forman parte de él. En el caso de las relaciones, R^1 representa las consideradas como débiles, mientras que R^2 representa a las relaciones proposicionales mucho más significativas (*vid.* el apartado de metodología).

Tabla 64: Regulación según los Conceptos y las Relaciones (Combinatoria)

Intervención \ Regulación		Conceptos		Relaciones	
		C^1	C^2	R^1	R^2
Antes	**Total**	1	9	6	4
	%	10,00	90,00	60,00	40,00
Después	**Total**	0	14	2	22
	%	0,00	100,00	8,33	91,67

Regulación en la Elaboración del Material

Conceptos: Los conceptos que no pertenecen al dominio conceptual del área de estudio de la Combinatoria (C^1) son el ($10{,}00\%$); por su parte, los que forman parte de dicho dominio (C^2), representan el ($90{,}00\%$).

Relaciones: Las relaciones consideradas como débiles (R^1) se corresponden con un porcentaje del ($60{,}00\%$), mientras que las que se consideraron como mucho más significativas (R^2) representaron el ($40{,}00\%$).

Regulación en el uso del Material

Conceptos: Los conceptos que no forman parte del dominio conceptual del área de estudio de la Combinatoria (C^1) dejan de aparecer, ($0{,}00\%$), con lo cual, aquellos que sí pertenecen a dicho dominio (C^2) representan completamente el ($100{,}00\%$).

Relaciones: Las relaciones consideradas como débiles (R^1) representan un porcentaje del ($8{,}33\%$), frente a las consideradas mucho más significativas (R^2), que alcanzaron el ($91{,}67\%$).

Comparación de la Regulación en la Elaboración del Material y en el uso del Material:

Conceptos: Los conceptos que no pertenecen al dominio conceptual del área de estudio de la Combinatoria C^1 bajaron del $(10,00\%)$ al $(0,00\%)$, y aquellos que forman parte de él C^2 aumentaron desde el $(90,00\%)$ hasta el $(100,00\%)$.

Relaciones: Las relaciones consideradas como débiles R^1 se redujeron del $(60,00\%)$ al $(8,33\%)$, mientras que las consideradas como mucho más significativas R^2 pasaron del $(40,00\%)$ al $(91,67\%)$.

A la vista de las variaciones anteriores, considerando el crecimiento de C^2 y, principalmente, el ocurrido en R^2, caracterizados ambos a partir de la comparación entre el mapa conceptual de Combinatoria construido durante la primera elaboración del material producido (texto de apoyo) y el que en la actualidad constituye la nueva versión, se puede afirmar que se produjo una implicación directa en su calidad. Por lo tanto, los mapas producidos a lo largo del proceso de desarrollo, así como la utilización del ya referido material, ayudaron, sin duda, en el proceso de sistematización de un recurso didáctico más completo y familiar para los elaboradores, a la hora de abordar el tratamiento de la Combinatoria en el ámbito de la *Enseñanza Fundamental* y de la *Enseñanza Media*.

5.5.2 Versión Inicial del Mapa Conceptual sobre Lógica

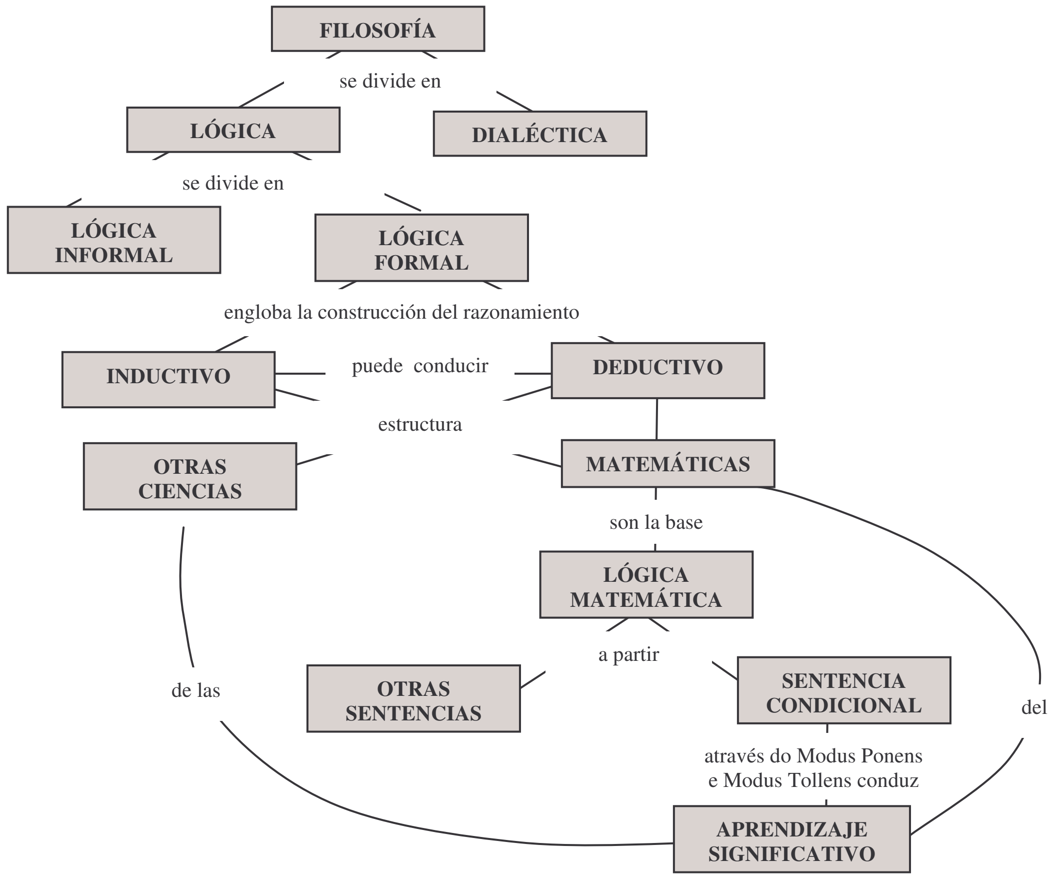


Figura 43: 1ª Versión del Mapa Conceitual de Lógica Matemática (Silva y Lira, 2004)

Tabla 65: Regulación según los Conceptos y las Relaciones (Lógica)

Regulación / intervención		Conceptos		Relaciones	
		C^1	C^2	R^1	R^2
Antes	**Total**	10	1	8	3
	%	90,91	9,09	72,73	27,27
Después	**Total**	0	16	4	18
	%	0,00	100,00	18,18	81,82

Regulación en la Elaboración del Material

Conceptos: Los conceptos que no forman parte del dominio conceptual del área de este estudio de la Lógica (C^1) representan el ($90{,}91\%$) frente a aquellos que sí forman parte de él (C^2), y que representan el ($9{,}09\%$).

Relaciones: Las relaciones consideradas como débiles (R^1), en términos de porcentaje, representaron el ($72{,}73\%$), frente a las consideradas mucho más significativas (R^2), que representaron el ($27{,}27\%$).

Regulación en el uso del Material

Conceptos: No se dio el caso, en este momento, de la aparición de conceptos que no formaran parte del dominio conceptual del área de la Lógica en el presente estudio (C^1), esto es, el ($0{,}00\%$), mientras que los que formaban parte de ella (C^2) alcanzaron el ($100{,}00\%$).

Relaciones: Las relaciones consideradas como débiles (R^1), en términos de porcentaje, representaron el ($18{,}18\%$), frente a las consideradas como mucho más significativas (R^2), que llegaron al ($81{,}82\%$).

Comparación de la Regulación en la Elaboración del Material y en el uso del Material:

Conceptos: Los conceptos que no pertenecen al dominio conceptual del presente estudio sobre el área de la Lógica C^1 se redujeron del ($90{,}91\%$) al ($0{,}00\%$), mientras que los que formaban parte de dicho dominio C^2 aumentaron desde el ($9{,}09\%$) hasta el ($100{,}00\%$).

Relaciones: Las relaciones consideradas como débiles R^1 descendieron desde el ($72{,}73\%$) hasta el ($18{,}18\%$), frente a las consideradas como mucho más significativas R^2, que aumentaron del ($27{,}27\%$) hasta el ($81{,}82\%$).

Las variaciones anteriores caracterizadas, principalmente, por el crecimiento tanto de C^2 como de R^2, alcanzando, respectivamente, el $(90{,}91\%)$ y el $(54{,}55\%)$, según la comparación establecida entre el mapa conceptual sobre Lógica (Conceptuar Lógica Matemática) construido durante la primera elaboración del material producido (texto de apoyo) y el que en la actualidad constituye la nueva versión de este material, hace posible afirmar que tuvieron una implicación directa en la mejora de su calidad. De este modo, los mapas producidos a lo largo del proceso de desarrollo y utilización del material, contribuyeron, con toda seguridad, a una sistematización de dicho recurso didáctico (texto de apoyo), haciéndolo más completo y familiar para los elaboradores a la hora de abordar el tratamiento acerca de las ideas básicas sobre Lógica Matemática en el ámbito de la *Enseñanza Fundamental* y de la *Enseñanza Media*.

5.5.3 Versión Inicial del Mapa Conceptual sobre Álgebra

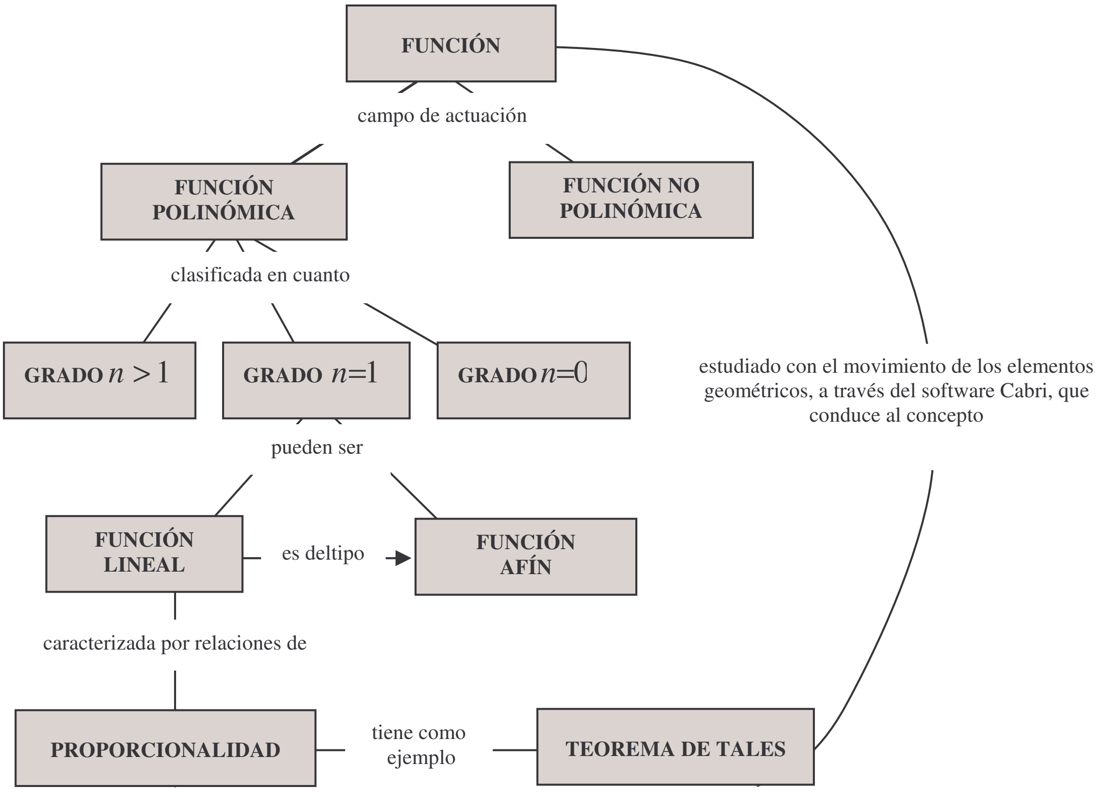


Figura 44: 1ª Versión del Mapa Conceitual de Álgebra (Silva y Falcão, 2004)

Tabla 66: Regulación según los Conceptos y las Relaciones (Álgebra)

Intervención \ Regulación		Conceptos		Relaciones	
		C^1	C^2	R^1	R^2
Antes	**Total**	4	6	7	0
	%	40,00	60,00	100,00	0,00
Después	**Total**	0	15	0	21
	%	0,00	100,00	0,00	100,00

Regulación en la Elaboración del Material

Conceptos: Los conceptos que no forman parte del dominio conceptual del Álgebra en el presente estudio (C^1) ($40{,}00\%$), en términos de porcentaje, se situaron un ($20{,}00\%$) por debajo de los que constituían dicho dominio (C^2) ($60{,}00\%$).

Relaciones: Las relaciones consideradas como débiles (R^1) se corresponden con la totalidad de las relaciones existentes en este momento, es decir, el ($100{,}00\%$).

Regulación en el uso del Material

Conceptos: No hay conceptos que no pertenezcan al dominio conceptual del área del Álgebra (C^1) ($0{,}00\%$), y, por lo tanto, aquellos que forman parte de él (C^2) corresponden al ($100{,}00\%$).

Relaciones: Las relaciones consideradas como débiles (R^1) no presentan registros aquí, o sea, representan el ($0{,}00\%$), mientras que, por su parte, las relaciones consideradas como mucho más significativas (R^2) alcanzaron el ($100{,}00\%$).

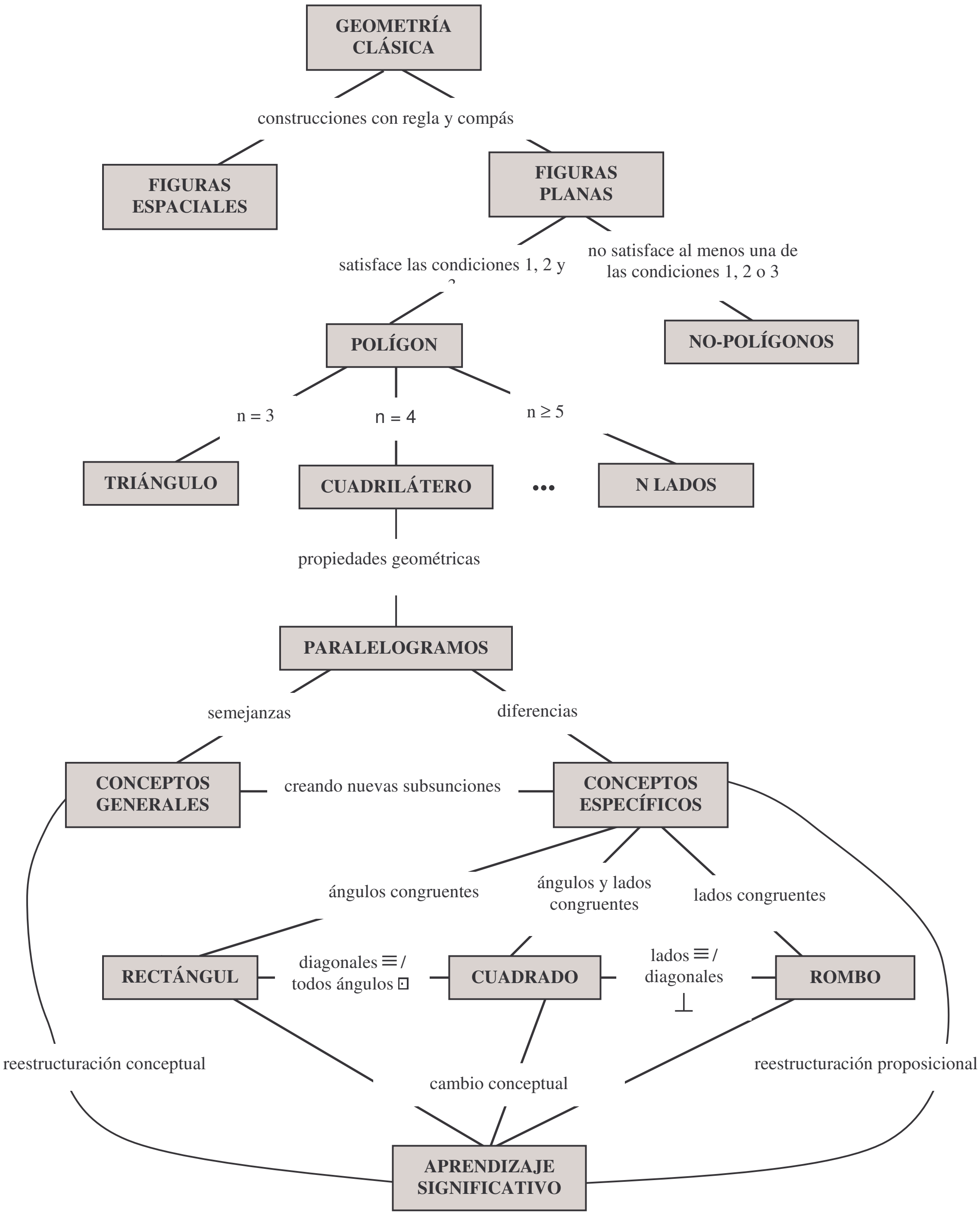
Comparación de la Regulación en la Elaboración del Material y en el uso del Material:

Conceptos: Los conceptos que no forman parte del dominio conceptual del área del Álgebra en este estudio C^1 se redujeron del ($40{,}00\%$) al ($0{,}00\%$), mientras que aquellos que constituyen dicho dominio C^2 aumentaron desde el ($60{,}00\%$) hasta alcanzar el ($100{,}00\%$).

Relaciones: Las relaciones consideradas débiles R^1 se redujeron desde el ($100{,}00\%$) hasta el ($0{,}00\%$), con lo que las consideradas mucho más significativas R^2 aumentaron proporcionalmente en sentido inverso, esto es, desde el ($0{,}00\%$) hasta el ($100{,}00\%$).

Las variaciones anteriores, entre las que principalmente destacan los aumentos de C^2 ($40{,}00\%$) así como de las relaciones consideradas mucho más significativas R^2 ($100{,}00\%$), según la comparación establecida entre el mapa conceptual sobre Álgebra (Conceptualización de la Función Lineal) construido durante la primera elaboración del material producido (texto de apoyo) y el que en la actualidad forma parte de la nueva versión de este material, se puede afirmar que contribuyó decisivamente en la mejora de la calidad del mismo. Estos trabajos que se desarrollaron a lo largo del proceso de desarrollo y utilización del referido material (texto de apoyo), corroboraran la sistematización de este recurso didáctico, tanto en lo que se refiere a su fundamentación, como en el hecho de que permite a los elaboradores un mayor dominio a la hora de abordar el estudio conceptual del Álgebra en la esfera de la *Enseñanza Fundamental* y de la *Enseñanza Media*.

5.5.4 Versión Inicial del Mapa Conceptual sobre Geometría



1 − $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *son puntos (vértices), donde* $A_1 = A_n$;

2 − $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \cdots, \overline{A_{n-1}A_n}$ *son segmentos (lados), cuyas intersecciones se dan sólo en los extremos*;

3 − *Sea* r *una recta, si* $\overline{A_iA_{i+1}} \in r$, *entonces* $\overline{A_{i+1}A_{1+2}} \notin r$.

Figura 45: 1ª Versión del Mapa Conceitual de Geometría (Silva y Rodrigues, 2006)

Tabla 67: Regulación según los Conceptos y las Relaciones (Geometría)

Intervención \ Regulación		Conceptos		Relaciones	
		C^1	C^2	R^1	R^2
Antes	**Total**	3	9	9	3
	%	25,00	75,00	75,00	25,00
Después	**Total**	2	14	4	16
	%	12,50	87,50	20,00	80,00

Regulación en la Elaboración del Material

Conceptos: Los conceptos que no forman parte del dominio conceptual del área de estudio de la Geometría Clásica (C^1), un ($25{,}00\%$), representaron, en términos de porcentaje, tres veces menos que aquellos que eran parte constituyente de dicho dominio (C^2), el ($75{,}00\%$).

Relaciones: Se produce una inversión porcentual en la esfera de la información anterior, pues, ahora, las relaciones consideradas como débiles (R^1) son las que, en términos de porcentaje, representan un ($75{,}00\%$), mientras que las consideradas como mucho más significativas (R^2) alcanzaron tan sólo el ($25{,}00\%$).

Regulación en el uso del Material

Conceptos: Los conceptos que no pertenecen al dominio conceptual de la parte de la Geometría Clásica tratada en el presente estudio (C^1) representaron porcentualmente el ($12{,}50\%$), frente a aquellos que pertenecían a dicho ámbito (C^2), y que ahora llegaron al ($87{,}50\%$).

Relaciones: Las relaciones consideradas como débiles (R^1) presentan en este momento un porcentaje del ($20{,}00\%$), frente a las consideradas mucho más significativas (R^2), que alcanzaron el ($80{,}00\%$).

Comparación de la regulación en la Elaboración del Material y en el uso del Material:

Conceptos: Los conceptos que no pertenecían al dominio conceptual del área de estudio de la Geometría Clásica C^1 experimentaron una reducción que pasó del ($25{,}00\%$) al ($12{,}50\%$), mientras que los que formaban parte de dicho dominio C^2 aumentaron desde el ($75{,}00\%$) hasta el ($87{,}50\%$).

Relaciones: Las relaciones consideradas como débiles R^1 experimentaron un descenso desde el $(75,00\%)$ hasta el $(20,00\%)$, a la vez que las consideradas como mucho más significativas R^2 pasaron del $(25,00\%)$ al $(80,00\%)$.

Las informaciones anteriores, considerando por un lado el ligero crecimiento de C^2 $(12,50\%)$, y poniéndolo en relación con el aumento de R^2 $(55,00\%)$, según la comparación realizada entre el mapa conceptual sobre Geometría (Conceptualización de los Paralelogramos: Rectángulo, Cuadrado y Rombo) construido durante la primera elaboración del material producido (texto de apoyo) y el otro que en la actualidad constituye la versión más reciente de este material, sugiere que estos elementos aquí presentados provocaron grandes implicaciones en una mejor calidad de los materiales. Por lo tanto, la elaboración de mapas conceptuales durante el proceso de desarrollo y utilización del texto de apoyo hasta llegar a la forma actual, permitió a los elaboradores una sistematización más adecuada de las ideas que él se presentan, así como la adquisición de un mayor dominio a la hora de abordar el tratamiento de tales conceptos en el ámbito de la *Enseñanza Fundamental* y de la *Enseñanza Media*.

CAPÍTULO 6

CONSIDERACIONES CONCLUSIVAS: ESPECÍFICAS Y GENERALES

Las consideraciones a modo de conclusión que se ofrecen a continuación se derivan de una profundización de las ideas tratadas en el Capítulo 5. En ellas, intentamos esclarecer los aspectos específicos y generales que se siguen de las respuestas ofrecidas por los alumnos a los cuestionarios y también a los mapas conceptuales elaborados por ellos, con la intención de caracterizar la forma en que los propósitos delineados en los Capítulos 2, 3 y 4 fueron contemplados.

6.1 Consideraciones Conclusivas Específicas

6.1.1 Consideraciones Conclusivas Específicas de Combinatoria

Cuestionarios

Las ideas Matemáticas que fundamentan el campo de la Combinatoria llevada a cabo por parte de los alumnos que formaron parte de este estudio, tras la intervención, se mostraron más consistentes. Así, en la 1ª cuestión, a la que se denominó como ideas características del campo de la Combinatoria, pasó a formar parte y de modo más sistemático del ámbito de conocimiento de estos alumnos; en la 2ª cuestión, el reconocimiento de los alumnos con respecto al recuento de tipo combinatorio, aumentó considerablemente; en la 3ª cuestión, el buen desempeño se caracterizó tanto por la identificación de los principios aditivos y multiplicativos como por el uso de las respectivas ideas de decisión única y decisiones independientes y sucesivas empleadas en la justificación de las respuestas presentadas; y, por su parte, en la 4ª cuestión, las técnicas de recuento del tipo Variación, Combinación y Permutación, a partir de las ideas de Orden y Naturaleza, que son las dos formas de obtención de agrupaciones, pasan a ser bien diferenciadas.

A la vista de las informaciones presentadas, es posible afirmar que se produjo una evolución en la concepción por parte de los alumnos acerca de las ideas básicas en el campo de la Combinatoria, toda vez que pasaron a concebir que en ese campo el foco es el recuento, y que existen principios básicos y formas empleadas para contar. Además, que tales principios pueden organizarse en agrupaciones que culminan en las técnicas de Variación, Combinación y Permutación. Hay un aspecto que merece nuestra atención: se trata de la idealización trivial de profesores de la *Enseñanza Fundamental* y *Media* sobre estas técnicas en sí, en virtud de la cual éstas representarían el propio campo de la Combinatoria; sin embargo, después de esta experiencia educativa, el mismo grupo de profesores llega a concebir que se trata de técnicas de recuento y no el ya referido campo en sí mismo.

En la quinta cuestión, a partir de las respuestas presentadas en los ítems **I**, **II** y **III,** que, respectivamente, trataban sobre la **caracterización de la idea de Recuento**

Simple, y de la **caracterización de la idea de Recuento de tipo Combinatorio** según el **Principio Aditivo** y el **Principio Multiplicativo,** fue posible establecer que:

- La idea de Recuento Simple, en cuanto a su caracterización, se mostró desde el principio hasta el final como completamente conocida, si bien el aumento razonable del motivo de la acción seguido por el también excelente aumento del contenido de la acción hace posible la afirmación de que se produjo un gran avance en la atribución de sentido al tipo de recuento;
- La idea de Principio Aditivo mostró una buena evolución tanto en su caracterización como en la identificación del motivo de la acción y del contenido de la acción, lo que indica la evolución en ambos, o sea, en la caracterización de este principio en sí y también en la atribución de sentido al mismo;
- La idea de Principio Multiplicativo también mostró una buena evolución, tanto en su caracterización como en el motivo de la acción y en el contenido de la acción, lo que de modo análogo al punto anterior, indica que hubo también un avance en la caracterización de este principio y en la atribución de sentido al mismo.

Las informaciones anteriores sugieren que tanto la significación como el sentido atribuido a las ideas Matemáticas de Recuento Simple, Recuento de tipo Combinatorio así como los dos principios fundamentales (Aditivo y Multiplicativo) pasaron a ser correctamente comprendidos por estos alumnos (profesores de la *Enseñanza Fundamental* y *Enseñanza Media*).

Mapas Conceptuales

En el 1^er^ Criterio: Selección Conceptual, se observó un sensible aumento en los mapas de los alumnos, tanto en la cantidad de lo que se denominó conceptos equivalentes como en la comparación de tales conceptos con su media, conforme al instrumento de comparación adoptado. Ello significa que los alumnos, en sus mapas finales, pasan a presentar, además de un mayor número de conceptos equivalentes, un aumento considerable en relación a la media de tales conceptos por mapas.

El 2º Criterio: La Inclusividad. Criterio que está constituido por los cuatro siguientes subcriterios: **General**; **Intermedio**; **Horizontalidad** y **Especificidad**. En conjunto y por ese mismo orden, puede ser observado que:

- El concepto de Combinatoria supera a los demás en cuanto concepto abarcador;
- Los conceptos Intermedios pasan a presentar un considerable aumento por lo que se refiere a los llamados conceptos equivalentes con respecto al instrumento adoptado para análisis con relación a los que presentaban en los mapas iniciales los alumnos;
- En general, los mapas de los alumnos presentaron cuatro niveles de horizontalidad, donde, en términos de número de conceptos equivalentes, el nivel 2º supera al 1º, el nivel 1º supera al 4º , y éste, a su vez, supera al 3º;
- Los conceptos equivalentes adoptados como más específicos pasan a registrar una supremacía en relación a los llamados conceptos inferiores y conceptos superiores.

De forma general, por el hecho de haberse producido una buena evolución en los mapas conceptuales de los alumnos, en los cuatro subcriterios que caracterizan este segundo criterio, es posible afirmar que después de la intervención hubo un buen desempeño de los alumnos en el mismo, es decir, en el ámbito de la **Inclusividad**.

3$^{\underline{er}}$ Criterio: Relaciones Significativas. Este criterio después de la intervención presenta un razonable aumento en las llamadas relaciones equivalentes, aunque sin llegar a caracterizar, por ello, una buena evolución en los mapas de los alumnos en esta dirección.

Debido a los buenos desempeños por parte de los alumnos en virtud de los registros anteriores, en el primer y en el segundo criterio, y a pesar de no haber ocurrido con la misma intensidad en el tercer criterio, se hace posible afirmar que tras la intervención se dio una buena evolución en los mapas conceptuales de los alumnos.

6.1.2 Consideraciones Conclusivas Específicas de Lógica

Cuestionarios

Las ideas Matemáticas objeto de investigación para fundamentar el campo de la **Lógica Matemática**, después de la intervención, y a pesar de la ausencia de desempeño positivo en la 3ª cuestión, debido a la buena y razonable evolución presentada respectivamente en la 1ª cuestión y en la 2ª, permite afirmar que se produjeron cambios relevantes en lo que se refiere a la concepción de los alumnos que formaron parte del presente estudio. Esto mismo podemos expresarlo de la siguiente forma sistemática:

- En la 1ª cuestión, la diferenciación adecuada entre procedimientos con características **filosóficas** y aquellos que presentaban características propias del **sentido común** ocurrió con mayor frecuencia;
- En la 2ª cuestión el reconocimiento por parte de los alumnos de la importancia del **silogismo** para la Lógica se da con una mayor intensidad que su caracterización;
- La 3ª cuestión presenta un pésimo resultado relativo a las Interrelaciones entre Cálculo Proposicional (CP), Lógica de Predicados (LP) y Lógica de las Relaciones (LR) del tipo: CP x LP; CP x LR y LP x LR, tanto por la ausencia de respuesta adecuada como por la cantidad de cuestiones no respondidas así como también por la cantidad de cuestiones respondidas de forma inadecuada.

En la cuarta cuestión, a partir de las respuestas presentadas en los apartados **I**, **II**, **III** y **IV** fue posible establecer que:

- La identificación de las **Sentencias Abiertas** y de las **Proposiciones Declarativas** se mostró como conocida desde el principio, si bien, tras la intervención evolucionó. Algo semejante en lo que respecta a la evolución ocurrió con el **contenido de la acción** y algo menos con el **motivo de la acción**, si bien se puede decir que se produjo atribución de sentido, tanto por parte de las sentencias abiertas como de las proposiciones declarativas;

- La **Traducción de Proposiciones del Lenguaje Lógico al Lenguaje Natural** presentó una buena evolución, tanto en su caracterización como en la identificación del **motivo de la acción** y del **contenido de la acción,** lo que permite afirmar que se produjo una evolución en la interpretación en sí y también en la atribución de sentido a la misma;
- La **Traducción de Proposiciones del Lenguaje Lógico al Lenguaje Natural analizando la Validación** mostró una evolución insignificante, pero, al contrario que ésta, se obtuvo una considerable identificación del **motivo de la acción** y del **contenido de la acción,** con lo cual es posible afirmar que se produjo una evolución en la atribución de sentido a dicha traducción;
- Al confrontar la **Identificación del campo de la Lógica con la apropiación del lenguaje simbólico y la validación del argumento**, se observan, después de la intervención, algunos cambios tan sólo en las respuestas y conclusiones inadecuadas, toda vez que las respuestas y conclusiones adecuadas se mantuvieron nulas como ocurría al comienzo de la intervención. Este cambio indica que hubo un desplazamiento de los que inicialmente no respondieron nada, si bien, tras la intervención pasaron apenas a esbozar una respuesta. Con el cruce de conceptos, lo que se pretendía era identificar el tipo de articulación que se establecía entre las tres idealizaciones anteriores, con la intención de realizar algo semejante a lo que se busca con el **motivo de la acción** y el **contenido de la acción**, pero tal identificación no fue caracterizada debido a la falta de respuestas adecuadas y de conclusiones adecuadas.

Las informaciones anteriores dan evidencia que tanto la significación como el sentido atribuido a las ideas Matemáticas de **Identificación de las Sentencias Abiertas y Proposiciones Declarativas**, de la **Traducción de Proposiciones del Lenguaje Lógico al Lenguaje Natural**, de la **Traducción de Proposiciones del Lenguaje Lógico al Lenguaje Natural analizando la Validación** de algún modo pasaron a ser comprendidos por estos alumnos.

Mapas Conceptuales

En el 1^er^ Criterio: Selección Conceptual. Se observó un sensible aumento en los mapas de los alumnos en la cantidad de lo que se llamaron conceptos equivalentes, lo que significa que los alumnos en sus mapas finales pasan a presentar más conceptos equivalentes que antes de la intervención.

El 2º Criterio. La Inclusividad, que está constituido por los cuatro subcriterios siguientes: **General**; **Intermedio**; **Horizontalidad** y **Especificidad**. En conjunto y sobre ellos, en ese mismo orden, puede ser observado que:

- El concepto de Lógica supera a los demás en cuanto concepto abarcador;
- Se produce un aumento razonable en la cantidad de los conceptos intermedios equivalente en los mapas finales de los alumnos, o sea, en aquellos construidos después de la intervención;
- Por lo general, los mapas de los alumnos presentaron cuatro niveles de horizontalidad, donde el número de conceptos equivalentes los niveles 1º y 4º se

destacan razonablemente si se comparan con los niveles 2º y 3º, pero la variación (aumento de los conceptos equivalentes) no llega a representar una buena evolución;
- Los conceptos equivalentes adoptados como más específicos pasan a registrar una supremacía en relación a los llamados conceptos inferiores y conceptos superiores.

Cuando analizamos los subcriterios anteriores, se puede decir que el desempeño de los alumnos sobre la **Inclusividad** tras la intervención se mostró mucho mejor que antes de ella, pues a pesar de la pequeña evolución en el 2º y 3er subcriterios hubo una mejor evolución de los subcriterios 1º y 4º.

3er Criterio: Relaciones Significativas. En este criterio se registró tan sólo un pequeño aumento en las llamadas relaciones equivalentes, lo que indica que se produjo, en virtud del mismo, una modesta evolución en el mapa conceptual de los alumnos.

Al considerar los tres criterios anteriores, se observa una razonable evolución en los mapas conceptuales de los alumnos producida después de la intervención, que se realizó a partir de los tres criterios anteriores. A pesar de ser leve, implica también una razonable mejora en lo que respecta a la comprensión de dichos alumnos.

6.1.3 Consideraciones Conclusivas Específicas de Álgebra

Cuestionarios

Al comparar las repuestas de los alumnos a la 1ª pregunta del cuestionario diagnóstico con las respuestas a la 2ª del cuestionario de evaluación del aprendizaje, que tratan de la ***concepción algebraica Aritmética generalizada: traducir/generalizar*** así como de los **contenidos de la acción** y de los **motivos de la acción** que les corresponden, se detectó un bajo desempeño por parte de los alumnos. El pobre desempeño se produjo debido al hecho de que, en la 1ª cuestión, las expresiones se remitían a la propiedad ***conmutativa de la multiplicación*** que les era muy familiar, mientras que en la 2ª cuestión el enunciado no les era tan familiar. Ello conduce a la idea de que estos alumnos mostraron una falta de habilidades para formular expresiones Matemáticas referentes a este tipo de concepción algebraica.

Por lo que se refiere a la **2ª Pregunta del cuestionario diagnóstico frente a la 1ª Cuestión de la evaluación del aprendizaje,** que tratan de la concepción de los alumnos sobre la ***resolución de problemas: simplificar/resolver,*** se identificó un razonable aumento en las llamadas respuestas adecuadas presentadas, por lo que se refiere a la cuestión en sí y, a pesar de que se produce una pequeña reducción en las respuestas adecuadas acerca del **contenido de la acción,** muy por el contrario, se produjo un aumento en el **motivo de la acción**. Ello nos permite afirmar que se dio una evolución en el desempeño de los alumnos por lo que respecta a esta concepción algebraica.

La comparación de la 3ª cuestión en ambos cuestionarios, **diagnóstico y evaluación del aprendizaje,** que se refieren al ***estudio de las relaciones: relacionar magnitudes,*** se observa un excelente aumento en las respuestas adecuadas presentadas por los alumnos, tanto en la resolución de la cuestión en sí, como en el **contenido de la acción** y en el **motivo de la acción** correspondientes. Por lo tanto, tal observación hace posible afirmar que se produjo una excelente evolución en la concepción por parte de los alumnos acerca de esta concepción algebraica.

En la 4ª cuestión correspondiente a ambos cuestionarios, **diagnóstico y evaluación del aprendizaje,** que se refiere al concepto de ***Álgebra como estudio de relaciones entre magnitudes*** se percibe un apreciable aumento en las respuestas adecuadas presentadas por los alumnos, tanto en el procedimiento adoptado para la resolución de la cuestión en sí, como en la justificación usada para fundamentar el procedimiento adoptado. De esta forma, es posible colegir que este concepto algebraico gozó de una buena recepción por parte de los alumnos.

Los intentos específicos anteriores referidos a las concepciones algebraicas ***resolución de problemas: simplificar/resolver*** y ***estudio de las relaciones: relacionar magnitudes*** que fueron apuntadas, respectivamente, en la 2ª y en la 3ª cuestión, representan una más que aceptable evolución por lo que se refiere a la comprensión de los alumnos. Además, estos conceptos aprendidos ayudaron también a una evolución conceptual en los mismos alumnos al respecto de las ideas Matemáticas de función afín y función lineal, que constituyeron el objeto de interés de la 4ª cuestión. Por otro lado, el concepto algebraico denominado ***Aritmética generalizada: traducir/generalizar*** tratado en la 1ª cuestión se mostró como insatisfactorio, y, analizado adecuadamente, viene a indicar que los alumnos presentaron dificultades al formular dicha concepción algebraica. Esto, de algún modo, representa que, en este nivel de enseñanza hacen falta habilidades Aritméticas.

Mapas Conceptuales

El 1er Criterio: Selección Conceptual. La disminución en la cantidad de los llamados conceptos inferiores en los mapas de los alumnos y los respectivos aumentos en las cantidades de los conceptos equivalentes y superiores, así como su comparación con la media de los conceptos equivalentes en el instrumento adoptado para el análisis, apunta un cambio evolutivo considerable de los alumnos en este criterio.

El 2º Criterio: La Inclusividad, que está constituido por los siguientes cuatro subcriterios: **General**; **Intermedio**; **Horizontalidad** y **Especificidad; sobre ellos** en su conjunto y por este orden se pueden observar que:

- El concepto Álgebra, aparece, desde el principio, seleccionado por parte de los alumnos como concepto abarcador;
- Tras la intervención se da un ligero aumento en la cantidad de los conceptos Intermedios, equivalentes a los del instrumento de evaluación;
- En los mapas de los alumnos, de modo general, aparecen hasta cuatro niveles de horizontalidad, si bien, mientras se da una reducción en el número de conceptos equivalentes en los niveles 1º y 2º, en el 3º y 4º nivel se produce un pequeño aumento. Tales variaciones apenas llegan a representar una pequeña evolución en dichos niveles cuando se toman en consideración los conceptos superiores;
- Los conceptos equivalentes adoptados como más específicos presentan una reducción, si bien al considerar los conceptos superiores, también adoptados como más específicos, se pasa a un panorama con buenos cambios en lo que se refiere a este subcriterio.

Cuando observamos las consideraciones acerca de los cuatro subcriterios anteriormente mencionados, podemos concluir que los cambios en ellos producidos indican una evolución de la **Inclusividad**, si bien, con todo, por lo que se refiere a los conceptos equivalentes, la evolución no puede ser considerada como buena.

3er Criterio: Relaciones Significativas. Este criterio, a pesar de presentar un aumento en las llamadas relaciones equivalentes, se mostró muy incipiente. Ello viene a indicar que en los mapas conceptuales de los alumnos este criterio no presenta siquiera una razonable evolución.

El desempeño de los alumnos por lo general fue bajo o regular, toda vez que la evolución sólo se produjo de una forma satisfactoria en el primer criterio (selección conceptual). Con todo, no se puede decir que no se haya producido una evolución en los mapas conceptuales de los alumnos después de la intervención.

6.1.4 Consideraciones Conclusivas Específicas de Geometría

Cuestionarios

En la **1ª cuestión** se observa un aumento en las respuestas adecuadas presentadas por los alumnos acerca del ***reconocimiento de algunas propiedades de la Geometría plana***, incluso, asociándolas a los ***seis primeros libros de Euclides***. Junto a ello, se dio también un aumento en las respuestas adecuadas sobre el **contenido de la acción y motivo de la acción**, lo que, conjuntamente, indica que se ha producido un buen desempeño en lo que se refiere a la identificación y comprensión de tales propiedades, lo que representa una buena evolución en su comprensión acerca de ellas.

La caracterización de las formas geométricas **Polígono**, **Cuadrilátero** y **Paralelogramo** investigadas en la **2ª cuestión I**, teniendo en cuenta las propiedades: **figura plana** (P1), **curva cerrada simple constituida por tres o más segmentos** (P2) según sus **elementos: lados, vértices, ángulos y diagonales** (P3), mostró que hubo una evolución en esta caracterización de las tres formas. Sin embargo, cabe destacar que la evolución en la caracterización de los paralelogramos fue mucho mejor que la de los cuadriláteros, y la de estos últimos, a su vez, un poco mejor que las del polígono. Debe señalarse también la excelente evolución de los alumnos al considerar las respuestas adecuadas referidas al contenido de la acción y al motivo de la acción. Con ello, teniendo en cuenta tanto la evolución de las caracterizaciones y de los contenidos y motivos de la acción, se puede afirmar que se llevó a cabo un buen desempeño por parte de los alumnos acerca de la comprensión de tales formas geométricas.

La preocupación con el tipo de interrelación de las formas **Polígono**, **Cuadrilátero** y **Paralelogramo** tratada en la **2ª cuestión II,** presenta al lado de una buena evolución en las respuestas de los alumnos, una también buena evolución en las respuestas adecuadas sobre el **contenido de la acción y el motivo de la acción**. Esto está de acuerdo con la afirmación anterior en la que se habla de una buena comprensión en lo referente a las formas **Polígono**, **Cuadrilátero** y **Paralelogramo**.

La caracterización de las formas geométricas **Cuadrados, Rectángulos** y **Rombos** investigados en la **3ª cuestión I**, teniendo en cuenta las propiedades clásicas de tales formas derivadas de los **Lados, Ángulos y Diagonales,** mostró que se produjo una evolución en dicha caracterización de las tres formas. Sin embargo, cabe destacar que esta evolución, en lo referente a los l**ados,** para su identificación en los **cuadrados** fue mejor que en el caso de los **rombos**, y la de éstos, a su vez, mejor que la de los **rectángulos**. En cuanto a los **ángulos** para su identificación en los **cuadrados,** fue mejor que en la de los **rectángulos, y en** éstos, a su vez, mejor que en los **rombos**. Y, por ultimo, en cuanto a las **diagonales,** los **rectángulos** superan a los **cuadrados**, y en los **rombos** no se produce ninguna referencia. Al lado de ello, se observó un apreciable aumento de las respuestas adecuadas referidas a la caracterización de esas tres formas acerca del **contenido de la acción y motivo de la acción**. De ahí, que, incluso si las caracterizaciones de las propiedades han sido mucho menores que las respuestas adecuadas referidas a los contenidos y motivos de la acción, se puede afirmar que el desempeño de los alumnos acerca de la comprensión de tales formas geométricas evolucionó.

En la comparación del **ítem I** de la **3ª pregunta del cuestionario diagnóstico** con su correspondiente, **ítem III,** del **cuestionario de evaluación del aprendizaje** referente a la relación entre las formas: **cuadrado**, **rectángulo** y **rombo** con **polígono**, **cuadrilátero** y **paralelogramo**, se observa que, a pesar de la casi total ausencia de respuestas adecuadas acerca de tales correspondencias, aparece un razonable aumento de respuestas adecuadas en lo que se refiere al **contenido de la acción y al motivo de la acción**. Por tanto, en cierto modo, se produjo una evolución en la comprensión de los alumnos en lo relativo a la relación entre tales formas.

En la comparación del **ítem II** de la **3ª pregunta del cuestionario diagnóstico** con su correspondiente, **ítem II** del **cuestionario de evaluación del aprendizaje** referido a la relación entre las formas: **cuadrado**, **rectángulo** y **rombo**, se constata que se produjo un aumento en las respuestas adecuadas acerca de tal correspondencia. Ello indica que la comprensión de los alumnos referida a la relación entre tales formas evolucionó bien.

En la **4ª cuestión**, cabe recordar que los ítems (i), (ii) y (iii) se ocupan de dos aspectos: el primero se refiere a la solución del ejercicio en sí; el segundo trata de establecer, a lo largo de la realización de la prueba, las propiedades/proposiciones empleadas para realizarla, a partir de lo cual, se idearon tres posibles situaciones frecuentemente adoptadas en este nivel escolar.

- Por lo que se refiere a las respuestas adecuadas sobre la resolución del ejercicio en sí, aquellas a las que se denominó como completas presentaron una evolución menor que las denominadas incompletas, si bien, conjuntamente, indican que se dio un buen desempeño de los alumnos en el ejercicio en sí.
- Por otro lado, en cuanto a los procedimientos adoptados, se observó que la evolución de la situación III (se admite que el alumno considere los triángulos exteriores al cuadrilátero $PQRS$ como rectángulos escalenos) supera un poco a la de la situación II (se admite que el alumno considere los triángulos externos al cuadrilátero $PQRS$ como si fueran rectángulos isósceles), mientras que la situación I (se admite que el alumno recurra a la proposición que versa sobre la medida de un ángulo raso, y que, a continuación, la relacione con la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo) no fue utilizada por ningún alumno.

Los alumnos presentaron un mejor desempeño acerca del reconocimiento de alguna de las propiedades/proposiciones de la Geometría plana y, de un modo análogo, de algunas características de las formas polígono, cuadrilátero, paralelogramo, rectángulo, cuadrado y rombo. Esto, además de auxiliar en la clasificación y/o conceptualización de tales formas, probablemente, posibilitó también una mejor sistematización de estas idealizaciones Matemáticas en la realización de una demostración por parte de los alumnos.

Mapas Conceptuales

En el 1$^{\underline{er}}$ Criterio: Selección Conceptual, se observa un razonable aumento en la cantidad de los conceptos equivalentes en los mapas de los alumnos, pero, en la comparación de esos conceptos con su media según el instrumento de comparación adoptado, el aumento fue insignificante. Por ello, se juntaron los conceptos equivalentes con los conceptos superiores y, al compararlos nuevamente con la media, se pasa a detectar un razonable aumento. Así, ahora, esta suma pasa a caracterizar el hecho de que en los mapas finales de los alumnos hubo una evolución en la selección conceptual.

El 2$^{\underline{o}}$ Criterio: La Inclusividad, que está constituido por los siguientes cuatro subcriterios: **General**; **Intermedio**; **Horizontalidad** y **Especificidad**; considerados en su conjunto y en se mismo orden, podemos observar que:

- El concepto de Geometría supera a los demás en cuanto que concepto abarcador;
- Los conceptos Intermedios equivalentes en los mapas finales de los alumnos pasan a superar a los conceptos Intermedios equivalentes de sus mapas iniciales;
- En general, los mapas de los alumnos presentaron hasta cuatro niveles de horizontalidad, en los cuales, y con respecto al número de conceptos equivalentes, el nivel 2$^{\underline{o}}$ supera al 1$^{\underline{o}}$, el 1$^{\underline{o}}$ supera al 3$^{\underline{o}}$, y éste, a su vez, supera al 4$^{\underline{o}}$;
- Los conceptos equivalentes adoptados como más específicos pasan a registrar una supremacía con relación a los llamados conceptos inferiores y conceptos superiores.

Por lo que se refiere a este segundo criterio, la evolución en el desempeño de los alumnos sobre él, indica una mejor calificación en sus mapas finales, es decir, en aquellos elaborados al término de la enseñanza.

3$^{\underline{er}}$ Criterio: Relaciones Significativas. Este criterio, pese a presentar un aumento en las llamadas relaciones equivalentes, se mostró apenas incipiente. Esto indica que en los mapas conceptuales de los alumnos este criterio no presenta siquiera una evolución razonable.

La observación de los tres criterios anteriores no llega a contemplar de forma satisfactoria las expectativas pretendidas en este estudio, si bien posibilita la caracterización de que se produjo una evolución en los mapas conceptuales de los alumnos después de la intervención.

6.2 Consideraciones Conclusivas Generales

A lo largo de los Capítulos 2, 3 y 4 se sistematizaron diferentes idealizaciones centradas en el ámbito didáctico y fundamentadas en las teorías de Ausubel (1978), Vergnaud (1990) y Leontiev (1978), dirigidas a la organización de material didáctico (texto de apoyo), considerando el aprendizaje significativo en los campos matemáticos de la Combinatoria, Lógica Matemática, Álgebra y Geometría Euclidiana. El análisis realizado en el Capítulo 5 hizo posible estructurar argumentos que propician el surgimiento de importantes consideraciones acerca de dichas idealizaciones.

Con la intención de presentar las ideas conclusivas de forma clara, se buscó concentrar la exposición de las consideraciones en tres direcciones que se caracterizaron conforme el propósito de cada una de ellas en cuanto que objetivo. La primera tiene como objetivo una concepción que emergió naturalmente de los alumnos y que se refiere a la Matemática en cuanto que forma de conocimiento. En la segunda consideración el foco se encuentra en el uso de los materiales producidos (textos de apoyo); y, en la tercera, el objetivo consiste en reseñar si hubo o no consecuencias debidas al empleo de los materiales, en especial, en la organización de la secuencia didáctica conocida por SDAVL.

- En el desarrollo de las cuatro intervenciones, en los debates que se llevaron a cabo con los alumnos fue posible identificar que ellos poseen una concepción un tanto incompleta respecto del conocimiento matemático. Tal concepción se deriva de una investigación inadecuada y, consecuentemente, de una atribución un tanto ausente acerca de la importancia de la adquisición de: conceptos, proposiciones, leyes, teorías para la comprensión del conocimiento matemático. Esto puede perfectamente comprobarse cuando se observa que cuando refieren sus enseñanzas argumentan que el objetivos de ellas radica en lo que denominan "resolución de problemas", si bien, particularmente, se encuentran más próximos de lo que se conoce como problema-tipo.

En el contexto anterior, fue posible identificar que los alumnos, de forma mucho más acentuada en el caso de la resolución de los cuestionarios diagnósticos que en el de la evaluación del aprendizaje, dejan marcas que indican que llevaron a cabo "la proeza" de memorizar expresiones algebraicas y su empleo para llegar hasta las soluciones a las cuestiones propuestas', según se expone, al final de la fundamentación teórica de esta tesis, por Gangoso (1996).

Por otro lado, se puede observar en las respuestas de los alumnos a los cuestionarios de evaluación del aprendizaje, que se produjo una evolución en su comprensión en la línea del aprendizaje significativo. Tal evolución, entre otros aspectos, coincidiendo con las dos condiciones apuntadas por Gangoso (*ibid.*) deja claro que para que se produzca la adquisición de forma significativa del conocimiento matemático, no diferente de otros, exige del aprendiz una buena base conceptual y de principios.

En virtud de lo expuesto acerca de esta concepción confusa que se dio en los estudiantes que participaron en el presente estudio acerca de la resolución de problemas *vs.* problema-tipo, queda claro que, para contemplar los propósitos educativos marcados en esta tesis doctoral, cuando menos, dichos alumnos precisan modificar sus concepciones Matemáticas acerca de lo que se denomina resolución de problemas.

- Por lo que se refiere al uso de los materiales, se intentó caracterizar básicamente cuál fue el desempeño de los alumnos a partir del mismo. Y, ante la sistematización de las ideas básicas (principios) que fundamentan los campos matemáticos de la

Combinatoria, Lógica Matemática, Álgebra y Geometría Euclidiana, estructuradas según los propósitos educativos enfocados en los Capítulos 2, 3 y 5 se produjeron tanto una profundización como una mejor asociación de tales ideas, aumentando la comprensión de los alumnos sobre ellas. Esto se puede comprobar si hacemos uso de los instrumentos evaluativos construidos en el Capítulo 3 (cuestionarios y mapas conceptuales), que sirvieron de base para el análisis de las respuestas de los alumnos en el Capítulo 6, donde fue posible demostrar que el uso del texto de Combinatoria se sobresale ampliamente sobre los otros tres. Y en cuanto al uso de los otros tres textos relativos a la cualificación entre ellos por lo que respecta a los cuestionarios, en orden decreciente, fueron Geometría, Álgebra y Lógica. Por su parte, en el caso de los mapas conceptuales, el orden decreciente fue: Lógica, Geometría y Álgebra. Por otro lado, merece la pena destacar un comentario: la constatación, en especial a partir de los cuestionarios diagnósticos, de que las concepciones iniciales de los alumnos que formaron parte del presente estudio acerca de los cuatro campos matemáticos (Combinatoria, Lógica Matemática, Álgebra y Geometría), se muestran próximas a las presentadas por alumnos de la *Enseñanza Fundamental* y *Enseñanza Media.*

Hay algunas hipótesis que pueden ayudar a aclarar la variabilidad de los resultados obtenidos en la utilización de los cuatro textos de apoyo mencionados anteriormente. No obstante, con la intención de no hacer excesivamente larga la exposición de tales hipótesis, resolvimos exponerlas en virtud de **tres marcos de dificultades**: la primera, se refiere al material en sí; la segunda, a los profesores que impartieron las intervenciones; y la tercera a los alumnos. Son las siguientes:

1. **La dificultad para tratar con la evolución (sofisticación) del conocimiento específico matemático en sí y con el conocimiento didáctico-pedagógico incorporado a la elaboración de los textos a lo largo del desarrollo de este estudio**. Pues, al principio, los textos se habían estructurado exclusivamente en el ámbito matemático especifico y en la teoría del aprendizaje significativo, y, posteriormente, además del aprendizaje significativo se incorporaron las teorías de los Campos Conceptuales y la Teoría de la Actividad;

2. La apropiación de la sofisticación anterior consolidada en los textos por parte de los profesores que impartieron cada una de las cuatro intervenciones, no se adquirieron adecuadamente de la misma forma por cada uno de ellos;

3. **La dificultad de los alumnos de sistematizar, en un corto período de tiempo (48 horas), incluso cuando se referían a ideas familiares, una gran cantidad de informaciones**. Hablamos de organizar sistemáticamente cuatro campos del conocimiento matemático (Combinatoria, Lógica Matemática, Álgebra y Geometría Euclidiana), cada uno de los cuales con 12 horas de duración.

- Hay un tercer aspecto que también merece ser reseñado. Se trata de la evolución caracterizada a partir de la comparación entre la concepción inicial de los alumnos y la presentada al término de proceso de enseñanza, referida a los cuatro campos del conocimiento matemático de este estudio promovidos por las SDAVL. Se observó que, si se llegase a trabajar de forma cuidadosa en dichos campos, sería posible establecer una buena comprensión de las Matemáticas en este nivel, llegando, incluso, a viabilizar un aprendizaje significativo. Además, se demuestra también que este tipo de aprendizaje puede influenciar de forma adecuada y decisiva muchas ideas Matemáticas en estos mismos niveles o/y en otros más avanzados.

Las ideas que hemos presentado en este estudio, y en particular, en este ultimo capítulo, en lugar de estar centradas en la búsqueda de resultados estadísticos significativos como Barnes y Clawson (1975), entre otros, intentaron de forma exhaustiva mostrar la eficacia de los organizadores previos como estrategia para facilitar el aprendizaje significativo según la cualidad evolutiva de las respuestas de los alumnos en sí. Para una caracterización de la evolución del conocimiento de los alumnos, que ya se trató en el Capítulo 5, creemos que los anexos 1 y 2 que, respectivamente, ofrecen algunos ejemplos de mapas conceptuales y cuestionarios desarrollados por ellos, acaban por corroborar esta dirección.

No se produjo, por cierto, en los cuatro materiales (textos de apoyo) utilizados, una adquisición masiva por parte de los alumnos de los propósitos didácticos subyacentes a los mismos, si bien en todos ellos se dan registros de evolución en la sistematización de las ideas Matemáticas trabajadas. Esto indica que el empleo de dichos materiales propició un mejor desempeño de los alumnos participantes en este estudio acerca de varios aspectos que ya fueron exhaustivamente comentados.

Hay un último aspecto que merece ser destacado: se trata de la concientización que emergió en los alumnos acerca de la importancia de los principios y definiciones/conceptualizaciones para la adquisición y/u organización del conocimiento matemático, pasando a comprender que el conocimiento matemático no se agota en las habilidades técnicas en sí. Puede ser observado también a través de las respuestas dadas a los cuestionarios de evaluación de aprendizajes.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ABBAGNANO, N. (1977). *Diccionario de filosofía*. Santafé de Bogotá: Fondo de Cultura Económica.

ALCALÁ, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Editorial GRAÓ.

ALCÂNTARA MACHADO, S. D. et al. (1999). *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. & GEWANDSZNAJDER, F. (1998). *O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. São Paulo: Pioneira.

ANDRÉ, M. E. D. A. (1998). *Etnografia da prática escolar*. São Paulo: Papirus Editora.

ASBAHR, F. da S. F. (2005). A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade. *Revista Brasileira de Educação*. Belo Horizonte, n. 29, pp. 108-119.

AUSUBEL, D. P. (1960). The use of advance organizers in the learning and retention of meaningful verbal material. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

AUSUBEL, D. P. (1963). *The Psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune and Stratton.

AUSUBEL, D. P. (1968). Educational psychology: a cognitive view. Em: D'Amore, B. *Elementos de didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

AUSUBEL, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Paidós.

AUSUBEL, D. P.; FITZGERALD, D. (1961). The role of discriminability in meaningful verbal learning and retention. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. & HANESIAN, H. (1978). *Educational Psychology:* A Cognitive View. New York: Holt, Rinehart & Winston.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. e HANESIAN, H. (1980). Psicologia educacional. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. e HANESIAN, H. (1992). Psicología Educativa: Un ponto de vista educativa. En: Gangoso, Z. Investigaciones en Resolución de Problemas en Ciencias. *Investigações em Ensino de Ciências*. Brasil, Vol. 4 (2). Site: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>.

BALDIN, Y. Y.; VILLAGRA, G. A. L. (2002). *Atividades com o Cabri-Géomètre II*. São Carlos: EdUFSCar.

BARAIS, A.W. and VERGNAUD, G. (1990). Students' conceptions in physics and mathematics: biases and helps. En: Moreira, M. A.; Greca, I. M. *Sobre cambio conceptuales obstáculos representacionales, modelos mentales, esquemas de asimilación y campos conceptuales*. Porto Alegre: UFRGS.

BARBOSA, J. L. (1997). *Geometría Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro: SBM.

BARDERAS, S. V. (2000). *Didáctica de la Matemática*: El libro de los recursos. Madrid: La Muralla.

BARNES, B. R.; CLAWSON, E. U. (1975). Do advance organizers facilitate learning? Recommendations for further research based on a analysis of 32 studies. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

BASSO, I. S. (1994). As condições subjetivas e objetivas do trabalho docente: um estudo a partir do ensino de história. En: Asbahr, F. da S. F. A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade. *Revista Brasileira de Educação*. Belo Horizonte, n. 29, pp. 108-119.

BASSO, I. S. (1998). Significado e sentido do trabalho docente. Em: Asbahr, F. da S. F. A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade. *Revista Brasileira de Educação.* Belo Horizonte, n. 29, pp. 108-119.

BAULAC, Y.; BELLEMAIN, F.; LABORDE, Jean-Marie. (1998). *Manual do usuário do Cabri-Géomètre*. São Paulo: PUC.

BECKER, F. (2005). Um divisor de águas. *Viver Mente&cérebro,* v. 1, n. 1, pp. 24-33. (Coleção Memória da Pedagogia).

BENÍTEZ, P. R. A. & BRAÑAS, J. R. F. (2001). *En:* Romero S. *Introducción a la Matemática aplicada (Matemática discreta)*. Canarias: Litografía A. (Colección Textos Universitarios).

BIANCHINI, E.; PASCCOLA, H. (1997). *Curso de Matemática*. Vol. 1. São Paulo: Moderna.

BISHOP, A. (1994). Cultural Conflicts in Mathematics: Developing a Research Agenda. *For the Learning of Mathematics*. Dordrecht, v.14, n.2, pp. 15-18.

BITTENCOURT, J. (1996). Informática na Educação? Considerações a partir de um exemplo. *Anais...* 19ª Reunião Anual da ANPed.

BOGDAN, R. C. e BIKLEN, S. K. (1982). Qualitative research for Education. Em: Ludke, M. & André, M. *Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

BOYER, C. B. (1996). *História da Matemática.* São Paulo: Editora Edgard Blucher.

BRANFORD, J. D. (1979). Human cognition, learning, understanding and remembering. Em: D'Amore, B. *Elementos de didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. (2003). *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília: MEC/SEF.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondments et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Récherches en Didactique des Mathématiques*. França, v. 7, n. 2, pp. 33-117.

BROUSSEAU, G. (1989a). La tour de Babel. Em: D'Amore, B. *Elementos de didática da Matemática.* São Paulo: Editora Livraria da Física.

BRUNSCHVICG, L. (1929). 1. Ed. Castellana, 1945 – 3. Ed. Francesa. *Las Etapas de la Filosofía Matemática*. Buenos Aires: Lantauro.

CAMPBELL, D. T.; STANLEY, J. C. (1966). Experimental and quasi-experimental designs for research. En: GOETZ, J. P. & LECOMPTE, M. D. *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Ediciones Morata.

CÂNDIDO, S. L. (2000). Uma experiência sobre o ensino e a aprendizagem de funções. *Educação Matemática em Revista/SBEM.* Consolação - São Paulo, a. 7, n. 8, Jun., pp. 47-56.

CARAÇA, B. J. (1970). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Fotogravura Nacional Ltda.

CARVALHO, D. C. (2002). A psicologia frente à educação e o trabalho docente. *Psicologia em Estudo*. Maringá, v.7, n.1, jan./jun, pp. 51-60.

CASSOL, A. (1999). Desafios: Uma estratégia para ensinar e aprender. *Educação Matemática em Revista***.** Rio Grande do Sul, n. 1, jan./jun, pp. 17-22.

CHAUI, M. H. (1997). *Convite à Filosofia*. São Paulo: Ática.

CHEVALLARD, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. En: D'Amore, B. *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: EDOTORIAL REVERTÉ.

CHEVALLARD, Y. (1992). Conceptes foundamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Récherches en Didactique des Mathématiques*. v.12, n.1, pp. 73-112.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. e GASCÓN, J. (2001). *Estudar Matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed.

COOK, T. D.; CAMPBELL, D. T. (1979). Quasi-experimentation: Design and analysis issues for field settings. En: GOETZ, J. P. & LECOMPTE, M. D. *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Ediciones Morata.

COPI, I. (1972). *Introdução à Lógica*. Rio de Janeiro: Zahar.

COREY, S. (1953). Action Research to Improve School Practices. Em: André, M. E. D. A. *Etnografia da prática escolar*. São Paulo: Papirus Editora.

CORNU, L.; VERGNIOUX, A. (1992). La didactique en questions. Em: D'Amore, B. *Elementos de didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

COXFOR, A.; SHULTE, A. P. (1995). *As idéias da Álgebra*. São Paulo: Atual.

D'AMORE, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: EDOTORIAL REVERTÉ.

D'AMORE, B. (2007). *Elementos de didática da Matemática.* São Paulo: Editora Livraria da Física.

D'AMBROSIO, U. (1993). EtnoMatemática: Um programa, *A Educação Matemática em Revist***a**, SBEM. v. 1, n.1, pp. 5-11.

DAVIDOFF. L. (1983). *Introdução à Psicologia*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil.

DAVIDOV, V. (1988). La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica experimental. Em: Asbahr, F. da S. F. A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade. *Revista Brasileira de Educação.* Belo Horizonte, n. 29, p. 108-119.

DAVIS, C. (2005). PIAGET ou VYGOTSKY uma falsa questão. *Viver Mente&cérebro*, v. 2, n. 2, pp. 38-49. (Coleção Memória da Pedagogia).

DAVIS, P. J. & HERSH, R. (1985). *A Experiência Matemática.* Rio de Janeiro: Francisco Alves.

DE OLIVEIRA, Z. M. D. (1987). *A sentença Condicional na Linguagem Ordinária:* um estudo exploratório. Recife, PE-Brasil. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco.

DEWEY, J. (1959). Democracia e educação. Em: Carvalho, D. C. (2002). A psicologia frente à educação e o trabalho docente. *Psicologia em Estudo*. Maringá, vol.7, n.1, jan./jun, pp. 51-60.

DIEUDONNÉ, J. (1990). *A Formação da Matemática Contemporânea.* Lisboa: Dom Quixote.

DUARTE, N. (2005). O significado e o sentido. *Viver Mente&cérebro*, v. 2, n. 2, pp. 30-37. (Coleção Memória da Pedagogia)

DUVAL, R. (1998). Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentation et objet. Em: D'Amore, B. *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática***.** Barcelona: EDOTORIAL REVERTÉ.

EGGEN, P. D.; KAUCHAK, D. P.; HARDER, R. S. (1979). *Strategies for teachers.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

ELIOTT, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación*. Madrid: Ediciones Morata.

FEYERABEND, P. (1977). *Contra o método.* Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves.

FORMAN, E.; CAZDEN, C. (1988). Exploring Vygotskian perspectives in education: The cognitive value of peer interaction. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus.

FORMAN, E. (1989) The role of peer interaction in the social construction of the mathematical knowledge. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus.

FRANCHI, A. (1999). Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. Em: Alcântara Machado, S. D. et al. *Educação Matemática:* uma introdução. São Paulo: EDUC, pp. 155-195.

GAGNÉ (1965-1985). The conditions of learning. Em: D'Amore, B. *Elementos de didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

GANGOZO, Z. (1999). Investigaciones en Resolución de Problemas en Ciencias. *Investigações em Ensino de Ciências*. Brasil, v. 4 (1). Site: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>.

GOETZ, J. P. & LECOMPTE, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Ediciones Morata.

GOMES, A. (1995). *Concepções e representação de relações entre quantidades.* Recife, PE-Brasil. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco.

GOWIN, D. B. (1981). Educating. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula.* Brasília: Editora Universidade de Brasília.

GOWIN, D. B. (1981). *Educating*. Ithaca, N. Y.: Cornell University Press.

GRABER, R. A.; MEANS, R.; JOHNSTEN, T. D. (1972). The effect of subsuming concepts on student achievement on unfamiliar science learning material. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

GRECA, I.; MOREIRA, M. A. (2000). Conceptos: Naturaleza y Adquisición. *Texto de Apoyo Nº 19 del Programa Internacional de Doctorado em Enseñanza de las Ciências*. Universidad de Burgos, España.

GUBA, E. G. & LINCOLN, Y. S. (1989). Forth generation evaluation. Em: ALVES-MAZZOTTI, A. J. & GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa.* São Paulo: Pioneira.

GUBA, E. G. (1990). Foreword. Em: Alves-Mazzotti, A. J. & Gewandsznajder, F. *O método nas Ciências Naturais e Sociais*: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. São Paulo: Pioneira.

GUBA, E. G. (1990). The alternative paradigm dialog. En: Alves-Mazzotti, A. J. & Gewandsznajder, F. *O método nas Ciências Naturais e Sociais:* Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. São Paulo: Pioneira.

GUNDLACH, B. H. (1992). *Tópicos de Historia da Matemática para uso em sala de aula: Números e Numerais*. São Paulo: Atual.

HAZZAN, S. (1993). *Fundamentos de Matemática elementar, 5: Combinatoria, probabilidade, exercícios resolvidos, exercícios propostos com respostas, testes de vestibular com respostas*. São Paulo: Atual.

HENRIQUES, A. (2000). Papel e lápis x Cabri-Géomètre II: O caso do teorema de superfícies lunares. *Educação Matemática em Revista/SBEM.* Consolação – São Paulo, a. 7, n. 8, Jun., pp. 62-67.

IFRAH, G. (1985). *Os Números: a história de uma grande invenção*. São Paulo: Globo.

JOSEPH, G. G. (1996). *La Cresta del Pavo Real - las Matemáticas e sus raíces no europeas*. Madrid: Pirámide.

KAHLE, J. B.; NORDLAND, F. J. (1975). The effect of an advanced organizer when utilized with carefully sequenced audiotutorial units. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

KEMMIS, S. y McTAGGART, R. (1988). *Cómo planificar investigación-acción.* Barcelona: Laertes.

KEMMIS, S. y McTAGGART, R. (1988). Cómo planificar investigación-acción. En: Rodríguez, G., Gil, J. & Garcia, E. *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Algibe.

KEMMIS, S. y McTAGGART, R. (1988). Cómo planificar investigación-acción. En: Moreira, M. A. *Investigación en educación en ciencias*: métodos cualitativos. *Actas del PIDEC*: Textos de Apoio do Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidade de Burgos (Espanha) – Universidade Federal do Rio Grande do sul (Brasil). v. 4. Porto Alegre: UFRGS.

KHUN, T. S. (1977). The essential tension. Chicago: University of Chicago Press. Em: Alves-Mazzotti, A. J. & Gewandsznajder, F. *O método nas Ciências Naturais e Sociais*: *Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. São Paulo: Pioneira.

KHUN, T. S. (2003). *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo: Perspectiva.

KOZULIN, A. (2002). O conceito de atividade na psicologia soviética: Vygotsky, seus discípulos, seus críticos. Em: Asbahr, F. da S. F. A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade. *Revista Brasileira de Educação*. Belo Horizonte, n. 29, pp. 108-119.

LABORD, C. et. al. (2001). Géométrie avec Cabri: scénarios pour lê lycée. *CRDP* de l' Académic de Grenoble.

LAKATOS, I. (1978). *The methodology of scientific research programmers.* Cambridge: Cambridge University Press.

LAWTON, J. T.; WANSKA, S. K. (1977). Advance organizers as a teaching strategy: a reply to Barnes and Clawson. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

LEBLANC, H.; MORA, J. F. (1992). *Lógica Matemática*. México: Fondo de Cultura Económica.

LEONTIEV, A. N. (1978a). Activity, consciousness, and personality. New jersey: Prentice-Hall.

LEONTIEV, A. N. (1978a). Activity, consciousness, and personality. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus.

LEONTIEV, A. (1978b). *O Desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Livros Horizonte.

LEONTIEV, A. (1978b). O Desenvolvimento do psiquismo. Em: Rosseler, J. H. (2004). *Cadernos CEDS***.** Campinas, v. 24, n. 62, abr., p. 100-116.

LEONTIEV, A. (1978b). O Desenvolvimento do psiquismo. Em: Duarte, N. O significado e o sentido. *Viver Mente&cérebro*, v. 2, n. 2, pp. 30-37. (Coleção Memória da Pedagogia).

LEONTIEV, A. (1983). Actividad, conciencia y personalidad. Em: Asbahr, F. da S. F. A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade. *Revista Brasileira de Educação*. Belo Horizonte, n. 29, pp. 108-119.

LEONTIEV, A. N. (1989). The problem of the activity in the history of soviet psychology. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus.

LESH, R. A.; JOHNSON, J. (1976). Models and applications as advanced organizers. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula.* Brasília: Editora Universidade de Brasília.

LÉVY, P. (1990). *Lês tecnologies de l'avenir de la pensée à l'ère informatique.* Paris: Éditions la Découverte.

LIMA, E. L. (1991). *Meu professor de Matemática e outras histórias.* Rio de Janeiro: IMPA/VITAE.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E. e MORGADO, A. C. (1998). **A** *Matemática do Ensino Médio.* 1 vol. Rio de Janeiro: SBM.

LUDKE, M. & ANDRÉ, M. (1986). *Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

LUITEN, J.; AMES, W.; ACKERSON, G. (1980). A meta-analysis of the effects of advance organizers on learning and retention. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

MACHADO, N. J. (2001). *Matemática e Realidade*. São Paulo: Cortez.

MARX, K. (1989). Manuscritos econômico-filosóficos. Em: Asbahr, F. da S. F. A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade. *Revista Brasileira de Educação.* Belo Horizonte, n. 29, pp. 108-119.

MAYER, R. E. (1979). Can advance organizers influence meaningful learning? Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula.* Brasília: Editora Universidade de Brasília.

MERAYO, F. (2001). *Matemática Discreta*. Madrid: Paraninfo.

MORA, J.; LEBLANC, H. (1992). *Lógica Matemática*. México: Fondo de Cultura Económica, S. A. de C. V.

MORATI, C. A. (2001). *Introdução à Lógica.* São Paulo: Editora UNESP.

MOREIRA, M. A. (1999). *Teorias de Aprendizagem.* São Paulo: EPU.

MOREIRA, M. A. (2000). *Aprendizaje significativo: teoría y práctica.* Madrid: Visor.

MOREIRA, M. A. (2002). Investigación en educación en ciencias: métodos cualitativos. *Actas del PIDEC*: Textos de Apoio do Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidade de Burgos (Espanha) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Brasil). v. 4. Porto Alegre: UFRGS.

MOREIRA, M. A. (2004). *A Teoria dos campos conceituais de Vergnaud*: o ensino de ciências nesta área. Porto Alegre: UFRGS.

MOREIRA, M. A. (2005). *Aprendizagem significativa crítica*. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS.

MOREIRA, M. A. (2006). *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

MOREIRA, M. A.; BUCHWEITZ, B. (1987). *Mapas Conceituais*: Instrumentos Didáticos de Avaliação e de Analise de Currículo. São Paulo: Editora Moraes.

MOREIRA, M. A.; BUCHWEITZ, B. (1993). *Novas estratégias de ensino e aprendizagem: os mapas conceituais e o Vê epistemológico*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

MOREIRA, M. A.; GRECA, I. M. (2004). *Sobre cambio conceptuales obstáculos representacionales, modelos mentales, esquemas de asimilación y campos conceptuales*. Porto Alegre: UFRGS.

MOREIRA, M. A.; SOUSA, C. M. S. G.; SILVEIRA, F. L. (1982). Organizadores prévios como estratégia para facilitar a aprendizagem significativa. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula.* Brasília: Editora Universidade de Brasília.

MORGADO, A. C. O.; DE CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. (1991). *Análise Combinatoria e Probabilidade*. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE.

MOYSÉS, L. M. M. (2004). *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus.

NOLT, J. e ROHATYN, D. (1991). *Lógica.* São Paulo: McGraw-Hill do Brasil.

NOVAK, J. & GOWIN, D. (1996). *Aprendiendo a aprender*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

NOVAK, J. (1981). Uma teoria de educação. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula.* Brasília: Editora Universidade de Brasília.

NOVAK, J. (1981). *Uma teoria de educação.* São Paulo: Pioneira.

NOVAK, J. D. & GOWING, D. B. (1984). *Learning how to learning*. Cambridge: Cambridge University Press.

PASSOS, C. L. A Importância da Visualização em Situações Práticas de Resolução de Problemas Geométricos. *Anais...* VIII Encontro Brasileiro de Educação Matemática (VIII ENEM) – São Leopoldo, RS, 1998.

PASTOR, J. R. y BALBINI, J. (2000). *Historia de la Matemática.* v. 1. Barcelona: Gedisa.

PEREIRA, P. C. (1998). *Filosofia para Crianças*: *A Competência na Resolução de Problemas Lógicos em Contexto Escolar*. Recife, PE-Brasil. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco.

PIAGET, J.; INHELDER, B. (1970). *Gênese das estruturas Lógicas elementares*. Rio de Janeiro: Zahar.

PIMM, D. (1990). El lenguaje matemático en el aula. En: Alcalá, M. *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Editorial GRAÓ.

PINO, A. (2005). Cultura e Desenvolvimento Humano. *Viver Mente&cérebro*, v. 2, n. 2, pp. 14-21. (Coleção Memória da Pedagogia).

POSTMAN, N. & WEINGARTNER, C. (1969). Teaching as a subversive activity. Em: Moreira, M. A. *Aprendizagem significativa crítica*. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS.

RÍBINIKOV, K. (1991). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Librería Rubiños.

RICKARDS, J. P. (1975-1976). Processing effects of advance organizers interspersed in text. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

RIVINA, I. (1991). L'organization dês activités em commun et lê développement cognitif dês jeunes élèves. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus.

RODRÍGUEZ, G., GIL, J. & GARCIA, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Archidona/Málaga: Ediciones Algibe.

RONAN, C. (2001). *História Ilustrada da Ciência da Universidade de Cambridge.* v. 1. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed.

RONCA, A. C. C. (1976). O efeito de organizadores prévios na aprendizagem significativa de textos didáticos. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

ROSSELER, J. H. (2004). *Cadernos CEDS***.** Campinas, vol. 24, n. 62, abril, pp. 100-116.

RUBTSOV, V. (1991a). Activité d'aprentissage et problèmes de formation de la pensée. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática.* Campinas, SP: Papirus.

RUBTSOV, V. (1991b). Activité en commun et acqisition de concepts théoriques par les écoliers sur le matériel de physique. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus.

RUBTSOV, V. (1989). Organization of joint actions as a factor of child psychological development. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus.

RUBTSOV, V.; GUZMAN, R. Ya. (1984-1985). Psychological characteristics of the methods pupils use to organize joint activity in dealing with a school task. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus.

SANGIACOMO, L. et al. (1999). *Explorando Geometría Elementar com o dinamismo do Cabri-Géomètre*. São Paulo: PROEM.

SANTOS, J., MELLO, M.; MURARE, I. (1995). *Introdução à Análise Combinatoria.* São Paulo: editora da UNICAMP.

SAXE, G. B. (1992). Studying children's learning in context: Problems and prospects. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática.* Campinas, SP: Papirus.

SCHENFELD, A. H. (1989). Ideas in the air: Speculations on small group learning, environmental and cultural influence on cognition, and epistemology. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; CARRAHER, T. N. (1988). *Na Vida Dez, na Escola Zero.* São Paulo: Cortez.

SERRANO, G. P. (1998). Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. Em: Moreira, M. A. Investigación en educación en ciencias: métodos cualitativos. *Actas del PIDEC*: Textos de Apoio do Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidade de Burgos (Espanha) – Universidade Federal do Rio Grande do sul (Brasil). Vol. 4. Porto Alegre: UFRGS.

SILVA, J. R. y FALCÃO, J. M. (2004). Uso do Cabri-Géomètre para o Ensino do Conceito de Função. *VIII Nacional de Educação Matemática:* Um Compromisso Social (VIII ENEM). UFPE, Recife – PE (Brasil), 15-18 de jun.

SILVA, J. R. y LIRA, C. M. (2004). Conectivos Lógicos Condicionais: O uso de se ... então ... na Construção das idéias Matemáticas. *VIII Nacional de Educação Matemática*: Um Compromisso Social (VIII ENEM). UFPE, Recife – PE (Brasil), 15-18 de jun.

SILVA, J. R. y RODRIGUES, H. (2006). Aquisição dos Conceitos de Quadrado, Retângulo e Losango. *VI Pernambucano de Educação Matemática (VI EPEM).* FAFICA, Caruaru – PE (Brasil), 02-04 de novembro.

SILVA, J. R. y RODRIGUES, H. (2007). Aprendizagem significativa de Matemática a partir da Geometría euclidiana plana. *I Encuentro Nacional Sobre La Enseñanza De La Matemática (I ENEM).* FUNIVEMP, Tandil – Buenos Aires (Argentina), 11-13 de abr.

SILVA, J. R. y RUFINO, M. A. (2004). Resignificando o compreender e o fazer Matemático a partir de Equívocos/Distorções no Campo da Combinatoria. *VIII Nacional de Educação Matemática:* Um Compromisso Social (VIII ENEM). UFPE, Recife – PE (Brasil), 15-18 de jun.

SILVA, J. R.; FALCÃO, J. M. y MOREIRA, M. A. (2007). O uso de Cabri-Géomètre para Conceituar Função Linear. *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (XII CIAEM).* Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro "Andrés Balvanera", Santiago del Querétaro (México), 15-18 de jul.

SILVA, J. R.; RUFINO, M. A. y LIRA, C. M. (2007). Aprendizagem Significativa: Alusão à Lógica Matemática. *IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática (IV CIEM).* ULBRA, Canoas – RS (Brasil), 25-27 de outubro.

SILVA, J. R.; RUFINO, M. A. y MOREIRA, M. A. (2007). Alusão a Combinatoria a partir dos Princípios Aditivo e Multiplicativo. *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (XII CIAEM).* Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro "Andrés Balvanera", Santiago del Querétaro (México), 15-18 de jul.

SMOLE, K. S. (2005). Novos óculos para a aprendizagem Matemática. *Viver Mente&cérebro*, v. 1, n. 1, pp. 34-41. (Coleção Memória da Pedagogia).

SOUSA, C. M. S. G. (1980). Pseudo-organizadores prévios como recursos instrucionais no Ensino da física. En: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

STAKE, R. (1988). Investigación con estudio de casos. Em: André, M. E. D. A. *Etnografia da prática escolar.* São Paulo: Papirus Editora.

STAKE, R. S. (1995). The Art of Case Study Research. En: Rodríguez, G., Gil, J. & Garcia, E. *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Algibe, 1996.

STENHOUSE (1985). Case study methods. En: Moreira, M. A. *Investigación en educación en ciencias*: métodos cualitativos. Actas del PIDEC: Textos de Apoio do Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidade de Burgos (Espanha) – Universidade Federal do Rio Grande do sul (Brasil). v. 4. Porto Alegre: UFRGS.

STURMAN, A. (1988). Case study methods. En: Moreira, M. A. Investigación en educación en ciencias: métodos cualitativos. *Actas del PIDEC*: Textos de Apoio do Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidade de Burgos (Espanha) – Universidade Federal do Rio Grande do sul (Brasil). v. 4. Porto Alegre: UFRGS.

TAILLE, Y.; OLIVEIRA, M. K.; DANTAS, H. (1992). *Piaget, Vygotsky, Wallon*: teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Summus.

TINOCO, Lucia A. de A. (1989). Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade. *Revista do Professor de Matemática/SBM,* nº 14, pp. 8 – 16.

USISKIN, Z. (1988). Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilização das variáveis. Em: Coxford, A. F.; Shulte, A. P. (1995). *As idéias da Álgebra*. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, pp. 9-22.

VALENTE, J. A. (1993). *Computadores e Conhecimento*: Repensando a Educação. Campinas: UNICAMP.

VALENTE, J. A. (2004). *A Telepresença na formação de Professores da Área de Informática em Educação*. Implantando o construcionismo contextualizado. – NIED – UNICAMP – BRASIL. Site: <http://www.proinfo.gov.br/site/biblioteca.>.

VAN FRAASSEN, Bas C. (1980). The scientific image. En: Alves-Mazzotti, A. J. & Gewandsznajder, F. *O método nas Ciências Naturais e Sociais:* Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. São Paulo: Pioneira.

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative structures. In: Lesh, R. and Landau, M. (Ed.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* New York: Academic Press Inc. pp. 127-174.

VERGNAUD, G. (1984). In teractions sujet-situations. Em: D'Amore, B. *Elementos de didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

VERGNAUD, G. (1990a). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 10, n 23, pp. 133-170.

VERGNAUD, G. (1990b). La théorie des champs conceptuels. En: D'Amore, B. *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: EDOTORIAL REVERTÉ.

VERGNAUD, G. (1990c). La Théorie des champs conceptuels. Em: D'Amore, B. *Elementos de didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

VERGNAUD, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. Em: Nasser, L. (Ed.) *Anais*... 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. pp. 1-26.

VERGNAUD, G. (1996a). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas,* v. 26, n. 10, pp. 195-207.

VERGNAUD, G. (1996b). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. En: Moreira, M. A.; Greca, I. M. *Sobre cambio conceptuales obstáculos representacionales, modelos mentales, esquemas de asimilación y campos conceptuales*. Porto Alegre: UFRGS.

VERGNAUD, G. ; HOLBWACHS, F. ; ROUCHIER, A. (1977). Structure de la matière enseignée, histoire des scences et développment conceptuel chez l´élève. Em: D'Amore, B. *Elementos de didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

VERGNAUD, G. (1985). II campo concepttuale delle strutture motiplicative e i numeri razionali. En: D'Amore, B. *Elementos de didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

VERGNAUD, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? Em: Moreira, M. A. *A Teoria dos campos conceituais de Vergnaud:* o ensino de ciências nesta área. Porto Alegre: UFRGS.

VERGNAUD, G. Problemas Aditivos y Multiplicativos. En: España. Ministerio de Educación y Deporte. (2004). *Colección Aulas de Verano: Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas. Salamanca: Secretaria General e Técnica*, pp. 189-228.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. (2006). *Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas*. Porto Alegre: Artmed.

VINCENTINI, M. M. (1983). Conoscenza scientifica e conoscenza comune. Em: D'Amore, B. *Elementos de didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

VYGOTSKY, L. S. (1987). *Pensamento e linguagem.* São Paulo: Martins Fontes.

VYGOTSKY, L. S. (1987). Pensamento e linguagem. São Paulo: Martins Fontes. Em: Moysés, L. M. M. *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática.* Campinas, SP: Papirus.

VYGOTSKI, L. S. (1988). Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. Em: Asbahr, F. da S. F. A pesquisa sobre a atividade pedagógica: contribuições da teoria da atividade. *Revista Brasileira de Educação*. Belo Horizonte, n. 29, pp. 108-119.

VYGOTSKY, L. S. (1990). Imagination and creativity in childhood. Em: Moysés, L. M. M. (2004). *Aplicações de Vygotsky à educação Matemática.* Campinas, SP: Papirus.

VYGOTSKY, L. S. (1991). Pensamento e Linguagem. Em: Pereira, P. C. *Filosofia para Crianças*: *A Competência na Resolução de Problemas Lógicos em Contexto Escolar*. Recife, PE-Brasil. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco.

WAGNER, E.; CARNEIRO, J. P. (1993). *Construções Geométricas.* Rio de Janeiro: IMPA/VITAE.

WASON, P. C. (1977). Razonamiento sobre una regla. En: Delval, J. A. (org.) *Investigaciones sobre lógica y psicología.* Madrid: Alianza Editorial, pp. 149-163.

WILLERMAN, M.; HARG, R. A. A. (1991). The concept map as an advance organizer. Em: Moreira, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e suas implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

WILLERMAN, M.; HARG, R. A. A. (1991). The concept map as an advance organizer. *Journal of Research in Science Teaching,* v. 28, n.8, pp. 705-711.

WITTGENSTEIN, L. (1996). *Investigações Filosóficas.* São Paulo: Editora Nova Cultura.

ANEXOS

ANEXOS A
EJEMPLARES DE MAPAS CONCEPTUALES DE LOS ALUMNOS

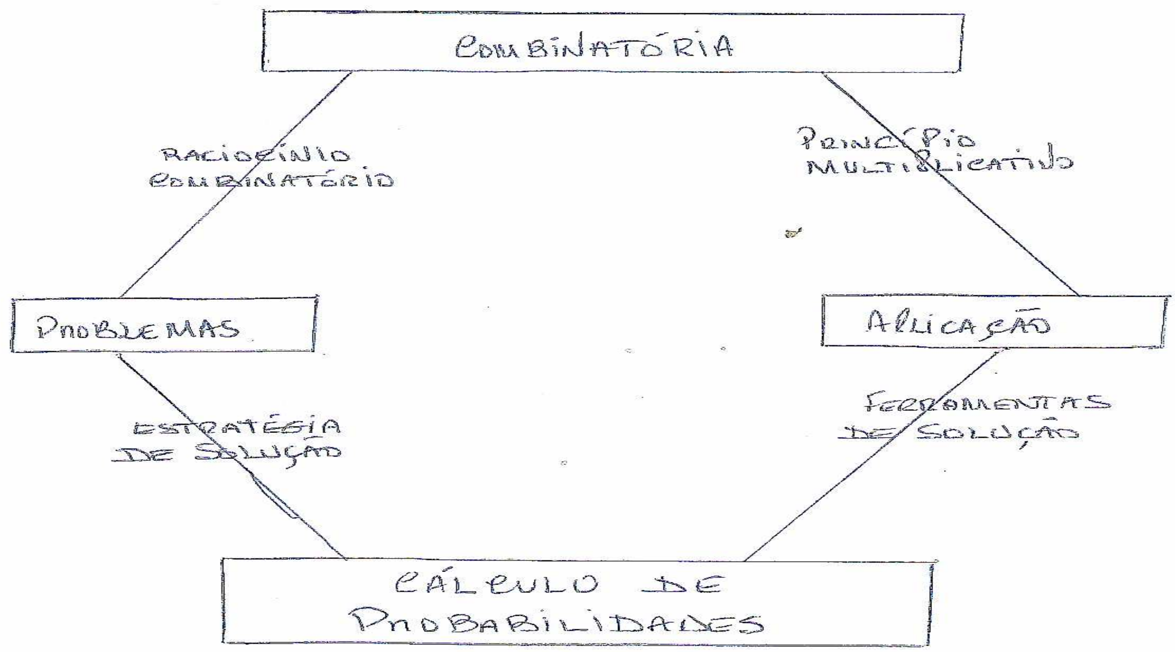


Figura 46: Alumno 11 - Mapa Conceptual de Combinatoria (Inicial)

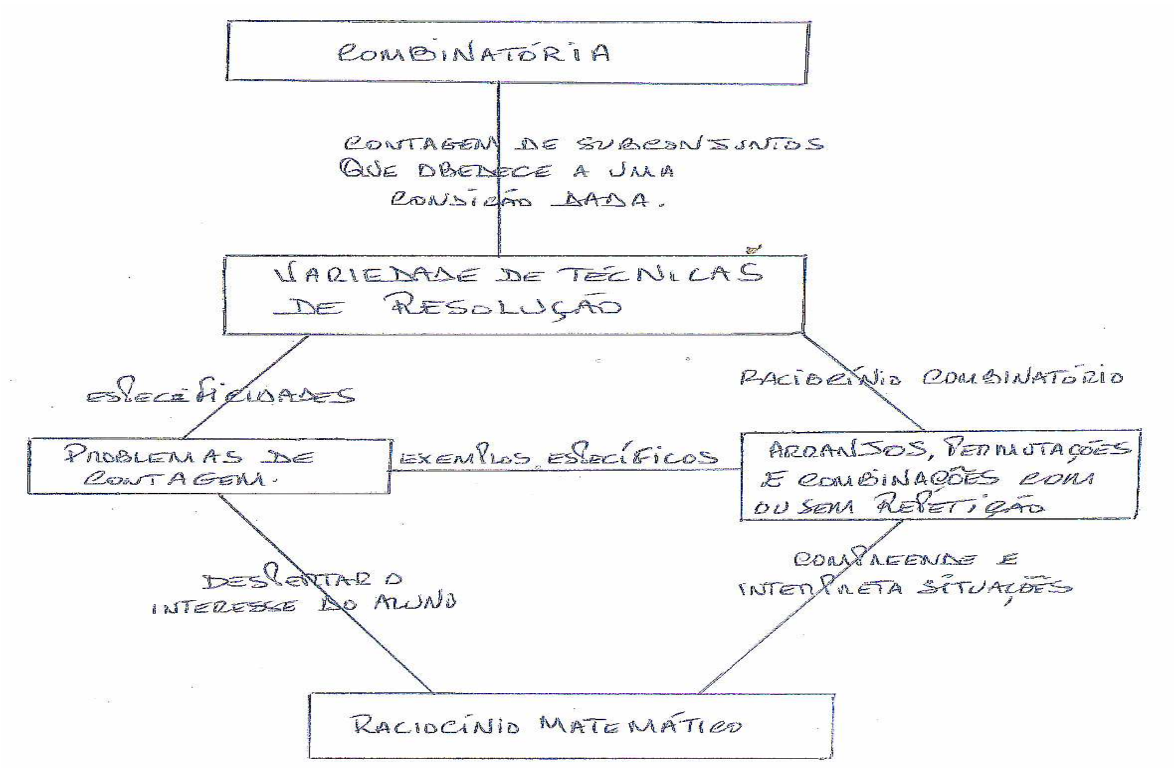


Figura 47: Alumno 11 - Mapa Conceptual de Combinatoria (Final)

Evolución Regular

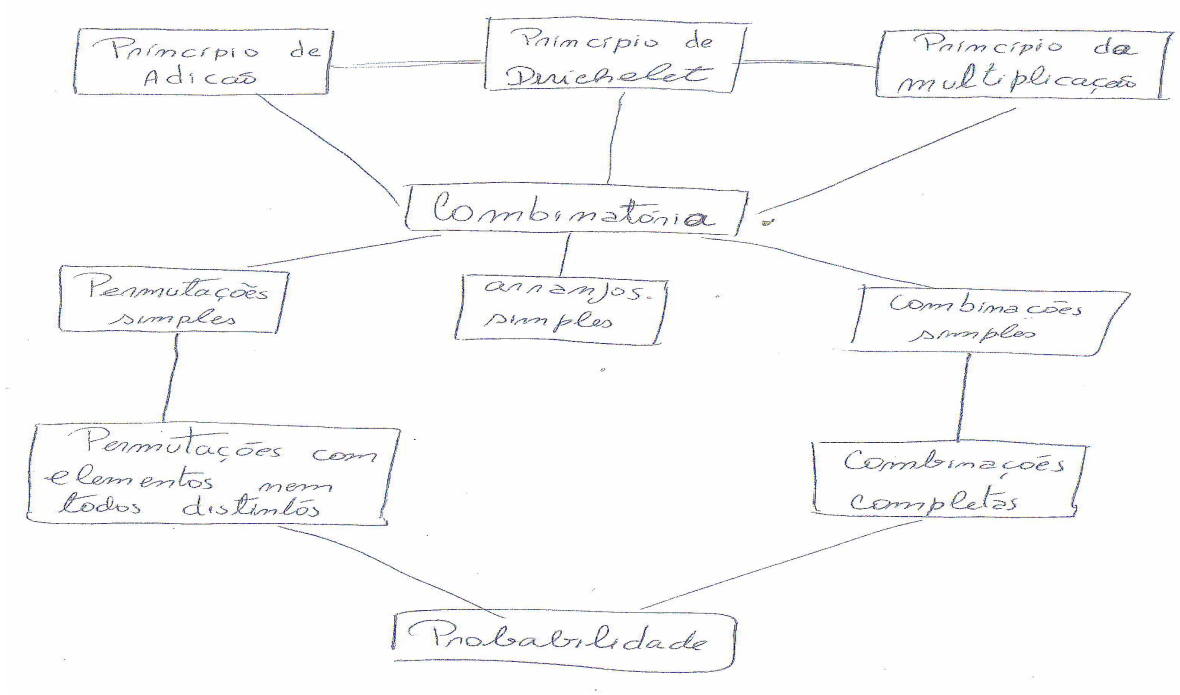


Figura 48: Alumno 08 - Mapa Conceptual de Combinatoria (Inicial)

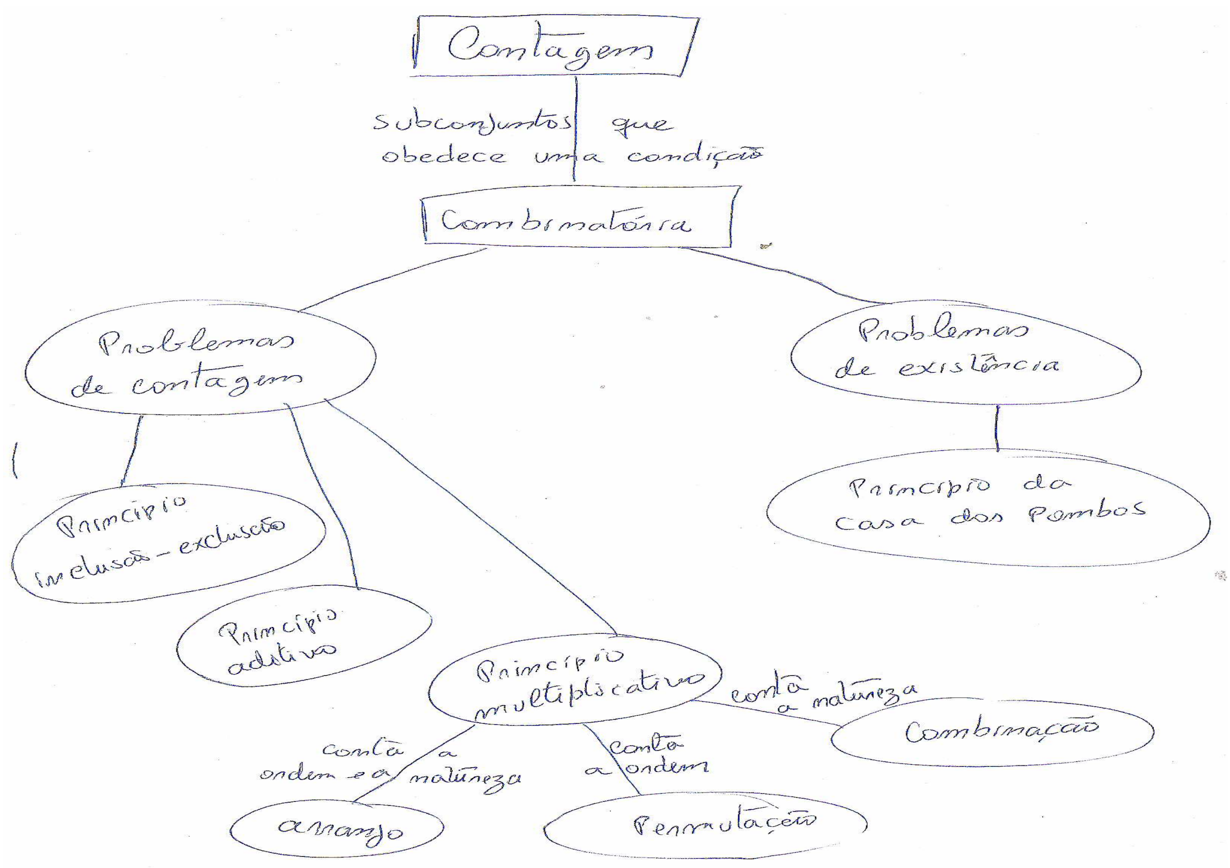


Figura 49: Alumno 08 - Mapa Conceptual de Combinatoria (Final)

Evolución Buena

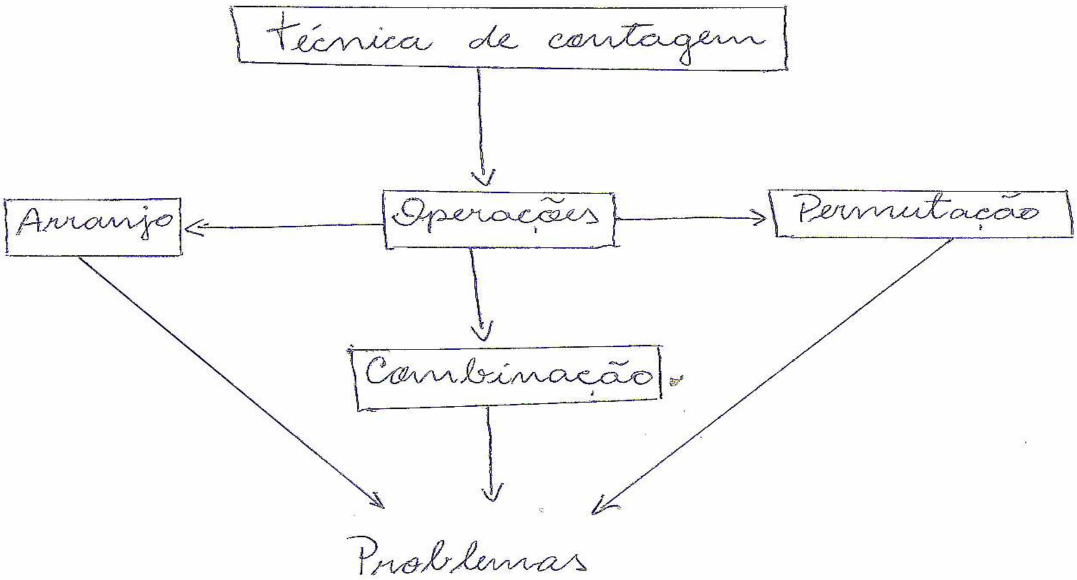


Figura 50: Alumno 30 - Mapa Conceptual de Combinatoria (Inicial)

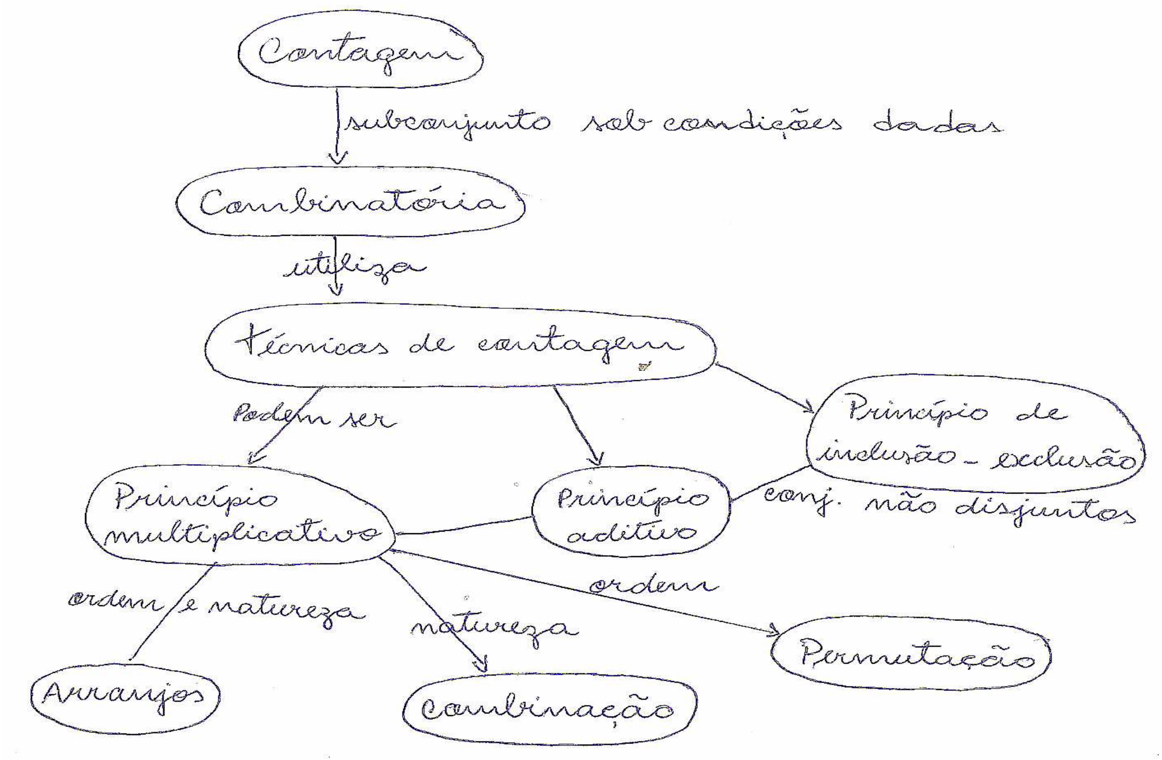


Figura 51: Alumno 30 - Mapa Conceptual de Combinatoria (Final)

A. 2 Mapas Conceptuales de Lógica

Evolución Débil

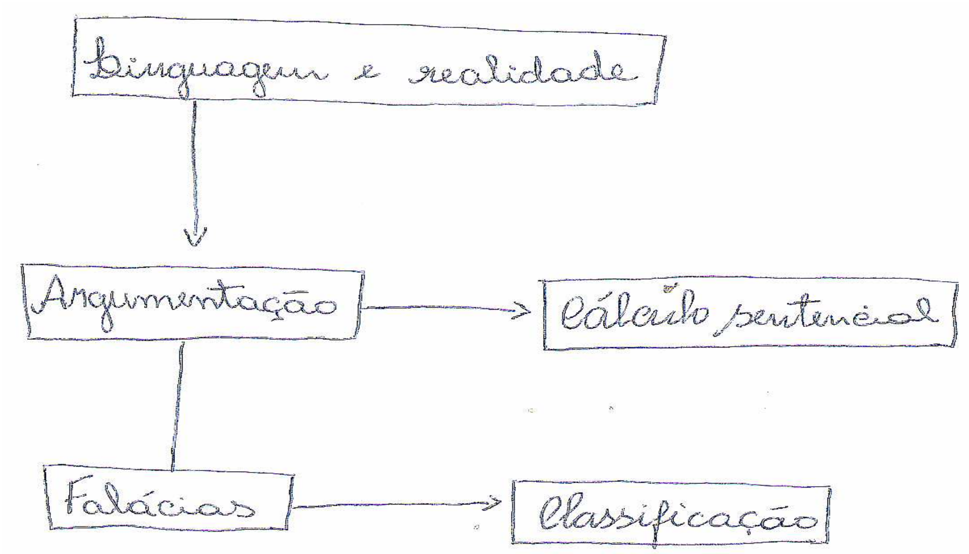


Figura 52: Alumno 30 - Mapa Conceptual de Lógica (Inicial)

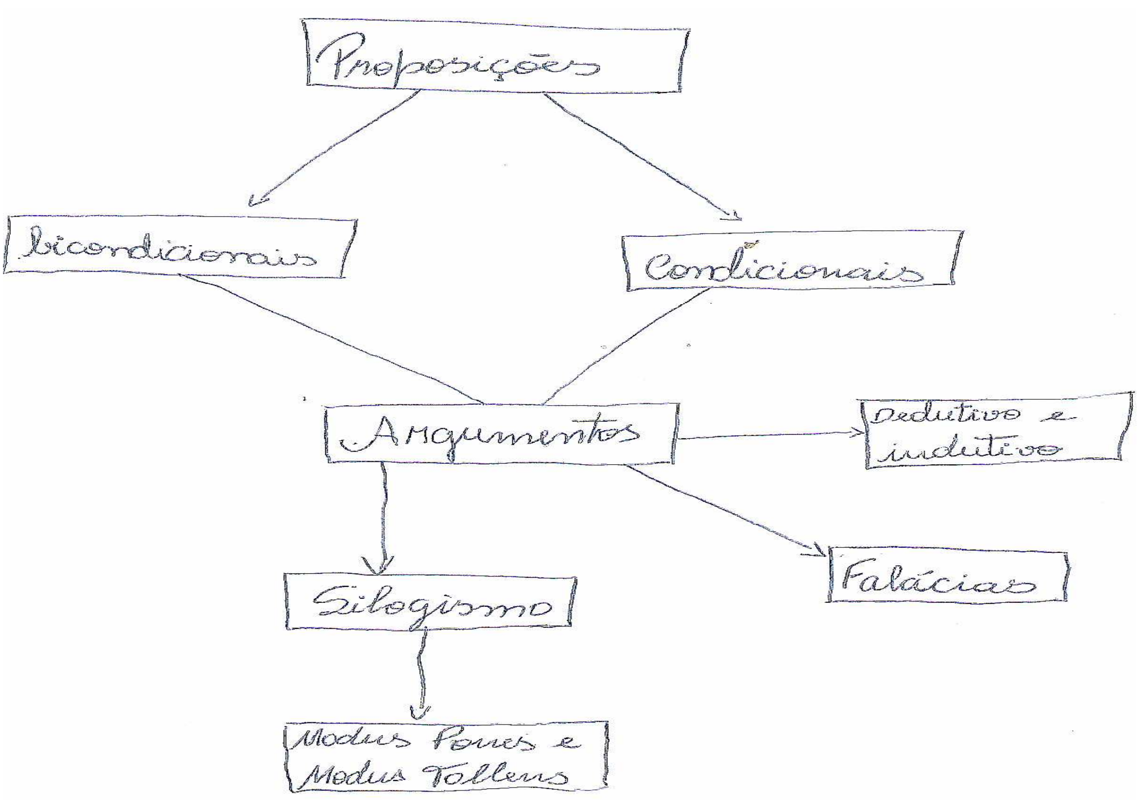


Figura 53: Alumno 30 - Mapa Conceptual de Lógica (Final)

Evolución Regular

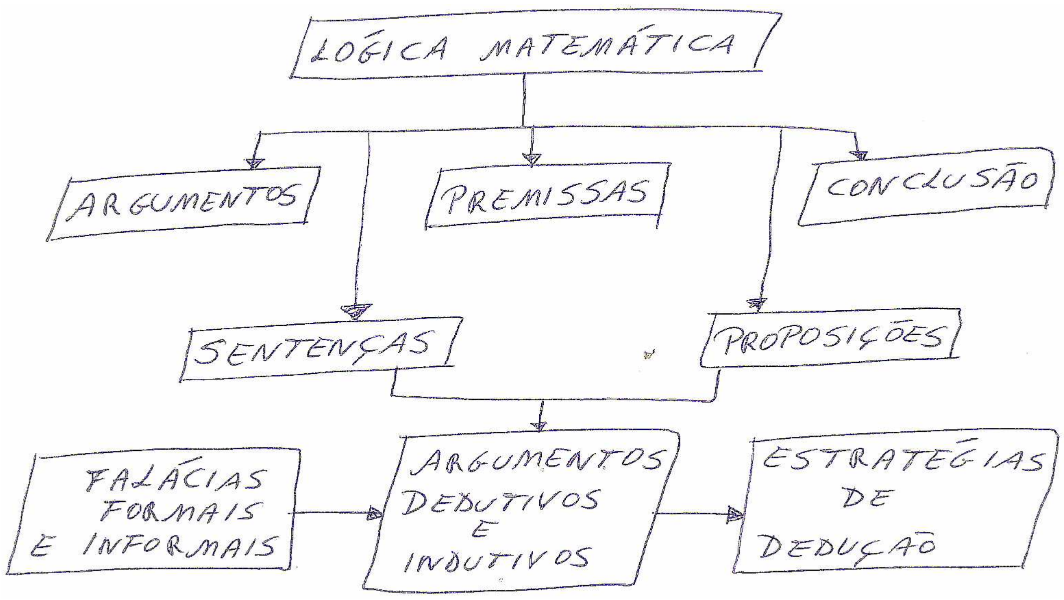


Figura 54: Alumno 01 - Mapa Conceptual de Lógica (Inicial)

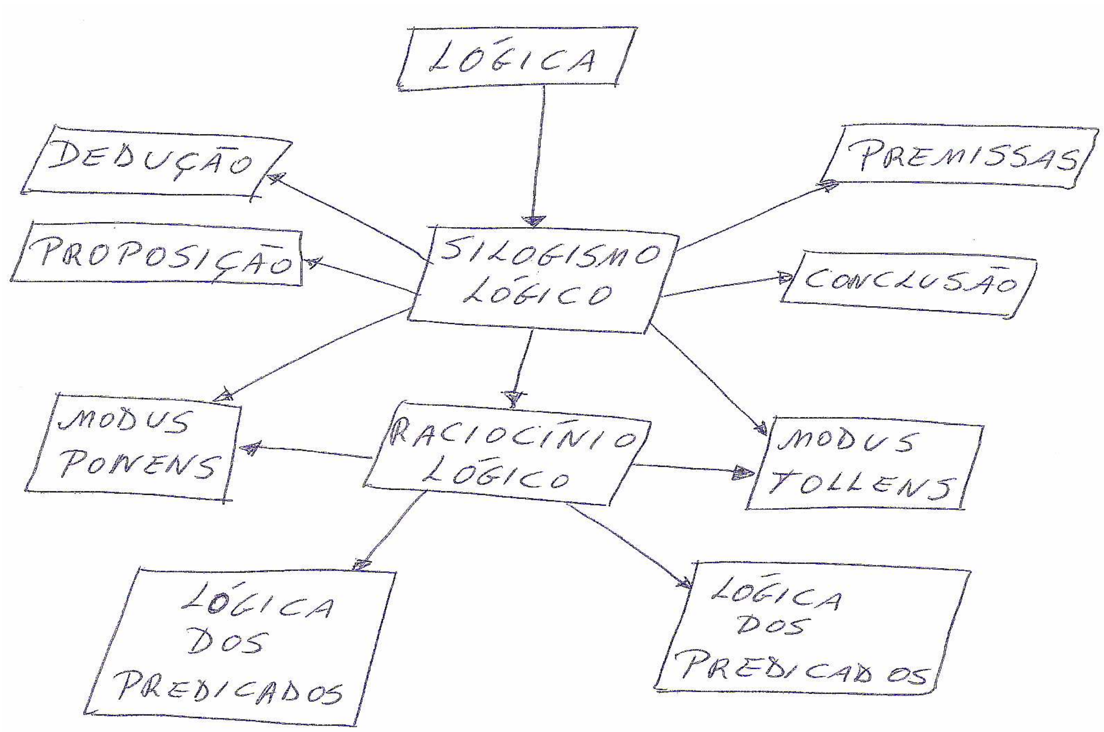


Figura 55: Alumno 01 - Mapa Conceptual de Lógica (Final)

Evolución Buena

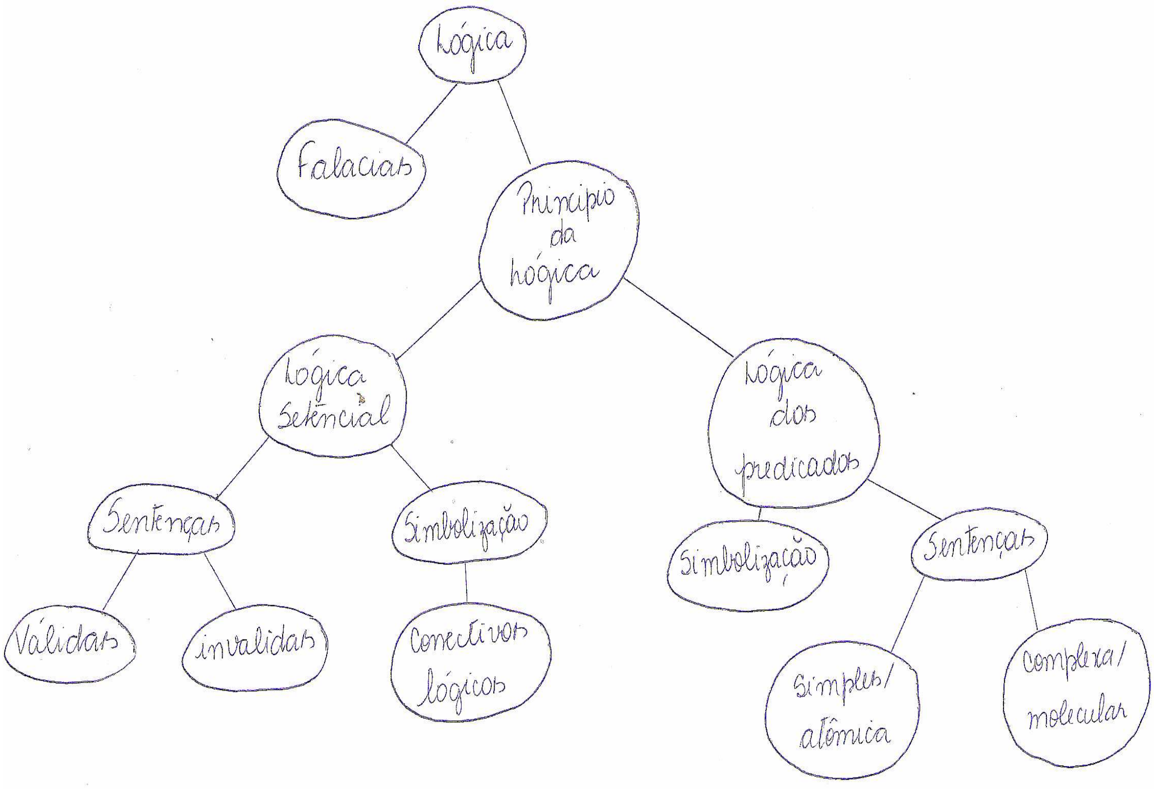


Figura 56: Alumno 06 - Mapa Conceptual de Lógica (Inicial)

Evolución Buena (Continuación)

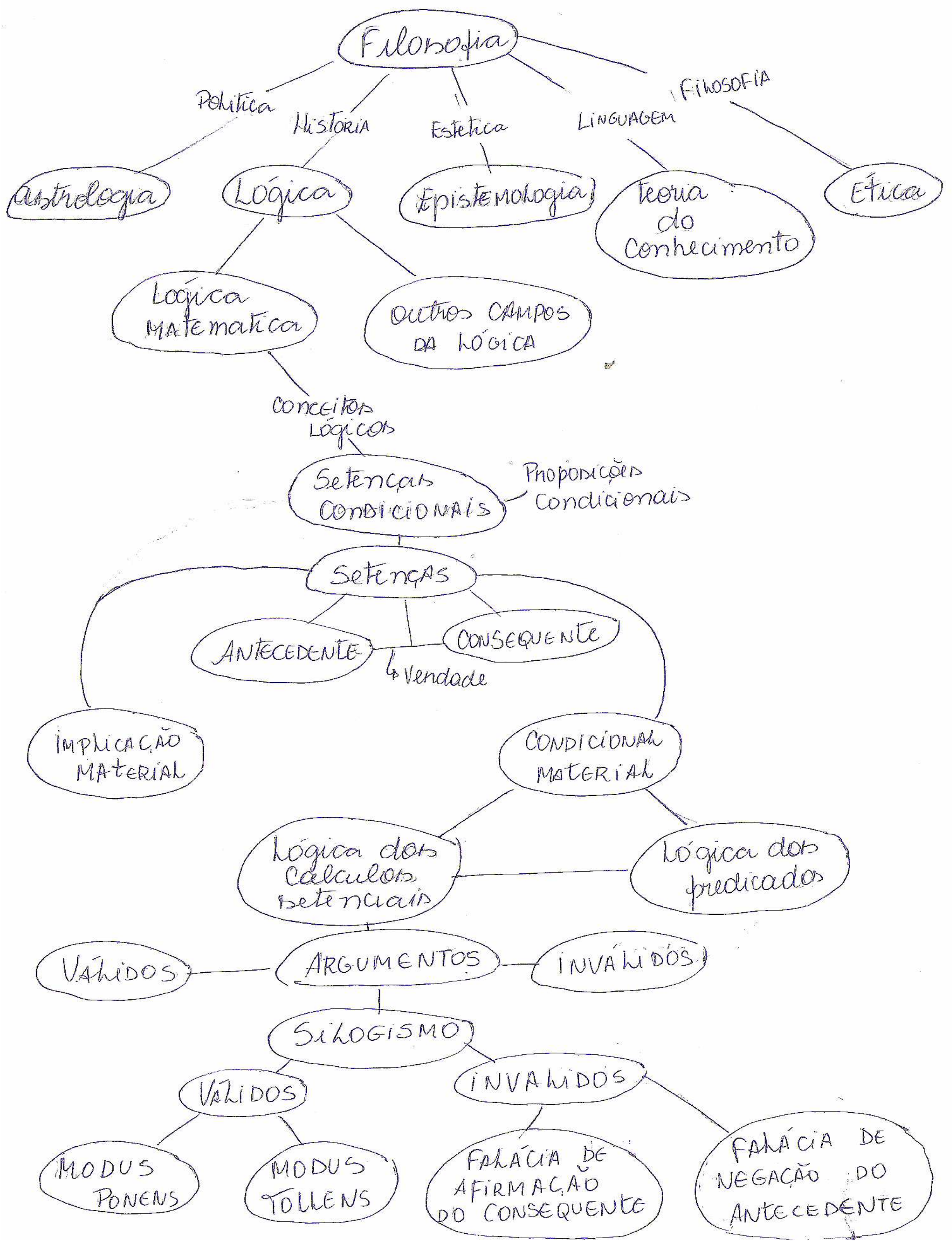


Figura 57: Alumno 06 - Mapa Conceptual de Lógica (Final)

A. 3 Mapas Conceptuales de Álgebra

Evolución Débil

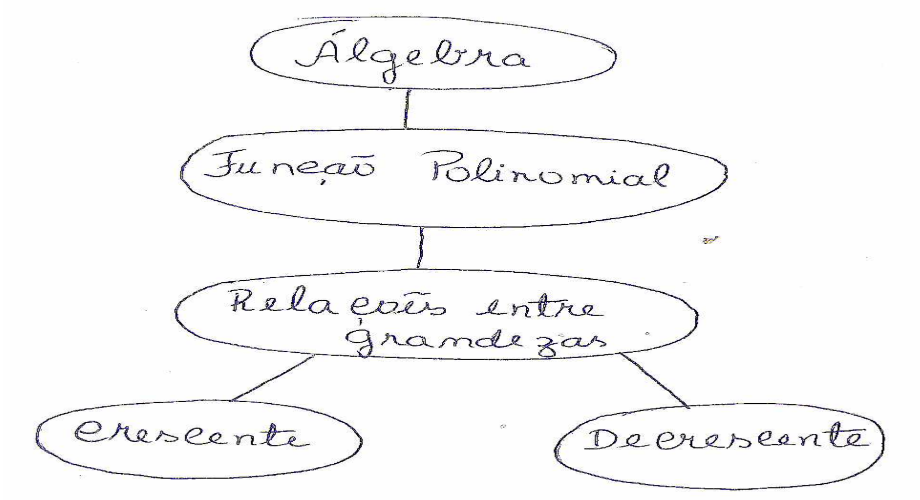


Figura 58: Alumno 22 - Mapa Conceptual de Álgebra (Inicial)

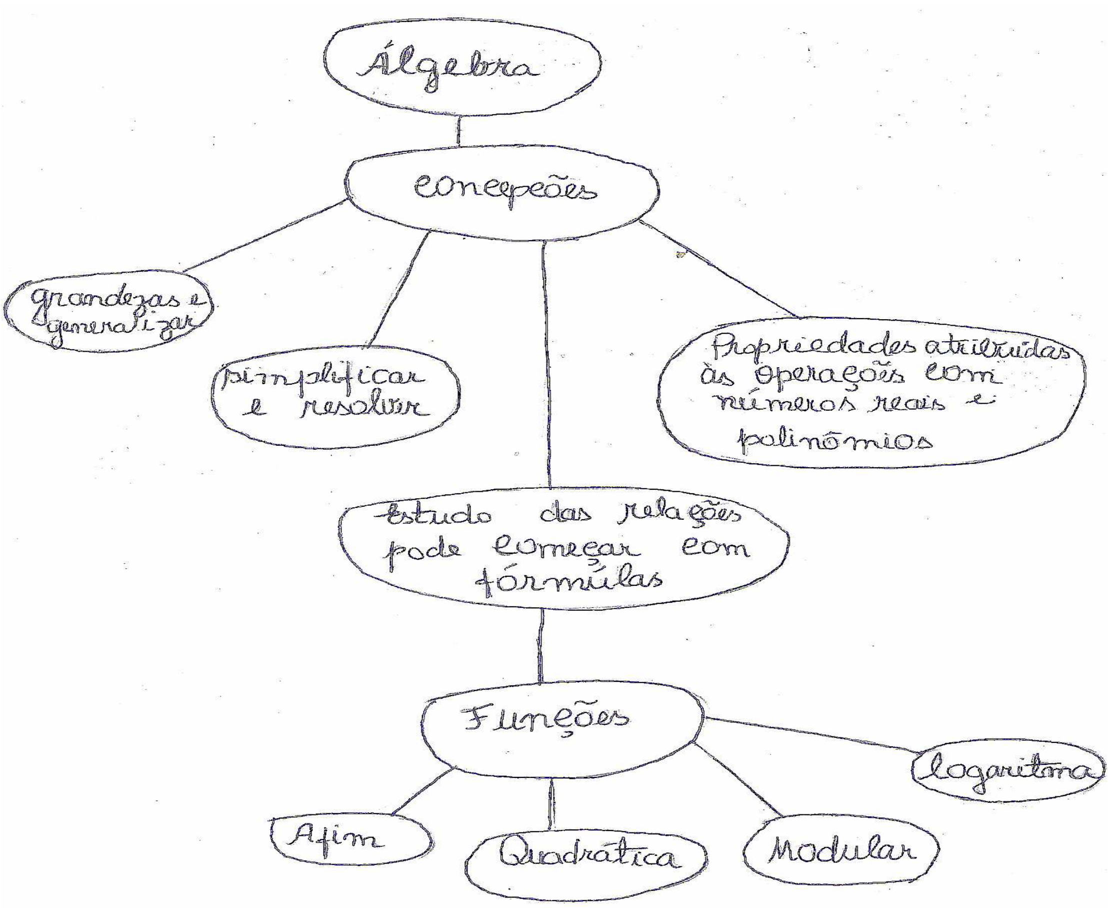


Figura 59: Alumno 22 - Mapa Conceptual de Álgebra (Final)

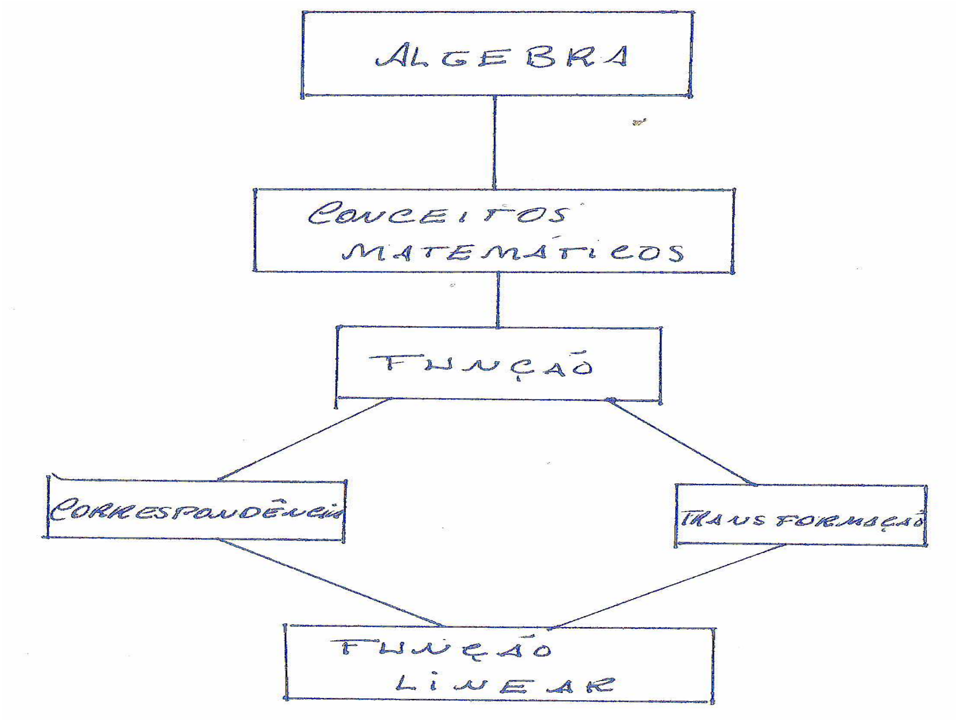


Figura 60: Alumno 20 - Mapa Conceptual de Álgebra (Inicial)

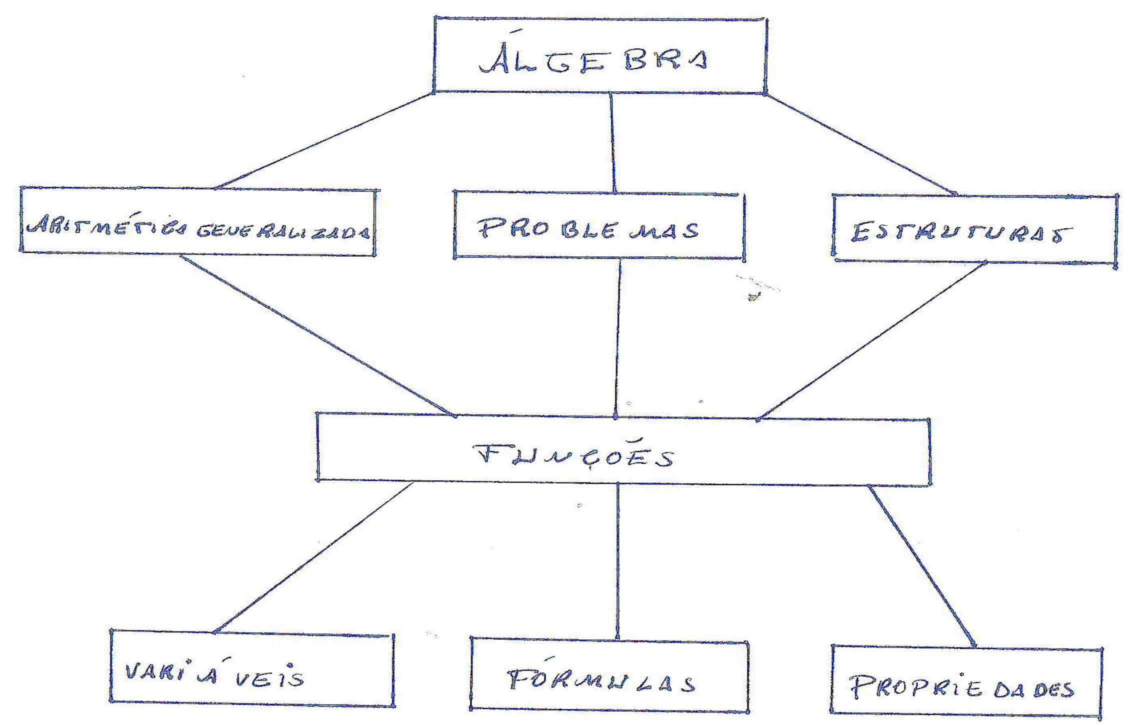


Figura 61: Alumno 20 - Mapa Conceptual de Álgebra (Final)

Evolución Buena

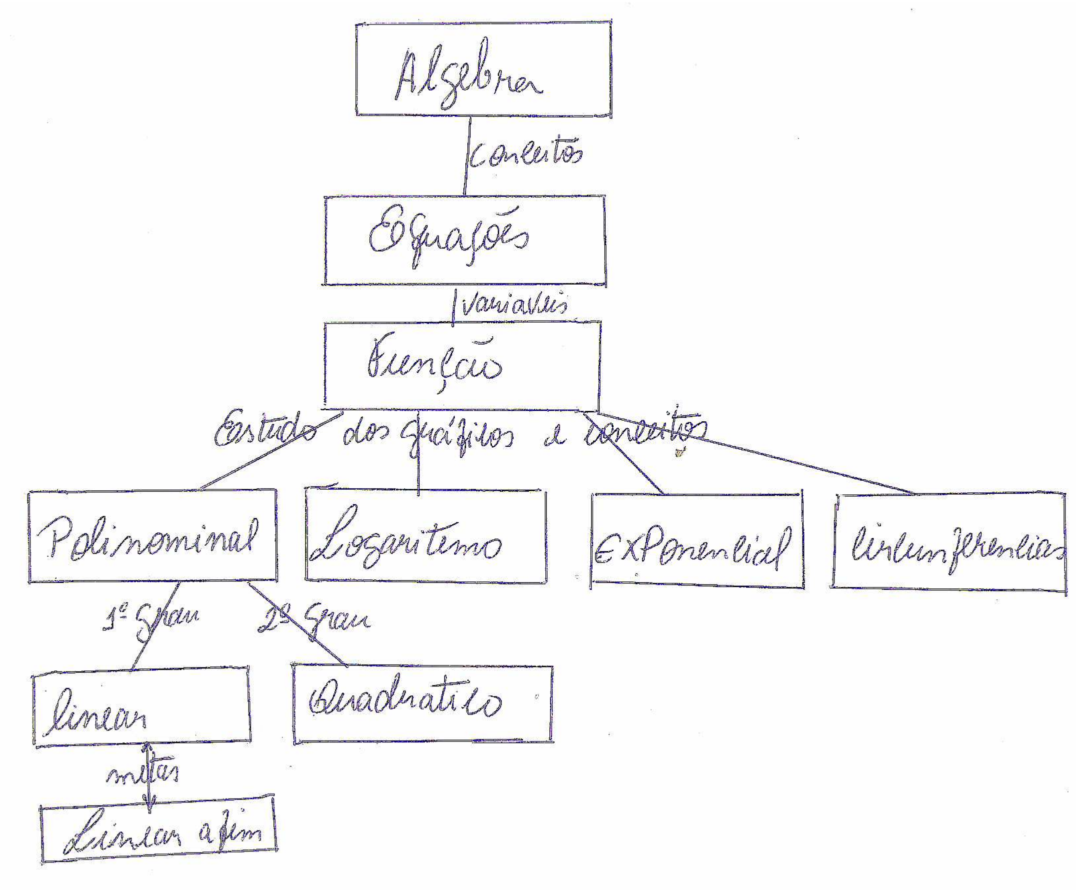


Figura 62: Alumno 31 - Mapa Conceptual de Álgebra (Inicial)

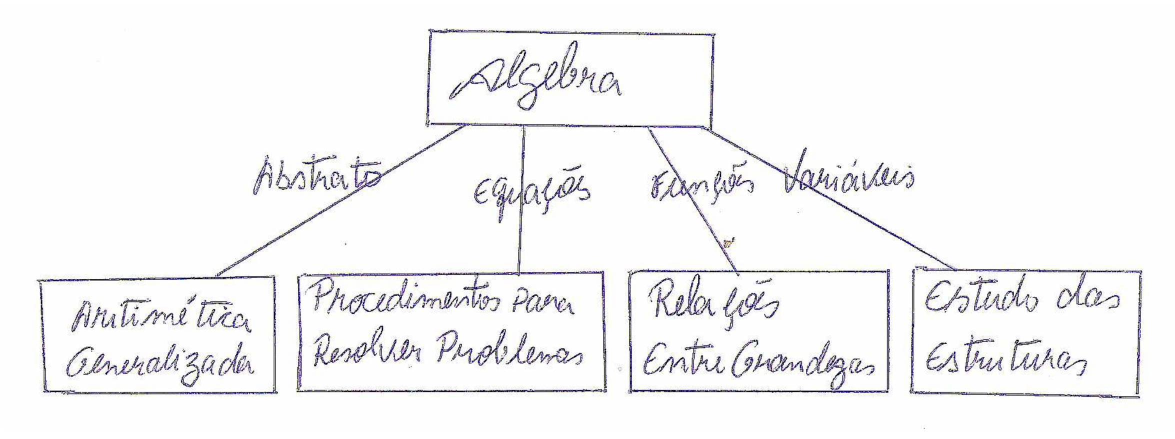


Figura 63: Alumno 31 - Mapa Conceptual de Álgebra (Final)

A. 4 Mapas Conceptuales de Geometría

Evolución Débil

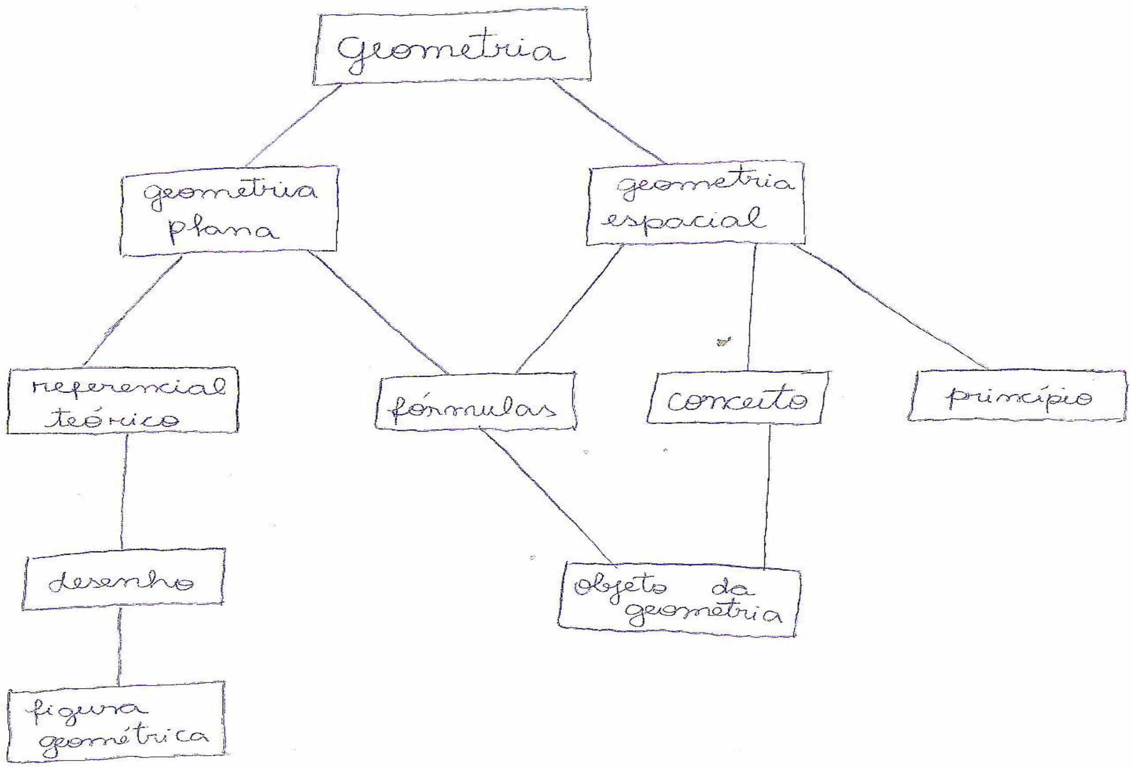


Figura 64: Alumno 03 - Mapa Conceptual de Geometría (Inicial)

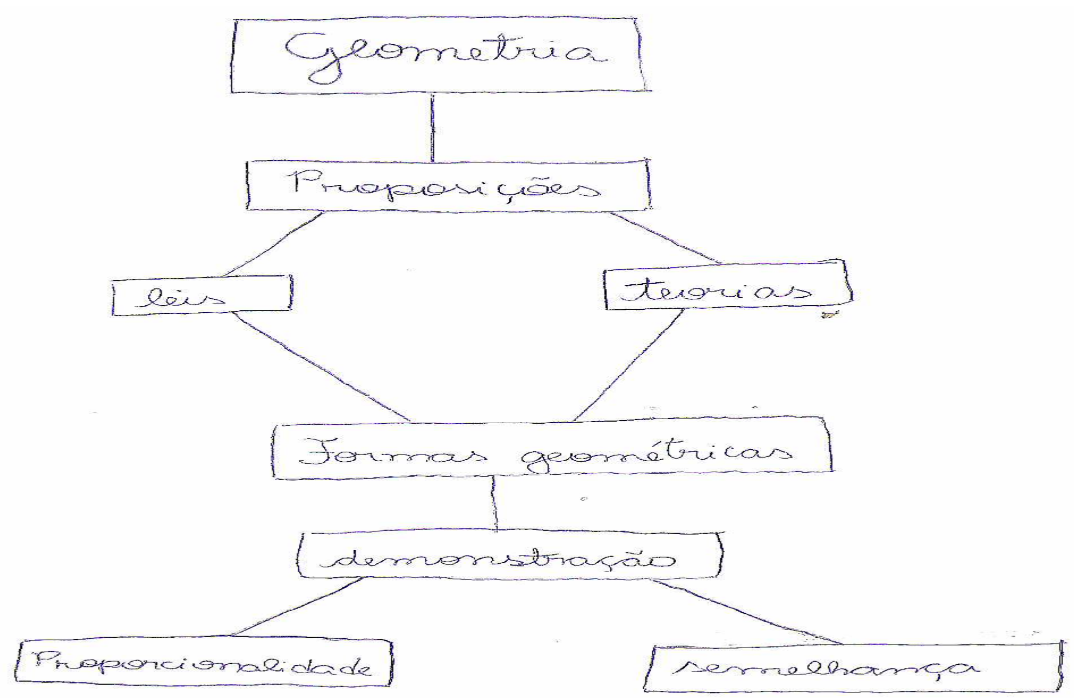


Figura 65: Alumno 03 - Mapa Conceptual de Geometría (Final)

Evolución Regular

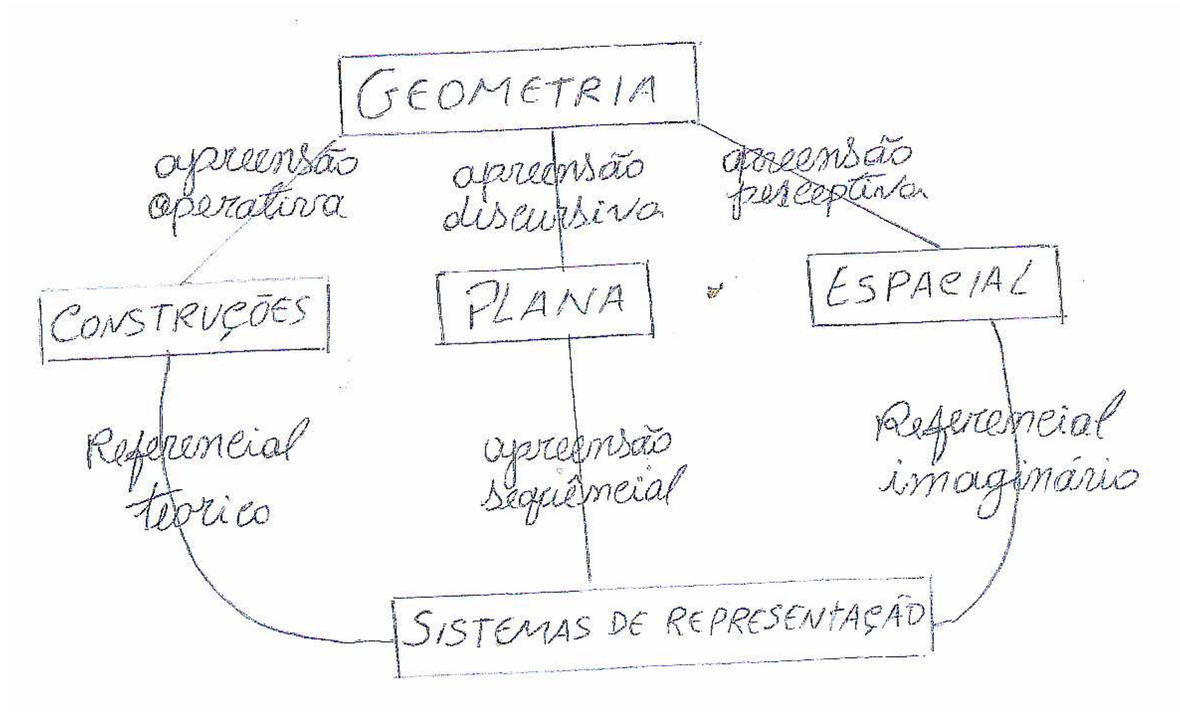


Figura 66: Alumno 11 - Mapa Conceptual de Geometría (Inicial)

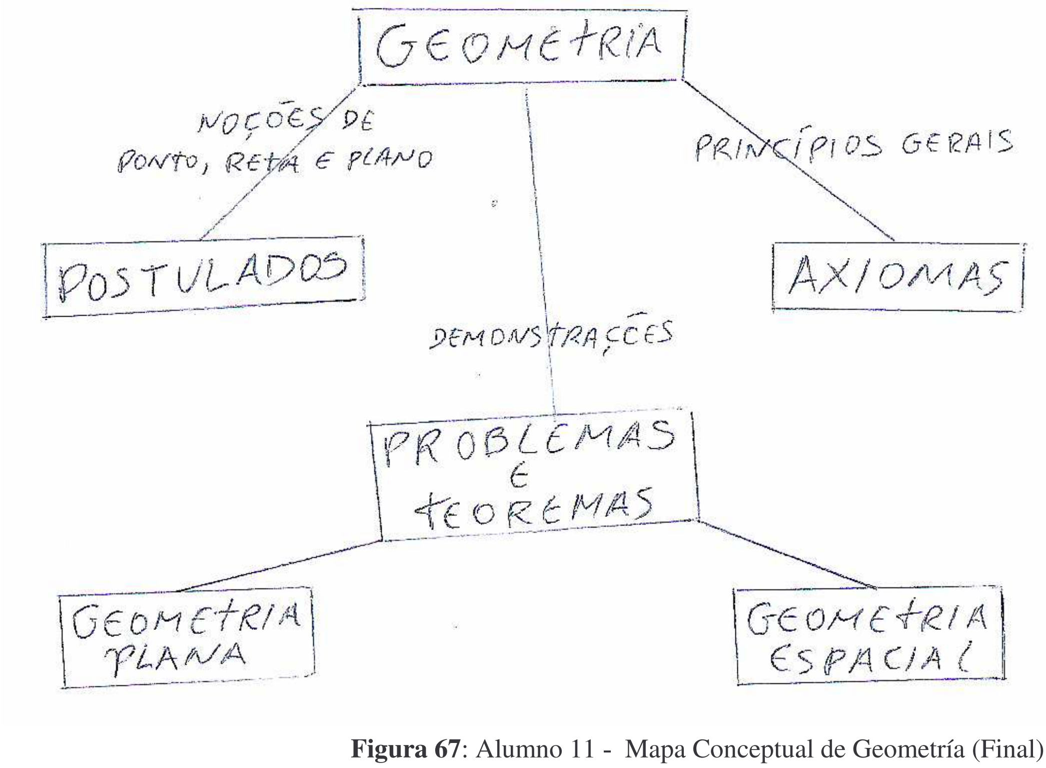


Figura 67: Alumno 11 - Mapa Conceptual de Geometría (Final)

Evolución Buena

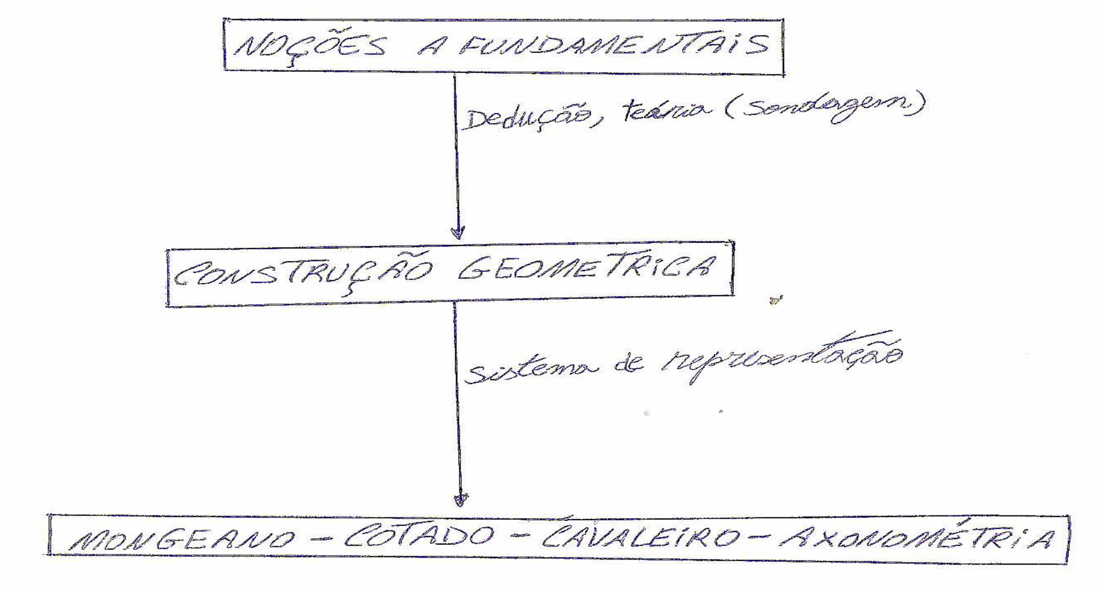


Figura 68: Alumno 28 - Mapa Conceptual de Geometría (Inicial)

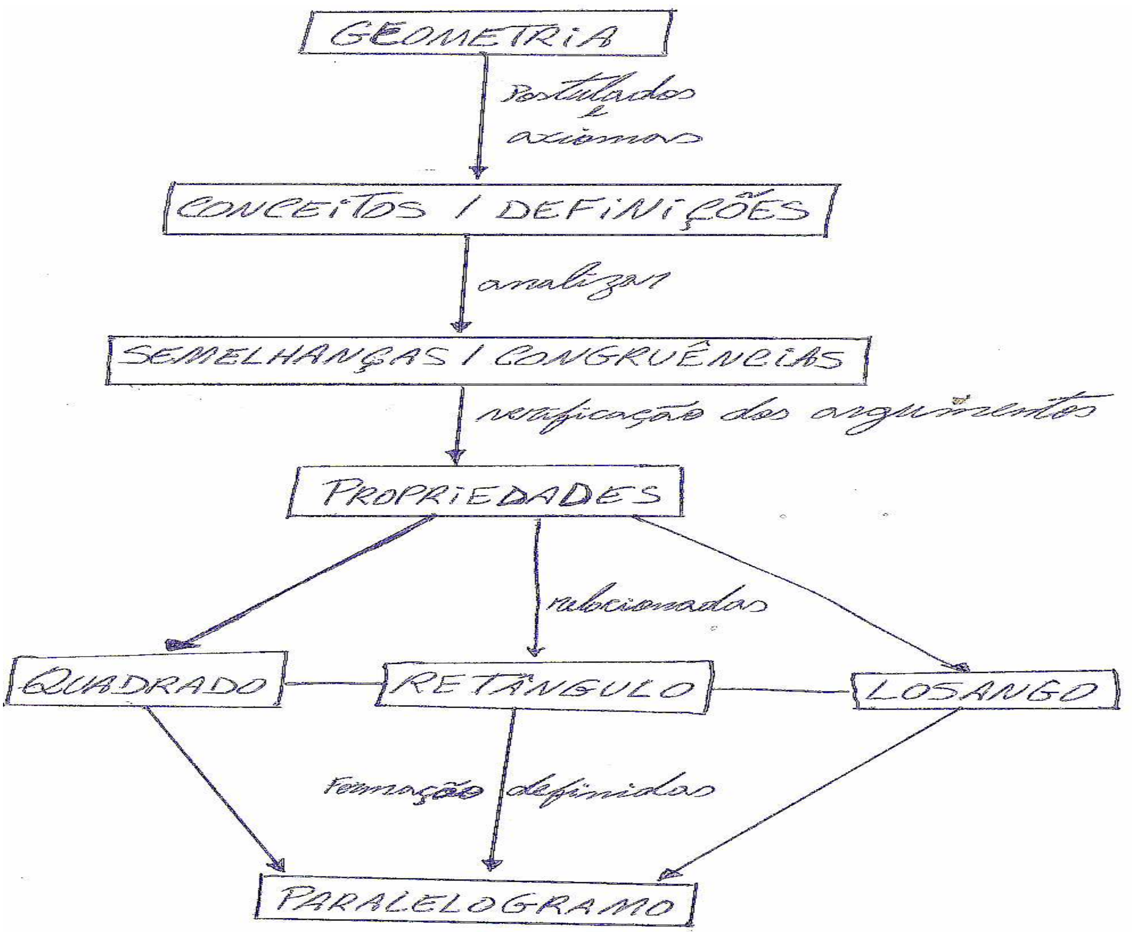


Figura 69: Alumno 28 - Mapa Conceptual de Geometría (Final)