

Probability of error analysis of Random Optical Codes for Optical Code-Division Multiple-Access

Jesus A. Martin-Gonzalez.⁽¹⁾, Enrique Poves⁽¹⁾, Francisco J. Lopez-Hernandez⁽¹⁾

jesus.martin@tfo.upm.es, kike@tfo.upm.es, dxtn@tfo.upm.es

⁽¹⁾Dpto. de Tecnología Fotónica, Universidad Politécnica de Madrid, ETSIT, Av. Complutense s/n 28040 Madrid

Abstract—In this paper we present an analysis of a code family, Random Optical Codes (ROC) used in Optical Code-Division Multiple-Access (OCDMA) systems.

This family has been designed to perform in a Multiple-access interference (MAI) environment as Generalized optical orthogonal codes (OOCs) done. However its extremely simple design provides them better features than traditionally used codes (OOCs) in some cases.

ROC chooses codes randomly from all possible rearranges. Random selection of pulse positions out of the length code is easily implementable and parameters of system: length, weight and number of channels can be easily tailored.

Not only presentation, but OCDMA system analysis and design based on ROC is dealt in the communication.

We conclude that for some interesting cases as low code weight with high code length ROC and OOCs Generalized have comparable BER, even ROC presents a better performance.

I. INTRODUCCIÓN

Desde la introducción desde hace unos años de los sistemas ópticos "Code-Division Multiple-Access" (OCDMA) una de las mejores estrategias propuestas para afrontar el problema de "multiple-access interference" (MAI) ha sido la utilización de códigos ópticos. Esta estrategia modula cada *on* bit como una secuencia diferente para cada canal, de una longitud L y peso determinados w . Cada *off* bit es modulado con la misma longitud citada, pero con un peso nulo.

Para la descripción de la transmisión suponemos una sincronización perfecta de chip entre emisor y receptor y una sincronización de bit obtenida mediante un proceso previo a la transmisión. En este caso el proceso de recepción se rige por una regla de decisión en el receptor para interpretar *on* u *off* bit. Éste criterio está basado en correlar el código propio de su canal con la señal recibida en los últimos L chips. Cuando encuentra una correlación igual al peso del código entiende *on* bit y en caso contrario *off* bit.

Podemos encontrar numerosas familias de códigos ópticos propuestas en la bibliografía, [1]–[3], generando diseños que intentan minimizar el efecto MAI. Estas familias de códigos quedan definidas por una serie de parámetros: $\{L, w, \lambda_a, \lambda_c\}$, donde L representa la longitud del código, w el peso o número de pulsos. Hasta ahora estos diseños estaban basados en una escrupulosa estrategia de colocación para los w pulsos. Algunas propuestas abordaban el diseño a partir de características algebraicas, geométricas o combinatorias.

Estos diseños como el de códigos primos [4] aunque eficaz en cuanto a comportamiento; deja muy limitada el ajuste de los parámetros del sistema, por ejemplo L , w o el número de canales disponibles $N + 1$.

La necesidad de aplicaciones donde la velocidad de transmisión no es esencial, pero si es primordial mantener un consumo bajo hace buscar soluciones con w pequeño mientras

L puede ser moderadamente alto. Además un $N + 1$ prefijado de canales debe ser soportado con éxito por el sistema.

Las restricciones expuestas no son fácilmente asumibles por los códigos existentes por lo que los autores proponen en [5] la construcción de códigos aleatoriamente. Las posiciones con pulso w son elegidas previamente (conocidas por emisor y receptor) aleatoriamente del total L .

Con esta propuesta desaparece el problema de ajustar los códigos a los parámetros deseados, así como la implementación se simplifica bastante; ya que estos códigos son de fácil construcción.

II. ANÁLISIS DEL SISTEMA

En esta sección se analiza como se comportan estos códigos respecto a la probabilidad de error (BER). Además se hace una comparación con el comportamiento de los OOC Generalizados [6]. Habiéndose centrado las familias de códigos existentes en diseños que reduzcan al máximo la autocorrelación y la correlación cruzada (es decir se tiene muy en cuenta las posiciones donde están los pulsos) y viendo que ROC escoge éstos aleatoriamente; se podría pensar que los ROC no tendrán un BER competitivo. Sin embargo los cálculos llevados a cabo demuestran que para códigos suficientemente grandes y con un ciclo de trabajo pequeño, es decir con las condiciones buscadas para nuestras aplicaciones, los ROC presentan una probabilidad de error semejante a la de los OOC Generalizados. Añadiendo además la gran ventaja de que se construyen trivialmente y no está limitado el cardinal de la familia. Es decir la limitación del número de canales viene por el inevitable aumento de "MAI" al aumentar el número de canales; no porque tengamos problemas a la hora de generar suficiente número de códigos.

El análisis de esta nueva familia está basado en la fórmula para el cálculo de la probabilidad de error deducida en [5]:

$$P_e^{ROC} = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} \left(1 - \left(1 - \frac{w}{L}\right)^i\right)^w \quad (1)$$

A. Comparación analítica

Para la comparación analítica con los OOCs Generalizados, hemos elegido aquellos con $\lambda = 1$. Los cálculos están desarrollados con la fórmula, aparecida de forma equivalente en: [7]–[11].

$$P_e^{\lambda=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^w (-1)^k \binom{w}{k} \left(1 - \frac{kw}{2L}\right)^N \quad (2)$$

Aun escogiendo los mejores OOCs es decir con $\lambda = 1$ se demuestra en [12] que la diferencia entre P_e^{ROC} y $P_e^{\lambda=1}$ es

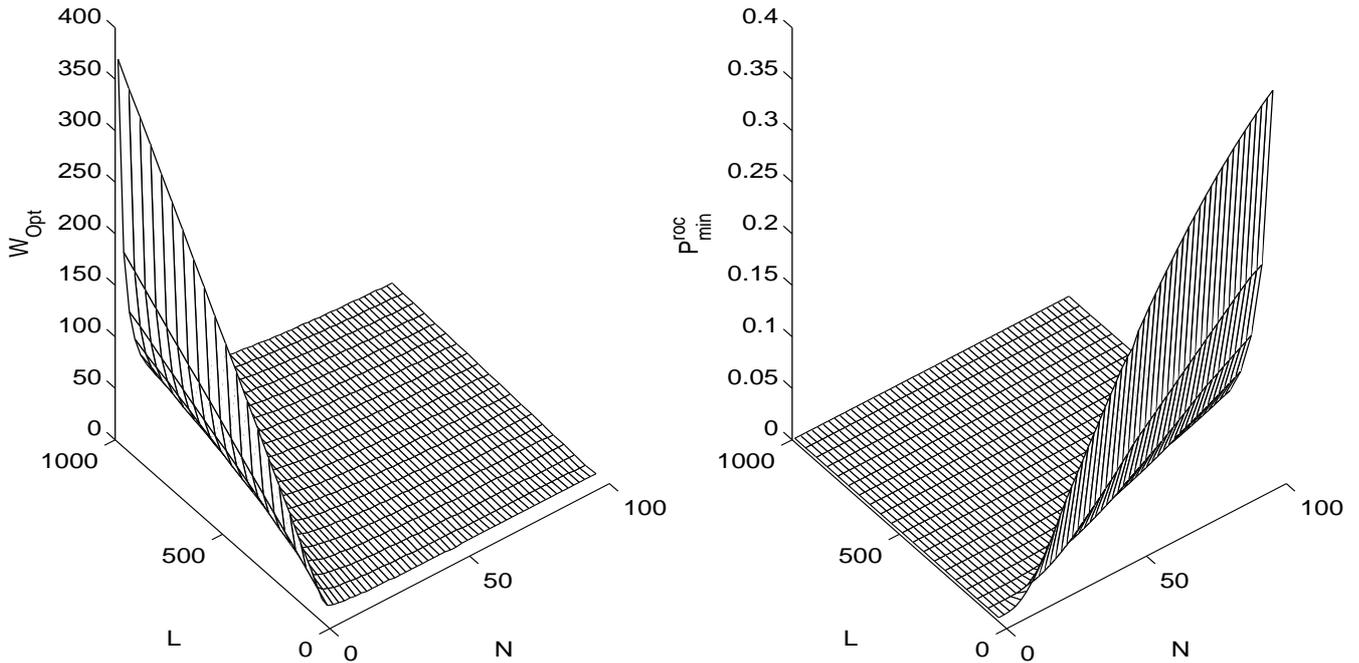


Fig. 1. W_{opt} y P_{min} para (L, N) dados.

del tipo $O\left(\left(\frac{w}{L}\right)^2\right)$ por lo tanto muestran una convergencia de segundo orden cuando w/L tiende a cero.

Este resultado aunque no da ninguna pauta concreta para el diseño es básico para comprender los resultados de la siguiente parte de la sección.

B. Comparación numérica

En esta parte se muestran los resultados numéricos que el análisis teórico anterior ha puesto de manifiesto.

En este caso la comparación entre la familia de códigos ROC y la de OOCs Generalizados, se lleva a cabo eligiendo un criterio más realista en cuanto a construcción. La elección de parámetros se realiza mediante el algoritmo descrito en [6]. Dicho algoritmo se presenta como óptimo para la elección real de los parámetros de OOCs Generalizados, porque tiene en cuenta las restricciones reales de construcción, que no son tenidas en cuenta al elegir los códigos con $\lambda = 1$.

El algoritmo de elección descrito en [6] se rige por la siguiente expresión para la probabilidad de error,

$$P_e^{ooc*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^w (-1)^k \binom{w}{k} \left[1 - \sum_{n=1}^{\lambda} \frac{wp'_n}{n} \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{(w-n)(w-n-1)\dots(w-n-k+1)}{w(w-1)\dots(w-k+1)} \right) \right]^N \quad (3)$$

Es fácil observar que ambas probabilidades de error, en las expresiones (1) y (3), son función de los tres parámetros clave del sistema, es decir: $P_e^{ROC}(L, w, N)$ y $P_e^{ooc*}(L, w, N)$.

Teniendo en cuenta nuestra necesidad en las aplicaciones de una buena administración del consumo, planteamos una optimización de w para cada pareja (L, N) dados. Esto es buscar el mínimo w que hace mínima la probabilidad de error dado que $w \in \{1, \dots, L\}$.

Esta optimización se ha realizado por un método directo de exploración y elección del valor mínimo de la función en todo el rango de w dado que nos movíamos en un dominio finito (y relativamente pequeño).

En la Fig. 1 se muestra el resultado de esta optimización. Mostrando a la izquierda los valores de $W_{opt}(L, N)$ y los de $P_e^{ROC}(L, N)$ a la derecha.

Antes de analizar el resultado para $W_{opt}(L, N)$ recordemos que el peso del código es un parámetro crítico ya que un peso excesivo del código saturaría de bits innecesarios la secuencia recibida y el MAI aumentaría, haciendo imposible una recepción adecuada. Así como una falta de peso en el código daría lugar a una recepción poco robusta, anulando la idea de código óptico. Por lo tanto un compromiso entre la no saturación de la secuencia recibida y la robustez en recepción son necesarias.

Ahora podemos concluir el análisis de $W_{opt}(L, N)$ observemos que sigue también una lógica esperada. El peso disminuye al aumentar el número de canales, se explica este descenso para intentar una disminución en el número de pulsos interfiriendo en la secuencia recibida. En cambio el peso aumenta con la longitud. Al aumentar el espacio, la proporción de pulsos interfiriendo en la secuencia recibida se reduciría, por lo tanto hay margen para aumentar el número de pulsos y robustecer así la recepción del bit.

La $P_e^{ROC}(L, N)$ también responde a lo esperado: mal com-

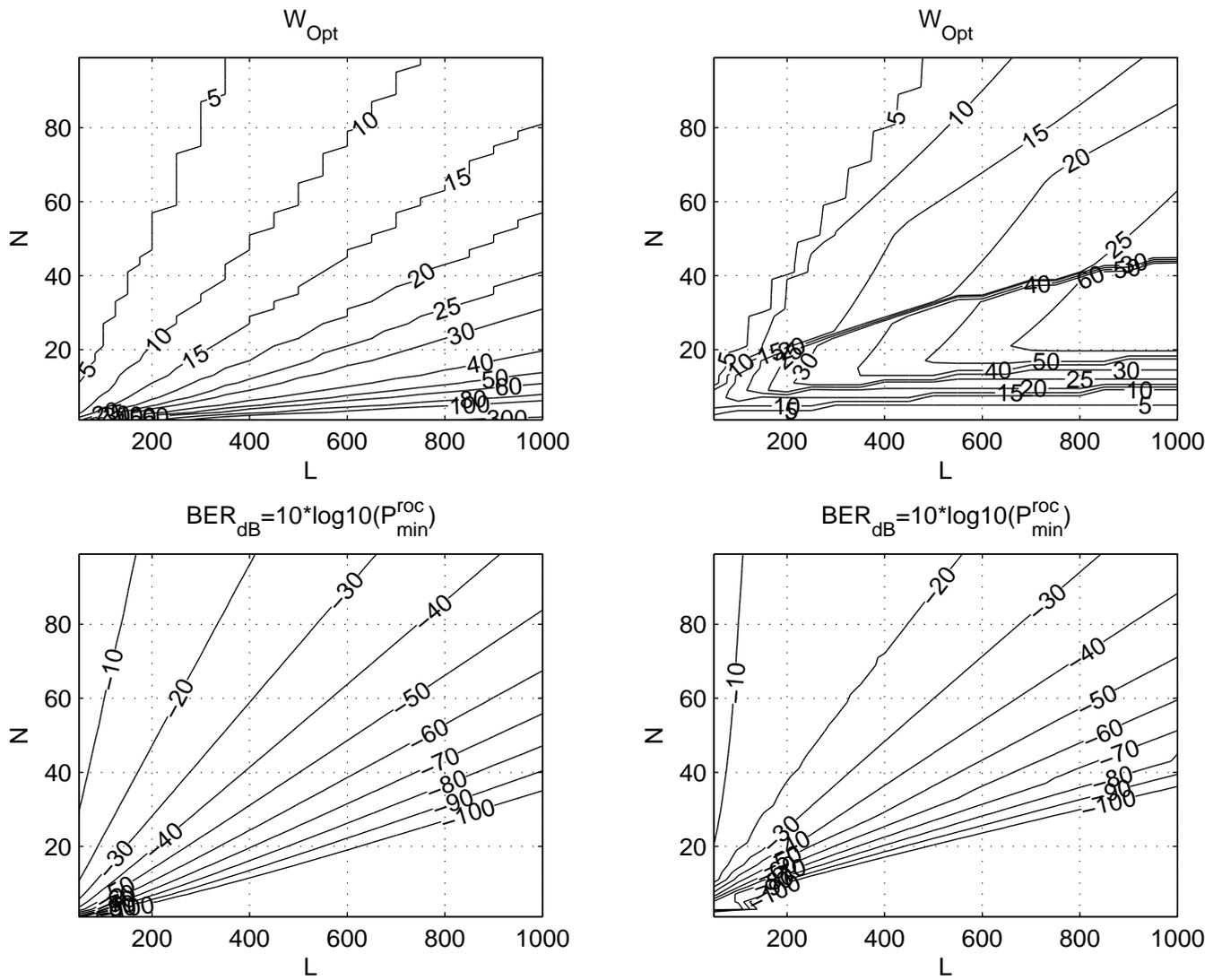


Fig. 2. Curvas de nivel para W_{opt} y P_{min} para (L, N) y dados. (a) ROC. (b) Generalized OOC. (c) ROC. (d) Generalized OOC.

portamiento en valores bajos de L y altos de N , mejorando con el incremento de L y el descenso en el número de canales.

En la Fig. 2, se muestra una comparación entre las familias ROC y OOC Generalizados. Su distribución es la siguiente: resultados para ROC están en Fig. 2 (a) y (c) (columna de la izquierda) y los resultados correspondientes a OOC Generalizados en Fig. 2 (b) y (c) (columna de la derecha).

Las gráficas que en ella aparecen son las curva de niveles de los resultados descritos anteriormente. Esta vez además del sistema basado en ROC también ha sido optimizada w para los OOC Generalizados siguiendo el diseño óptimo de código, descrito en [6].

Como comentarios generales a la comparación que aquí se presenta, hay que destacar que los OOCs Generalizados no presentan una ventaja abrumadora en la probabilidad de error como se podría suponer por la construcción de ambas familias.

Si bien es cierto que para longitudes pequeñas de código, tanto en presencia de pocos como muchos canales los OOC Generalizados presentan un BER menor que los ROC. A medida que la longitud del código aumenta la diferencia se

anula.

Esto parece lógico y se puede explicar con la idea de que en longitudes pequeñas el donde están colocados los pulsos cobra vital importancia, mientras que en códigos más largos lo que más influye es cuantos pulsos hay, es decir la proporción entre pulsos y longitud.

Además, aunque la zona de ventaja de los OOC Generalizados (recordemos: códigos cortos) parece la más deseable porque proporciona mayores velocidades de transmisión; al observar el valor del BER alcanzado, entre 10^{-1} y 10^{-2} nos damos cuenta de que no son zonas realistas a la hora de diseñar códigos. Estas zonas útiles se encuentran a partir de 10^{-6} . En esta regiones podemos observar que las diferencias son poco apreciables, incluso inexistentes.

Efectivamente al observar los valores para ciertos puntos del plano, por ejemplo $L = 1000$ y $N = 50$ tenemos que $P_e^{ROC}(1000, 50) \approx 3.15E-8$ mientras que $P_e^{OOC}(1000, 50) \approx 1E-7$. Este sorprendente resultado se puede explicar con la misma reflexión que se soporta la aparición de esas irregularidades y saltos que se observan en la Fig. 2 (b). El diseño de OOC Generalizados está tan

restringido por el cardinal de códigos disponibles que aunque los valores óptimos teóricos sean unos, el diseño debe elegir otros por no tener disponible un algoritmo de construcción para esa familia de códigos. Ese problema como ya hemos dicho anteriormente se evita en los ROC por su método aleatorio de construcción.

III. OPTIMIZACIÓN DEL SISTEMA

A partir de la información mostrada en la sección anterior se pueden elegir los parámetros óptimos para nuestro sistema. Esta elección puede seguir dos caminos que se estudian en los apartados siguientes.

A. Prioridad para w

En este planteamiento se asume el peso del código como factor limitante del sistema por encima de la probabilidad de error, que quizá podrá ser mejorado por otros métodos, en caso de no resultar adecuada.

Buscando en Fig. 2 (a) y (b) la línea de nivel para el peso deseado en nuestro código, podremos elegir uno de los parámetros L o N . El otro vendrá dado.

En los Fig. 2 (c) y (d) los respectivos valores de la P_e^{ROC} podrán ser consultados y comparados. Comprobando cual de los dos métodos, ROC o OOC Generalizados nos conviene en ese caso concreto.

B. Prioridad para P_e^{ROC}

Ahora la prioridad se la damos a la probabilidad de error como sucederá en la mayoría de los casos. El proceso se plateará justo al revés, ajustando los tres parámetros en las figuras inferiores y consultando en las superiores el valor de w que debemos tomar para poder conseguir esos resultados en BER .

IV. CONCLUSIONES

En este artículo se analizan aspectos importantes de una nueva familia de códigos ópticos introducida recientemente por los autores, ROC.

Además de un repaso a las ventajas que el método de construcción de ROC aporta sobre otros códigos ópticos; se resalta la convergencia bajo determinadas circunstancias del BER producido por ROC y por otras familias de códigos tradicionalmente usadas.

Sin embargo el resultado fundamental de se muestra en el artículo es la comparación de los valores óptimos de los diferentes parámetros de sistemas construidos con ROC y con OOCs Generalizados. En esta comparación se pone de manifiesto que para muchos conjuntos de parámetros, muy útiles en determinadas aplicaciones, la nueva familia es competitiva con las familias ya existentes.

Por lo tanto los autores proponen a la familia de códigos ROC como alternativa en el uso de códigos ópticos en OCDMA. Especialmente en aplicaciones con un pequeño ciclo de trabajo en las que no importe demasiado tener longitudes de código altas. Así como en aquellos casos que se necesiten unos valores de parámetros inalcanzables por los OOCs Generalizados, por restricciones de construcción.

REFERENCES

- [1] F. R. K. Chung, J. A. Salehi, and V. K. Wei, "Optical orthogonal codes: Design, analysis, and applications," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 35, no. 3, pp. 595–604, May. 1989.
- [2] J. A. Salehi, "Code division multiple-access techniques in optical fiber networks—Part I: Fundamental principles," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 37, no. 8, pp. 824–833, Aug. 1989.
- [3] G.-C. Yang and W. C. Kwong, *Prime Codes with applications to CDMA optical and wireless networks*. Norwood, MA: Artech House Publishers, 2002.
- [4] G. C. Yang and W. C. Kwong, "Performance analysis of optical CDMA with prime codes," *Electronics Letters*, vol. 31, no. 7, pp. 569–570, Mar. 30 1995.
- [5] J. A. Martin-Gonzalez, E. Poves, and F. J. Lopez-Hernandez, "Random optical codes for optical code-division multiple-access," *IEEE Commun. Lett.*, submitted for publication.
- [6] S. Mashhadi and J. A. Salehi, "Code-division multiple-access techniques in optical fiber networks—Part III: Optical AND logic gate receiver structure with generalized optical orthogonal codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 54, no. 8, pp. 1457–1468, Aug. 2006.
- [7] M. Azizoglu, J. A. Salehi, and Y. Li, "Optical CDMA via temporal codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 40, no. 7, pp. 1162–1170, Jul. 1992.
- [8] J. J. Chen and G. C. Yang, "CDMA fiber-optic systems with optical hard limiters," *J.Lightwave Technol.*, vol. 19, no. 7, pp. 950–958, Jul. 2001.
- [9] T. Ohtsuki, K. Sato, I. Sasase, and S. Mori, "Direct-detection optical synchronous CDMA systems with double optical hard-limiters using modified prime sequence codes," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 14, no. 9, pp. 1879–1887, Dec. 1996.
- [10] T. Ohtsuki, "Performance analysis of direct-detection optical asynchronous CDMA systems with double optical hard-limiters," *J.Lightwave Technol.*, vol. 15, no. 3, pp. 452–457, Mar. 1997.
- [11] H. M. H. Shalaby, "Complexities, error probabilities, and capacities of optical OOK-CDMA communication systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, no. 12, pp. 2009–2017, Dec. 2002.
- [12] J. A. Martin-Gonzalez, E. Poves, and F. J. Lopez-Hernandez, "Random optical codes for optical code-division multiple-access: Performance and system design," *IEEE Trans. Commun.*, submitted for publication.