

ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE REDES DE TRANSPORTE PÚBLICO USANDO TEORÍA DE REDES. CASO DE GUADALAJARA MÉXICO.

Orlando Barraza

Estudiante de doctorado, Universidad Politécnica de Cataluña, España

Miquel Estrada

Profesor agregado, Universidad Politécnica de Cataluña, España

RESUMEN

Dentro del contexto de planeación de transporte público el análisis estructural es clave para entender la eficiencia del sistema. En este trabajo se propone una metodología de análisis estructural aplicada a una red alternativa de transporte público en Guadalajara México. El análisis se deriva de teoría de redes y se enfoca en 3 propiedades: accesibilidad, resiliencia y fricción espacial.

En el caso de la accesibilidad, esta se vincula con el Shimbel index que mide el promedio de tiempos de viajes de cada nodo al resto de los nodos. Por ende, el grado de accesibilidad brindará un parámetro de la efectividad en términos de tiempo de traslado que brinda cada red. Por otra parte, la resiliencia integra 3 propiedades de red los cuales son: betweenness centrality, central point dominance y average path length. El betweenness centrality mide la frecuencia en la que un área de la ciudad es usada como el camino más corto entre 2 destinos. Con esto se identifica las zonas con mayor polarización de uso. Mayores polarizaciones corresponderían a problemáticas de vulnerabilidades.

Por otro lado, el central point dominance mide la variabilidad de la media del betweenness centrality y el mayor betweenness centrality. Una mayor variación se traduce en una mayor vulnerabilidad. Finalmente, el average path length mide el grado de conectividad de la red. Este se mide en un escenario base y se mide nuevamente cuando los principales nodos de la red fallan, esto con objeto de verificar el impacto que tiene la conectividad de la red cuando ciertos nodos fallan. Finalmente, se aborda la fricción espacial donde se toma el parámetro del índice deuter el cual compara la distancia euclidiana entre todos los posibles viajes y su distancia sobre la red de transporte. Esto otorgará un indicador de la eficiencia espacial.

1. INTRODUCCIÓN

Dentro de los procesos de planeación de sistemas de transporte público existen temas claves de integración como lo son análisis de patrones de movilidad, uso de suelo, modelación, análisis económico y ambiental entre otros. Sin embargo, existen propiedades de los sistemas de transporte público que son claves para la evaluación de su eficiencia y por ende para la

toma de decisiones los cuales son los análisis del rendimiento en términos estructurales. Para medir dichos aspectos estructurales los planeadores de transporte han recurrido al uso de teoría de redes. Teoría de redes es raramente aplicado a planeación de sistemas de transporte a pesar de la gran importancia en los resultados de los análisis.

La Teoría de Redes (TR) es un campo de la ciencia que usa matemáticas discretas para comprender las propiedades estructurales de una red. Para realizar dichos análisis es necesario tener una representación de red de un sistema lo cual se sintetiza generación de nodos y links que representan las vinculaciones que existen entre objetos, entes o individuos. En el caso de las redes de transporte público la representación puede generarse por dos vías. La primera en donde cada parada funge como nodos y la conectividad de las paradas son los links. La segunda en la que cada zona de la ciudad (previamente generadas) es un nodo y la conectividad entre cada zona vía la red de transporte funge como links. Esta concepción se puede visualizar en la siguiente imagen:

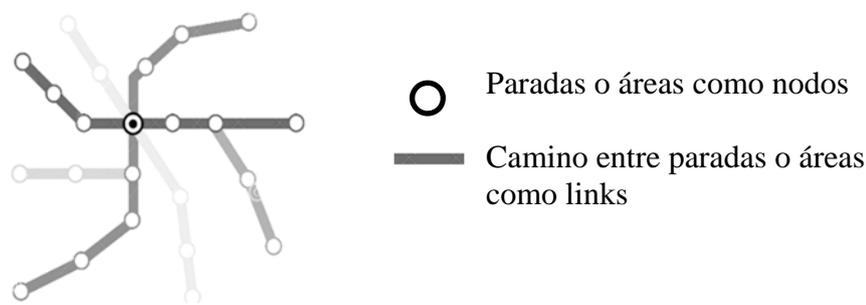


Figura 1: Ejemplo de la representación de sistemas de transporte público a redes

Dentro del campo de teoría de redes existe una gran cantidad de propiedades redes (atributos de redes) las cuales están sujetas a medición. En el contexto de redes de transporte público las principales son: Diámetro de la red, Índice Deuter, Densidad de red, Índice Pi, Índice Eta, Índice Theta, Índice Beta, Índice Alpha, Índice Gamma, Índice Shimbel, dependencia central entre otras Rodrigue (2020).

Sin embargo, en este trabajo nos enfocaremos a 3 propiedades de red principales las cuales son: Grado de accesibilidad (vinculado a el índice de Shimbel), fricción espacial (vinculado al índice deuter) y la resiliencia de la red (vinculado a betweness centrality, central point dominance, average path length and spectral gap.)

El índice Shimbel está vinculado al concepto llamado grado de accesibilidad el cual es una medida de eficiencia en términos de tiempo de desplazamiento que una red de transporte ofrece. Una red de transporte dada sus características estructurales como el trazado geométrico de sus líneas, las velocidades comerciales, la frecuencia de paso, la conectividad entre líneas entre otros aspectos determinará en gran medida los tiempos de desplazamiento que esa red ofrece a los usuarios. Esta propiedad de eficiencia en términos de tiempos de desplazamiento es la que mide el grado de accesibilidad.

Por otro lado, la fricción espacial vinculado al índice deuter mide la eficiencia en términos espaciales de los viajes realizados en la red. Es decir, que tan directos espacialmente son los viajes. Finalmente, la resiliencia de la red lo vincularemos a las siguientes propiedades de red: betweenness centrality, central point dominance, average path length and spectral gap. Estas propiedades se explicarán cada una de ellas a detalle. Sin embargo, en conjunto forman una batería de propiedades que reflejarán el grado de resiliencia que tiene la red de transporte.

La importancia de la medición de estas propiedades de red recae en que la medición de las propiedades estructurales de una red de transporte es otro de los grandes campos de análisis que deberían de estar integrados a la evaluación del desempeño general del sistema de transporte. Dado que la estructura de la red y la tecnología de propulsión determinará en gran medida la eficiencia de la red en los principales ámbitos de rendimiento. Esta vinculación se puede observar en la siguiente figura:



Figura 2: Vinculación entre los principales aspectos a evaluar de una red de transporte con su estructura y tecnología de propulsión

Para la evaluación estructural se tomará como sistema de transporte público la red superficial propuesta por Barraza (2018). Con esta red base se generaron los archivos GTFS (General Transit Feed Specification) que fungirán como la representación de red del sistema de transporte. Los GTFS son una excelente opción para la representación del sistema de transporte dado los grandes detalles estructurales que otorgan de la red (las paradas, la secuenciación de paradas, el tiempo de traslado entre paradas, la frecuencia, la geometría de las líneas entre otros).

Para realizar una profunda explotación de los GTFS se usaran 2 principales herramientas. La primera es R el cual es un lenguaje de programación de código libre. La segunda es OTP (Open Trip Planner) el cual es una herramienta de motor de búsqueda multimodal. Esta ponencia está dividida en 5 secciones. La sección 1 es la parte de introducción donde se expone de manera general el contenido del trabajo. La sección 2 contempla el objetivo general del trabajo, la sección 3 expone la metodología seguida, sección 4 expone resultados y discusiones y finalmente sección 5 es de conclusiones.

2. OBJETIVOS

El objetivo principal de este trabajo es analizar las propiedades de red del sistema de transporte propuesto para Guadalajara México en lo relativo al grado de accesibilidad, resiliencia y fricción espacial; con la finalidad de tener una evaluación puntual de la eficiencia estructural de dicha red.

3. MATERIALES Y METODOLOGÍA

3.1 Materiales

Para lograr hacer el análisis de redes propuesto es necesario contar con 3 datos fundamentales los cuales son la representación de la red de transporte público en formato GTFS, una zonificación del área de estudio y la red vial de la zona. La siguiente figura muestra la zonificación propuesta para el área de servicio:

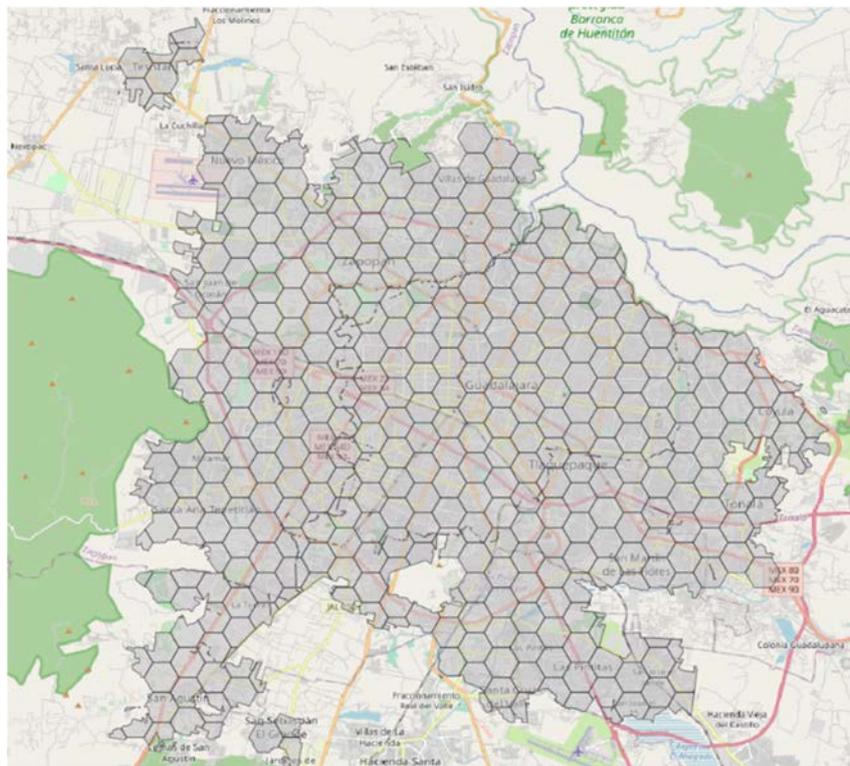


Figura 3: Zonificación propuesta para el área de servicio

La figura 3 muestra la zonificación propuesta para el área de estudio, consta de 398 hexágonos con un diámetro de 670 metros. Adicionalmente, se obtuvo la red vial del área de estudio por medio de OSM. Finalmente, la generación de los GTFS se resumen en los siguientes elementos:

Concepto	Magnitud
Stops	1,970
Agency	1
Routes	39
Trips	78
Stop times	4,666
Shapes	4,666
Frecuencias	78

Tabla 1: Resumen de los GTFS

3.2 Descripción conceptual y matemática

En este trabajo se aborda el análisis estructural de tres principales aspectos: accesibilidad, fricción espacial y finalmente resiliencia de la red. Cada una de estas propiedades de red serán descritas en los siguientes puntos:

3.2.1 Grado de accesibilidad

El grado de accesibilidad es una propiedad de red que representa la eficiencia en términos de tiempos de desplazamientos que una red de transporte ofrece. Para generar este indicador se toma como nodo a cada centroide de la zonificación propuesta para posteriormente sacar la suma de los tiempos de traslado de ese nodo hacia el resto de los nodos esto generara una media de tiempo de desplazamiento de dicho nodo (zona del área de servicio al resto de los nodos (el resto de las áreas de servicio). Esto se puede replicar para toda la red y queda expresado en la siguiente ecuación:

$$C(x) = \sum_y d(a \dots z) / (N - 1) \quad (1)$$

donde:

- $C(x)$: Es el indicador shimbel para el nodo x
- $d(x,y)$: Es el tiempo de viaje entre los nodos $a \dots z$
- N : Número total de nodos

3.2.2 Índice Deuter

El índice deuter se vincula con la eficiencia en términos espaciales. Es decir, es una propiedad de red que hace referencia a que tan directos son los viajes en términos espaciales (fricción espacial), para lograr esto se obtienen la distancia euclidiana (distancia en línea recta) de un origen y un destino así como la distancia que sobre la red en tomando la ruta óptima. Los orígenes y destinos en este caso son los nodos (centroides de cada área de la zonificación) y la vinculación vía red de transporte público actúan como links. La siguiente ecuación expresa dicho índice:

$$DI = D(S)/D(T) \quad (2)$$

donde:

- DI: Índice deuter
- D(S): Distancia euclidiana entre dos puntos
- D(T): Distancia sobre la red de transporte público

3.2.3 Resiliencia

A diferencia de las propiedades de red presentadas anteriormente la resiliencia (en la literatura vinculado al concepto de hub dependence) puede integrar distancias propiedades de red descritas en la literatura de teoría de redes. En este trabajo se tomará en consideración 4 propiedades de red que vincularemos a la resiliencia del sistema de transporte. Estas propiedades son: centralidad de intermediación (betweenness centrality), dominio del punto central (central point dominance), longitud media del camino (average path length) y brecha espectral (spectral gap).

En el caso de la centralidad de intermediación esta propiedad mide la frecuencia en que un nodo es usado como parte del camino más corto entre otros 2 nodos. En este caso los nodos representarán zonas de la ciudad (creadas como un conjunto de paradas) y las vías de comunicación vía la red de transporte público como nodos. En este sentido esta propiedad puede identificar áreas concretas de la ciudad con altos flujos de viajes óptimos dentro de la red. En caso de que un nodo (un área de la ciudad) tenga una alta frecuencia de uso como puente entre 2 nodos esto significa que cualquier perturbación en esta zona (como puede ser tráfico, manifestaciones, accidentes viales entre otros) afectará en gran medida el rendimiento de una gran cantidad de viajes. La centralidad de intermediación se representa matemáticamente en la siguiente ecuación:

$$C_i = \sum_{(j,k)} (b_{ijk}/b_{jk}) \quad (3)$$

donde:

- C_i : Centralidad de intermediación para el nodo i
- b_{jik} : Indica la frecuencia del total de caminos más cortos entre el nodo j y k que va usando el nodo i
- b_{jk} : Representa el número total de rutas más cortas entre el nodo j y k

En el caso del dominio del punto central este representa un indicador de la diferencia media entre el nodo con mayor centralidad de intermediación con el resto de los nodos, Yazdani (2011). En este sentido, el dominio del punto central es una especial de desviación estándar de centralidad. En caso de que el valor sea alto significa que hay una polarización de centralidad a ciertos nodos lo cual a su vez refleja una red propensa a tener una baja resiliencia. Este indicador se expresa matemáticamente en la siguiente expresión:

$$C_B = 1/(n - 1) \cdot \sum_1 (B_{max} - B_i) \quad (4)$$

donde:

- n: número de nodos
- Bmax: centralidad máxima
- Bi: Centralidad del nodo i

Por otra parte, la longitud media del camino es un indicador de conectividad. Su valor representa la cantidad media de steps (secuencia de paradas) de un nodo al resto de los nodos. Generalmente este valor se expresa integrados todos los nodos de la red por lo que expresa la conectividad de la red completa. Menores valores de la longitud media de camino significan una mayor conectividad pues esto expresa que la red requiere pocas secuencias de nodos (paradas) para realizar los viajes. Este valor será evaluado en 2 escenarios. El primero en un escenario base con todos los nodos funcionando y el segundo escenario se removerán el 10 % de los nodos con mayor centralidad para ver la afectación a la conectividad que esta remoción tuvo. Esta propiedad puede observarse en la siguiente expresión:

$$l_g = 1/(n \cdot (n - 1)) \cdot \sum_{i \neq j} d(v_i, v_j) \quad (5)$$

donde:

- lg: Longitud media de camino
- n: Número de nodos
- vi , vj: Caminos cortos entre vi y vj

Finalmente, la brecha espectral $\Delta\lambda$ es la diferencia entre el primer y el segundo autovalor de la matriz adyacente del grafo, Gutiérrez (2011). Esta propiedad proporciona información sobre la robustez de la red. La brecha espectral se usa con el propósito de detectar redes con propiedades de "buena expansión" (aquellas que poseen diseños de conectividad óptimos) y dicho valor debe ser suficientemente grande. Una pequeña brecha espectral probablemente indicaría la presencia de nodos o links que pueden causar serias interrupciones en el flujo de la red cuando remoto, Estrada (2006).

3.3 Metodología y procesos

Los puntos anteriores describieron los conceptos y las matemáticas que describen cada uno de las propiedades de red a evaluar en este trabajo. Sin embargo, el proceso de transformación y uso de GTFS como input de datos para su evaluación será descritos en los siguientes puntos.

3.3.1 Generación de row data y OTP

Los procesos de generación de datos base usados para evaluar las propiedades de accesibilidad y de fricción espacial se generaron a partir del uso de OTP y su integración en R. Ambas herramientas se utilizaron para generar una matriz de viajes $N*N$ en el área de servicio (en transporte público y usando la zonificación presentada anteriormente). Este proceso puede ser resumido en los siguientes puntos:

- Selección del área de estudio
- Creación de la zonificación y generación de centroides
- Vinculación de OTP y R así como el input de datos requeridos (GTFS y vialidades)
- Generación de una matriz de viajes $N*N$
- Limpieza y procesado de datos
- Generación del grado de accesibilidad y fricción espacial

Los puntos anteriores resumen las etapas para la generación del grado de accesibilidad y la fricción espacial. En la figura 4 se observa el interfaz visual de OTP. OTP es un motor de búsqueda multimodal el cual se puede vincular a R, esta vinculación permite el procesamiento masivo de viajes dentro del área de estudio. Dicho procesamiento masivo de viajes genera una gran cantidad de datos vinculados a estos mismo los cuales fungen como los datos base para análisis más complejos vinculados a la red de transporte. La tabla 1 muestra un extracto de este cuadro de datos generado con el procesamiento masivo de viajes.

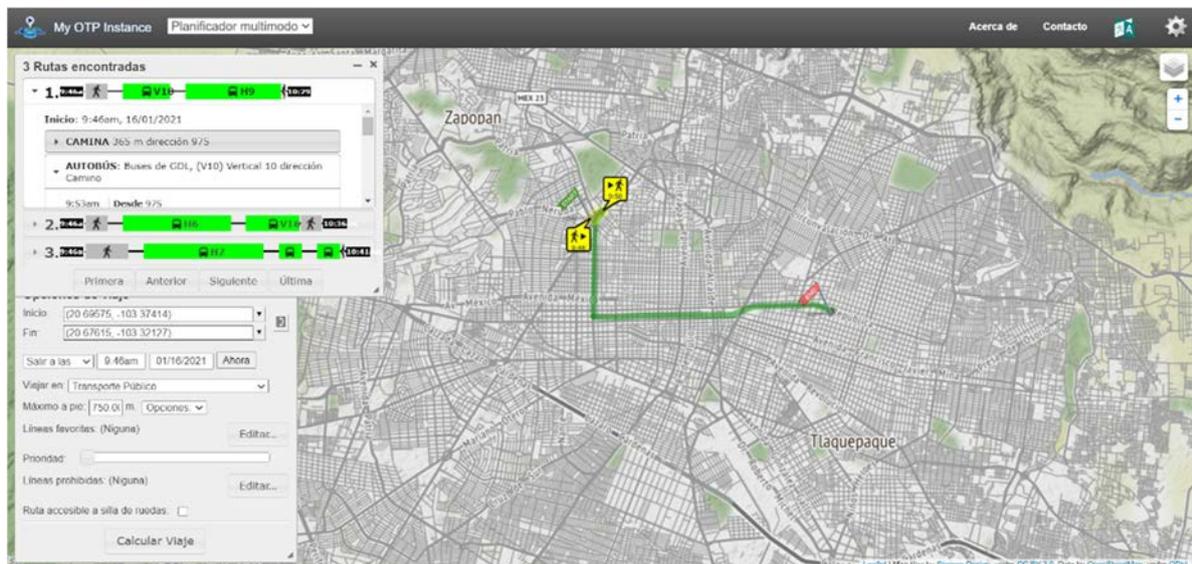


Figura 4: Visualización de OTP

Duration	Start time	End time	Walk time	Transit time	Waiting time	Walk distance
2680 s	14/01/2021 8:24	14/01/2021 9:08	368 s	2132 s	180 s	400 m
Transit distance	Euclidian distance	Transfers	Route	From place	To place	
12,436 m	9,142 m	0	H4	651	987	

Tabla 2: Datos generados por requerimientos de viajes en OTP

En la tabla 2 se puede observar una muestra del tipo de cuadro de datos que genera OTP vinculándolo con R. Cada requerimiento de información de viaje genera este tipo de datos en los que se puede destacar: distancia del recorrido, tiempo del recorrido, tiempo de espera, distancia caminando entre otros datos importantes vinculados al viaje. Este cuadro de datos será procesado para genera el grado de accesibilidad y la fricción espacial.

Por otra parte, se siguió otro procedimiento para generar las propiedades vinculadas a la resiliencia de la red. Este procedimiento se baso en el trabajo hecho por Pereira (2019). Dicho procedimiento contiene las siguientes etapas:

- Lectura de GTFS
- Unión de archivos
- Unión de paradas cercanas dentro un radio determinado de distancia }
- Actualización de coordenadas dado los clusters de paradas
- Identificación de modalidades de transporte y rutas de cada viaje
- Identificación y generación de links entre paradas
- Cálculo de tiempos de viaje entre paradas
- Remoción de paradas sin conexión de links
- Creación de objeto igraph
- Medición de propiedades de red

El procedimiento descrito anteriormente convierte a los GTFS en un objeto formato igraph el cual ya es sujeto de análisis de propiedades de redes clásica en la literatura de teoría de redes Pereira (2019).

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Grado de accesibilidad

Como se mencionó anteriormente el grado de accesibilidad está vinculado a la propiedad de red del índice Shimmel. Con el procesamiento de los datos obtenidos via OTP y R se generó la siguiente figura donde se muestra la media de tiempo de traslados de cada zonificación en el área de estudio:

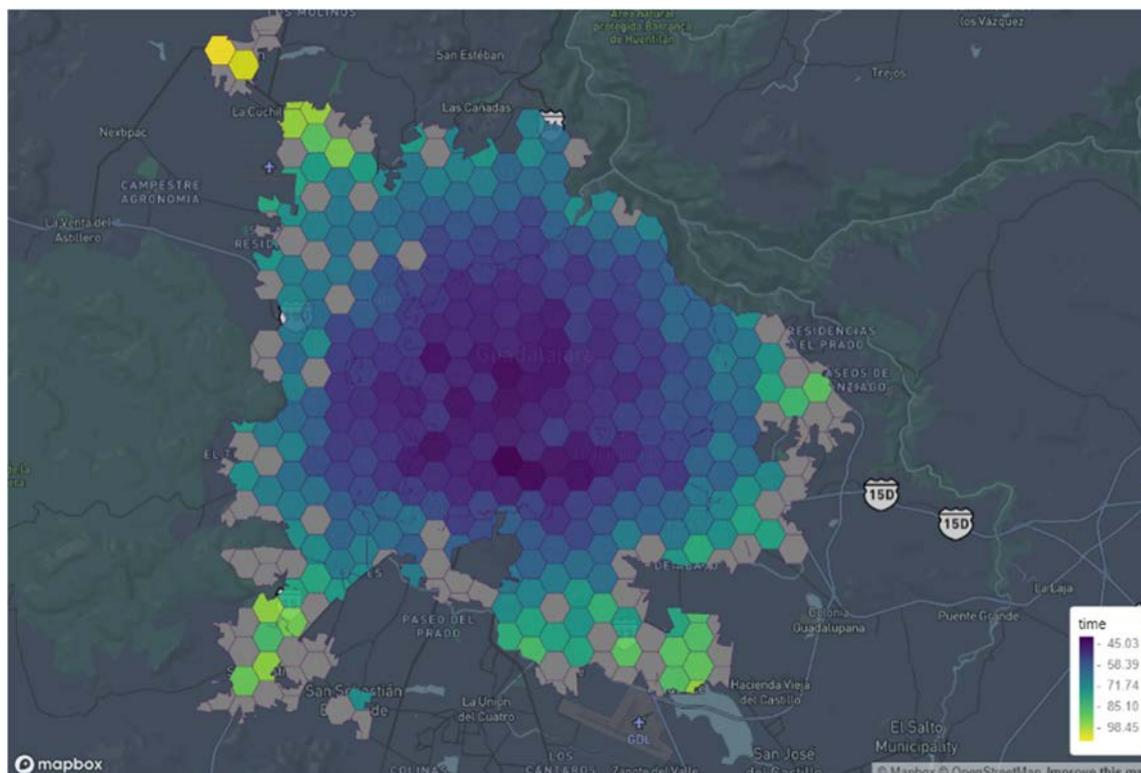


Figura 5: Grado de accesibilidad, red alternativa

La figura 5 muestra el grado de accesibilidad para cada uno de las zonas para el área de servicio. El rango de tiempos medio de traslado varía entre 45 – 98 minutos. Como se puede observar en la figura el centro de la ciudad por su posición geográfica en donde se encuentran menores tiempos de traslado medios en comparación con las periferias que tienen mayores tiempos de traslado. Estos tiempos de traslado no solo están sujetos a la ubicación de cada centroide, sino que en gran medida son afectados por las características geométricas, de frecuencia, de velocidad medias de las unidades, entre otras características estructurales de la red de transporte público. Variaciones en de estas características tendrán un impacto también en los tiempos de traslados de cada zona. Por esta razón el grado de accesibilidad es un indicador muy importante de evaluar de una red a otra. Finalmente, el indicador Shimmel para esta red sería de 66 minutos, esto realmente representaría los tiempos medios de viaje de toda la red.

4.2 Índice Deuter

La fricción espacial está vinculada a la propiedad llamada índice deuter. Con el procesamiento masivo de los datos obtenidos en la matriz $N \times N$ se elaboró la siguiente tabla:

Parámetro	Red alternativa	Unidades
Distancia media sobre la red	18.3	km
Distancia media euclidiana	11.68	km
Índice Deuter	0.63	Adimensional

Tabla 3: Resultados de la fricción espacial

En la tabla 3 se muestra los resultados del análisis sobre la distancia de los viajes generados en el área de servicio. Se puede observar que la distancia media de todos los viajes es de alrededor de 18.3 km, mientras que la distancia euclidiana media de todos los viajes es de 11.68. Esto genera un índice deuter con valor de 0.63. Este es otro indicador de eficiencia en la red de transporte. Redes de transporte con un mayor índice deuter significa que su trazo geométrico permite realizar los viajes más directos en términos espaciales.

4.3 Resiliencia

Como se mencionó anteriormente la resiliencia será abordada por una serie de propiedades las cuales serán indicadores del nivel de vulnerabilidad que tiene la red. Estos indicadores son: betweenness centrality, central point dominance, average path length y spectral gap. La siguiente tabla muestra los resultados vinculados a dichas propiedades:

Parámetros	Red alternativa	Unidades
Valor más alto de betweenness centrality	566,562	adimensional
Valor medio de betweenness centrality	65,153	adimensional
Valor más bajo del betweenness centrality	0	adimensional
Central point dominance	501,714	adimensional
Valor del Average path length en condiciones normales	40,65	Stops
Valor del Average path length removiendo el 10 % de los nodos más críticos	43,02	Stops
Spectral gap	0,1264	adimensional

Tabla 4: Resultados de propiedades de red vinculados a resiliencia

La table 4 muestra los principales resultados de las propiedades vinculadas a la resiliencia y vulnerabilidad de la red de transporte. En el caso del betweenness centrality la tabla 4 muestra 3 valores los cuales son el valor más alto, valor medio y valor más bajo. Esta propiedad genera una contabilización de la frecuencia en que ese nodo (conjunto de paradas) es utilizado como parte del camino más óptimo entre 2 destinos. La contabilización y visualización del betweenness centrality puede generar una apreciación de las zonas más vulnerables de la red dado que perturbaciones de cualquier tipo de estas zonas provocarían afectaciones a una gran cantidad de viajes. En la siguiente figura se observa los valores del betweenness centrality espacialmente:

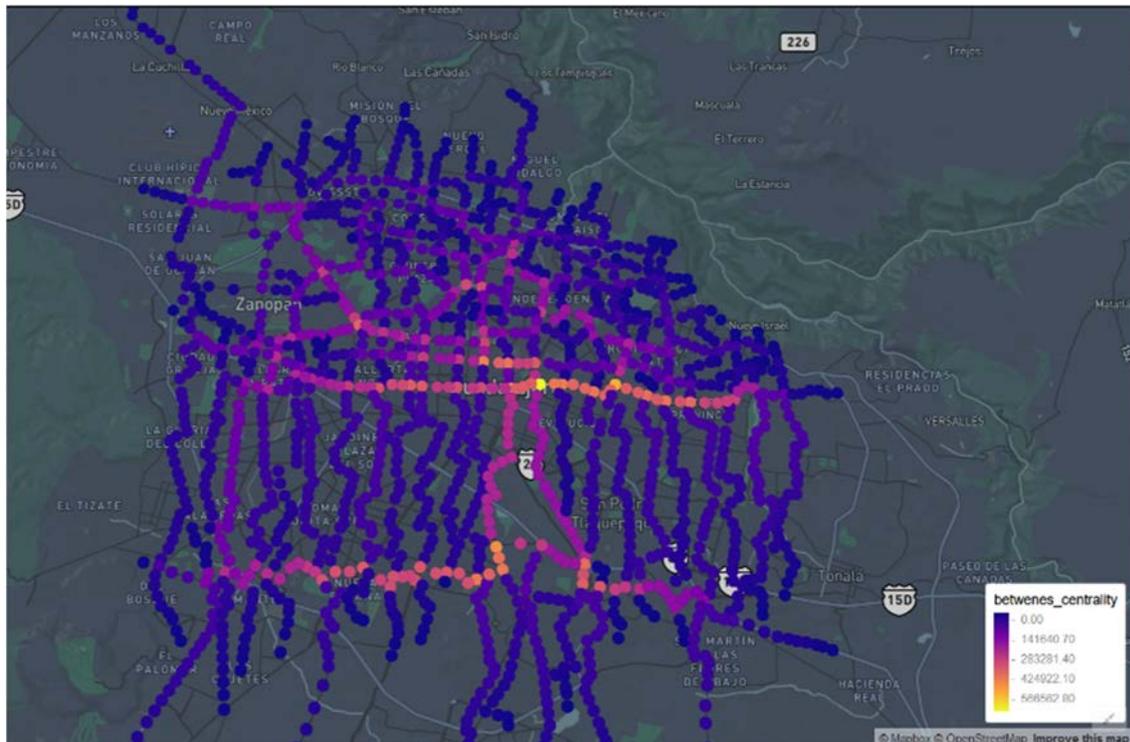


Figura 6: Visualización de los valores de betweenness centrality

Como se muestra en la figura 6 el valor del betweenness centrality en cada nodo varía considerablemente. Existen líneas de transporte con una mayor relevancia en este indicador. Se observa que la parte del centro de la ciudad tiene una especial relevancia. En este sentido los valores del betweenness centrality dan una guía de cuales son las áreas específicas de la ciudad donde se debe de cuidar el funcionamiento óptimo de la red para evitar comprometer el rendimiento de gran parte de la red de transporte.

Por otra parte, otro de las propiedades evaluadas es el central point dominance. Como se expresó anteriormente el central point dominance indicar la diferencia media entre el nodo con mayor centralidad y el resto de los nodos por lo que es un indicador del grado de polarización de los valores de centralidad. En este caso el valor obtenido para la red alternativa fue de 501,714 unidades.

En cuanto al average path length, recordemos que este indicador esta vinculado a la conectividad de la red. En el caso del primer escenario el average path length fue de 40.6 stops. Esto quiere decir que la media de paradas efectuadas en todos los viajes posibles en la red es de 40.6 paradas. A medida que disminuye este valor indica una mayor conectividad de la red puesto que se requieren menos paradas para desplazarse a otros nodos (paradas) de la red. En el caso del segundo escenario se eliminó el 10% de los nodos con mayor centralidad o mayor relevancia dentro de la red para ver las afectaciones a la conectividad. En este caso se obtuvo un average path length de 43 paradas lo que representa un decrecimiento en la conectividad del 6.6%.

Finalmente, el valor del spectral gap obtenido es de 0.126. Dentro de la literatura expuesta en Estrada (2006) esto corresponde a un valor bajo que correspondería a una red con bajos grados de robustez. Para tener un mejor panorama este valor tendrá que ser comparado con el de la red operativa actual.

Los resultados de las propiedades presentados anteriormente obedecen a la red alternativa tomada del trabajo de Barraza (2018). Sin embargo, estos resultados tienen limitantes importantes al no estar comparados con la red operativa u otra red propuesta en el área de servicio. Para que los análisis de propiedades de red tengan sentido en el campo de planeación de la movilidad es necesario tener puntos de referencia como las condiciones de la red actualmente operativa u alguna otra propuesta de red de transporte. Desafortunadamente, para este trabajo no se logró tener acceso a los GTFS de la red actual. Este análisis comparativo quedará postergado y se espera que dentro de un par de meses se tenga acceso a los GTFS de la red actual.

5. CONCLUSIONES

El presente trabajo presenta una metodología para la medición de propiedades de red vinculados al rendimiento en términos de tiempo, espaciales y de resiliencia de los sistemas de transporte público. El análisis de las propiedades de red se realizó para la red alternativa superficial propuesta en Barraza 2018. Los resultados presentados fueron generados a partir de un proceso robusta que asegura la veracidad de los resultados. Sin embargo, dentro del trabajo no se cuenta con puntos de referencia es decir con redes de transporte distintas a esta (que puede ser la actual o alguna otra propuesta) por lo que no es posible de dimensionar si el rendimiento en términos de accesibilidad, fricción especial o resiliencia de la red analizada son positivos o negativos.

Este trabajo se plantea extender para poner en contexto esta comparativa entre la red alternativa ya analizada y la red de transporte actual para tener una mejor comprensión de las mejoras o pérdidas de rendimiento entre ambas redes. Finalmente, este trabajo sirve como base metodológica para la evaluación de las propiedades de red de sistemas de transporte público.

REFERENCIAS

- BARRAZA, O. (2018). Optimal bus network design in Guadalajara metropolitan area. Tesis de Máster en Ciencia y Tecnología de la Sostenibilidad. Universidad Politécnica de Cataluña.
- ESTRADA, E. (2006). Network robustness to targeted attacks. The interplay of expansibility and degree distribution. *The European Physical Journal B*, 52(4), p. 563–574.

GUTIÉRREZ, J., HERRERA, M., PÉREZ-GARCÍA, R., & IZQUIERDO, J. (2011). Aplicación de técnicas de teoría de grafos en el análisis de la vulnerabilidad de redes abastecimiento de agua. X Seminario Iberoamericano de planificación, proyecto y operación de sistemas de abastecimiento de agua (SEREA). Morelia (Michoacán), México, ISBN: 978-84-89487-34-5.

PEREIRA, R. H. M. (2019). Future accessibility impacts of transport policy scenarios: Equity and sensitivity to travel time thresholds for Bus Rapid Transit expansion in Rio de Janeiro. *Journal of Transport Geography*, 74, p. 321–332.

RODRIGUE, J. P. (2020). *The geography of transport systems*. Routledge Ed. ISBN 978-0-367-36463-2.

YAZDANI, A., OTOO, R. A., & JEFFREY, P. (2011). Resilience enhancing expansion strategies for water distribution systems: A network theory approach. *Environmental Modelling & Software*, 26(12), p. 1574-1582.