



# Apuntes de Álgebra y Ecuaciones diferenciales

José Javier Relancio Martínez

Universidad de Burgos  
Escuela Politécnica Superior,  
Departamento de Matemáticas y Computación  
Área de Matemática Aplicada

# Índice general

<b>1. Nociones básicas</b>	<b>4</b>
1.1. Sistemas de ecuaciones lineales . . . . .	4
1.2. Método de Gauss para la resolución de sistemas . . . . .	6
1.3. Matrices . . . . .	10
1.4. Método de Gauss para la obtención de la matriz inversa . . . . .	15
1.5. Determinantes . . . . .	16
1.6. Método de Gauss para la obtención de determinantes . . . . .	22
1.7. Rango de una matriz . . . . .	23
1.8. Determinantes y sistemas de ecuaciones . . . . .	24
1.9. Aplicación: amortiguación . . . . .	25
<b>2. Espacios vectoriales</b>	<b>33</b>
2.1. Espacio vectorial real . . . . .	33
2.2. Subespacios . . . . .	34
2.3. Combinación lineal: dependencia e independencia lineal . . . . .	39
2.4. Sistema generador, bases y dimensión . . . . .	40
2.5. Coordenadas y cambio de base . . . . .	43
2.5.1. Ejemplo de cambios de base . . . . .	44
2.6. Espacio de filas de una matriz . . . . .	46
2.7. Producto interno . . . . .	47
2.8. Norma y distancia . . . . .	48
2.9. Ángulos y ortogonalidad . . . . .	49
2.10. Cambios de bases ortonormales: matrices ortogonales . . . . .	52
2.11. Aplicación: relojes digitales . . . . .	53
<b>3. Aplicaciones lineales</b>	<b>62</b>
3.1. Concepto de aplicación lineal y propiedades . . . . .	62
3.2. Imagen y núcleo de una aplicación lineal . . . . .	64
3.3. Matriz y ecuaciones de una aplicación lineal . . . . .	74
3.4. Semejanza de matrices . . . . .	77
3.5. Aplicación: deformaciones . . . . .	80

<b>4. Diagonalización</b>	<b>94</b>
4.1. Valores y vectores propios . . . . .	94
4.2. Diagonalización . . . . .	98
4.3. Diagonalización ortogonal . . . . .	105
4.4. Aplicación: vibraciones en un coche . . . . .	108
<b>5. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden</b>	<b>119</b>
5.1. Conceptos básicos . . . . .	119
5.2. E.D.O. de primer orden resolubles con respecto a $y'$ . . . . .	121
5.2.1. Ecuaciones de variables separadas . . . . .	121
5.2.2. Ecuaciones homogéneas . . . . .	122
5.2.3. Ecuaciones reducibles a homogéneas . . . . .	124
5.2.4. Ecuaciones lineales . . . . .	128
5.2.5. Ecuaciones de Bernoulli . . . . .	132
5.2.6. Ecuaciones exactas y factores integrantes . . . . .	134
5.3. Aplicación: caída libre . . . . .	140
5.4. Problemas aplicados . . . . .	141
5.4.1. Datación por Radiocarbono . . . . .	141
5.4.2. Población Logística . . . . .	142
5.4.3. Modelado de Proceso Industrial (Volumen Variable) . . . . .	145
5.4.4. Circuito RL en Serie . . . . .	146
5.4.5. Interés Simple vs. Interés Compuesto Continuo . . . . .	148
5.4.6. Modelo de farmacocinética de un compartimento . . . . .	150
<b>6. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior</b>	<b>155</b>
6.1. Conceptos básicos . . . . .	155
6.2. E.D.O. lineales homogéneas de orden superior . . . . .	156
6.3. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes . . . . .	157
6.4. E.D.O. lineales completas de orden superior . . . . .	158
6.4.1. Método de variación de las constantes . . . . .	159
6.4.2. Método de los coeficientes indeterminados . . . . .	160
6.4.3. Ecuación de Euler . . . . .	161
6.5. Aplicación: flexión de una viga . . . . .	163
6.6. Problemas aplicados . . . . .	164
6.6.1. Movimiento del Péndulo Simple . . . . .	164
6.6.2. Sistema Masa-Resorte Amortiguado y Forzado . . . . .	166
6.6.3. Modelado de Dinámica de Poblaciones Forzadas . . . . .	167
<b>7. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales</b>	<b>173</b>
7.1. Conceptos básicos . . . . .	173
7.2. S.E.D.O. lineales homogéneos . . . . .	175
7.2.1. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes . . . . .	177
7.3. Aplicación: modelización de terremotos . . . . .	182

7.4. Problemas aplicados . . . . .	185
7.4.1. Circuito Eléctrico (Red RL Acoplada) . . . . .	185
7.4.2. Problema de Mezclas . . . . .	187
7.4.3. Serie de Desintegración Radiactiva . . . . .	188
7.4.4. Modelo de brote zombie (S-I-Z-R) . . . . .	189
7.4.5. Dinámica del Amor: Romeo y Julieta . . . . .	193

# Capítulo 1

## Nociones básicas

### 1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

**Definición 1.1.1.** Una ecuación lineal en “ $n$ ” variables (o incógnitas)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es una relación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (coeficientes), y  $b$  (término independiente) son constantes reales.

**Ejemplo.** Son ecuaciones lineales:  $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2$ ,  $x - y + 2z = 1$ .

No son ecuaciones lineales:  $x_1x_2 + 3x_3 = 4$ ,  $x^2 + y - z = 1$ .

**Definición 1.1.2.** Una solución de una ecuación lineal en “ $n$ ” variables es una sucesión de “ $n$ ” números  $s_1, s_2, \dots, s_n$  tales que al sustituir  $x_1$  por  $s_1$ ,  $x_2$  por  $s_2$ ,  $\dots$ ,  $x_n$  por  $s_n$  en la ecuación queda una igualdad. Al conjunto de todas las soluciones de la ecuación se le denomina **conjunto solución**. Cada una de las soluciones del conjunto solución se denomina **solución particular**.

**Ejemplo.**  $x = 1, y = 0, z = 0$  es una solución particular de  $x - y + 2z = 1$ .

El conjunto solución es

$$\begin{cases} x = 1 - 2s + t \\ y = t \\ z = s \end{cases},$$

donde  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Las soluciones particulares se obtienen dando valores concretos a  $t$  y  $s$ .

**Definición 1.1.3.** Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales.

Sistema de “ $m$ ” ecuaciones y “ $n$ ” incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (\text{I})$$

**Definición 1.1.4.** Una solución del sistema de ecuaciones lineales (I) es una sucesión de “ $n$ ” números  $s_1, s_2, \dots, s_n$  tales que al sustituir  $x_1$  por  $s_1$ ,  $x_2$  por  $s_2$ ,  $\dots$ ,  $x_n$  por  $s_n$ , se satisfacen todas las ecuaciones del sistema. Al conjunto de todas las soluciones de un sistema se le denomina **conjunto solución**.

**Ejemplo.**

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

es un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas. Una solución particular es, por ejemplo,  $x = 2, y = 0, z = 2$ .

Vemos a continuación cómo encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales (lo llamaremos, sin más, **solución**)

**Definición 1.1.5.** Dado el sistema (I), sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$A$  se llama matriz de coeficientes,  $B$  matriz o vector de términos independientes y  $X$ , matriz o vector de incógnitas. A partir de  $A$  y  $B$  se construye la matriz ampliada o matriz del sistema:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

**Definición 1.1.6.** Un sistema se dice que es compatible si tiene alguna solución. Compatible determinado (S.C.D.) si la solución es única y compatible indeterminado (S.C.I.) si tiene infinitas soluciones. Un sistema se dice que es incompatible (S.I.) si no tiene solución.

Más adelante (Teorema 7.1.1) veremos que todo sistema de ecuaciones lineales es de uno de estos tipos: no tiene solución, tiene exactamente una solución o tiene infinitas soluciones.

Sea el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} .$$

Cada una de las ecuaciones anteriores representa en el plano una recta (que llamamos “ $r_1$ ” y “ $r_2$ ”), y cada uno de los puntos de dichas rectas son las soluciones de la correspondiente ecuación. En consecuencia la solución del sistema sería (si existe) el punto de intersección de las dos rectas. Existen tres casos (y solo tres) posibles:

- Si  $r_1$  y  $r_2$  son coincidentes el sistema tiene infinitas soluciones (**S.C.I.**).
- Si  $r_1$  y  $r_2$  son paralelas no coincidentes el sistema no tiene solución (**S.I.**).
- Si  $r_1$  y  $r_2$  se cortan el sistema tiene una única solución (**S.C.D.**).

## 1.2. Método de Gauss para la resolución de sistemas

El método básico para resolver un sistema es en esencia el método de reducción. Consiste en reemplazar el sistema por un nuevo sistema (que tenga el mismo conjunto solución) y que sea “más fácil” de resolver.

Este nuevo sistema se obtiene aplicando a las filas de la matriz ampliada (que sería lo mismo que hacerlo con las ecuaciones), los siguientes tres tipos de operaciones que se denominan **operaciones elementales**.

1. Multiplicar una fila (“ $i$ ”) por una constante ( $k$ ) distinta de cero:  $kF_i$ .
2. Intercambiar dos filas (“ $i$ ” y “ $j$ ”):  $F_i \leftrightarrow F_j$ .
3. A una fila (“ $i$ ”), sumarle un múltiplo ( $k$ ) de otra fila (“ $j$ ”):  $F_i + kF_j$ .

**Definición 1.2.1.** Dos sistemas de ecuaciones lineales se dice que son sistemas equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

**Teorema 1.2.1.** Si efectuamos cualquier operación elemental en un sistema de ecuaciones lineales, el nuevo sistema es equivalente al anterior.

**Ejercicio.** Demostrar el teorema anterior.

El Método de Gauss consiste en reducir, mediante operaciones elementales, la matriz ampliada de un sistema hasta llegar a una matriz que deberá tener “determinadas” características para poder resolver el sistema a simple vista o mediante unos sencillos cálculos.

Las características que buscaremos en la matriz son las siguientes:

1. Si una fila no consta exclusivamente de ceros, el primer elemento distinto de cero es un uno (llamado **1 principal**).
2. Las filas que tengan todos sus elementos cero, han de estar situadas en la parte inferior de la matriz.
3. Cada dos filas consecutivas, el primer elemento distinto de cero de la inferior está a la derecha del primer elemento distinto de cero de la superior.

**Definición 1.2.2.** Se denomina matriz escalonada (M.E.) a una matriz que verifique las tres propiedades anteriores.

Así, una matriz escalonada tiene más o menos este aspecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(las estrellitas representan números reales cualesquiera).

**Observación.** El Método de Gauss-Jordan consiste en seguir realizando operaciones elementales en la matriz hasta conseguir ceros “encima” de los 1 principales.

**Ejemplo.** Reducir a la forma escalonada la matriz ampliada del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 - 12x_5 = 28 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases} .$$

*Solución:* La matriz del sistema es:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array} \right).$$

(1) Buscamos una fila con un elemento no nulo lo más a la izquierda posible. En este caso, la segunda ( $F_2$ ), pues la primera empieza por dos ceros. Intercambiamos estas dos filas (Operación elemental  $F_1 \leftrightarrow F_2$ ):

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array} \right).$$

(2) Dividimos todos los elementos de  $F_1$  por el primer elemento no nulo ( $\frac{1}{2}F_1$ ) (las filas  $F_2$  y  $F_3$  se quedan como estaban):

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array} \right).$$

(3) Sumamos a cada una de las filas de debajo  $kF_1$ , donde  $k$  se elige para cada fila de manera que debajo del 1 principal de  $F_1$  queden ceros. En este caso, sólo necesitamos hacerlo para la tercera fila, con la operación ( $F_3 - 2F_1$ ):

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array} \right).$$

Ahora, olvidamos la primera fila y repetimos los pasos (1), (2) y (3) con las restantes:

(1) Las dos filas que quedan,  $F_2$  y  $F_3$ , tienen el primer elemento no nulo en la misma columna - la tercera -; no necesitamos intercambiar filas.

(2) Dividimos todos los elementos de  $F_2$  por el primer elemento no nulo ( $-\frac{1}{2}F_2$ ):

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array} \right).$$

(3) Sumamos a  $F_3$  la operación ( $F_3 - 5F_2$ ):

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{array} \right).$$

(1) No hay que hacer nada.

(2) Multiplicamos  $F_3$  por 2 ( $2F_3$ ):

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

(3) No hay que hacer nada.

Ya hemos obtenido una matriz escalonada. □

**Definición 1.2.3.** Una vez que hemos reducido la matriz del sistema a la forma de matriz escalonada se llaman **variables principales** a las variables que corresponden a algún primer elemento distinto de cero de una fila (hay tantas como filas no nulas en la matriz de coeficientes del sistema) y se llaman **variables secundarias** a las que no son principales.

**Teorema 1.2.2.** Un sistema, reducido ya a forma escalonada, es:

- Incompatible cuando tiene alguna fila con todos ceros menos el último.
- Compatible determinado cuando todas las variables son principales. La solución se obtiene por sustitución comenzando por la última variable.
- Compatible indeterminado cuando hay variables secundarias. La solución se obtiene igualando las variables secundarias a parámetros distintos y despejando las principales en función de las secundarias.

**Ejemplo.** Resolver por el método de Gauss el sistema del ejemplo anterior.

*Solución:* La matriz escalonada del sistema es:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right),$$

que corresponde al sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 14 \\ x_3 - \frac{7}{2}x_5 = -6 \\ x_5 = 2 \end{cases}.$$

Observamos que las variables principales son  $x_1$ ,  $x_3$  y  $x_5$  y las variables secundarias son  $x_2$  y  $x_4$ . Se obtiene:

$$x_2 = \mu \quad x_4 = \lambda \quad (\text{Asignamos parámetros a las variables secundarias}),$$

$$x_5 = 2,$$

$$x_3 = -6 + \frac{7}{2}x_5 \implies x_3 = -6 + \frac{7}{2}(2) = -6 + 7 = 1,$$

$$x_1 = 14 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 - 6x_5,$$

$$x_1 = 14 - 2(\mu) + 5(1) - 3(\lambda) - 6(2),$$

$$x_1 = 14 - 2\mu + 5 - 3\lambda - 12,$$

$$x_1 = 7 - 2\mu - 3\lambda.$$

Entonces, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 2\mu - 3\lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = 1 \\ x_4 = \lambda \\ x_5 = 2 \end{cases} \quad \mu, \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

**Definición 1.2.4.** Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo si la matriz de sus términos independientes es toda de ceros.

Todo sistema homogéneo de ecuaciones lineales es compatible ya que  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$  es siempre solución del sistema. A esta solución se le llama solución trivial. Si hay otras soluciones se llaman **soluciones no triviales**.

**Teorema 1.2.3.** Un sistema homogéneo con menos ecuaciones que incógnitas es siempre compatible indeterminado.

## 1.3. Matrices

En el apartado anterior hemos utilizado matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Ahora damos una definición formal de matriz y vemos las propiedades generales de las matrices.

**Definición 1.3.1.** Una matriz es un conjunto de números ordenados en una tabla rectangular por filas y columnas. El **tamaño** de una matriz es el número de filas y de columnas que tiene: si tiene  $m$  filas y  $n$  columnas, se pone  $m \times n$ . Los elementos de una matriz son los números que la forman.

**Observación.** En general, designaremos con letras mayúsculas a las matrices y por minúsculas a sus elementos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} A = (a_{ij})_{i,j} \text{ es la matriz.} \\ a_{ij} \text{ es el elemento de la fila } i, \text{ columna } j. \\ A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ (si los elementos son reales).} \end{array}$$

**Notación:**

- Matriz fila es la que sólo tiene una fila:  $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ .
- Matriz columna es la que sólo tiene una columna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

- Matriz cero es aquella cuyos elementos son todos nulos.
- Matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas. Se llama diagonal de una matriz cuadrada a los elementos  $a_{ii}$ .

- Matriz identidad es una matriz cuadrada tal que todos sus elementos son nulos excepto los de la diagonal, que son unos:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- Matriz diagonal es una matriz cuadrada que tiene todos ceros fuera de la diagonal.
- Dos matrices son iguales cuando tienen el mismo tamaño y los elementos correspondientes son iguales.

**Definición 1.3.2.** Sean  $A$  y  $B$  matrices del mismo tamaño,  $m \times n$ .

- Se define su suma como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Sean  $\lambda$  un escalar ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) y  $A$  una matriz  $m \times n$ . Se define el producto del escalar por la matriz como:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Sean  $A$  y  $B$  matrices del mismo tamaño  $m \times n$ . Se define su diferencia como  $A - B = A + (-1)B$ .
- Sean  $A \in M_{m \times n}$  y  $B \in M_{n \times p}$  (es decir, el número de columnas de  $A$  coincide con el número de filas de  $B$ ).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

Entonces, el **producto**  $AB$  es una matriz  $C = (c_{ij})_{i,j} \in M_{m \times p}$  cuyos elementos  $c_{ij}$  se obtienen de la siguiente forma:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

**Observación.** El producto de matrices **no es conmutativo**. Puede ocurrir que sea posible hacer la operación  $AB$ , pero no  $BA$  (por cuestión de dimensiones). Incluso cuando ambas operaciones son posibles, el resultado puede no ser el mismo (comprobarlo con las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ).

**Notación:** Si  $A \in M_{m \times n}$ , podemos poner:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix},$$

donde  $A_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ .

Análogamente, si  $B \in M_{n \times p}$ , ponemos  $B = (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_p)$ , donde

$$B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Entonces podemos escribir:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_p) = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \dots & A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \dots & A_2B_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \dots & A_mB_p \end{pmatrix}.$$

Con esta notación, resulta:

$$c_{ij} = A_iB_j, \quad C = (AB)_{ij} = (A_iB_j)_{ij}.$$

**Ejercicio.**

- Comprobar que, si  $A \in M_{m \times n}$ , se cumple que  $AI_n = I_m A = A$
- Comprobar que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

**Teorema 1.3.1.** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  matrices de las dimensiones adecuadas, y  $\lambda$  y  $\mu$  números reales. Entonces, las operaciones que acabamos de definir tienen las siguientes propiedades:

Para la suma:

1. Conmutativa:  $A + B = B + A$ .
2. Asociativa:  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .

Para el producto:

3. Asociativa:  $(AB)C = A(BC)$ .

Para la suma y el producto:

4. Distributivas:  $A(B + C) = AB + AC$ ,  $(A + B)C = AC + BC$ .

Para el producto por un escalar y la suma:

5. Pseudodistributivas:  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ,  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ .

Para el producto por un escalar y el producto:

6. Pseudoasociativas:  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ ,  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ .

**Observación.** En general:

1.  $AB = AC \not\Rightarrow B = C$ .
2.  $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$  ó  $B = 0$ .

Como contraejemplo para (1), sirven las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

como contraejemplo para (2), podemos tomar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio.** Si  $A$  es una matriz  $m \times n$  y  $0$  es la matriz cero de las dimensiones adecuadas en cada caso, ver que:

1.  $A + 0 = 0 + A = A$ .
2.  $A - A = 0$ .
3.  $0 \cdot A = -A$ .

$$4. A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0.$$

**Definición 1.3.3.** Sea  $A \in M_{m \times n}$ . Se llama traspuesta de  $A$ , y se denota por  $A^t$ , a la matriz cuyas filas son las columnas de  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n \times m}.$$

**Teorema 1.3.2.** Se verifican las siguientes propiedades:

1.  $(A^t)^t = A$ .
2.  $(A + B)^t = A^t + B^t$ .
3.  $(\lambda A)^t = \lambda A^t$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).
4.  $(AB)^t = B^t A^t$ .

**Definición 1.3.4.**

Una matriz se dice que es simétrica cuando es cuadrada y coincide con su traspuesta:  $A \in M_{n \times n} \text{ — } A^t = A$ .

Una matriz se dice que es **antisimétrica** cuando es cuadrada y su opuesta coincide con su traspuesta:  $A \in M_{n \times n} \text{ — } A^t = -A$ .

**Ejercicio.** Poner ejemplos concretos de matrices simétricas y antisimétricas de orden 2 y 3.

**Definición 1.3.5.** Dado el sistema (I) de la definición 1.1.3 sea la matriz de coeficientes  $A$  y los vectores de términos independientes y de incógnitas  $B$  y  $X$  respectivamente, definidos en 1.1.5. Entonces, si utilizamos el producto matricial que acabamos de definir, podemos escribir el sistema como  $AX = B$  llamada expresión matricial del sistema de ecuaciones lineales.

**Teorema 1.3.3.** Un sistema de ecuaciones lineales  $AX = B$  tiene o bien una sola solución, o bien infinitas, o bien ninguna.

*Demostración.* Vale con demostrar que si un sistema tiene dos soluciones distintas entonces tiene infinitas:

Sean  $S$  y  $T$  dos soluciones distintas:

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Por ser  $S$  y  $T$  soluciones del sistema se cumple  $AS = B$  y  $AT = B$ ; entonces, para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda S + (1 - \lambda)T$  también es solución del sistema pues:

$$A(\lambda S + (1 - \lambda)T) = \lambda AS + (1 - \lambda)AT = \lambda(AS) + AT - \lambda(AT) = \lambda B + B - \lambda B = B.$$

Como hay infinitos  $\lambda \in \mathbb{R}$ , resulta que el sistema tiene infinitas soluciones.  $\square$

**Definición 1.3.6.** Sea  $A \in M_{n \times n}$  (cuadrada). Se dice que  $A$  es inversible si  $\exists B \in M_{n \times n} | AB = BA = I_n$ . En este caso, se dice que  $B$  es inversa de  $A$ .

**Teorema 1.3.4.** Si una matriz  $A$ , tiene inversa, ésta es única (se escribe  $A^{-1}$ ).

*Demostración.* Sea  $A$  una matriz inversible, sean  $B$  y  $C$  inversas de  $A$ . Entonces:

$$B(AB) = BI_n = B, \quad (AB)C = I_n C = C.$$

$$B(AB)C = BC, \quad B(AB)C = BC.$$

$\square$

**Teorema 1.3.5.** Sean  $A$  y  $B$  matrices inversibles del mismo tamaño. Entonces  $AB$  es inversible y su inversa es  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**Teorema 1.3.6.** Sean  $A$  una matriz inversible y  $\lambda$  un número real no nulo. Entonces:

1.  $\lambda A$  es inversible y  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ .
2.  $A^{-1}$  es inversible y  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
3.  $A^n$  es inversible y  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
4.  $A^t$  es inversible y  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

**Ejercicio.** Demostrar estos dos últimos teoremas.

## 1.4. Método de Gauss para la obtención de la matriz inversa

Veremos con ejemplos un método que nos permite saber si una matriz cuadrada es inversible o no, y en el caso de ser inversible encontrar su inversa.

Una matriz es inversible si y solo si a partir de ella y realizando operaciones elementales se puede llegar a la matriz identidad. En este caso su matriz inversa es la que se obtiene al realizar las mismas operaciones elementales a partir de la matriz identidad.

La justificación de este método requiere el estudio de las llamadas matrices elementales, que no trataremos.

**Ejemplo.** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ver, por el método de Gauss si es inversible y en ese caso hallar su inversa.

*Solución:*

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}F_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 - F_3 \\ F_2 - F_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right).$$

Por tanto la matriz es inversible y su inversa es la matriz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

□

**Ejercicio.** Hallar la inversa por el método de Gauss de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  (si existe).

## 1.5. Determinantes

**Definición 1.5.1.** Una permutación del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  es toda posible reordenación de sus elementos. Ya sabemos que hay  $n!$  reordenaciones distintas. Una de estas permutaciones se escribe  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ .

Llamamos  $P(n)$  al conjunto de todas las permutaciones de  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

Si  $(i_1, i_2, \dots, i_r, \dots, i_s, \dots, i_n)$  es una permutación, se dice que los elementos  $i_r$  e  $i_s$  forman una **inversión** cuando  $i_r > i_s$ , es decir, cuando no están colocados según su orden natural.

**Ejemplo.**  $P(3) = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ .

- En la primera permutación no hay inversiones.
- En la segunda hay una: el 3 con el 2.

- En la tercera hay una: el 2 con el 1.
- En la cuarta hay dos: el 2 con el 1 y el 3 con el 1.
- En la quinta hay dos: el 3 con el 1 y el 3 con el 2.
- En la sexta hay tres: el 3 con el 2, el 3 con el 1 y el 2 con el 1.

**Definición 1.5.2.** Una permutación se dice que es par cuando tiene un número par de inversiones (en el ejemplo anterior, son pares la primera permutación, la cuarta y la quinta). En este caso, la **signatura de la permutación** es  $+1$ . Una permutación es impar cuando tiene un número impar de inversiones (en el ejemplo anterior, son impares la segunda permutación, la tercera y la sexta). En este caso, la **signatura de la permutación** es  $-1$ .

Para denotar la signatura de una permutación  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  se escribe  $\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)$ .

**Definición 1.5.3.** Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Se llama determinante de  $A$ , y se escribe  $\det(A)$  o  $|A|$ , al número  $\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in P(n)} \sigma(i_1, i_2, \dots, i_n) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ . Habrá  $n!$  sumandos, uno por cada permutación.

**Ejemplo.** Para una matriz  $2 \times 2$ :  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ;  $P(2) = \{(1, 2), (2, 1)\}$ .

Permutación	Signatura	Sumando
(1, 2)	+1	$a_{11}a_{22}$
(2, 1)	-1	$a_{12}a_{21}$

Entonces, queda:  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Como regla práctica, para calcular el determinante de una matriz de  $2 \times 2$ , se multiplica en cruz y se resta el producto correspondiente a la diagonal secundaria del correspondiente a la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = -5 - 8 = -13.$$

**Ejemplo.** Para una matriz  $3 \times 3$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$P(3) = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

Permutación	Signatura	Sumando
(1, 2, 3)	+1	$a_{11}a_{22}a_{33}$
(1, 3, 2)	-1	$a_{11}a_{23}a_{32}$
(2, 1, 3)	-1	$a_{12}a_{21}a_{33}$
(2, 3, 1)	+1	$a_{12}a_{23}a_{31}$
(3, 1, 2)	-1	$a_{13}a_{21}a_{32}$
(3, 2, 1)	+1	$a_{13}a_{22}a_{31}$

Entonces queda:  $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$ .

Como regla práctica: multiplicamos los elementos unidos por líneas, cambiamos de signo a los de la derecha, y sumamos todo (**Regla de Sarrus**).

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 + 12 + 6 + 2 + 12 - 12 = 24.$$

**Teorema 1.5.1.** Propiedades de los determinantes. Sea  $A$  una matriz cuadrada. Entonces:

1.- Si multiplicamos todos los elementos de una fila de  $A$  por una constante  $k$ , el valor del determinante de la matriz resultante es  $k|A|$ .

Consecuencias:

- (a) Si una matriz tiene una fila de ceros, su determinante vale cero.
- (b) Si  $A \in M_{n \times n}$ ,  $|kA| = k^n|A|$ .

2.- Si intercambiamos las posiciones de dos filas, el valor del determinante cambia de signo.

Consecuencias:

- (a) Si una matriz tiene dos filas iguales, su determinante es cero.
- (b) Si en una matriz una fila es múltiplo de otra, su determinante es 0.

3.-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Consecuencia: Si a una fila le sumamos otra multiplicada por una constante, el valor del determinante no varía.

4.- El determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta:  $|A^t| = |A|$ .

Consecuencia: Las tres propiedades anteriores y sus consecuencias también son válidas para columnas.

**Teorema 1.5.2.** Si  $A$  es una matriz cuadrada entonces:  $A$  es inversible  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ .

**Teorema 1.5.3.** Si  $A$  y  $B \in M_{n \times n}$ , el determinante del producto es el producto de los determinantes:  $|AB| = |A||B|$ .

**Ejercicio.** Demostrar

a) Si  $A$  es inversible, entonces  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ .

b) Si  $A$  y  $B \in M_{n \times n}$  se cumple  $|AB| = |BA|$ .

**Teorema 1.5.4.** Si  $A$  y  $B \in M_{n \times n}$  tal que  $AB = I_n$  entonces existe  $A^{-1}$  y  $B = A^{-1}$ .

**Ejercicio.** Demostrar el teorema anterior.

**Definición 1.5.4.** Sea  $A$  una matriz cuadrada. Se llama **menor del elemento**  $a_{ij}$ , escrito  $m_{ij}$ , al determinante de la matriz que se obtiene al suprimir de  $A$  la fila  $i$  y la columna  $j$ .

Se llama **adjunto del elemento**  $a_{ij}$ , escrito  $\alpha_{ij}$ , al número  $(-1)^{i+j}m_{ij}$ . Se define la matriz adjunta de  $A$  como:  $\text{adj}(A) = (\alpha_{ij})_{i,j}$ .

**Teorema 1.5.5.** Desarrollo por los elementos de una línea. Sea  $A$  una matriz cuadrada. Entonces:

1. Desarrollo por elementos de una fila y adjuntos de la misma fila:  $|A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \dots + a_{in}\alpha_{in}$ .
2. Desarrollo por elementos de una fila y adjuntos de otra fila:  $a_{i1}\alpha_{j1} + a_{i2}\alpha_{j2} + \dots + a_{in}\alpha_{jn} = 0$  ( $i \neq j$ ).
3. Desarrollo por elementos de una columna y adjuntos de la misma columna:  $|A| = a_{1i}\alpha_{1i} + a_{2i}\alpha_{2i} + \dots + a_{ni}\alpha_{ni}$ .
4. Desarrollo por elementos de una columna y adjuntos de otra columna:  $a_{1i}\alpha_{1j} + a_{2i}\alpha_{2j} + \dots + a_{ni}\alpha_{nj} = 0$  ( $i \neq j$ ).

**Ejemplo.** Calcular el determinante de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Solución:* Para calcular el determinante de la matriz  $A$ , utilizaremos el método de expansión por cofactores. La mejor fila para expandir es la Fila 2, ya que contiene dos ceros, lo que simplificará los cálculos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinante de  $A$  expandiendo por la Fila 2 es:

$$\begin{aligned}|A| &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + a_{24}C_{24}, \\|A| &= (1) \cdot C_{21} + (2) \cdot C_{22} + (0) \cdot C_{23} + (0) \cdot C_{24}, \\|A| &= 1 \cdot (-1)^{2+1}M_{21} + 2 \cdot (-1)^{2+2}M_{22}, \\|A| &= -1 \cdot M_{21} + 2 \cdot M_{22}.\end{aligned}$$

Donde  $M_{21}$  y  $M_{22}$  son los menores (determinantes de las submatrices).

**1. Calcular  $M_{21}$**

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Expandimos por la Fila 3 (que también tiene un cero):

$$\begin{aligned}M_{21} &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \\M_{21} &= 3 \cdot ((3)(5) - (-1)(-2)) - 3 \cdot ((1)(5) - (-1)(1)), \\M_{21} &= 3 \cdot (15 - 2) - 3 \cdot (5 + 1), \\M_{21} &= 3 \cdot (13) - 3 \cdot (6), \\M_{21} &= 39 - 18, \\M_{21} &= 21.\end{aligned}$$

**2. Calcular  $M_{22}$**

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Expandimos por la Columna 1 (que tiene un cero):

$$\begin{aligned}M_{22} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, \\M_{22} &= 2 \cdot ((-2)(0) - (5)(3)) + 1 \cdot ((3)(5) - (-1)(-2)), \\M_{22} &= 2 \cdot (0 - 15) + 1 \cdot (15 - 2), \\M_{22} &= 2 \cdot (-15) + 1 \cdot (13), \\M_{22} &= -30 + 13, \\M_{22} &= -17.\end{aligned}$$

**3. Calcular el determinante de  $A$**

Ahora sustituimos los valores de  $M_{21}$  y  $M_{22}$  en la fórmula original:

$$\begin{aligned}|A| &= -1 \cdot M_{21} + 2 \cdot M_{22} \\|A| &= -1 \cdot (21) + 2 \cdot (-17) \\|A| &= -21 - 34 \\|A| &= -55.\end{aligned}$$

El determinante de la matriz  $A$  es  $-55$ . □

**Teorema 1.5.6.** Si  $A$  es una matriz inversible entonces  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}(A))^t$ .

**Ejemplo.** Calcular la inversa de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Solución:* **1. Calcular el determinante de  $A$**  Calculamos el determinante expandiendo por la primera fila:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \\ |A| &= 1((1)(0) - (1)(1)) - 0 + 1((0)(1) - (1)(1)), \\ |A| &= 1(-1) + 1(-1) = -2. \end{aligned}$$

Como  $|A| = -2 \neq 0$ , la matriz  $A$  es inversible.

**2. Calcular la matriz de cofactores  $\text{adj}(A)$**  La matriz de cofactores (o adjunta),  $\text{adj}(A)$ , se calcula con los menores con signo  $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ .

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Calculando cada determinante  $2 \times 2$ :

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} (0-1) & -(0-1) & (0-1) \\ -(0-1) & (0-1) & -(1-0) \\ (0-1) & -(1-0) & (1-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**3. Calcular la traspuesta de la adjunta,  $(\text{adj}(A))^t$**

$$(\text{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(En este caso particular, la matriz adjunta es simétrica, por lo que es igual a su traspuesta).

**4. Aplicar la fórmula de la inversa**

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|}(\text{adj}(A))^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

## 1.6. Método de Gauss para la obtención de determinantes

**Definición 1.6.1.** Se dice que una matriz  $A \in M_{n \times n}$  es triangular cuando o bien todos los elementos situados debajo de la diagonal son nulos (triangular superior) o bien todos los elementos situados encima de la diagonal son nulos (triangular inferior).

**Teorema 1.6.1.** El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal. En particular, el determinante de una matriz diagonal será también el producto de los elementos de la diagonal por tanto el determinante de  $I_n$  es 1.

El método de Gauss para el cálculo de determinantes consiste en hacer operaciones elementales hasta obtener una matriz triangular, cuyo determinante es fácil de calcular a partir del teorema anterior. Hay que tener en cuenta que al hacer operaciones elementales el determinante va cambiando según las propiedades enunciadas en el apartado anterior (1.5.1).

**Ejemplo.** Calcular el determinante de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Solución:*

$$\begin{aligned}
 |A| & \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_4 - F_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 + 3F_2 \\ F_4 - F_2}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & 16 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\frac{1}{5}F_4} 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 16 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{F_4 + 9F_3} -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7 = -35.
 \end{aligned}$$

□

## 1.7. Rango de una matriz

**Definición 1.7.1.** Sea  $A \in M_{m \times n}$  (no necesariamente cuadrada). Consideremos todas las submatrices cuadradas que tenga  $A$ . El tamaño de la mayor de estas submatrices cuyo determinante no sea nulo es el **rango de  $A$** . Se denota por  $\text{rg}(A)$ .

**Teorema 1.7.1.** Se verifican las siguientes propiedades:

1.  $A \in M_{m \times n} \Rightarrow \text{rg}(A) \leq \min(m, n)$ .
2. Si  $A \in M_{n \times n}$  entonces  $\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$ .
3.  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$ .

**Teorema 1.7.2.** El rango de una matriz no se altera al hacer operaciones elementales sobre ella.

**Ejercicio.** Demostrar los dos teoremas anteriores.

**Definición 1.7.2.** Este último teorema nos permite redefinir el rango de una matriz  $A$  de la siguiente forma: hacemos operaciones elementales sobre  $A$  hasta obtener una matriz escalonada  $B$ . Entonces, **el rango de  $A$  es el número de filas no nulas de  $B$** .

**Ejemplo.** Hallar el rango de la matriz 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Solución:* Observamos que la Fila 5 es idéntica a la Fila 1. Por lo tanto, la operación  $F_5 - F_1 \rightarrow F_5$  la convertirá en una fila de ceros.

$$\xrightarrow{F_5 - F_1 \rightarrow F_5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hacemos cero el primer elemento de la Fila 3:

$$\xrightarrow{F_3 - 2F_1 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora usamos el pivote de la Fila 2 (el 1 en la posición (2,2)) para hacer ceros debajo de él:

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{F_3+4F_2 \rightarrow F_3} \\ \xrightarrow{F_4-F_2 \rightarrow F_4} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, usamos el pivote de la Fila 3 (el 7 en (3,3)) para hacer cero el elemento (4,3):

$$\xrightarrow{F_4+\frac{3}{7}F_3 \rightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 83/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hemos llegado a una matriz escalonada  $B$ . Contamos el número de filas no nulas.

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} & 16 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{83/7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hay 4 filas no nulas. Por lo tanto,  $\text{rango}(A) = 4$ . □

## 1.8. Determinantes y sistemas de ecuaciones

**Teorema 1.8.1** (Regla de Cramer). Sea  $A$  una matriz inversible de orden  $n$ . Sabemos que en este caso el sistema  $AX = B$  tiene solución única  $X \in M_{n \times 1}$ . Entonces:  $x_i = \frac{|A_i^*|}{|A|}$ , donde  $A_i^*$  representa la matriz que resulta de sustituir la columna  $i$  de  $A$  por la matriz columna  $B$ .

**Teorema 1.8.2** (Teorema de Rouché-Fröbenius). Sean  $A \in M_{m \times n}$  y  $B \in M_{m \times 1}$ .

El sistema  $AX = B$  es compatible  $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A|B)$ .

De aquí podemos deducir que:

- Si  $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|B)$ , el sistema es incompatible.
- Si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = n$  (número de incógnitas), el sistema es compatible determinado.
- Si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) < n$ , el sistema es compatible indeterminado.

## 1.9. Aplicación: amortiguación

El modelado de un sistema de amortiguación de dos masas es una técnica de la Ingeniería Mecánica que se utiliza para analizar el comportamiento de un sistema mecánico que consta de dos masas conectadas por un resorte y un amortiguador. Este sistema se utiliza comúnmente en aplicaciones como sistemas de suspensión de vehículos y sistemas de protección sísmica.

Para modelar el sistema, se utilizan las leyes de Newton para escribir las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de las dos masas en términos de las fuerzas que actúan sobre ellas. Luego, estas ecuaciones diferenciales se resuelven para obtener la respuesta del sistema en términos de las variables de interés, como la posición y la velocidad de las masas.

La respuesta del sistema se puede analizar para determinar cómo se comportará el sistema en diferentes condiciones, como durante una vibración o una perturbación externa. El modelado de un sistema de amortiguación de dos masas también se puede utilizar para diseñar sistemas de amortiguación más efectivos y eficientes para aplicaciones específicas.

Para simplificar el tratamiento (el uso de ecuaciones diferenciales se estudiará en la segunda parte del curso), vamos a considerar un sistema estático [1]. En concreto, consideramos dos masas conectadas por 3 muelles en serie, con constantes de elasticidad  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ , y longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  en estado de reposo, que a su vez están conectados a dos paredes  $A$  y  $B$ , de modo que la longitud total del sistema es  $L$ , como se puede ver en la Fig. 1.1.

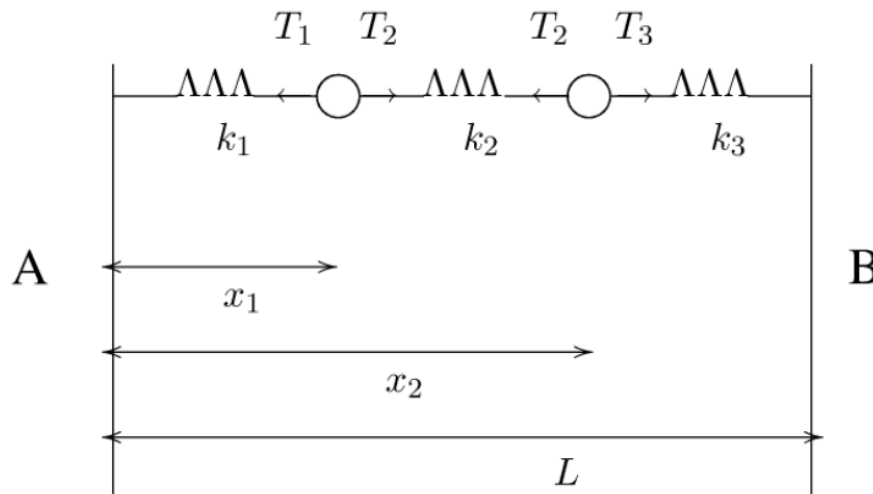


Figura 1.1: Esquema del sistema de amortiguación del ejemplo propuesto.

Para diseñar el sistema de amortiguación, tenemos que calcular las distancias  $x_1$ ,  $x_2$ , lo que haremos suponiendo que el sistema está en equilibrio, es decir, que las fuerzas

restauradoras se compensan. Aplicando la ley de Hooke a cada uno de los muelles, se tiene las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_1 - l_1), \\ F_2 &= k_2(x_2 - x_1 - l_2), \\ F_3 &= k_3(L - x_2 - l_3). \end{aligned}$$

Si el sistema está en equilibrio es porque  $F_1 = F_2 = F_3$ , es decir,

$$k_1(x_1 - l_1) = k_2(x_2 - x_1 - l_2) = k_3(L - x_2 - l_3),$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = k_1l_1 - k_2l_2 \\ -k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = k_2l_2 + k_3L - k_3l_3 \end{cases}$$

Conociendo la inversa de la matriz de coeficientes<sup>1</sup>  $A$ , tendremos la solución del sistema:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \implies \\ A^{-1} &= \frac{1}{k_1k_2 + k_2k_3 + k_1k_3} \begin{pmatrix} k_2 + k_3 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{k_1k_2 + k_2k_3 + k_1k_3} \begin{pmatrix} k_2 + k_3 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1l_1 - k_2l_2 \\ k_2l_2 + k_3L - k_3l_3 \end{pmatrix}.$$

## Problemas

1. Resolver, por el método de Gauss, los siguientes sistemas:

$$(a) \begin{cases} 5x + 7y - z = 6 \\ 2x + 10y - 2z = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} 2x + 3y - z + 2t = 3 \\ x + 2y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - 6z + t = -1 \end{cases},$$

$$(c) \begin{cases} 3x + 2y - z + t = 7 \\ x - y + z - 2t = 5 \\ 4x + y - t = 6 \end{cases}.$$

---

<sup>1</sup>Nótese que la matriz de coeficientes es regular porque  $|A| = k_1k_2 + k_2k_3 + k_1k_3 \neq 0$ , ya que la constante del muelle es siempre positiva.

2. Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas según los valores del parámetro  $a$ .

$$(a) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + az = 1 \\ x + y + a^2z = -1 \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} 3x - y = ax \\ 5x + y + 2z = ay \\ 4y + 3z = az \end{cases}.$$

Encontrar las soluciones para  $a = 0$  (apartado a) y para  $a = 3$  (apartado b).

3. Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas según los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ .

$$(a) \begin{cases} x + y + (a^2 - 1)z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + z = b \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases},$$

$$(c) \begin{cases} ax + z - 1 = 0 \\ ax + (a + 1)z + ay = 2 \\ ax + ay + (a + b + 1)z = a + 1 \end{cases}.$$

4. Sea el sistema de incógnitas  $x, y, z, t$ :

$$\begin{cases} 2x + ay + z = 7 \\ x + ay + z + t = b \\ x + 2ay + t = -1 \\ bx + ay = b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- (a) Hacer un estudio de la compatibilidad y número de soluciones para los diferentes valores de  $a$  y  $b$ .
- (b) Resolver el sistema cuando  $a = b = 0$ .
5. Calcular, si es posible,  $AB$  y  $BA$ , siendo  $A$  y  $B$  las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Una matriz cuadrada  $A$  se llama **idempotente** si  $A^2 = A$ .

(a) Comprobar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

es idempotente.

(b) Demostrar que si  $AB = A$  y  $BA = B$ , entonces  $A$  y  $B$  son matrices idempotentes.

7. Sean  $A, B$  matrices cuadradas de orden  $n$ : ¿Cuáles de los siguientes resultados son ciertos?

(a)  $\text{rg}(AB) = \text{rg}(BA)$ .

(b) Si  $\det A = 0$  y  $\det B = 0$ , entonces  $\det(AB) = 0$ .

(c)  $AB^2 = A^2 + 2AB + B^2$ .

Si no son ciertos, poner un contraejemplo.

8. Sea  $A \in M_{n \times n}$ , demostrar que si  $n$  es par,  $\det A = \det(-A)$ .

9. Si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3,$$

calcular:

a)

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix},$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix},$$

c)

$$\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix},$$

d)

$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

10. Sean  $A$  y  $B$  matrices cuadradas de orden 3 con  $\det A = 1$  y  $\det B = 2$ . Hallar, si es posible:  $|A + B|$ ,  $|2A^2|$ ,  $|B^{-n}|$ ,  $\text{rg}(AB)$ , justificando cada paso.
11. Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas de orden  $n$  con  $|AB| = I$ . Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas; buscar contraejemplos cuando sean falsas.
- (a)  $A$  es inversible.
- (b)  $A^{-1} = B$ .
- (c)  $\text{rg } B < n$ .
12. Calcular por el método de Gauss (si existen), la inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & -1 & 10 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Calcular, por el método de Gauss, los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

14. Calcular, por el método de Gauss, el rango de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Calcular el rango de la matriz  $\begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix}$  para los diferentes valores de  $a, b \in \mathbb{R}$ .

16. Calcular el siguiente determinante (determinante de Vandermonde):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

17. Dadas las matrices:  $A = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} \cos y & \operatorname{sen} y \\ -\operatorname{sen} y & \cos y \end{bmatrix}$ , demostrar que:

a)  $AB = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \operatorname{sen}(x+y) \\ -\operatorname{sen}(x+y) & \cos(x+y) \end{bmatrix}$ ; en particular  $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -\operatorname{sen} 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$ .

b)  $A^n = \begin{bmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{bmatrix}$ .

18. Supongamos que queremos comparar el costo total de ciertas mercancías. La siguiente tabla da el costo en céntimos de euro de un kilo de cada uno de los siguientes productos:

	PIENSO PERROS	PIENSO GATOS	PIENSO CABALLOS
PROVEEDOR 1	145	230	42
PROVEEDOR 2	155	217	48
PROVEEDOR 3	132	224	56
PROVEEDOR 4	162	204	47

Se desean comprar 45 Kg de pienso para perros, 75 Kg de pienso para gatos y 235 Kg de pienso para caballos. Si deseamos saber qué proveedor nos ofrece el mejor precio total, ¿cómo planteas el problema utilizando matrices?.

Si hay 15 proveedores y 277 productos, ¿cuál es el tamaño de las matrices con las que hay que operar?

## Soluciones

1. a) S.C.D. Solución:  $x = 1, y = 0, z = -1$ .  
b) S.C.I. Solución:  $x = -27 + 72\alpha, y = 17 - 43\alpha, z = -6 + 17\alpha, t = \alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
c) S.I.
2. a) Si  $a \neq 1$  y  $a \neq -1$ , S.C.D. Si  $a = 1$  o  $a = -1$ , S.I. (Incompatible). Para  $a = 0$ : Las soluciones son  $x = 1, y = -2, z = 3$ .  
b) Si  $a = 0, a = 3$  o  $a = 4$ , S.C.I. En el resto de los casos, S.C.D. Para  $a = 3$ : El sistema tiene infinitas soluciones:  $x = \alpha, y = 0, z = -5\alpha/2$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3. a) Si  $a \neq \pm 3$ , S.C.D. Si  $a = \pm 3$  y  $b = 2$ , S.C.I. Si  $a = 3$  y  $b \neq 2$ , S.I. Si  $a = \pm 3$  y  $b \neq 2$ , S.I.  
b) Si  $ab \neq 12$ , S.C.D.. Si  $ab = 12$  y  $a \neq 3$ , S.I.. Si  $a = 3$  y  $b = 4$ , S.C.I..  
c) Si  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ , S.C.D.. Si  $b = 0$  y  $a = 1$ , S.C.I.. En el resto de los casos, S.I..
4. a) Si  $a = 0$  y  $b = 0$  ó  $b = 4$  S.C.I. Si  $a = 0$  y  $b \neq 0, 4$  S.I. Si  $a \neq 0$  y  $b \neq 1$  S.C.D. Si  $a \neq 0$  y  $b = 1$  S.I.  
b) S.C.I.  $x = 3, y = \alpha, z = 1, t = -4$  siendo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
5.  $AB$  y  $BA$  no son posibles de calcular porque las matrices  $A$  ( $4 \times 3$ ) y  $B$  ( $4 \times 2$ ) no tienen dimensiones compatibles para la multiplicación.
7. Ninguna de las afirmaciones es cierta. (Buscar ejemplos).
9. a)  $-3$ .  
b)  $-18$ .  
c)  $-3$ .  
d)  $3$ .
10.
  - $|A + B|$ : No se puede calcular (falta información de las matrices).
  - $|2A^2| = 8$
  - $|B^{-n}| = \frac{1}{2^n}$ .
  - $\text{rg}(AB) = 3$ .
11. a) Verdadera.  
b) Falsa.  
c) Falsa.

12.

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 7 & -8 \\ 6 & -6 & 8 \\ -5 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

13. -3 y 240

14. El rango de las dos matrices es 3.

15. Si  $a = b = 0$   $\text{rg } A = 0$ .

Si  $a = 0$  y  $b \neq 0$   $\text{rg } A = 3$ .

$$\text{Si } a \neq 0 \begin{cases} a = b & \text{rg } A = 1 \\ a = -b & \text{rg } A = 2 \\ a \neq b \text{ y } a \neq -b & \text{rg } A = 3 \end{cases}.$$

16.  $(b - a)(c - a)(d - a)(c - b)(d - b)(d - c)$ .

# Capítulo 2

## Espacios vectoriales

### 2.1. Espacio vectorial real

**Definición 2.1.1.** Sea un conjunto  $V$ , cuyos elementos denotaremos por  $\vec{u}, \vec{v}, \dots$ , en el que hay definidas dos operaciones

- (1) Suma (+):  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$  se cumple que  $\vec{u} + \vec{v} \in V$ .
- (2) Producto por un escalar ( $\cdot$ ):  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  y  $\forall \vec{u} \in V$  se cumple que  $\alpha \cdot \vec{u} \in V$  (o  $\alpha \vec{u} \in V$ ).

que verifican las siguientes propiedades:

Para la suma:  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

- Conmutativa:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .
- Asociativa:  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .
- Existencia de elemento neutro:  $\exists \vec{e} \in V | \forall \vec{u} \in V$  se cumple  $\vec{u} + \vec{e} = \vec{e} + \vec{u} = \vec{u}$ . El elemento neutro es único, se denota por  $\vec{0}$  y se llama vector cero.
- Existencia de elemento opuesto:  $\forall \vec{u} \in V \exists \vec{u}' \in V | \vec{u} + \vec{u}' = \vec{u}' + \vec{u} = \vec{0}$ . Este vector se denota por  $-\vec{u}$  y se llama vector opuesto de  $\vec{u}$ .

Para el producto por un escalar:  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$  y  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Distributivas: 
$$\begin{cases} \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \end{cases}$$
- Asociativa:  $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$ .
- Existencia de elemento neutro:  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V$ .

Entonces, diremos que el conjunto  $V$  con las operaciones  $+$  y  $\cdot$  tiene estructura de espacio vectorial (e.v.) sobre  $\mathbb{R}$ , y lo denotamos por  $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ .

**Ejemplo.** El conjunto  $M_{2 \times 2}$  con las operaciones suma de matrices y producto de un número real por una matriz tiene estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

El conjunto de todos los vectores del plano  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  con las operaciones

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

tiene estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Si añadimos una tercera componente  $z$ , el conjunto  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$  con operaciones análogas también tiene estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 2.1.1.** Si  $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$  es un espacio vectorial, se cumple:

- (1)  $0\vec{u} = \vec{0} \quad \forall \vec{u} \in V.$
- (2)  $\alpha\vec{0} = \vec{0} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
- (3)  $(-1)\vec{u} = -\vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V.$
- (4)  $\alpha\vec{u} = \vec{0} \iff \alpha = 0 \text{ o } \vec{u} = \vec{0}.$

**Ejercicio.** Demostrar el teorema anterior.

## 2.2. Subespacios

**Definición 2.2.1.** Sea  $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$  un espacio vectorial, y sea  $S$  un subconjunto de  $V$ . Se dice que  $S$  es un subespacio vectorial de  $V$  si  $S$  tiene estructura de e.v. sobre  $\mathbb{R}$  con las mismas operaciones  $+$  y  $\cdot$  definidas en  $V$ .

**Teorema 2.2.1.**  $S$  es un subespacio vectorial de  $V$  si y sólo si:

- (1)  $S \neq \emptyset.$
- (2)  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in S$  se cumple que  $\vec{u} + \vec{v} \in S.$
- (3)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  y  $\forall \vec{u} \in S$  se cumple que  $\alpha\vec{u} \in S.$

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $S$  es subespacio de  $V$ . Entonces,  $S$  es e.v. por sí mismo, luego las operaciones  $+$  y  $\cdot$  cumplirán que:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \vec{u}, \vec{v} \in S : \quad \vec{u} + \vec{v} \in S \text{ y } \alpha\vec{u} \in S.$$

$\Leftarrow$ ) Lo único que tenemos que demostrar para que  $S$  sea subespacio vectorial es la existencia de elemento neutro y de elemento opuesto en  $S$ , ya que lo demás es evidente. Lo demostramos:

$$\text{Por (2): Sea } \vec{u} \in S \rightarrow 0\vec{u} = \vec{0} \in S \text{ y } (-1)\vec{u} = -\vec{u} \in S.$$

□

**Ejemplo.**  $S = \{\vec{0}\}$  (llamado subespacio nulo o subespacio cero) y  $V$  son subespacios vectoriales del espacio vectorial  $V$ . Se llaman subespacios impropios de  $V$ .

**Ejemplo.** En  $M_{2 \times 2}$ , el conjunto de las matrices cuya diagonal es nula es un subespacio vectorial.

**Definición 2.2.2.** Si  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y  $S_1$  y  $S_2$  dos subespacios de  $V$ , definimos la intersección de  $S_1$  y  $S_2$  como

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{u} \in V \mid \vec{u} \in S_1 \text{ y } \vec{u} \in S_2\}.$$

**Teorema 2.2.2.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos subespacios de un e.v.  $V$ . Entonces,  $S_1 \cap S_2$  es subespacio de  $V$ .

*Demostración.* (1)  $\vec{u}, \vec{v} \in S_1 \cap S_2 \implies \begin{cases} \vec{u}, \vec{v} \in S_1 \implies \vec{u} + \vec{v} \in S_1 \\ \vec{u}, \vec{v} \in S_2 \implies \vec{u} + \vec{v} \in S_2 \end{cases}$   
 $\implies \vec{u} + \vec{v} \in S_1 \cap S_2.$

(2)  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\vec{u} \in S_1 \cap S_2 \implies \begin{cases} \vec{u} \in S_1 \implies \alpha\vec{u} \in S_1 \\ \vec{u} \in S_2 \implies \alpha\vec{u} \in S_2 \end{cases} \implies \alpha\vec{u} \in S_1 \cap S_2.$

□

**Ejercicio.** Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos subespacios de un e.v.  $V$ , se define la suma de los subespacios  $S_1$  y  $S_2$  como el conjunto:

$$S_1 + S_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid \vec{u}_1 \in S_1, \vec{u}_2 \in S_2\}.$$

- Buscar un ejemplo en el que  $S_1 \cup S_2$  no es subespacio de  $V$ .
- Demostrar que  $S_1 + S_2$  es un subespacio vectorial de  $V$ .
- Demostrar que  $S_1 + S_2$  es el mínimo subespacio que contiene a  $S_1$  y  $S_2$ , es decir, que si  $S$  es un subespacio tal que  $S_1 \subseteq S$  y  $S_2 \subseteq S$ , entonces  $S_1 + S_2 \subseteq S$ .

En la Figura 2.1 se puede ver un diagrama explicativo de la suma e intersección de espacios vectoriales, siendo  $U$  y  $W$  subespacios vectoriales de un espacio vectorial  $V$ .

**Teorema 2.2.3** (Fórmula de Grassmann). Sean  $U$  y  $W$  subespacios vectoriales de un espacio vectorial  $V$ . Entonces

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

*Demostración.* Sea  $S_{U \cap W} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  una base de  $U \cap W$ .

Extendemos esta base a bases de  $U$  y  $W$ :

$$S_U = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{m-k}\}, \quad S_W = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k}\}.$$

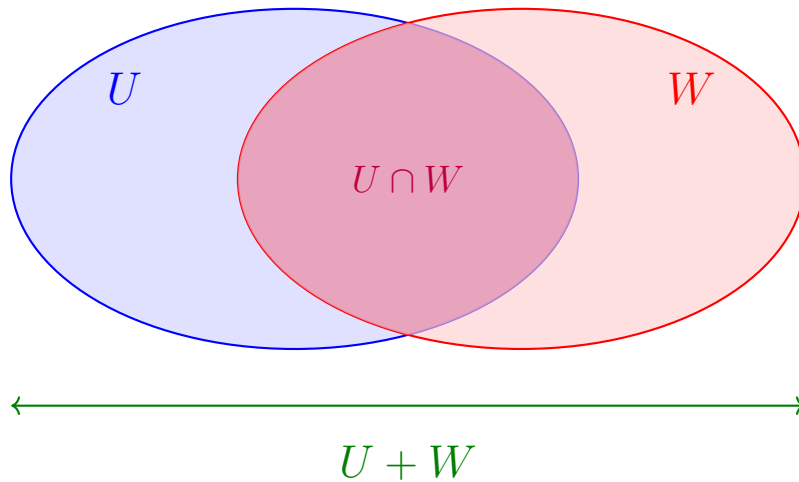


Figura 2.1: Representación de la suma  $U + W$  e intersección  $U \cap W$  de dos subespacios vectoriales

Proponemos como base de  $U + W$  el conjunto

$$S_{U+W} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{m-k}, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k}\}.$$

1. Todo vector de  $U + W$  puede escribirse como combinación lineal de los vectores de  $S_{U+W}$ , luego el conjunto genera  $U + W$ .
2. Si una combinación lineal de los vectores de  $S_{U+W}$  es nula, al separar las componentes en  $U$  y en  $W$  se obtiene que todos los coeficientes deben ser cero, por lo que el conjunto es linealmente independiente.

Así,  $S_{U+W}$  es base de  $U + W$ , y su número de elementos es

$$k + (m - k) + (n - k) = m + n - k.$$

Por tanto,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

□

**Ejemplo.** Sea  $V = \mathbb{R}^2$  con la suma habitual y consideremos los siguientes subconjuntos:

- $S_A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$
- $S_B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$
- $S_C = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}.$
- $S_D = \{(x, 0) + (0, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$

Para que un conjunto sea subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ , debe cumplir tres condiciones:

- Contiene el vector cero.
- Cerrado para la suma.
- Cerrado para el producto por escalares.

Estudiaremos en cada caso si el conjunto es subespacio de  $\mathbb{R}^2$ .

**Caso 1:**  $S_A = \{(x, 0)\}$

Comprobamos si es subespacio.

*Solución:* Sean  $(x_1, 0), (x_2, 0) \in S_A$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in S_A, \quad \alpha(x_1, 0) = (\alpha x_1, 0) \in S_A.$$

Se cumplen las propiedades de cierre, luego  $S_A$  es subespacio. Notar que lo mismo ocurriría para el subespacio con vectores de la forma  $(0, y)$ .  $\square$

**Caso 2:**  $S_B = \{(x, 0)\} \cup \{(0, y)\}$

Comprobamos si es subespacio.

*Solución:* El conjunto contiene el eje  $x$  y el eje  $y$ , pero no todos los vectores de la suma de ambos. Tomemos, por ejemplo,

$$(1, 0) \in S_B, \quad (0, 1) \in S_B.$$

Sin embargo,

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin S_B.$$

De forma genérica, si  $\vec{u} = (x, 0)$  y  $\vec{v} = (0, y)$  con  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ , entonces  $\vec{u} + \vec{v} = (x, y) \notin S_B$ . Por lo tanto falla el cierre bajo la suma, luego  $S_B$  no es subespacio.  $\square$

**Caso 3:**  $S_C = \{(x, 1)\}$

*Solución:* Tomemos dos vectores de  $S_C$ :

$$(x_1, 1), (x_2, 1) \in S_C.$$

Su suma es

$$(x_1, 1) + (x_2, 1) = (x_1 + x_2, 2) \notin S_C.$$

El cierre bajo la suma falla, luego  $S_C$  no es subespacio. Esto se puede apreciar en la Figura 2.2  $\square$

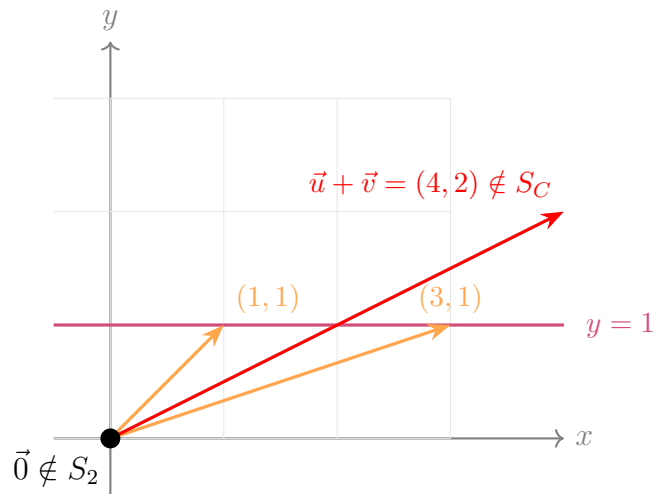


Figura 2.2: El conjunto  $S_C$  formado por vectores con segunda componente igual a 1.

**Caso 4:**  $S_D = \{(x, 0) + (0, y)\} = \mathbb{R}^2$

*Solución:* Todo vector de  $\mathbb{R}^2$  se escribe como

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y),$$

por lo que  $S_D = \mathbb{R}^2$ .

Dado que  $\mathbb{R}^2$  con sus operaciones habituales es un espacio vectorial, cumple cierre bajo la suma y el producto por escalares, así como las demás propiedades axiomáticas. Por tanto,  $S_D$  es un subespacio (de hecho, el espacio completo).  $\square$

**Observación.** ■ Aunque  $S_B$  contiene el origen, no es subespacio porque no es cerrado para la suma.

- $S_C$  falla todas las condiciones, siendo la más evidente que no contiene el origen.
- Geométricamente, los subespacios de  $\mathbb{R}^2$  son: el conjunto  $\{\vec{0}\}$ , rectas que pasan por el origen, o todo  $\mathbb{R}^2$ . Esto se da para los casos de  $S_A$  y  $S_D$ .
- Una recta que no pasa por el origen (como  $S_C$ ) nunca puede ser subespacio vectorial.
- La unión de dos subespacios (como en  $S_B$ ) generalmente no es subespacio, a menos que uno esté contenido en el otro.

## 2.3. Combinación lineal: dependencia e independencia lineal

**Definición 2.3.1.** Sean  $V$  un e.v. sobre  $\mathbb{R}$  y  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r \in V$ . Una combinación lineal de  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  es una expresión de la forma

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_r \vec{u}_r$$

con  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  (que también será un vector de  $V$ ). Se dice que  $\vec{u} \in V$  es combinación lineal de  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  si existen escalares  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ , tales que

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_r \vec{u}_r.$$

El conjunto de todas las combinaciones lineales de  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  se denota por

$$L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r].$$

**Teorema 2.3.1.** Sean  $V$  un e.v. sobre  $\mathbb{R}$  y  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r \in V$ . Entonces:

- (a)  $L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r]$  es subespacio de  $V$ .
- (b)  $L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r]$  es el mínimo subespacio de  $V$  que contiene a  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ .

**Ejercicio.** Demostrar el teorema anterior.

**Definición 2.3.2.** Sean  $V$  un e.v. sobre  $\mathbb{R}$  y  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r \in V$ . Se dice que  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  son linealmente independientes (l.i.) si la ecuación

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_r \vec{u}_r = \vec{0},$$

con  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ , tiene solución única  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$ . En caso contrario, se dice que son linealmente dependientes (l.d.).

**Ejercicio.** Demostrar que  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  son linealmente dependientes  $\iff$  algún  $\vec{u}_i$  se puede poner como combinación lineal de los demás.

**Ejemplo.** En el e.v.  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ , demostrar que:

- a)  $\{(1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$  son linealmente independientes.
- b)  $\{(1, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 2, 2)\}$  son linealmente dependientes.

*Solución:* a) Para demostrarlo, planteamos la combinación lineal igualada al vector nulo:

$$\alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(0, 2, 1) = (0, 0, 0).$$

Esto genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} .$$

De la primera ecuación,  $\alpha_1 = 0$ . De la segunda,  $\alpha_2 = 0$ . La tercera se cumple automáticamente.

Dado que la única solución es la trivial, los vectores son **linealmente independientes**.

b) Planteamos la combinación lineal igualada al vector nulo:

$$\alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(0, 2, 1) + \alpha_3(1, 2, 2) = (0, 0, 0).$$

Generando el sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} .$$

De la primera ecuación:  $\alpha_1 = -\alpha_3$ . De la segunda:  $\alpha_2 = -\alpha_3$ . Sustituyendo en la tercera:  $-\alpha_3 - \alpha_3 + 2\alpha_3 = 0$ , consistente.

Por ejemplo, tomando  $\alpha_3 = 1$ , obtenemos  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = -1$ , solución no trivial.

Alternativamente, observamos que  $(1, 2, 2) = 1 \cdot (1, 0, 1) + 1 \cdot (0, 2, 1)$ , por lo que un vector es combinación de los otros, y el conjunto es linealmente dependiente.  $\square$

## 2.4. Sistema generador, bases y dimensión

**Definición 2.4.1.** Sea  $V$  un e.v. sobre  $\mathbb{R}$ . Un sistema generador de  $V$  es un conjunto de vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m \in V$  tales que

$$V = L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m];$$

es decir, que todo vector de  $V$  se pueda generar a partir de  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ . Si un e.v. admite algún sistema generador con un número finito de elementos, diremos que es de tipo finito. En lo sucesivo, trabajaremos sólo con espacios de tipo finito, aunque no lo digamos explícitamente.

**Definición 2.4.2.** Sea  $V$  un e.v. sobre  $\mathbb{R}$ . Una base de  $V$  es un conjunto ordenado de vectores de  $V$  que es sistema generador de  $V$  y que además es linealmente independiente.

**Ejercicio.** Demostrar que

$$C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

es una base del espacio vectorial  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$  (se llama base canónica).

**Ejemplo** (Base canónica de matrices). El espacio vectorial  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  tiene como dimensión  $nm$  y su base canónica es el conjunto

$$C = \{\mathcal{E}_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\},$$

donde  $\mathcal{E}_{ij}$  es la matriz que tiene un 1 en la posición  $(i, j)$  y ceros en todas las demás.

En el caso particular de las matrices  $2 \times 2$ , la base canónica está formada por las cuatro matrices:

$$\mathcal{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo** (Base de monomios en polinomios). El espacio vectorial  $\mathbb{P}_n[x]$  de los polinomios de grado a lo sumo  $n$  tiene dimensión  $n + 1$  y como base canónica el conjunto de monomios

$$C = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}.$$

**Teorema 2.4.1.** Todo espacio vectorial  $V$  de tipo finito y distinto de  $\{\vec{0}\}$  tiene una base.

*Demostración.* Sea  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$  un sistema generador finito de  $V$  (existe, pues por hipótesis  $V$  es de tipo finito). Si  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$  es linealmente independiente, ya está. Si no, alguno de los  $\vec{u}_i$  se podrá poner como combinación lineal de los demás, por ejemplo,  $\vec{u}_p$  (si no, los reordenamos). Lo quitamos, y el conjunto  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{p-1}\}$  sigue siendo sistema generador de  $V$ . Si  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{p-1}\}$  es linealmente independiente, ya está; si no, repetimos el proceso anterior. De esta manera, al cabo de un número finito de pasos, obtendremos un sistema generador formado por vectores linealmente independientes, que será por tanto una base de  $V$ .  $\square$

**Teorema 2.4.2.** Si

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$$

es una base de un e.v.  $V$ , entonces todo conjunto con más de  $n$  vectores es linealmente dependiente.

*Demostración.* Sea  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  un conjunto de  $m$  vectores, con  $m > n$ . Consideremos la ecuación

$$\beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \dots + \beta_m \vec{v}_m = \vec{0},$$

y demostremos que admite alguna solución con  $\beta_i \neq 0$ .

Como  $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  es una base de  $V$ , cada  $\vec{v}_i$  puede expresarse como combinación lineal de los  $\vec{u}_j$ :

$$\vec{v}_i = \alpha_{1i} \vec{u}_1 + \alpha_{2i} \vec{u}_2 + \dots + \alpha_{ni} \vec{u}_n, \quad i = 1, \dots, m.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación inicial:

$$\beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_m \vec{v}_m = \sum_{i=1}^m \beta_i \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} \vec{u}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} \beta_i \right) \vec{u}_j = \vec{0}.$$

Dado que  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  es linealmente independiente, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2 + \dots + \alpha_{1m}\beta_m &= 0, \\ \alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 + \dots + \alpha_{2m}\beta_m &= 0, \\ &\vdots \\ \alpha_{n1}\beta_1 + \alpha_{n2}\beta_2 + \dots + \alpha_{nm}\beta_m &= 0.\end{aligned}$$

Este es un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones con  $m$  incógnitas, siendo  $m > n$ . El rango de la matriz de coeficientes coincide con el de la ampliada y, al haber más incógnitas que ecuaciones, el sistema es compatible indeterminado. En particular, posee soluciones no triviales, es decir, alguna solución con  $\beta_i \neq 0$ .

Por tanto, el conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  es linealmente dependiente.  $\square$

**Observación.** Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

**Definición 2.4.3.** La dimensión de un espacio vectorial  $V$  es el número de elementos de cualquiera de sus bases. Se representa por  $\dim(V)$ .

**Observación.**

- Sistema generador, base y dimensión son conceptos igualmente válidos para subespacios, pues un subespacio vectorial no es más que un espacio vectorial dentro de otro.
- El espacio vectorial  $\{\vec{0}\}$  no tiene base y se considera que  $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$ .

**Teorema 2.4.3.** Sean  $V$  un e.v. sobre  $\mathbb{R}$  con  $\dim(V) = n$  y  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in V$ . Entonces:

- (a) Si  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  es linealmente independiente, entonces es base de  $V$ .
- (b) Si  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  es sistema generador de  $V$ , entonces es base de  $V$ .

**Ejercicio.** Demostrar el teorema anterior.

**Teorema 2.4.4.** Todo conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial de tipo finito se puede ampliar hasta obtener una base.

*Demostración.* Sea  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  un conjunto de vectores linealmente independientes de un e.v.  $(V, +, \cdot \mathbb{R})$ . Si  $V = L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r]$ , entonces  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  es base de  $V$ . Si no,  $\exists \vec{v}_1 \in V | \vec{v}_1 \notin L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r]$ . Añadimos este vector al conjunto anterior, y  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1\}$  serán linealmente independientes. Si  $V = L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1]$ , ya está; si no,  $\exists \vec{v}_2 \in V | \vec{v}_2 \notin L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1]$ , y los vectores  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  serán linealmente independientes. Seguimos con este proceso hasta que sea

$$V = L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s],$$

lo que sucederá en un número finito de pasos pues trabajamos con e.v. de tipo finito. Entonces, los vectores  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s\}$  son l.i. (los hemos elegido con esa condición) y generan  $V$ . Por tanto, constituyen una base de  $V$ .  $\square$

## 2.5. Coordenadas y cambio de base

**Definición 2.5.1.** Sean  $V$  un e.v. sobre  $\mathbb{R}$  y  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  una base de  $V$ . Entonces, cualquier vector  $\vec{u} \in V$  se puede poner como combinación lineal de los vectores de  $B$ , es decir, existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tales que  $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n$ . Además, fijada la base  $B$ , estos escalares son únicos para cada  $\vec{u} \in V$  (¡comprobarlo!).

Se les llama coordenadas del vector  $\vec{u}$  en la base  $B$ ; y esto se denota por  $[\vec{u}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ .

**Ejemplo.**  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$  es un e.v. sobre  $\mathbb{R}$  con las operaciones

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Es fácil comprobar que  $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)\}$  es una base de este espacio, y que las coordenadas del vector  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  en esta base (que se llama base canónica de  $\mathbb{R}^n$ ) son precisamente los números  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; esto concuerda con la noción generalizada de coordenadas geométricas de un vector en  $\mathbb{R}^2$  o en  $\mathbb{R}^3$ .

Entonces, fijada la base de un espacio vectorial, podemos trabajar con las coordenadas de los vectores como si estuviéramos en  $\mathbb{R}^n$  (hay que asegurarse de que  $\forall \vec{u}, \vec{v} : [\vec{u} + \vec{v}]_B = [\vec{u}]_B + [\vec{v}]_B$  y  $\forall \alpha \in \mathbb{R} : [\alpha \vec{u}]_B = \alpha [\vec{u}]_B$ , pero esto es fácil).

**Teorema 2.5.1. Teorema de cambio de base.** Relación entre las coordenadas de un vector en distintas bases.

Si  $B$  y  $B'$  son dos bases de un e.v.  $V$ , existe una matriz cuadrada de orden  $n$ , que escribimos  $P_{BB'}$  o también  $P_{B \rightarrow B'}$  tal que  $\forall \vec{u} \in V$  se verifica  $[\vec{u}]_{B'} = P_{BB'} [\vec{u}]_B$ . La matriz  $P_{BB'}$  se llama matriz del cambio de base de  $B$  a  $B'$  y tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base  $B$  en la base  $B'$ .

*Demostración.* Sean  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  y  $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ . Expresamos los vectores de  $B$  como combinaciones lineales de los de  $B'$ :  $\vec{u}_j = a_{1j} \vec{v}_1 + a_{2j} \vec{v}_2 + \dots + a_{nj} \vec{v}_n$ . Sea  $\vec{u} \in V$ , expresado en función de  $B$ :

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n.$$

Sustituyendo  $\vec{u}_i$  por su expresión en  $B'$ :

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{u}_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \right) \vec{v}_i.$$

Si  $\vec{u}$  en  $B'$  es

$$\vec{u} = \alpha'_1 \vec{v}_1 + \alpha'_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha'_n \vec{v}_n,$$

por unicidad de coordenadas:

$$\alpha'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j.$$

En forma matricial, esto es:

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

La matriz  $(a_{ij})_{i,j}$ , cuyas columnas están formadas por las coordenadas de los vectores de  $B$  en función de los de  $B'$ , se llama matriz del cambio de base de  $B$  a  $B'$ , y se representa por  $P_{BB'}$ . Podemos escribir  $[\vec{u}]_{B'} = P_{BB'}[\vec{u}]_B$ . □

**Teorema 2.5.2.** Se verifica que  $P_{BB'}$  es inversible y que su inversa es  $P_{B'B}$ .

*Demostración.* Vemos que  $P_{BB'}P_{B'B} = I_n$  con lo que, teniendo en cuenta la definición 1.3.6 quedaría demostrado el teorema.

Para todo vector  $\vec{u} \in V$  se verifica  $[\vec{u}]_{B'} = P_{BB'}[\vec{u}]_B = P_{BB'}P_{B'B}[\vec{u}]_{B'}$  en particular para los vectores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ .

Si  $P_{BB'}P_{B'B} = (c_{ij})_{i,j}$

$$[\vec{v}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_{11} = 1, c_{21} = 0, \dots, c_{n1} = 0.$$

Repetiendo la misma operación con los restantes vectores se obtiene que  $P_{BB'}P_{B'B} = I_n$ . □

## 2.5.1. Ejemplo de cambios de base

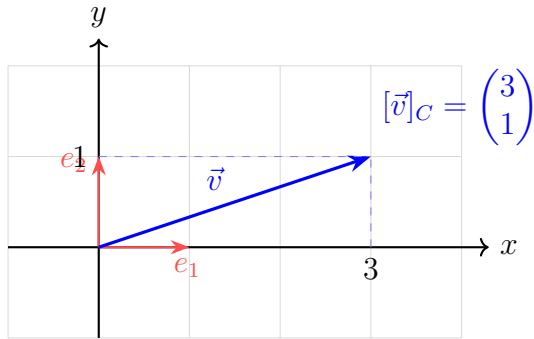
El vector  $\vec{v} = (3, 1)$  en la base canónica se puede expresar como:

$$\vec{v} = 3(1, 0) + 1(0, 1).$$

En una base distinta,  $B = \{e_1 = (0, -1), e_2 = (1, 0)\}$ , que se obtiene girando  $90^\circ$  en sentido de las agujas del reloj los ejes coordenados, el mismo vector se escribe:

$$\vec{v} = (-1)(0, -1) + 3(1, 0) = (0, 1) + (3, 0) = (3, 1).$$

Base canónica  $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$



Nueva base  $B = \{(0, -1), (1, 0)\}$

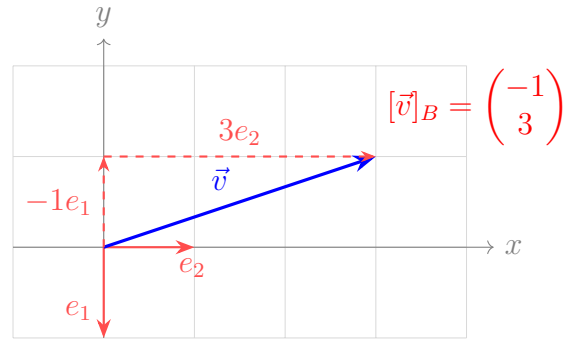


Figura 2.3: El vector  $\vec{v}$  representado en dos bases diferentes. En la base canónica tiene coordenadas  $(3, 1)$ , mientras que en la base  $\{(0, -1), (1, 0)\}$  tiene coordenadas  $(-1, 3)$ .

Por tanto, sus coordenadas en la base  $B$  son  $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Notar que el vector  $\vec{v}$  es el mismo en cualquier base (sistema de referencia), pero sus coordenadas (la forma en la que lo expresamos en el sistema de referencia usado) cambia de una base a otra.

Veamos ahora cómo aplicar la matriz de cambio de base para obtener las coordenadas del vector en la base  $B$ . Para hallar la matriz de cambio de base de  $C$  a  $B$ , denotada  $P_{CB}$ , se siguen dos pasos:

- (1) Se construye la matriz de  $B$  a  $C$ ,  $P_{BC}$ , colocando como columnas las coordenadas de los vectores de  $B$  respecto de  $C$ :

$$B = \{(0, -1), (1, 0)\} \Rightarrow P_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (2) La matriz  $P_{CB}$  es la inversa de  $P_{BC}$ :

$$P_{CB} = (P_{BC})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificación: se aplica la relación  $[\vec{v}]_B = P_{CB}[\vec{v}]_C$  con

$$[\vec{v}]_C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que el resultado obtenido es el mismo que en la Figura 2.3.

**Ejemplo** (Coordenadas en la base canónica de matrices). En  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  la base canónica es

$$C = \{\mathcal{E}_{11}, \mathcal{E}_{12}, \mathcal{E}_{21}, \mathcal{E}_{22}\}.$$

Si tomamos la matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathcal{E}_{11} + a_{12}\mathcal{E}_{12} + a_{21}\mathcal{E}_{21} + a_{22}\mathcal{E}_{22}$ , por lo que su vector de coordenadas en  $\mathfrak{C}$  es

$$[A]_{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo** (Coordenadas en la base de monomios). En  $\mathbb{P}_n[x]$  la base canónica es

$$C = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}.$$

Un polinomio cualquiera

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

se expresa como combinación lineal de los monomios de la base, y su vector de coordenadas en  $\mathfrak{C}$  es

$$[p]_{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

## 2.6. Espacio de filas de una matriz

Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ , donde cada  $A_i$  represen-

ta una fila, que podemos interpretar como un vector de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, al subespacio  $L[A_1, A_2, \dots, A_m]$  se le llama subespacio generado por las filas de la matriz  $A$ . Este subespacio no se altera al hacer operaciones elementales sobre las filas de la matriz (esto equivale a hacer combinaciones lineales con los vectores  $A_i$ ). Entonces, si obtenemos la forma escalonada de  $A$ , las filas no nulas formarán una base de este subespacio (¿por qué?).

Por tanto:

- (1) La dimensión del subespacio coincide con el rango de la matriz.

- (2) Los vectores  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  son linealmente dependientes si y sólo si en la forma escalonada hay alguna fila de ceros.
- (3) El subespacio generado por las columnas (que será un subespacio de  $\mathbb{R}^m$ ) tiene la misma dimensión que el generado por las filas, pues el rango de una matriz coincide con el de su traspuesta.

Esto nos proporciona un método sencillo para hallar la base de un subespacio y para ver si un conjunto de vectores es o no linealmente independiente.

## 2.7. Producto interno

**Definición 2.7.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Un producto interno en  $V$  es una aplicación de  $V \times V$  en  $\mathbb{R}$  que a cada par de vectores  $(\vec{u}, \vec{v})$  le asocia un número real  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$  cumpliendo las siguientes condiciones:

- (1)  $\forall \vec{u} \in V, \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ , y  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ .
- (2)  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ .
- (3)  $\forall \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, \langle \vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle$ .
- (4)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \langle \alpha \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ .

**Ejemplo.** En  $\mathbb{R}^2$  definimos  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ ; es fácil comprobar que esto es un producto interno. Se llama producto escalar, y se denota por  $\vec{x} \cdot \vec{y}$ .

Se puede extender a  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente manera: Si  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ , que corresponde al producto matricial  $X^tY$ , donde  $X$  e  $Y$  son las columnas de coordenadas de  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  respectivamente.

**Definición 2.7.2.** Un espacio vectorial euclídeo (e.v.e.) es un e.v. en el que se ha definido un producto interno.

**Observación.** Trabajaremos habitualmente en  $\mathbb{R}^n$  con las operaciones usuales y el producto escalar.

**Ejercicio.** Sea  $V$  un e.v. euclídeo. Demostrar que:

- (1)  $\langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = 0 \forall \vec{u} \in V$ .
- (2)  $\langle \sum_{i=1}^r \vec{u}_i, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^r \langle \vec{u}_i, \vec{v} \rangle, \langle \vec{u}, \sum_{i=1}^s \vec{v}_i \rangle = \sum_{i=1}^s \langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle$ .
- (3)  $\langle \sum_{i=1}^r \alpha_i \vec{u}_i, \sum_{j=1}^s \beta_j \vec{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \alpha_i \beta_j \langle \vec{u}_i, \vec{v}_j \rangle$ .

**Teorema 2.7.1.** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz): Sea  $V$  un e.v. euclídeo. Entonces,  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ , se cumple:  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ .

*Demostración.* Si  $\vec{u} = \vec{0}$  es inmediato pues  $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle^2 = 0^2 \leq 0 = \langle \vec{0}, \vec{0} \rangle \cdot \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ .

Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  : Sea  $\vec{w} = x\vec{u} + \vec{v}$  con  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle &= \langle x\vec{u} + \vec{v}, x\vec{u} + \vec{v} \rangle = x^2 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + x \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + x \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \\ &= x^2 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2x \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = ax^2 + 2bx + c, \end{aligned}$$

donde  $a = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$  pues  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ,  $b = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  y  $c = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ .  $y = ax^2 + 2bx + c$  es una parábola que nunca toma valores negativos, y entonces  $\Delta = 4b^2 - 4ac \leq 0$  (no puede tener dos raíces reales distintas). Queda visto que  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ .  $\square$

## 2.8. Norma y distancia

**Definición 2.8.1.** Sea  $V$  un e.v.e. y  $\vec{u} \in V$ . Se define la norma de  $\vec{u}$  como  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$ . Se dice que un vector es unitario cuando su norma es 1.

**Ejemplo.** En  $\mathbb{R}^2$  con el producto escalar:  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; la norma coincide con el concepto usual de longitud de un vector (y también en  $\mathbb{R}^3$ ).

**Teorema 2.8.1.** Se verifican las siguientes propiedades (para la norma):

- (1)  $\forall \vec{u} \in V$ ,  $\|\vec{u}\| \geq 0$ , y  $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ .
- (2)  $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in V$ .
- (3)  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$  (Desigualdad triangular).

*Demostración.* (1) Inmediato.

$$(2) \|\alpha\vec{u}\| = \sqrt{\langle \alpha\vec{u}, \alpha\vec{u} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = |\alpha| \|\vec{u}\|.$$

$$\begin{aligned} (3) \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \stackrel{T.2.7.1.}{\leq} \|\vec{u}\|^2 + 2\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} + \|\vec{v}\|^2 = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|. \end{aligned}$$

$\square$

**Definición 2.8.2.** Sean  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  (e.v.e.). Se define la distancia entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  como  $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ .

**Ejemplo.** En  $\mathbb{R}^2$  con el producto escalar, si  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  y  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  entonces  $d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .

**Teorema 2.8.2.** Se verifican las siguientes propiedades (para la distancia):

- (1)  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, d(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0; d(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{v}.$
- (2)  $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{u}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$
- (3)  $d(\vec{u}, \vec{v}) \leq d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V.$

**Ejercicio.** Demostrar las propiedades anteriores.

## 2.9. Ángulos y ortogonalidad

- Ya conocemos las nociones de ángulo y perpendicularidad en el plano; las relacionamos con el producto escalar en  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\vec{u}\| \cos \alpha_1, & y_1 &= \|\vec{u}\| \operatorname{sen} \alpha_1, \\ x_2 &= \|\vec{v}\| \cos \alpha_2, & y_2 &= \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \alpha_2. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ &= \|\vec{u}\| \cos \alpha_1 \|\vec{v}\| \cos \alpha_2 + \|\vec{u}\| \operatorname{sen} \alpha_1 \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \alpha_2 \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2) \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \beta. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\cos \beta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

En particular, si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son perpendiculares (ortogonales), se verifica:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \beta = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Generalizamos esto a un espacio vectorial euclídeo cualquiera.

**Definición 2.9.1.** Sean  $V$  un e.v.e. y  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  distintos de  $\vec{0}$ . Se define ángulo  $\beta$  entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  como

$$\beta = \arccos \left( \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right).$$

**Definición 2.9.2.** Sean  $V$  un e.v.e. y  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ . Se dice que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales, escrito  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , cuando  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ .

**Definición 2.9.3.** Sean  $V$  un e.v.e. y  $S_1, S_2$  subespacios de  $V$ . Se dice que  $S_1$  y  $S_2$  son ortogonales, escrito  $S_1 \perp S_2$ , cuando  $\vec{u} \perp \vec{v} \quad \forall \vec{u} \in S_1, \forall \vec{v} \in S_2$ .

**Definición 2.9.4.** Sean  $V$  un e.v.e. y  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r \in V$ . Se dice que el conjunto  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  es ortogonal cuando  $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$  para  $i \neq j$ .

**Definición 2.9.5.** Sean  $V$  un e.v.e. y  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r \in V$ . Se dice que el conjunto  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  es ortonormal cuando es ortogonal y además  $\|\vec{u}_i\| = 1$ , para  $i = 1, 2, \dots, r$ .

**Teorema 2.9.1.** Sean  $V$  un e.v.e. y  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  un conjunto ortogonal de vectores de  $V$  tales que  $\vec{u}_i \neq \vec{0}$ , para  $i = 1, 2, \dots, r$ . Entonces,  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  es linealmente independiente.

*Demostración.* Planteamos la combinación lineal

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_r \vec{u}_r = \vec{0},$$

y tenemos que probar que  $\alpha_i = 0 \forall i$ .

Para cada  $i = 1, 2, \dots, r$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{0}, \vec{u}_i \rangle = \langle \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_r \vec{u}_r, \vec{u}_i \rangle \\ &= \alpha_1 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_i \rangle + \alpha_2 \langle \vec{u}_2, \vec{u}_i \rangle + \dots + \alpha_i \langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle + \dots + \alpha_r \langle \vec{u}_r, \vec{u}_i \rangle. \end{aligned}$$

Luego,  $\alpha_i = 0 \forall i$ , pues  $\vec{u}_i \neq \vec{0}$  para todo  $i$ .

**Teorema 2.9.2.** Sean  $V$  un e.v.e. y  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  un conjunto ortonormal de vectores de  $V$ .  $\vec{v} \in L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r] \Leftrightarrow \vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 + \dots + \langle \vec{v}, \vec{u}_r \rangle \vec{u}_r$ .

□

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sea  $\vec{v} \in L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r]$ . Entonces existen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$  tales que

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_r \vec{u}_r.$$

Para cada  $i$  se tiene:

$$\langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^r \alpha_k \vec{u}_k, \vec{u}_i \right\rangle = \sum_{k=1}^r \alpha_k \langle \vec{u}_k, \vec{u}_i \rangle = \alpha_i \langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle = \alpha_i.$$

Luego,  $\alpha_i = \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle \quad \forall i = 1, 2, \dots, r$ .

$\Leftarrow$ ) Inmediato.

□

**Teorema 2.9.3.** (Teorema de Pitágoras): Sean  $V$  un e.v.e. y  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  tal que  $\vec{u} \perp \vec{v}$ . Se cumple:  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ .

**Ejercicio.**

- Demostrar el teorema anterior.

- Demostrar que si  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  es un conjunto ortonormal de vectores de  $V$  y

$$\vec{v} \in L[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r] \text{ entonces } \|\vec{v}\|^2 = \sum_{k=1}^r \langle \vec{v}, \vec{u}_k \rangle^2.$$

**Definición 2.9.6.** Una base de un e.v.e.  $V$  es ortonormal cuando los vectores que la forman son un conjunto ortonormal.

Si  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  es una base ortonormal de  $V$  entonces, las coordenadas de un vector  $\vec{u}$  en la base  $B$  son  $[\vec{u}]_B = \begin{pmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u}_1 \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{u}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{u}, \vec{u}_n \rangle \end{pmatrix}$ .

**Ejemplo.** Hallar las coordenadas del vector  $\vec{u} = (3, 4)$  en la base  $B = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$ .

*Solución:* Llamemos a los vectores de la base  $\vec{b}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  y  $\vec{b}_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ .

Queremos encontrar las coordenadas  $(c_1, c_2)$  tales que:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2, \\ (3, 4) &= c_1 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + c_2 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Cuando la base es ortonormal, las coordenadas  $(c_1, c_2)$  del vector  $\vec{u}$  se calculan simplemente con el producto escalar:

$$c_1 = \vec{u} \cdot \vec{b}_1 \quad \text{y} \quad c_2 = \vec{u} \cdot \vec{b}_2.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} c_1 &= (3, 4) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}, \\ c_2 &= (3, 4) \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3 \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-3+4}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Las coordenadas son  $\left( \frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ . □

**Definición 2.9.7.** Sean  $V$  un e.v.e. y  $S$  un subespacio de  $V$ . El conjunto  $S^\perp = \{\vec{u} \in V \mid \vec{u} \perp \vec{s} \quad \forall \vec{s} \in S\}$  se llama complemento ortogonal de  $S$ .

**Ejercicio.** Comprobar que  $S^\perp$  es subespacio vectorial de  $V$ .

## 2.10. Cambios de bases ortonormales: matrices ortogonales

**Definición 2.10.1.** Sea  $A$  una matriz cuadrada inversible.  $A$  es ortogonal cuando  $A^{-1} = A^t$ .

**Ejercicio.**

- Demstrar que si  $A \in M_{n \times n}$  es una matriz ortogonal, su traspuesta  $A^t$  también es ortogonal.
- Demstrar que si  $A \in M_{n \times n}$  es una matriz ortogonal, entonces  $|A| = 1$  ó  $|A| = -1$ .

**Teorema 2.10.1.** Sea la matriz  $A \in M_{n \times n}$ , donde  $A_i$  es la fila  $i$ -ésima.  $A$  es ortogonal  $\iff \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  con el producto escalar.

**Observación.** El resultado también es cierto si se consideran los vectores columna en lugar de los vectores fila.

**Ejercicio.** Demstrar el teorema anterior.

**Teorema 2.10.2.** Sean  $V$  un e.v. y  $B$  y  $B'$  dos bases ortonormales de  $V$ . Entonces, la matriz del cambio de base de  $B$  a  $B'$  es ortogonal.

*Demostración.* Sea

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}, \quad B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}.$$

Llamamos  $P$  a la matriz del cambio de base de  $B$  a  $B'$ . Las columnas de  $P$  son las coordenadas de los vectores de  $B$  expresados en función de los de  $B'$ :

$$[\vec{e}_i]_{B'} = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_i, \vec{e}'_1 \rangle \\ \langle \vec{e}_i, \vec{e}'_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{e}_i, \vec{e}'_n \rangle \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Estas  $n$  columnas forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  con el producto escalar. Por el Teorema 2.10.1,  $P$  es ortogonal.

De hecho, para cada  $i$ :

$$\begin{aligned} \langle [\vec{e}_i]_{B'}, [\vec{e}_i]_{B'} \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle \vec{e}_i, \vec{e}'_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^n \langle \vec{e}_i, \langle \vec{e}_i, \vec{e}'_k \rangle \vec{e}'_k \rangle \\ &= \left\langle \vec{e}_i, \sum_{k=1}^n \langle \vec{e}_i, \vec{e}'_k \rangle \vec{e}'_k \right\rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 1. \end{aligned}$$

Si  $i \neq j$ :

$$\begin{aligned} \langle [\vec{e}_i]_{B'}, [\vec{e}_j]_{B'} \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle \vec{e}_i, \vec{e}'_k \rangle \langle \vec{e}_j, \vec{e}'_k \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \vec{e}_j, \langle \vec{e}_i, \vec{e}'_k \rangle \vec{e}'_k \rangle \\ &= \left\langle \vec{e}_j, \sum_{k=1}^n \langle \vec{e}_i, \vec{e}'_k \rangle \vec{e}'_k \right\rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como las columnas de  $P$  forman una base ortonormal, se concluye que  $P$  es una matriz ortogonal.  $\square$

## 2.11. Aplicación: relojes digitales

En esta sección vamos a ver un ejemplo sencillo de espacio vectorial. En concreto, consideraremos los números de un reloj digital.

Antes de empezar, debemos introducir el concepto de grupo cíclico. Para poder entender mejor este grupo, pensemos en un reloj analógico usual. El grupo que describe las horas de un reloj es conocido como el grupo cíclico de las horas, denotado comúnmente como  $\mathbb{Z}_{12}$ . Este grupo está compuesto por los números enteros módulo 12, es decir, los números del 1 al 12. Cuando pasa una hora de las 12 el reloj marca la 1. Este grupo es cíclico porque se puede generar repitiendo una única operación, en este caso, sumando 1 repetidamente.

Para el problema que vamos a estudiar ahora, vamos a considerar el grupo  $\mathbb{Z}_2$ , también conocido como grupo cíclico de orden dos, que es un grupo abeliano (es decir, conmutativo) que consta de dos elementos: 0 y 1. La operación binaria que define al grupo es la suma módulo 2, es decir:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Podemos pensar en  $\mathbb{Z}_2$  como un conjunto de números que representan si una proposición es verdadera (1) o falsa (0). Por ejemplo, en un problema de lógica, podemos usar 0 para representar una proposición falsa y 1 para una proposición verdadera.

En términos algebraicos, podemos definir el grupo  $\mathbb{Z}_2$  como un conjunto de elementos  $\{0, 1\}$  con la operación binaria  $+$  definida anteriormente ( $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1 + 0 = 1$  y  $1 + 1 = 0$ ). Este grupo es abeliano porque la operación es conmutativa, es decir,  $a + b = b + a$  para cualquier  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{Z}_2$ . Además, es un grupo cíclico porque se puede generar cualquier elemento del grupo a partir de una operación de suma repetida sobre el elemento identidad 0.

Con todo esto, vemos que podemos construir un espacio vectorial, donde los vectores, en vez de tener los reales como grupo, sea este  $\mathbb{Z}_2$ .

Sabiendo esto, podemos considerar ahora una representación de un reloj digital LED de 7 componentes [2] Fig. 2.4. Cada LED que esté encendido se representará con 1 y será 0 cuando esté apagado.

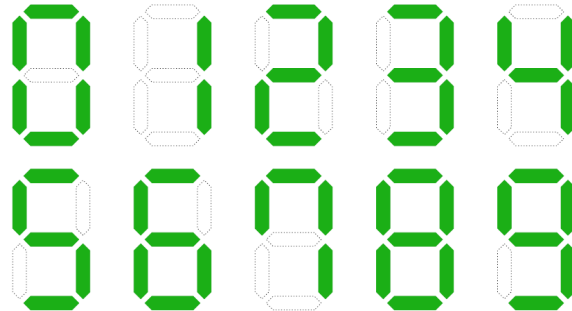


Figura 2.4: Los 10 números de un reloj digital.

Por lo tanto, podemos hacer las siguientes sumas de números de la Fig. 2.5

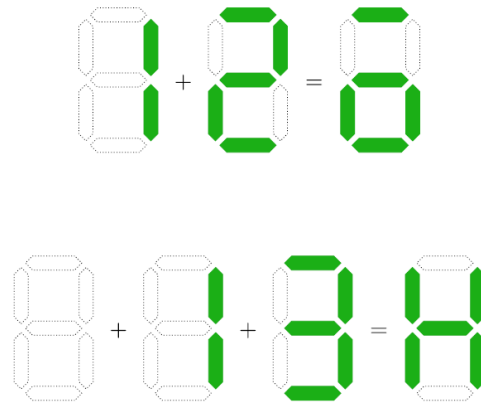


Figura 2.5: Ejemplos de suma de números.

Podemos demostrar que esto representa un espacio vectorial de dimensión 7. Para ello, tenemos que ver que se cumplen las siguientes propiedades (que aparecen en el Tema 2 de los apuntes de teoría):

- Suma:
  - Conmutativa: hemos visto antes que la suma de elementos del grupo  $\mathbb{Z}_2$  es conmutativa, por lo que un vector definido sobre este grupo satisfará la propiedad conmutativa para la suma.
  - Asociativa: La suma de elementos del grupo  $\mathbb{Z}_2$  es también asociativa, por lo que también la satisface.

- Existencia de elemento neutro: en este caso, el vector neutro será un vector de 7 componentes con todo ceros (ningún LED encendido).
  - Existencia de elemento opuesto: a partir de la propiedad vista anteriormente de la suma de elementos, el elemento neutro será el propio vector.
- Producto por un escalar:
- Distributiva: se sigue de manera directa de las propiedades del grupo.
  - Asociativa: igual que en el caso anterior.
  - Existencia de elemento neutro: en este caso, el elemento neutro será el 1.

## Problemas

1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos, con las operaciones indicadas, son espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ :
  - a)  $\mathbb{R}^2$  con las operaciones  $\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ \alpha(x, y) = (2\alpha x, 2\alpha y) \end{cases}$ .
  - b) El conjunto  $P_3(\mathbb{R})$  de todos los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales con las operaciones usuales.
2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del e.v. que se indica?
  - a) En  $\mathbb{R}^3$  con las operaciones habituales, el conjunto de vectores de la forma  $(a, 1, b)$ .
  - b) En  $M_{2 \times 2}$  con las operaciones habituales, el conjunto de las matrices anti-simétricas.
  - c) En  $P_3(\mathbb{R})$  con las operaciones habituales, el conjunto de los polinomios con derivada nula.
  - d) En  $\mathbb{R}^2$  con las operaciones habituales, el conjunto  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$ .
  - e) En  $M_{2 \times 2}$  el conjunto de todas las matrices de la forma  $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .
  - f) En  $M_{2 \times 2}$  el conjunto de todas las matrices de la forma  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .
3. ¿Son linealmente independientes los siguientes vectores de  $\mathbb{R}^4$ :  $(1, 0, -1, 1), (-2, 1, 1, 0), (6, 1, 2, 0), (0, -1, 0, 2), (1, 0, 1, 1)$ ?
4. Probar que  $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ . Calcular las coordenadas en esta base del vector  $(2, -4, 1)$ .

5. Hallar una base y la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios del e.v.  $\mathbb{R}^3$

a)  $L_1 = L[(1, -1, 2), (-1, 1, -2), (2, -2, 4)].$

b)  $L_2 = \{(\alpha, \alpha - \beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$

c)  $L_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0, -x + y - 2z = 0, -2x + 2y - 4z = 0\}.$

6. En  $M_{2 \times 2}$ , hallar una base del subespacio  $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$

7. En  $\mathbb{R}^3$  se consideran las bases:  $B = \{(1, -1, 1), (2, 0, 1), (-1, 2, 3)\}$  y  $B' = \{(2, -1, 5), (1, 0, 5), (0, 6, 10)\}.$

a) Hallar la matriz del cambio de base de  $B$  a  $B'.$

b) Hallar la matriz del cambio de base de  $B'$  a  $B.$

c) Hallar la matriz del cambio de base de  $B$  a la base canónica.

8. En el espacio vectorial  $P_3(\mathbb{R})$  (ejercicio 1b) se consideran los polinomios  $\vec{v}_1 = 1 + x$ ,  $\vec{v}_2 = x^2$ ,  $\vec{v}_3 = 1 + x^2$ ,  $\vec{v}_4 = x^2 + x^3.$

a) Demostrar que  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  es base de  $P_3(\mathbb{R}).$

b) Dado  $\vec{w}_1 = 1 + x + x^2 + x^3$ , hallar  $[\vec{w}_1]_B.$

c) Si  $[\vec{w}_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , hallar  $\vec{w}_2.$

d) Sean  $\vec{w}_3 = 3 + 2x + 2x^2 + 3x^3$ ,  $\vec{w}_4 = 1$ . Hallar  $L[\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4].$

9. En el e.v.  $\mathbb{R}^4$  se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

$$L_1 = L[(1, -1, 2, 0), (0, 1, -3, 1), (1, 1, -4, 2)],$$

$$L_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0, x + 2z + t = 0\}.$$

a) Hallar una base y la dimensión de  $L_1.$

b) Hallar una base y la dimensión de  $L_2.$

c) Hallar una base y la dimensión de  $L_1 + L_2.$

d) Hallar una base y la dimensión de  $L_1 \cap L_2.$

10. Se consideran en  $\mathbb{R}^4$  los vectores:  $\vec{v}_1 = (1, 2, a, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (a, 1, 2, 3)$ ,  $\vec{v}_3 = (0, 5, 7, 0).$

a) Hallar  $a$  para que la dimensión de  $L_1 = L[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$  sea 2. Dar una base.

- b) Sea el subespacio  $L_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y + z + t = 0\}$ . Obtener una base.
- c) Hallar una base de  $L_1 \cap L_2$  para el valor de  $a$  dado en a).
- d) Hallar una base de  $L_1 + L_2$  para el valor de  $a$  dado en a).
11. Sea un espacio vectorial  $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ . Demostrar que si los vectores  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  forman una base de  $V$ , entonces los vectores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ , donde  $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ ,  $\vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_3$ ,  $\vec{v}_3 = \vec{u}_3$ , también forman una base de  $V$ .
12. Consideremos el espacio vectorial euclídeo  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar. Hallar un vector unitario que sea ortogonal a los vectores  $\vec{u} = (4, 6, -1)$  y  $\vec{v} = (2, 3, -2)$ .
13. Sea  $V$  un e.v.e. y  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ . Probar que:  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \iff \vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales.
14. En  $\mathbb{R}^3$  se considera el subespacio  $S$  generado por  $(1, 0, 1)$  y el producto escalar.
- a) Hallar una base de  $S^\perp$ .
- b) A partir de la base hallada en a), obtener una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .
- c) Expresar el vector  $(3, 1, -1)$  como suma de un vector de  $S$  más otro de  $S^\perp$ .
15. Demostrar que si  $A$  y  $B \in M_{n \times n}$  son matrices ortogonales,  $AB$  y  $BA$  son también ortogonales.
16. Demostrar que si  $A \in M_{n \times n}$  es ortogonal y simétrica, entonces  $A^2 = I$ . (Si  $A^2 = I$  se dice que la matriz  $A$  es involutiva).
17. a) En  $\mathbb{R}^4$  consideramos el subespacio generado por los vectores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  y  $\vec{v}_3$ , siendo  $\vec{v}_1 = (1, 2, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (-1, 0, 1, 2)$ ,  $\vec{v}_3 = (-1, 4, 5, 6)$ . Hallar el valor de  $m$  y  $n$  para que  $(2, m, n, m + n) \in L[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$ . Calcular la dimensión del subespacio y sus ecuaciones paramétricas e implícitas.
- b) En  $\mathbb{R}^4$  consideramos el subespacio generado por los vectores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  y  $\vec{v}_3$ , siendo  $\vec{v}_1 = (1, 2, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (-1, 0, 1, 2)$ ,  $\vec{v}_3 = (-1, 4, 5, 6)$ . Hallar el valor de  $m$  y  $n$  para que  $(2, m, n, m + n) \in L[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$ . Calcular la dimensión del subespacio y sus ecuaciones paramétricas e implícitas.
18. Sean  $\vec{v}_1 = (0, 1, -1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, -2, 0, a)$ ,  $\vec{v}_3 = (a, -1, -1, 2)$ ,  $\vec{v}_4 = (2, -3, 1, 3)$ , vectores de  $\mathbb{R}^4$ :
- a) Hallar  $a$  para que los vectores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  sean linealmente dependientes.
- b) Si  $a = 1$  y  $U = L[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$  y  $V = L[\vec{v}_3, \vec{v}_4]$ , encontrar una base de  $U + V$  y otra de  $U \cap V$ .

19. Sean los subespacios de  $\mathbb{R}^4$ :  $H_1 = L[(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)]$  y  $H_2 = L[(1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (3, 5, -2, 5)]$ .
- Calcular  $x$  e  $y$  para los que  $(1, 5, -x, y) \in H_1$ .
  - Hallar la dimensión y una base de los subespacios  $H_1, H_2, H_1 + H_2, H_1 \cap H_2$ .
  - Hallar unas ecuaciones implícitas de  $H_1 + H_2$ .
20. a) Probar que  $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$  es un subespacio vectorial del espacio vectorial  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .
- Hallar la dimensión y una base de dicho subespacio.
  - Si  $B$  es dicha base, hallar las coordenadas de  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$  en  $B$ .
21. Sean  $H_1$  y  $H_2$  dos subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^4$ , tales que  $\dim H_1 = 2$  y  $\dim H_2 = 3$ . ¿Qué valores pueden tomar  $\dim(H_1 + H_2)$  y  $\dim(H_1 \cap H_2)$ ?
22. Sea  $P_2(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y coeficientes reales. Sea  $S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$ . Probar que  $S$  es un subespacio de  $P_2(\mathbb{R})$ , y hallar su dimensión y una base de  $S$ .
23. En  $\mathbb{R}^3$  se considera el subespacio  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$  y el producto escalar definido en  $\mathbb{R}^3$ .
- Hallar una base de  $S^\perp$ .
  - A partir de la base hallada en a), obtener una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .

24. Dados los vectores

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

halla los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ , o la relación entre ellos, para que:

- Los vectores sean base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Los vectores generen el subespacio

$$W = L \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right].$$

25. Si  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ , demuestra que  $S = \{B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / A \cdot B = 0\}$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  y halla la dimensión y una base.

26. Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo de dimensión  $n$  y sea  $S, T$  subespacios de  $V$ .

- (a) Si  $\dim(S) = r$ , ¿cuál es la dimensión del subespacio ortogonal a  $S$ ?
- (b) Prueba que si  $S \subset T$ , entonces  $S^\perp \supset T^\perp$ .
- (c) Prueba que  $(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$ .
- (d) Prueba que  $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$ .

27. Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La traza de  $A$ , denotada  $\text{tr}(A)$ , se define como la suma de sus elementos diagonales:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Demuestra que el conjunto de matrices de traza cero

$$T_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$$

es un subespacio de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## Soluciones

- 1. a) No.  
b) Sí.
- 2. a) No.  
b) Sí.  
c) Sí.  
d) Sí.  
e) No.  
f) Sí.

3. No.

4. Las coordenadas son  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- 5. a)  $\dim L_1 = 1$ . Una base:  $\{(1, -1, 2)\}$ .  
b)  $\dim L_2 = 2$ . Una base:  $\{(1, 1, 0), (0, -1, 2)\}$ .  
c)  $\dim L_3 = 2$ . Una base:  $\{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ .

6.  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  es una base de  $S$ .

7. a)  $P_{BB'} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{27}{10} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{17}{5} & \frac{9}{5} \\ -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$
- b)  $P_{B'B} = P_{BB'}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{23}{9} & 2 & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{14}{9} \\ \frac{7}{9} & 1 & \frac{26}{9} \end{pmatrix}$
- c)  $P_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
8. b)  $[\vec{w}_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- c)  $\vec{w}_2 = 2 + x + 2x^2$ .
- d)  $P_3(\mathbb{R})$ .
9. a)  $\dim L_1 = 2$ . Base:  $\{(1, -1, 2, 0), (0, 1, -3, 1)\}$ .
- b)  $\dim L_2 = 2$ . Base:  $\{(-2, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ .
- c)  $\dim L_1 + L_2 = 3$ . Base:  $\{(1, -1, 2, 0), (0, 1, -3, 1), (0, 0, -1, 2)\}$ .
- d)  $\dim L_1 \cap L_2 = 1$ . Base:  $\{(-1, 0, 1, -1)\}$ .
10. a)  $a = 3$ . Una base es, por ejemplo,  $\{(1, 2, 3, 1), (0, 5, 7, 0)\}$ .
- b)  $\{(0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$  es una base de  $L_2$ .
- c)  $L_1 \cap L_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$ . No tiene base.
- d)  $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^4$ . La base canónica de  $\mathbb{R}^4$  es una base de  $L_1 + L_2$ .
12. Hay dos vectores:  $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}, 0\right)$  y  $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, 0\right)$ .
14. a) Una base puede ser  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ .
- b) Base ortonormal:  $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ .
- c)  $(3, 1, -1) = (1, 0, 1) + (2, 1, -2)$ , donde  $(1, 0, 1) \in S$  y  $(2, 1, -2) \in S^\perp$ .
17. a)  $n - m = 2$ ,  $\dim V = 3$ ,  $V = \{(a, a + b, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- b)  $m = -2$ ,  $n = 4$ ,  $\dim V = 2$ ,  $V = \{(a, a + b, b, -a + b) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$
18. a)  $a = 1$ , b)  $B_{U+V} = \{\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ ,  $B_{U \cap V} = \{\vec{v}_3\}$

19. a)  $x = -1, y = 5$ .

b)  $B_{H_1} = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\}$ ,  $\dim(B_{H_1}) = 2$ .

$B_{H_2} = \{(1, 1, 0, 1), (1, 2, 1, 1)\}$ ,  $\dim(B_{H_2}) = 2$ .

$B_{H_1+H_2} = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 1, 0, 1)\}$ ,  $\dim(B_{H_1+H_2}) = 3$ .

$B_{H_1 \cap H_2} = \{(1, 0, 1, 0)\}$ ,  $\dim(B_{H_1 \cap H_2}) = 1$ . c)  $t - y = 0$

20. b)  $\dim(V_1) = 2$ .  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

c) Las coordenadas de  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$  en  $B$  son  $(2, 3)$ .

21. Los valores posibles son:

▪  $\dim(H_1 + H_2) = 3$  y  $\dim(H_1 \cap H_2) = 2$ .

▪  $\dim(H_1 + H_2) = 4$  y  $\dim(H_1 \cap H_2) = 1$ .

22.  $S$  es un subespacio vectorial.  $\dim(S) = 2$ . Una base de  $S$  es  $B_S = \{x - 1, x^2 - 1\}$ .

23. a)  $B_{S^\perp} = \{(2, -1, -1)\}$ .

b)  $B_{ON} = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left( \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right), \left( \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$ .

24. a)  $3ab - 2b - 2a + 1 \neq 0$ .

b)  $a = \frac{3}{4}, b = 2$ .

25.  $\dim S = 2$ ,  $\text{Base}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

26. a) Por descomposición ortogonal  $V = S \oplus S^\perp$ , luego  $\dim S^\perp = n - r$ .

b) Si  $S \subset T$ , todo vector ortogonal a  $T$  es ortogonal a  $S$ , de donde  $T^\perp \subset S^\perp$ .

c)  $\vec{x} \in (S + T)^\perp \iff \langle \vec{x}, \vec{s} + \vec{t} \rangle = 0$  para todo  $\vec{s} \in S, \vec{t} \in T$ , lo que equivale a  $\langle \vec{x}, \vec{s} \rangle = 0$  y  $\langle \vec{x}, \vec{t} \rangle = 0$ , es decir,  $\vec{x} \in S^\perp \cap T^\perp$ .

d) Se tiene siempre  $S^\perp + T^\perp \subset (S \cap T)^\perp$ . Además, por dimensiones y la identidad del apartado (c),

$$\dim(S^\perp + T^\perp) = \dim S^\perp + \dim T^\perp - \dim(S^\perp \cap T^\perp)$$

$$= (n - \dim S) + (n - \dim T) - (n - \dim(S + T)).$$

Esto es  $n - \dim(S \cap T) = \dim(S \cap T)^\perp$ , con lo que  $S^\perp + T^\perp = (S \cap T)^\perp$ .

# Capítulo 3

## Aplicaciones lineales

### 3.1. Concepto de aplicación lineal y propiedades

**Definición 3.1.1.** Sean  $U$  y  $V$  dos espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ , y sea la función  $f : U \rightarrow V$ . Se dice que  $f$  es una aplicación lineal (o transformación lineal) si cumple las condiciones:

$$(1) f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v} \in U.$$

$$(2) f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u}), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in U.$$

Si  $U = V$ , se dice que  $f$  es un endomorfismo (u operador lineal). Si  $f : U \rightarrow V$  es una aplicación lineal biyectiva se dice que es un isomorfismo entre  $U$  y  $V$ . Si existe un isomorfismo entre  $U$  y  $V$ , se dice que  $U$  y  $V$  son e.v. isomorfos.

**Ejemplo.**

- Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . La aplicación  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{X} \rightarrow A\vec{X}$  (considerando los elementos de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  como vectores columna) es una transformación lineal. A las transformaciones lineales de este tipo se les llama transformaciones matriciales.

- En particular, en el e.v.e.  $\mathbb{R}^2$ , sea  $\alpha$  un ángulo fijo. Sea  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

La aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  es una aplicación lineal. Se llama rotación o giro de ángulo  $\alpha$ . Geométricamente,  $f(\vec{u})$  es el vector que se obtiene si se hace girar  $\vec{u}$  hasta describir un ángulo  $\alpha$  en sentido contrario a las agujas del reloj.

- Sea  $V$  un e.v. sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La aplicación  $f : V \rightarrow V, \vec{v} \rightarrow \lambda \vec{v}$  es una aplicación lineal. Si  $\lambda > 1$   $f$  es una dilatación de  $V$ . Si  $0 < \lambda < 1$   $f$  es una contracción de  $V$ . Geométricamente, una dilatación "estira" cada vector que está en  $V$  en un factor  $\lambda$ , y una contracción de  $V$  "comprime" cada vector en un factor  $\lambda$ .

**Ejercicio.** Sean las funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (2x, x - 1, x + y)$ .  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g(x, y) = (x^2, x - y, x + y)$ . ¿Son aplicaciones lineales?

*Solución:* Para que una aplicación sea lineal, debe cumplir dos condiciones:

1. Aditividad:  $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ .

2. Homogeneidad:  $f(c\vec{u}) = cf(\vec{u})$ .

Una consecuencia directa de estas propiedades es que  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ . Si esto no se cumple, la aplicación no es lineal.  $\square$

**Análisis de  $f(x, y) = (2x, x - 1, x + y)$ :**

Comprobamos la condición del vector nulo  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ :

$$f(0, 0) = (2(0), 0 - 1, 0 + 0) = (0, -1, 0).$$

Dado que  $f(0, 0) \neq (0, 0, 0)$ , la aplicación  $f$  **no es lineal**. La presencia del término constante “-1” rompe la linealidad.

**Análisis de  $g(x, y) = (x^2, x - y, x + y)$ :**

Comprobamos la condición del vector nulo  $g(\vec{0}) = \vec{0}$ :

$$g(0, 0) = (0^2, 0 - 0, 0 + 0) = (0, 0, 0).$$

Esta condición sí se cumple. Debemos comprobar las propiedades de linealidad. La presencia del término  $x^2$  sugiere que no será lineal.

Comprobemos la homogeneidad  $g(c\vec{u}) = cg(\vec{u})$ . Sea  $\vec{u} = (x, y)$  y  $c$  un escalar.

$$g(c\vec{u}) = g(cx, cy) = ((cx)^2, (cx) - (cy), (cx) + (cy)),$$

$$g(c\vec{u}) = (c^2x^2, c(x - y), c(x + y)).$$

Por otro lado:

$$c \cdot g(\vec{u}) = c \cdot (x^2, x - y, x + y) = (cx^2, c(x - y), c(x + y)).$$

Al comparar  $g(c\vec{u})$  y  $c \cdot g(\vec{u})$ , vemos que  $c^2x^2 \neq cx^2$  (a menos que  $c = 0$ ,  $c = 1$  o  $x = 0$ ). Como  $g(c\vec{u}) \neq c \cdot g(\vec{u})$  para cualquier vector y escalar, la propiedad de homogeneidad falla. Por lo tanto, la aplicación  $g$  **no es lineal**.

**Teorema 3.1.1.** Sean  $U$  y  $V$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ , y  $f$  una aplicación de  $U$  en  $V$ . Entonces  $f$  es aplicación lineal si y sólo si:  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$ .

**Ejercicio.** Demostrar el teorema anterior.

**Teorema 3.1.2.** Sean  $U$  y  $V$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  y  $f$  una aplicación lineal de  $U$  en  $V$ . Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- (1)  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ .
- (2)  $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u}), \forall \vec{u} \in U$ .
- (3)  $f(\vec{u} - \vec{v}) = f(\vec{u}) - f(\vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v} \in U$ .

**Ejerc.** Demostrar el teorema anterior.

## 3.2. Imagen y núcleo de una aplicación lineal

**Definición 3.2.1.** Sea  $f : U \rightarrow V$  una aplicación lineal entre los e.v.  $U$  y  $V$ . Se llama Imagen de  $f$  al conjunto  $\text{Im } f = \{\vec{v} \in V | \exists \vec{u} \in U, f(\vec{u}) = \vec{v}\} = \{f(\vec{u}) | \vec{u} \in U\} \subseteq V$ . Se llama Núcleo de  $f$  al conjunto  $\text{Ker } f = \{\vec{u} \in U | f(\vec{u}) = \vec{0}\} \subseteq U$ .

Podemos expresar con palabras la anterior definición:

- La imagen de una aplicación lineal  $f : U \rightarrow V$  es el conjunto de todos los elementos de  $V$  que se pueden obtener como resultado de aplicar  $f$  a algún vector de  $U$ . Es decir, recoge todos los “resultados” posibles de la transformación; en términos prácticos, la imagen responde a la pregunta “¿qué vectores se pueden alcanzar en  $V$  usando la función  $f$ ?”.
- El núcleo de  $f$  es el conjunto de todos los vectores de  $U$  que son llevados exactamente al vector cero de  $V$  por  $f$ . Es decir, son los elementos “invisibles” para la aplicación: aunque existan en  $U$ , su imagen por  $f$  está completamente anulada. El núcleo responde a la pregunta “¿qué vectores de  $U$  desaparecen (se anulan) al aplicar la transformación?”.

Esto queda representado en la Figura 3.1.

**Teorema 3.2.1.** Si  $f$  es una aplicación lineal de  $U$  en  $V$ , entonces:

- a)  $\text{Im } f$  es un subespacio de  $V$ .
- b)  $\text{Ker } f$  es un subespacio de  $U$ .

*Demostración.* **a)** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \text{Im } f$ . Para demostrar que  $\text{Im } f$  es un subespacio de  $V$  basta verificar que  $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in \text{Im } f$ .

Como  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \text{Im } f$ , existen  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$  tales que

$$f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1, \quad f(\vec{u}_2) = \vec{v}_2.$$

Dado que  $U$  es un espacio vectorial,  $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 \in U$ , y como  $f$  es lineal:

$$f(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \alpha f(\vec{u}_1) + \beta f(\vec{u}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2.$$

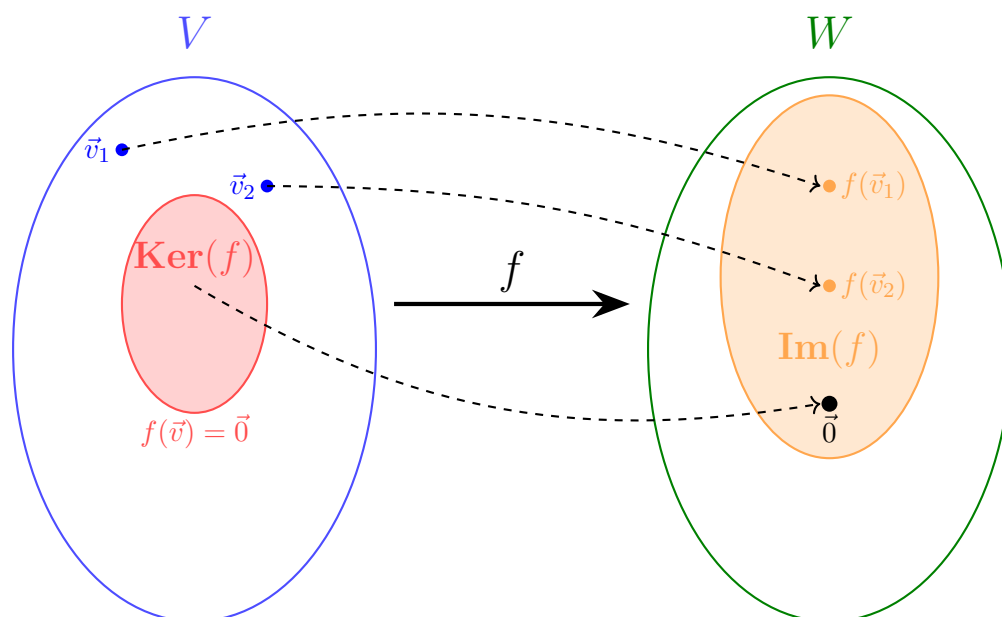


Figura 3.1: Representación esquemática de una aplicación lineal  $f : V \rightarrow W$ .

Por tanto,  $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in \text{Im } f$ , y así  $\text{Im } f$  es un subespacio de  $V$ .

**b)** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \text{Ker } f$ . Para demostrar que  $\text{Ker } f$  es un subespacio de  $U$  basta comprobar que  $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 \in \text{Ker } f$ .

Como  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \text{Ker } f$ , se cumple

$$f(\vec{u}_1) = \vec{0}, \quad f(\vec{u}_2) = \vec{0}.$$

Por linealidad de  $f$ :

$$f(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \alpha f(\vec{u}_1) + \beta f(\vec{u}_2) = \alpha\vec{0} + \beta\vec{0} = \vec{0}.$$

Luego  $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 \in \text{Ker } f$ , y por tanto  $\text{Ker } f$  es un subespacio de  $U$ . □

**Definición 3.2.2.** Dada una aplicación lineal  $f : U \rightarrow V$  entre los e.v.  $U$  y  $V$  se llama rango de  $f$  a la dimensión de  $\text{Im } f$  (hemos visto en el Teorema 3.2.1 que es un subespacio).

**Teorema 3.2.2.** Sean  $f$  una aplicación lineal de  $U$  en  $V$  y  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  un sistema generador de  $U$ . Entonces,  $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_r)\}$  es un sistema generador de  $\text{Im } f$ .

*Demostración.* Sea  $\vec{v} \in \text{Im } f$ . Entonces existe  $\vec{u} \in U$  tal que  $f(\vec{u}) = \vec{v}$ . Como  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  es un sistema generador de  $U$ , pueden encontrarse  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$  con

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \dots + \alpha_r\vec{u}_r.$$

Aplicando  $f$  y usando la linealidad,

$$\vec{v} = f(\vec{u}) = f(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r) = \alpha_1f(\vec{u}_1) + \alpha_2f(\vec{u}_2) + \cdots + \alpha_rf(\vec{u}_r).$$

Por tanto,  $\vec{v}$  es combinación lineal de los vectores  $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_r)\}$ , lo que prueba que este conjunto es un sistema generador de  $\text{Im } f$ .  $\square$

**Ejemplo.** Si  $f$  es la aplicación del ejemplo 1 (Definición 3.1.1), se verifica:

$$\text{Ker } f = \{\vec{X} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{X} = \vec{0}\} \quad (\text{conjunto solución de un sistema lineal homogéneo}),$$

$$\text{Im } f = L[\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n], \quad \text{donde } \vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n \text{ son las columnas de } A,$$

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(A).$$

**Teorema 3.2.3.** Sea  $f : U \rightarrow V$  una aplicación lineal. Entonces

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(U).$$

*Demostración.* Sea  $n = \dim(U)$  y  $r = \dim(\text{Ker } f)$  (como  $\text{Ker } f \subseteq U$ , se tiene  $r \leq n$ ).  
Sea

$$B_K = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$$

una base del núcleo. Completamos este conjunto hasta obtener una base de  $U$ :

$$B_U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}.$$

Como  $B_U$  es sistema generador de  $U$ , el conjunto

$$\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_r), f(\vec{u}_{r+1}), \dots, f(\vec{u}_n)\}$$

genera  $\text{Im } f$ . Los primeros  $r$  elementos son  $\vec{0}$ , pues son imágenes de vectores del núcleo, de modo que

$$\text{Im } f = L[f(\vec{u}_{r+1}), \dots, f(\vec{u}_n)].$$

Probemos que  $\{f(\vec{u}_{r+1}), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  es linealmente independiente. Consideremos

$$\alpha_{r+1}f(\vec{u}_{r+1}) + \cdots + \alpha_n f(\vec{u}_n) = \vec{0}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Por linealidad,

$$f(\alpha_{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n) = \vec{0},$$

por lo que

$$\alpha_{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n \in \text{Ker } f.$$

Por ser  $B_K$  base del núcleo, existen  $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$  tales que

$$\alpha_{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n = \beta_1\vec{u}_1 + \cdots + \beta_r\vec{u}_r.$$

Equivalente a

$$\beta_1 \vec{u}_1 + \cdots + \beta_r \vec{u}_r - \alpha_{r+1} \vec{u}_{r+1} - \cdots - \alpha_n \vec{u}_n = \vec{0}.$$

Como los elementos de  $B_U$  son linealmente independientes, se obtiene

$$\beta_1 = \cdots = \beta_r = \alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Por tanto,  $\{f(\vec{u}_{r+1}), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  es una base de  $\text{Im } f$ , y

$$\dim(\text{Im } f) = n - r.$$

Finalmente,

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = r + (n - r) = n = \dim(U).$$

□

**Teorema 3.2.4.** Propiedades importantes:

- $f$  es **inyectiva**  $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = 0$ .
- $f$  es **sobreyectiva**  $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = V \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$ .
- $f$  es **biyectiva**  $\Leftrightarrow f$  es inyectiva y sobreyectiva.
- Si  $\dim(U) = \dim(V)$  y  $f$  es inyectiva, entonces  $f$  es sobreyectiva (y viceversa).

**Ejemplo.** Consideremos la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:

$$f(x, y, z) = (x, y, 0)$$

Esta aplicación toma cada vector del espacio tridimensional y lo proyecta verticalmente sobre el plano  $xy$  (es decir, el plano  $z = 0$ ), anulando su componente en la dirección  $z$ , como se puede ver en la Figura 3.2.

### Interpretación de la acción de $f$ sobre los vectores

Para comprender mejor la aplicación, veamos cómo transforma algunos vectores concretos:

- El vector  $\vec{v} = (1, 1, 2)$  no pertenece al núcleo, pues tiene componentes en  $x$  e  $y$ . Al aplicarle  $f$ , se proyecta sobre el plano  $xy$ , eliminando la componente  $z$ :

$$f(\vec{v}) = (1, 1, 0).$$

Esto significa que toda la información en la dirección  $z$  se pierde, pero se conservan las coordenadas en  $x$  e  $y$ .

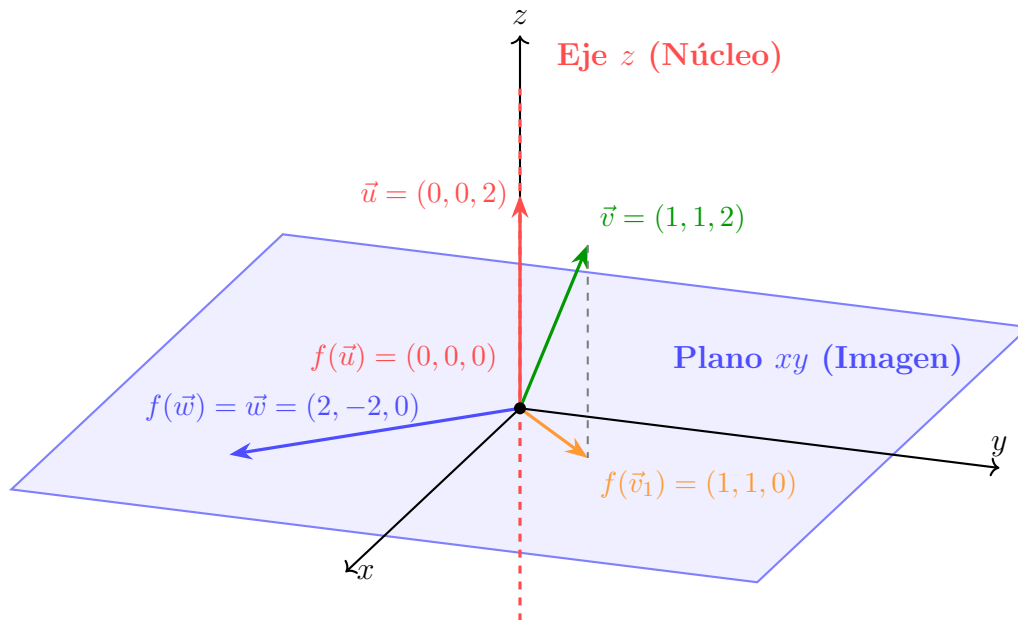


Figura 3.2: Proyección de vectores de  $\mathbb{R}^3$  sobre el plano  $z = 0$ .

- El vector  $\vec{u} = (0, 0, 2)$  está alineado con el eje  $z$ , por lo que pertenece al núcleo de  $f$ . Al aplicarle la transformación, obtenemos:

$$f(\vec{u}) = (0, 0, 0).$$

Esto confirma que cualquier vector vertical se anula completamente.

- El vector  $\vec{w} = (2, -2, 0)$  ya está en el plano  $xy$ , por lo que la aplicación no lo modifica:

$$f(\vec{w}) = (2, -2, 0).$$

En este caso,  $f$  actúa como la identidad sobre los vectores del plano  $xy$ .

Podemos ver que la aplicación  $f$  conserva las componentes horizontales y elimina las verticales, proyectando todo el espacio tridimensional sobre el plano  $xy$ .

### Verificación de linealidad

Para comprobar que  $f$  es lineal, verificamos:

#### 1. Aditividad:

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \\ &= (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

#### 2. Homogeneidad:

$$f(\lambda\vec{v}) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x, \lambda y, 0) = \lambda(x, y, 0) = \lambda f(\vec{v})$$

Por tanto,  $f$  es una aplicación lineal.

### Núcleo de $f$

El **núcleo** de  $f$  es el conjunto de vectores que se proyectan en el vector cero:

$$\text{Ker}(f) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

Calculamos:

$$f(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff (x, y, 0) = (0, 0, 0) \iff x = 0, y = 0$$

Por tanto:

$$\text{Ker}(f) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{Eje } z$$

**Interpretación geométrica:** El núcleo está formado por todos los vectores que son verticales (paralelos al eje  $z$ ). Cualquier vector de la forma  $(0, 0, z)$  se proyecta en el origen del plano  $xy$ .

**Dimensión:**  $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ , ya que el eje  $z$  es un subespacio de dimensión 1.

### Imagen de $f$

La **imagen** de  $f$  es el conjunto de todos los vectores que son imagen de algún vector de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\text{Im}(f) = \{f(\vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^3\} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Por tanto:

$$\text{Im}(f) = \text{Plano } z = 0 = \text{Plano } xy$$

**Interpretación geométrica:** La imagen es todo el plano  $xy$ . Cualquier punto  $(a, b, 0)$  del plano es la proyección de infinitos vectores, por ejemplo  $(a, b, 0)$ ,  $(a, b, 1)$ ,  $(a, b, -5)$ , etc.

**Dimensión:**  $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ , ya que el plano  $xy$  es un subespacio de dimensión 2.

### Verificación del Teorema de la dimensión

El teorema de la dimensión establece que:

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

En nuestro caso:

$$3 = 1 + 2.$$

### Matriz asociada

En la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , la matriz asociada a  $f$  es:

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos verificar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = f(x, y, z)$$

### Observaciones importantes:

- $f$  **no es inyectiva** porque  $\text{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$ . Infinitos vectores se proyectan en el mismo punto del plano.
- $f$  **no es sobreyectiva** porque  $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ . Ningún vector fuera del plano  $z = 0$  es imagen de  $f$ .
- Por tanto,  $f$  **no es biyectiva** y no tiene inversa.
- Todo vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  se puede descomponer de forma única como:

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{v}_{xy}}_{\in \text{Im}(f)} + \underbrace{\vec{v}_z}_{\in \text{Ker}(f)}$$

donde  $\vec{v}_{xy} = (x, y, 0)$  y  $\vec{v}_z = (0, 0, z)$ .

**Ejemplo.** Consideremos la aplicación lineal  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$$g(x, y, z) = (x, y)$$

Esta aplicación toma cada vector del espacio tridimensional y lo proyecta sobre el plano  $xy$ , eliminando completamente la información de la coordenada  $z$  y reduciendo la dimensión del vector resultante a dos componentes.

### Interpretación de la acción de $g$ sobre los vectores

Para comprender mejor la aplicación, veamos cómo transforma algunos vectores concretos:

- El vector  $\vec{v} = (1, 1, 2)$  no pertenece al núcleo, pues tiene componentes en  $x$  e  $y$ . Al aplicarle  $g$ , se proyecta eliminando la componente  $z$ :

$$g(\vec{v}) = (1, 1) \in \mathbb{R}^2.$$

Esto significa que toda la información en la dirección  $z$  se pierde, pero se conservan las coordenadas en  $x$  e  $y$ .

- El vector  $\vec{u} = (0, 0, 2)$  está alineado con el eje  $z$ , por lo que pertenece al núcleo de  $g$ . Al aplicarle la transformación, obtenemos:

$$g(\vec{u}) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

Esto confirma que cualquier vector vertical se anula completamente.

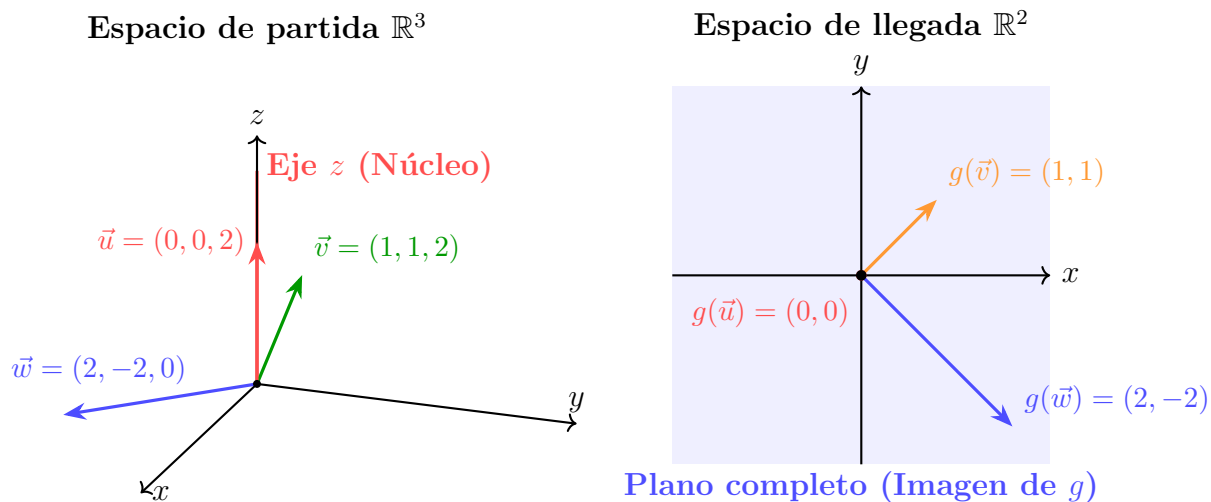


Figura 3.3: Proyección de vectores de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^2$  mediante  $g(x, y, z) = (x, y)$ .

- El vector  $\vec{w} = (2, -2, 0)$  está en el plano  $xy$ , por lo que la aplicación conserva sus dos primeras componentes:

$$g(\vec{w}) = (2, -2) \in \mathbb{R}^2.$$

En este caso,  $g$  simplemente “olvida” la tercera coordenada (que ya era cero).

Observamos que  $g$  reduce la dimensión del espacio: partimos de vectores en  $\mathbb{R}^3$  (tres coordenadas) y llegamos a vectores en  $\mathbb{R}^2$  (dos coordenadas).

### Verificación de linealidad

Para comprobar que  $g$  es lineal, verificamos:

#### 1. Aditividad:

$$\begin{aligned} g(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= g(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = g(\vec{v}_1) + g(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

#### 2. Homogeneidad:

$$g(\lambda\vec{v}) = g(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x, \lambda y) = \lambda(x, y) = \lambda g(\vec{v})$$

Por tanto,  $g$  es una aplicación lineal.

### Núcleo de $g$

El **núcleo** de  $g$  es el conjunto de vectores que se transforman en el vector cero de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\text{Ker}(g) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : g(\vec{v}) = (0, 0)\}$$

Calculamos:

$$g(x, y, z) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0) \iff x = 0, y = 0$$

Por tanto:

$$\text{Ker}(g) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{Eje } z$$

**Interpretación geométrica:** El núcleo está formado por todos los vectores verticales (paralelos al eje  $z$ ). Cualquier vector de la forma  $(0, 0, z)$  se transforma en el origen de  $\mathbb{R}^2$ .

**Dimensión:**  $\dim(\text{Ker}(g)) = 1$ , ya que el eje  $z$  es un subespacio de dimensión 1.

### Imagen de $g$

La **imagen** de  $g$  es el conjunto de todos los vectores de  $\mathbb{R}^2$  que son imagen de algún vector de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\text{Im}(g) = \{g(\vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^3\} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Por tanto:

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R}^2$$

**Interpretación geométrica:** La imagen es todo  $\mathbb{R}^2$ . Cualquier punto  $(a, b)$  del plano es la imagen de infinitos vectores de  $\mathbb{R}^3$ , por ejemplo  $(a, b, 0)$ ,  $(a, b, 1)$ ,  $(a, b, -5)$ , etc. Todos los vectores con las mismas dos primeras coordenadas producen el mismo resultado.

**Dimensión:**  $\dim(\text{Im}(g)) = 2$ , ya que la imagen es todo  $\mathbb{R}^2$ .

### Verificación del Teorema de la dimensión

El teorema de la dimensión establece que:

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g))$$

En nuestro caso:

$$3 = 1 + 2.$$

### Matriz asociada

La matriz asociada a  $g$  respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^2$  es:

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observa que esta matriz tiene 2 filas (dimensión del espacio de llegada) y 3 columnas (dimensión del espacio de partida).

Podemos verificar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(x, y, z)$$

**Observaciones importantes:**

- **$g$  no es inyectiva** porque  $\text{Ker}(g) \neq \{\vec{0}\}$ . Infinitos vectores de  $\mathbb{R}^3$  se transforman en el mismo vector de  $\mathbb{R}^2$ . Concretamente, todos los vectores de la forma  $(a, b, z)$  con  $z$  variable se transforman en  $(a, b)$ .
- **$g$  es sobreyectiva** porque  $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^2$ . Cualquier vector  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  es imagen de, por ejemplo,  $(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3$ .
- Por tanto,  **$g$  no es biyectiva** y no tiene inversa (aunque sí tiene inversa por la derecha).
- Todo vector  $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  se puede descomponer de forma única como:

$$\vec{v} = \underbrace{(x, y, 0)}_{\text{representante en el plano}} + \underbrace{(0, 0, z)}_{\in \text{Ker}(g)}$$

- A diferencia del ejemplo anterior (proyección sobre el plano en  $\mathbb{R}^3$ ), aquí el espacio de llegada tiene menor dimensión que el de partida. Esto hace que  $g$  sea sobreyectiva pero no inyectiva.

**Ejemplo.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación lineal de la que conocemos  $f(1, 0) = (1, 3)$ ,  $f(0, 1) = (-2, 0)$ . ¿Es posible calcular la imagen de un vector cualquiera  $(x, y)$ ?

*Solución:* Sí, es posible. La razón es que el conjunto de vectores  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$  forma una base del espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ .

Cualquier vector  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se puede expresar como una combinación lineal única de los vectores de esta base:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Ahora, aplicamos la aplicación lineal  $f$  a esta expresión. Usando la propiedad fundamental de linealidad ( $f(a\vec{u} + b\vec{v}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{v})$ ), podemos separar la suma y extraer los escalares  $x$  e  $y$ :

$$f(x, y) = f(x(1, 0) + y(0, 1)) = x \cdot f(1, 0) + y \cdot f(0, 1).$$

Conocemos las imágenes de los vectores de la base, así que las sustituimos:

$$f(x, y) = x(1, 3) + y(-2, 0).$$

Operamos con los vectores para encontrar la expresión general de la imagen:

$$f(x, y) = (x, 3x) + (-2y, 0) = (x - 2y, 3x).$$

Por lo tanto, la imagen de un vector cualquiera  $(x, y)$  es  $(x - 2y, 3x)$ . □

Una aplicación lineal queda perfectamente determinada por las imágenes de los vectores de una base. Si

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$$

es una base de un espacio vectorial  $U$  y  $f$  es una aplicación lineal de  $U$  en  $V$ , dado un vector cualquiera  $\vec{u}$  de  $U$ , para calcular  $f(\vec{u})$  basta con conocer

$$\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\},$$

pues podemos expresar  $\vec{u}$  como combinación lineal de los vectores de  $B$ :

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n,$$

y entonces

$$f(\vec{u}) = f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n) = x_1f(\vec{u}_1) + x_2f(\vec{u}_2) + \dots + x_nf(\vec{u}_n).$$

### 3.3. Matriz y ecuaciones de una aplicación lineal

**Definición 3.3.1.** Sean  $f : U \rightarrow V$  una aplicación lineal,  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  una base de  $U$ , y  $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  una base de  $V$ .

Sea  $\vec{u} \in U$ :

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n, \quad f(\vec{u}) = x_1f(\vec{u}_1) + x_2f(\vec{u}_2) + \dots + x_nf(\vec{u}_n).$$

Por otra parte, los vectores  $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  se podrán expresar como combinaciones lineales de los de  $B'$ :

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \dots + a_{m1}\vec{v}_m, \\ f(\vec{u}_2) &= a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \dots + a_{m2}\vec{v}_m, \\ &\vdots \\ f(\vec{u}_n) &= a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \dots + a_{mn}\vec{v}_m. \end{aligned}$$

También  $f(\vec{u})$  se puede expresar como combinación lineal de los vectores de  $B'$ :

$$f(\vec{u}) = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \dots + y_m\vec{v}_m.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= x_1f(\vec{u}_1) + x_2f(\vec{u}_2) + \dots + x_nf(\vec{u}_n) \\ &= x_1(a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \dots + a_{m1}\vec{v}_m) + \\ &\quad + x_2(a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \dots + a_{m2}\vec{v}_m) + \dots + \\ &\quad + x_n(a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \dots + a_{mn}\vec{v}_m) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)\vec{v}_1 + \\ &\quad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)\vec{v}_2 + \dots + \\ &\quad + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)\vec{v}_m. \end{aligned}$$

Como la expresión de un vector como combinación lineal de los elementos de una base es única, será:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} .$$

**Observación.** Estas son las ecuaciones de la aplicación lineal con respecto a las bases  $B$  y  $B'$ : nos dan las coordenadas  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  de  $f(\vec{u})$  en función de la base  $B'$  a partir de las coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $\vec{u}$  en función de la base  $B$ .

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{es decir } [f(\vec{u})]_{B'} = A[\vec{u}]_B.$$

donde las columnas de la matriz  $A = (a_{ij})$  son precisamente las coordenadas de los vectores  $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  en la base  $B'$ :

$$A^i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = [f(\vec{u}_i)]_{B'}.$$

La matriz  $A$  se llama *matriz de la aplicación lineal  $f$  respecto a las bases  $B$  y  $B'$*  y se denota  $[f]_B^{B'}$ , con lo cual se cumple

$$[f(\vec{u})]_{B'} = [f]_B^{B'}[\vec{u}]_B.$$

Si  $f : V \rightarrow V$  y  $B$  es una base de  $V$ , la matriz de  $f$  respecto a  $B$  se denota  $[f]_B$ , con lo cual se cumple

$$[f(\vec{u})]_B = [f]_B[\vec{u}]_B.$$

La matriz de la aplicación lineal cuando se consideran las bases canónicas en los espacios vectoriales de partida y de llegada se llama *matriz estándar*.

**Observación.** El rango de la matriz  $A$  coincide con el rango de la aplicación lineal  $f$ . Luego, si  $A$  y  $B$  son matrices de la misma aplicación lineal respecto a distintas bases, deberán tener ambas el mismo rango.

**Ejemplo.** Hallar la matriz de la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , siendo  $f(x, y) = (x, x + y, x - y)$ , con respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

*Solución:* Para encontrar la matriz  $A$  asociada a una aplicación lineal  $f$  con respecto a las bases canónicas, la regla es que **las columnas de la matriz  $A$  son las imágenes de los vectores de la base canónica del espacio de partida.**

El espacio de partida es  $\mathbb{R}^2$ , y su base canónica es  $B_{C_2} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ .

El espacio de llegada es  $\mathbb{R}^3$ . La matriz  $A$  tendrá 3 filas (dimensión de  $\mathbb{R}^3$ ) y 2 columnas (dimensión de  $\mathbb{R}^2$ ).  $\square$

### 1. Cálculo de la Primera Columna

La primera columna es la imagen del primer vector de la base,  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ . Usamos la fórmula  $f(x, y) = (x, x + y, x - y)$ :

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0) = (1, 1 + 0, 1 - 0) = (1, 1, 1).$$

Esta es la primera columna de  $A$ .

### 2. Cálculo de la Segunda Columna

La segunda columna es la imagen del segundo vector de la base,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ .

$$f(\vec{e}_2) = f(0, 1) = (0, 0 + 1, 0 - 1) = (0, 1, -1).$$

Esta es la segunda columna de  $A$ .

### 3. Matriz de la Aplicación

Al colocar estos vectores como columnas, obtenemos la matriz  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación lineal,  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)$ .  $f(\vec{v}_1) = (1, 0)$ ,  $f(\vec{v}_2) = (2, -1)$ ,  $f(\vec{v}_3) = (4, 3)$ . Hallamos la matriz de la aplicación en las bases canónicas y la expresión de  $f(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Tenemos que  $f(1, 0, 0) = (4, 3)$ ,  $f(0, 1, 0) = (-2, -4)$ ,  $f(0, 0, 1) = (-1, 1)$ . Por tanto

$$[f]_C^C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, f(x, y, z) = (4x - 2y - z, 3x - 4y + z).$$

### 3.4. Semejanza de matrices

**Definición 3.4.1.** Sean  $A, B \in M_{n \times n}$ . Se dice que  $A$  y  $B$  son *semejantes* si existe  $P \in M_{n \times n}$  inversible tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

**Teorema 3.4.1 (Teorema de semejanza).** Sea  $f$  un endomorfismo de un e.v.  $V$ , y sean  $B$  y  $B'$  dos bases de  $V$ , con  $P_{BB'}$  la matriz de paso de  $B$  a  $B'$ . Entonces

$$[f]_B = P_{BB'}^{-1}[f]_{B'}P_{BB'},$$

es decir,  $[f]_B$  y  $[f]_{B'}$  son matrices semejantes.

*Demostración.* Sea  $\vec{v} \in V$ . Su imagen  $f(\vec{v}) \in V$  también. Se tiene:

$$[\vec{v}]_{B'} = P_{BB'}[\vec{v}]_B \quad (1), \quad [f(\vec{v})]_{B'} = P_{BB'}[f(\vec{v})]_B \quad (2),$$

$$[f(\vec{v})]_B = [f]_B[\vec{v}]_B \quad (3), \quad [f(\vec{v})]_{B'} = [f]_{B'}[\vec{v}]_{B'} \quad (4).$$

De (2) y (4) se sigue:

$$P_{BB'}[f(\vec{v})]_B = [f]_{B'}[\vec{v}]_{B'} = [f]_{B'}P_{BB'}[\vec{v}]_B.$$

Multiplicando por  $P_{BB'}^{-1}$  a izquierda se obtiene

$$[f(\vec{v})]_B = P_{BB'}^{-1}[f]_{B'}P_{BB'}[\vec{v}]_B.$$

Comparando con (3), se deduce que para todo  $\vec{v} \in V$

$$[f]_B[\vec{v}]_B = P_{BB'}^{-1}[f]_{B'}P_{BB'}[\vec{v}]_B,$$

de donde se concluye

$$[f]_B = P_{BB'}^{-1}[f]_{B'}P_{BB'}.$$

□

**Ejercicio.** Demostrar que si  $A$  y  $B$  son dos matrices cuadradas de tamaño  $n$  y se verifica que

$$AX = BX,$$

para todo vector columna

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

entonces  $A = B$ .

**Observación.**

- Hemos demostrado que

$$[f]_B = P_{BB'}^{-1}[f]_{B'}P_{BB'},$$

o lo que es equivalente,

$$[f]_{B'} = P_{B'B}^{-1}[f]_B P_{B'B}.$$

- En el tema siguiente intentaremos encontrar una base de  $V$  para la cual la matriz del endomorfismo sea diagonal.

**Ejemplo.** Vamos a considerar un ejemplo sencillo para ilustrar cómo cambia la matriz de la aplicación lineal, de una base a otra, utilizando el teorema de semejanza. Para ello, retomamos el ejemplo del capítulo anterior, como se puede ver en la Figura 3.4. Vamos a considerar una aplicación lineal tal que a cada vector nos dé otro vector con la misma componente  $x$  pero con el doble de su componente  $y$ . Entonces,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(x, y) = (x, 2y)$ .

**Base canónica**  $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$

**Nueva base**  $B = \{(0, -1), (1, 0)\}$

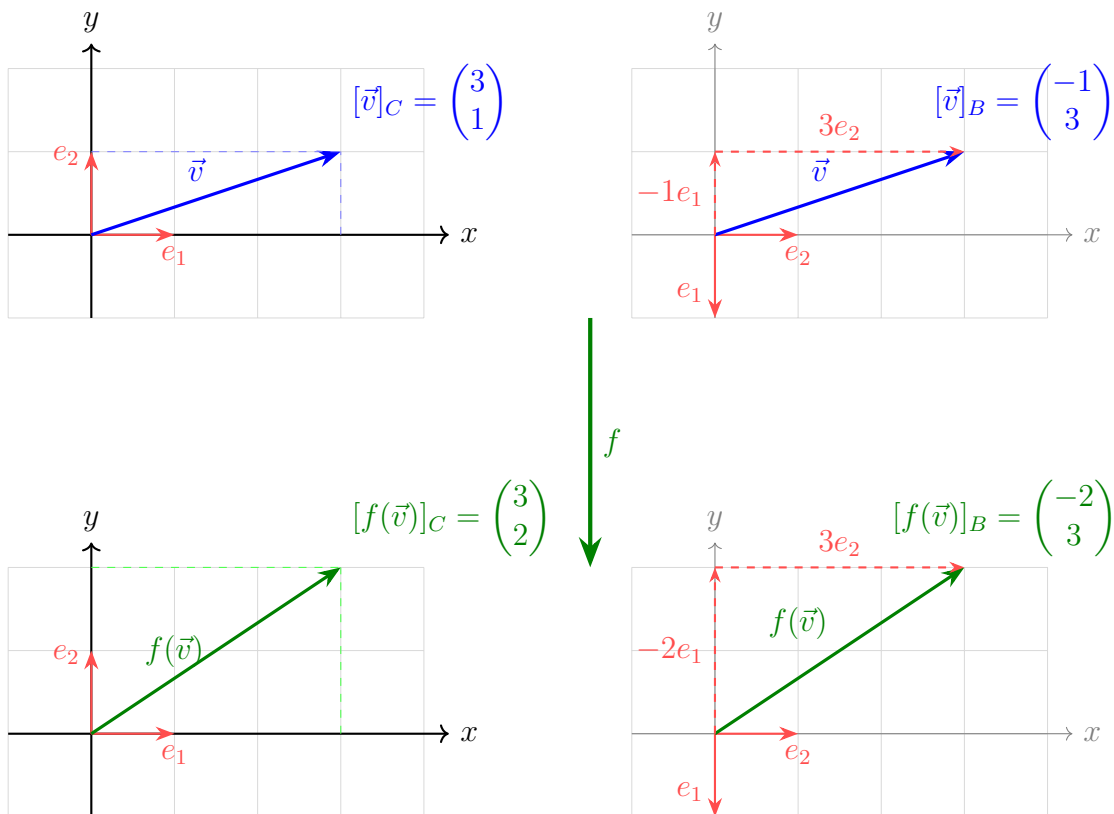


Figura 3.4: Aplicación de  $f(x, y) = (x, 2y)$  sobre el vector  $\vec{v}$  en dos bases diferentes.

Para hallar la matriz de la aplicación lineal en la base canónica  $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ , aplicamos  $f$  a los vectores de la base. Aplicamos  $f$  al primer vector de la base:

$$f(1, 0) = (1, 0 \cdot 2) = (1, 0)$$

Sus coordenadas en la base canónica son:

$$[f(1, 0)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos  $f$  al segundo vector de la base:

$$f(0, 1) = (0, 2 \cdot 1) = (0, 2)$$

Sus coordenadas en la base canónica son:

$$[f(0, 1)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a  $f$  en la base canónica se forma colocando estas coordenadas como columnas:

$$[f]_C = ([f(1, 0)]_C \quad [f(0, 1)]_C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz de  $f$  en la base canónica es:

$$[f]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, tenemos que

$$[f(\vec{v})]_C = [f]_C [\vec{v}]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

como era de esperar por el punto de partida del ejercicio.

**Cambio a la base  $B = \{(0, -1), (1, 0)\}$ .** La matriz de cambio de base de  $C$  a  $B$  obtenida en el capítulo anterior viene dada por:

$$P_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y su inversa (de  $B$  a  $C$ ) es:

$$P_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El teorema de semejanza establece que la matriz de la aplicación lineal en la base  $B$  se obtiene mediante:

$$[f]_B = P_{CB}[f]_C P_{BC}.$$

Sustituyendo:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el producto:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz de la aplicación lineal en la base  $B$  es:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La relación entre las matrices en ambas bases cumple:

$$[f]_B = P_{CB}[f]_C P_{BC}, \quad [f]_C = P_{BC}[f]_B P_{CB}.$$

Así se comprueba que ambas matrices representan la misma transformación lineal, expresada en bases diferentes.

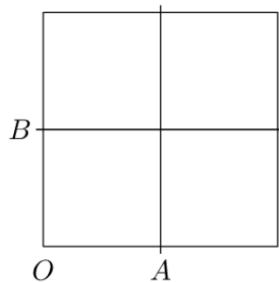
Por último, vemos que

$$[f(\vec{v})]_B = [f]_B [\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

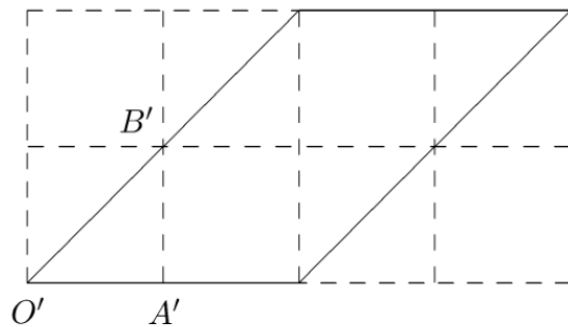
**Nota:** Observe que el vector transformado  $f(\vec{v})$  es el mismo en ambos casos (el punto  $(3, 2)$  en el plano), pero sus coordenadas dependen de la base elegida.

### 3.5. Aplicación: deformaciones

En el diseño de una armadura metálica se desea transformar una pieza de la forma



en una de la forma



¿Cuál es la aplicación lineal que efectúa este cambio? [1]

De la figura vemos que el punto  $(1, 0)$  permanece igual, mientras que el  $(0, 1)$  pasa a ser el  $(1, 1)$ . Escrito en forma matemática:

$$f(1, 0) = (1, 0), \quad f(0, 1) = (1, 1).$$

Podemos ahora reescribir la aplicación lineal en forma matricial, poniendo los vectores anteriores como columnas en la matriz

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar que  $f(2, 2) = (4, 2)$ , lo cual es una consecuencia directa de trabajar con aplicaciones lineales.

## Problemas

1. Sea la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightarrow (x + 2y + z, 3x + y - 2z, -x - 7y - 6z)$$

- Hallar la matriz de  $f$  con respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .
- Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen.
- Calcular una base del núcleo y otra de la imagen.
- Hallar la matriz de  $f$  con respecto a la base  $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ .

2. Sea la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \rightarrow (x + y, x)$$

Sean  $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$  y  $B' = \{(1, 0), (1, 1)\}$  dos bases de  $\mathbb{R}^2$ .

- a) Hallar la matriz de  $f$  con respecto a  $B$ .
- b) Hallar la matriz del cambio de base de  $B$  a  $B'$ .
- c) Hallar la matriz de  $f$  con respecto a  $B'$  y comprobar que se verifica el teorema de semejanza.
- d) Hallar la matriz de  $f$  en las bases  $B$  de partida y  $B'$  de llegada.
3. Sea la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 (x, y, z) \rightarrow (ax+by+z, x+aby+z, x+by+az)$
- a) Hallar los valores de  $a$  y  $b$  para que  $\text{Im}f = \mathbb{R}^3$ . ¿Cuál es en este caso el núcleo?
- b) Hallar una base del núcleo para  $a = 1$ .
- c) Para  $a = 1$  y  $b = 0$ , y dadas las bases:  $B = \{(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (4, 1, 2)\}$ ,  $B' = \{(1, 1, 2), (1, 1, 0), (-1, 1, -1)\}$
- i) Hallar la matriz de  $f$  con respecto a la base  $B$ .
- ii) Hallar la matriz de cambio de base de  $B$  a  $B'$ .
- iii) Encontrar la matriz de  $f$  respecto a la base  $B'$  aplicando teorema de semejanza.
4. Sea la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 (x, y, z, t) \rightarrow (x + 2y + z + 2t, -x + y + 2z - 2t, x - az + 2t)$
- a) Hallar la matriz de  $f$  con respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Calcular las dimensiones de la imagen y del núcleo de  $f$  según los valores de  $a$ .
- c) Para  $a = 1$ , hallar una base de la imagen y otra del núcleo.
5. Sean los vectores  $\vec{a}_1 = (1, -1, 0, 0)$ ,  $\vec{a}_2 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 1)$ ,  $\vec{a}_4 = (0, 0, 1, -1)$ . Probar que forman una base de  $\mathbb{R}^4$ .
- Se considera la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que:  $\text{Ker}f = L\{\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_3 + \vec{a}_4 - \vec{a}_1\}$ ,  $f(\vec{a}_1) = 2\vec{a}_1$ ,  $f(\vec{a}_3) = 2\vec{a}_3$ .
- a) Hallar la matriz de  $f$  con respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^4$ .
- b) Hallar una base de la imagen y otra del núcleo.
6. Consideramos el e. v. de las matrices  $M_{2 \times 2}$ . Sea  $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{2 \times 2}$ .
- a) Demostrar que  $S$  es subespacio vectorial de  $M_{2 \times 2}$  y encontrar una base.

b) Demostrar que

$$T : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2} \quad (3.1)$$

$$A \rightarrow A^t \quad (3.2)$$

es una aplicación lineal. Encontrar una base del núcleo y otra de la imagen.

c) Hallar  $[T]_C$  (matriz de la aplicación en la base canónica)

d) Sea la base  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  de las matrices  $M_{2 \times 2}$ .  
Encontrar, utilizando el teorema de semejanza,  $[T]_B$  (Basta indicar la operación).

7. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(x, y, z) = (x + y, (a + 1)x - y, az)$ .

a) Hallar los valores de  $a$  para los que  $\dim(\text{Ker } f) = 1$ .

b) Hallar una base del núcleo y otra de la imagen para  $a = -2$ .

c) Para  $a = -2$  hallar la matriz de la aplicación en la base  $B = \{(1, 2, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ .

8. Demostrar que la aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$  es lineal.

9. Sean  $U$  y  $V$  dos espacios vectoriales reales y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Sea  $f : U \rightarrow V$  una aplicación lineal. Demostrar que  $\text{Im}(\alpha f) \subseteq \text{Im } f$ .

10. Si  $U$  es un espacio vectorial de dimensión finita y  $f$  un endomorfismo de  $U$  tal que  $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f$ , demostrar que  $\dim U$  es par.

11. Sea la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z, t) \rightarrow (x + y + z + 2t, -x + y + 2z - 2t, x - z + 2t),$$

y la aplicación lineal  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \rightarrow (x + y, y + z).$$

a) Hallar la matriz de  $f$  con respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^3$ .

b) Hallar la matriz de  $g$  con respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^2$ .

c) Hallar la matriz de  $g \circ f$  con respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^2$ .

12. La matriz de la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  respecto de las bases canónicas de

$$\mathbb{R}^n \text{ y } \mathbb{R}^m \text{ es } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Cuáles son los valores de  $m$  y  $n$ .
- Hallar la dimensión de  $\text{Im } f$  y de  $\text{Ker } f$  según los valores de  $a$ .
- Para  $a = 1$ , hallar una base de  $\text{Im } f$  y otra de  $\text{Ker } f$ .

13. Sea la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $f(x, y, z) = (x + az, x + y, x + bz)$ .

- Hallar la matriz estándar de la aplicación en función de  $a$  y  $b$ .
- Calcular  $\dim \text{Ker } f$  y  $\dim \text{Im } f$ , según los valores de  $a$  y  $b$ .
- Para  $a = b = 2$  :
  - Hallar una base de  $\text{Ker } f$  y de  $\text{Im } f$ .
  - Sea  $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$ . Hallar la matriz  $[f]_B$ .

14. Sea la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(1, 1) = (1, 3, 2)$  y  $f(1, -1) = (1, 1, 0)$ . Hallar la matriz asociada a  $f$  respecto de las bases canónicas de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

Obtener una base de  $\text{Ker } f$  y otra de  $\text{Im } f$ .

Hallar unas ecuaciones implícitas de  $\text{Im } f$ .

Sea  $B = \{(1, 2), (3, 4)\}$  una base de  $\mathbb{R}^2$  y  $B' = \{(1, 1, 1), (0, 2, 2), (0, 0, 3)\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$ . Hallar la matriz  $[f]_{B'}^B$ .

15. ¿Puede existir una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(1, 1) = (1, 2, 1)$ ,  $f(1, -1) = (1, 0, -1)$ ,  $f(3, -1) = (3, 2, -1)$  ?

16. Sea aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por la expresión  $f(x, y, z, t) = (x - 2y + 2z, 2x - y - t, my + 4z + t)$ .

- Hallar la dimensión de  $\text{Ker } f$  y de  $\text{Im } f$ , según los valores de  $m$ .

Para  $m = 1$

- Calcular una base del núcleo y otra de la imagen, así como las ecuaciones implícitas del núcleo.

- Hallar la matriz de la aplicación respecto de la base

$$B = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$$

de  $\mathbb{R}^4$  y canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

17. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  una aplicación lineal de la que se sabe que

$$\text{Ker } f = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\},$$

$$f(\vec{e}_1) = (1, 0, 1, 1) \text{ y } f(\vec{e}_2) = (1, -2, 1, -1).$$

Hallar la matriz estándar de la aplicación.

Hallar la dimensión y una base de  $\text{Im } f$ .

18. Sea la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x, y) = (x - y, 2x + y, 3x).$$

- Demuestra que es lineal.
- Encuentra la dimensión y una base del núcleo y otra de la imagen.
- Obtén la matriz asociada a la aplicación en las bases

$$B = \{(1, 0), (1, 1)\}, \quad B' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}.$$

19. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por

$$f(x, y, z) = (x - ay + z, x - y - z, 2x - y - bz, y + z).$$

Estudia, en función de  $a, b \in \mathbb{R}$ , el núcleo y la imagen (dimensión y bases).

20. Consideramos  $f : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  definida por

$$f(a + bx + cx^2) = (a + b + c)(1 + x).$$

- Halla la matriz de  $f$  en la base canónica  $\{1, x, x^2\}$ .
- Halla la dimensión y base de  $\ker(f)$  y de  $\text{Im}(f)$ .

21. Dada  $f : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ ,

$$f(a + bx + cx^2) = (a + 2b + c) + (b + c)x + (-a + b + 2c)x^2.$$

- Matriz de  $f$  en la base canónica.
- Base de núcleo e imagen.
- Calcula los polinomios cuya imagen es  $2 + x + x^2$ .

22. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineal tal que

$$f(1, 1) = (-1, 3, 1), \quad f(-1, 2) = (-8, -6, 5).$$

- ¿Está bien definida? Justifica.
- Hallar la matriz de  $f$  en canónicas y expresión de  $f(x, y)$ .
- Hallar la matriz  $[f]$  en las bases

$$B = \{(1, 1), (-1, 2)\}, \quad D = \{(-1, 3, 1), (-8, -6, 5), (1, 0, 0)\}.$$

23. ¿Existe  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineal tal que  $\ker(f) = L[(1, 0)]$  e  $\text{Im}(f) = L[(1, 0)]$ ? Si existe, da su matriz estándar y comprueba las propiedades.

24. ¿Existe  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  lineal tal que

$$\ker(f) = L[(1, 0, 1), (1, 1, 1)], \quad \text{Im}(f) = L[(1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0)]?$$

En caso afirmativo, encuéntrala.

25. Encuentra, si es posible,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineal tal que

$$f(1, 3) = (1, -1), \quad (2, 5) \in \ker(f).$$

Justifica la respuesta.

26. Sea  $M \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  dado por

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha - \beta \\ -\alpha & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Construye  $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\ker(f) = M$ .

b) ¿Puede además ser sobreyectiva? ¿E inyectiva?

27. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal cuya matriz, respecto de la base canónica, es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcula  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$ ,  $f(e_3)$  y  $f(e_1 + 2e_2 - e_3)$ . ¿Es un isomorfismo?

28. Sea  $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con matriz (canónica)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & k & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

a) ¿Para qué  $k$  es isomorfismo?

b) Para  $k = 1$ , halla las bases respecto de las cuales la matriz sea  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

29. Define, si es posible,  $f : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$  lineal con  $1 + x \in \ker(f)$  y  $1 + 2x, 3 - x \in \text{Im}(f)$ .

30. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Halla la matriz en la base  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  sabiendo que  $f(\vec{u}_1) = f(\vec{u}_2) = \vec{u}_3$  y que  $\vec{u}_3 \in \ker(f)$ .

31. La matriz de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en la base

$$B = \{(1, 0, 1), (-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

es

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Halla  $f(0, 1, 0)$  y  $f(0, 0, 2)$  en base canónica.

32. Halla  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  lineal tal que

$$\ker(f) = \{(x, y, z) : 2x + y - 2z = 0, y - z = 0, 2x + 2y - 3z = 0\},$$

$$\text{Im}(f) = \{(x, y, z, t) : 2x + y - z = 0, x + y - t = 0\}.$$

33. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineal tal que

$$f(1, 0, 0) = (1, 2, 0), \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, a - 1), \quad f(1, -1, 0) = (0, 0, 0).$$

- Halla la matriz en la base canónica y la expresión de  $f(x, y, z)$ .
- Halla las dimensiones y una base del núcleo y otra de la imagen de  $f$  para los distintos valores de  $a$ .
- Para  $a = 1$ , halla la matriz de la aplicación en la base

$$B = \{(0, -1, 1), (-1, -1, 1), (0, 1, 0)\}.$$

34. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación lineal tal que

$$f(\vec{e}_1) = (3, -1, 0), \quad f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = (1, 1, a), \quad f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (2, 2, 0).$$

- Halla  $[f]_C$ .
- Halla  $[f]_B$  para  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  con  $\vec{e}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{u}_3$ .

35. Sean  $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 2, -1)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, 1, 0)$ , y la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_2 - \vec{u}_3, \quad f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \vec{u}_3, \quad f(\vec{u}_3) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2.$$

- Demuestra que  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  es base y halla  $[f]_B$  y  $[f]_C$ .
- Halla una base de  $\text{Im}(f)$  y otra de  $\ker(f)$ .

## Soluciones

1. a)  $[f]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -7 & -6 \end{pmatrix}.$

b)  $\dim(\text{Im } f) = 2, \dim(\text{Ker } f) = 1.$

c) Base de la imagen:  $\{(1, 3, -1), (2, 1, -7)\}$ . Base del núcleo:  $\{(1, -1, 1)\}$ .

d)  $[f]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -9 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$

2. a)  $[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

b)  $P_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

c)  $[f]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

d)  $[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

3. a) Siempre que  $a \neq 1, a \neq -2$  y  $b \neq 0, \text{Ker } f = \{(0, 0, 0)\}$ .

b) Para  $a = 1$ , una base del núcleo es  $\{(-b, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ .

c)  $[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

ii)  $P_{BB'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$

iii)  $[f]_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

4. a)  $[f]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -a & 2 \end{pmatrix}.$

b) Si  $a = 1: \dim(\text{Im } f) = 2, \dim(\text{Ker } f) = 2.$

Si  $a \neq 1: \dim(\text{Im } f) = 3, \dim(\text{Ker } f) = 1.$

c) Base del núcleo:  $\{(1, -1, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}$ . Base de la imagen:  $\{(1, -1, 1), (2, 1, 0)\}$ .

5. a)  $[f]_C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
- b) Base de la imagen:  $\{(1, -1, 0, 0), (-1, 1, 2, 2)\}$ ; Base del núcleo:  $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 2, 0)\}$ .
6. a) Base de  $S$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ .
- b)  $\text{Ker } T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ , por tanto no tiene base.  
 $\text{Img } T = M_{2 \times 2}$ , cuya base puede ser la canónica.
- c)  $[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- d)  $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
7. a)  $\dim(\text{Ker } f) = 1 \Leftrightarrow a = -2 \text{ o } a = 0$ .
- b) Si  $a = -2$ ,  $\{(-1, 1, 0)\}$  es una base del núcleo de  $f$ , y  $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$  una base de la imagen.
- c)  $[f]_B = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -9 & 5 & -1 \\ 9 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ .
11. a) La matriz asociada a  $f$  respecto de las bases canónicas de  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^3$  viene dada por  $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- b) La matriz asociada a  $g$  respecto de las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^2$  es  $[g] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- c) La matriz de  $g \circ f$  asociada a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^2$  es  $[g \circ f]_{BC_{\mathbb{R}^2}}^{BC_{\mathbb{R}^4}} = [g][f] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
12. a) Es claro que  $m = 3$  y  $n = 4$ .  $m$  y  $n$ .

- b) i) Si  $a \neq 2$  y  $a \neq 1/2$ , entonces  $\dim(\text{Ker } f) = 1$  y  $\dim(\text{Im } f) = 3$ . ii) Si  $a = 2$ , entonces  $\dim(\text{Ker } f) = 2$  y  $\dim \text{Im } f = 2$ . iii) Si  $a = 1/2$ , entonces  $\dim(\text{Ker } f) = 2$  y  $\dim \text{Im } f = 2$ .
- c) Para  $a = 1$ , una base de  $\text{Ker } f$  es  $\{(0, 0, 0, 1)\}$ , y una base de  $\text{Im } f$  es  $\{f(1, 0, 0) = (2, 1, 1), f(0, 1, 0) = (1, 1, 1), f(0, 0, 1) = (2, 2, 1)\}$ .

13. a) La matriz estándar del endomorfismo  $f$  es  $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$ .

- b) i) Si  $a = b$ , entonces  $\dim(\text{Ker } f) = 1$  y  $\dim \text{Im } f = 2$ . ii) Si  $a \neq b$ , entonces  $\dim(\text{Ker } f) = 0$  y  $\dim(\text{Im } f) = 3$ .

- c) Cuando  $a = b = 2$  :

c.1) Una base de  $\text{Ker } f$  es  $\{(-2, 2, 1)\}$ , y una base de  $\text{Im } f$  es  $\{(1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ .

c.2)  $[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

14.

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$ , por lo que no tiene base.

$\dim(\text{Im } f) = 2$ . Una base de  $\text{Im } f$  es  $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1)\}$ .

Unas ecuaciones cartesianas o implícitas de  $\text{Im } f$  son:  $x - y + z = 0$ .

$$[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3/2 & 7/2 \\ -1/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. La respuesta es afirmativa.

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. a) i) Si  $m = -3$ , entonces  $\dim(\text{Im } f) = 2$  y  $\dim(\text{Ker } f) = 2$ ,  
ii) Si  $m \neq -3$ , entonces  $\dim(\text{Im } f) = 3$  y  $\dim(\text{Ker } f) = 1$ .

b) Una base de la imagen es  $B = \{(1, 2, 0), (-2, -1, 1), (2, 0, 4)\}$ . Una base del núcleo es  $\{(2, 0, -1, 4)\}$ .

$$c) [f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$17. [f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \dim(\text{Im } f) = 2, \text{ y una base de } \text{Im } f \text{ es } \{(1, 0, 1, 1), (1, -2, 1, -1)\}.$$

18. a)  $f$  es lineal.

b)  $\dim \ker(f) = 0$ ,  $\ker(f) = \{\vec{0}\}$ ;  $\dim \text{Im}(f) = 2$ , base  $\{(1, 2, 3), (-1, 1, 0)\}$ .

$$c) [f]_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

19.   
 ■ Si  $a \neq -1$ :  $\text{rg} = 3$ ,  $\ker(f) = \{\vec{0}\}$ ,  $\dim \text{Im}(f) = 3$ ,  
 $\text{Im}(f) = L[(1, 1, 2, 0), (-a, -1, -1, 1), (1, -1, -b, 1)]$ .  
 ■ Si  $a = -1$ ,  $b \neq 1$ :  $\text{rg} = 3$ ,  $\ker(f) = \{\vec{0}\}$ ,  
 $\text{Im}(f) = L[(1, 1, 2, 0), (1, -1, -1, 1), (1, -1, -b, 1)]$   
 ■ Si  $a = -1$ ,  $b = 1$ :  $\text{rg} = 2$ ,  $\dim \ker(f) = 1$ ,  $\ker(f) = L[(0, -1, 1)]$ ,  
 $\text{Im}(f) = L[(1, 1, 2, 0), (1, -1, -1, 1)]$ .

20.

$$[f]_{\{1, x, x^2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dim \text{Im}(f) = 1, \quad \text{Im}(f) = L[1 + x],$$

$$\dim \ker(f) = 2, \quad \ker(f) = L[-1 + x, -1 + x^2].$$

21.

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \ker(f) = L[1 - x + x^2], \quad \text{Im}(f) = L[1 - x^2, 2 + x + x^2].$$

$$f^{-1}(2 + x + x^2) = \{c + (1 - c)x + cx^2 : c \in \mathbb{R}\}.$$

22.

Bien definida.  $[f]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $f(x, y) = (2x - 3y, 4x - y, -x + 2y)$ ,

$$[f]_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

23.

Existe.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\ker(f) = L[(1, 0)]$ ,  $\text{Im}(f) = L[(1, 0)]$ .

24.

No existe (rango-nulidad:  $2 + 2 \neq 3$ ).

25.

Existe.  $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $f(x, y) = (-5x + 2y, 5x - 2y)$ .

26.

$f \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = (q + p + 3r, s - 2p - r, 0)$ ,  $\ker(f) = M$ ,  
 $\text{rg}(f) = 2 \Rightarrow$  ni sobreyectiva a  $\mathbb{R}^3$  ni inyectiva.

27.

$f(\vec{e}_1) = (1, 0, 2)$ ,  $f(\vec{e}_2) = (3, 1, -1)$ ,  $f(\vec{e}_3) = (2, 1, 0)$ ,  $f(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = (5, 1, 0)$ ,

$\det = 3 \neq 0 \Rightarrow$  isomorfismo.

28.

$\det = 1 - k \Rightarrow f_k$  isomorfismo  $\Leftrightarrow k \neq 1$ .

Para  $k = 1$  existen bases con matriz  $\text{diag}(1, 1, 0)$  (p.ej.  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, (-1, -1, 1)\}$ , llegada  $D = \{A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, \vec{w}_3\}$  con  $\vec{w}_3$  que complete base).

29.

No existe:  $\dim \ker(f) \geq 1$ ,  $\dim \text{Im}(f) \geq 2 \Rightarrow 3 > \dim P_1(\mathbb{R}) = 2$ .

30.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

31.

$$f(0, 1, 0) = (0, 5, 0), \quad f(0, 0, 2) = (1, 7, 9).$$

32.

$\ker(f) = L[(1, 2, 2)]$ ,  $\text{Im}(f) = L[(1, -1, 1, 0), (-1, 2, 0, 1)]$ ,

$$f(x, y, z) = (x - y + \frac{z}{2}, -x + 2y - \frac{z}{2}, x - \frac{z}{2}, y - z).$$

33.

$$[f]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Si  $a = 1$ :  $\text{rg} = 1$ ,  $\text{Im}(f) = L[(1, 2, 0)]$ ,  $\ker(f) = L[(-1, 1, 0), (0, 0, 1)]$ . Si  $a \neq 1$ :  
 $\text{rg} = 2$ ,  $\text{Im}(f) = L[(1, 2, 0), (0, 0, a-1)]$ ,  $\ker(f) = L[(-1, 1, 0)]$ .

$$\text{Para } a = 1: [f]_B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

34.

$$[f]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad [f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

35.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [f]_C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Im}(f) = L[(-1, 1, -1), (2, 2, -1)], \quad \ker(f) = L[(0, -1, 1)].$$

# Capítulo 4

## Diagonalización

### 4.1. Valores y vectores propios

Sabemos que un endomorfismo  $f : V \rightarrow V$  tiene distintas matrices asociadas, según la base que se considere del espacio vectorial  $V$ . Sea  $[f]_B = A$  la matriz de  $f$  en la base  $B$ . Tratamos de encontrar una base en la cual la matriz del endomorfismo sea diagonal.

Si existe una base  $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  tal que

$$[f]_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

entonces

$$f(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1, \quad f(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2, \quad \dots, \quad f(\vec{v}_n) = \lambda_n \vec{v}_n.$$

En consecuencia, si trabajamos con matrices,

$$f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i \Leftrightarrow [f(\vec{v}_i)]_B = [\lambda_i \vec{v}_i]_B \Leftrightarrow [f]_B [\vec{v}_i]_B = \lambda_i [\vec{v}_i]_B \Leftrightarrow AV_i = \lambda_i V_i,$$

y tendremos que buscar vectores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  y escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tales que

$$AV_1 = \lambda_1 V_1, \quad AV_2 = \lambda_2 V_2, \quad \dots, \quad AV_n = \lambda_n V_n,$$

donde  $V_i$  es el vector columna formado por las coordenadas de  $\vec{v}_i$  en la base  $B$ .

Damos nombre a estos escalares y vectores de manera formal:

**Definición 4.1.1.** Sea  $A$  una matriz de tamaño  $n \times n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Decimos que  $\lambda$  es un **valor propio** o **autovalor** de  $A$  si existe  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{x} \neq 0$  tal que  $AX = \lambda X$ . En este caso,  $\vec{x}$  se dice **vector propio** o **autovector** asociado al valor propio  $\lambda$ . Notar que  $X$  es la columna de coordenadas de  $\vec{x}$ . A veces se escribe  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  entendiéndolo  $\vec{x}$  como vector columna.

Decimos que  $\lambda$  es un valor propio o autovalor de un endomorfismo  $f : V \rightarrow V$  si existe  $\vec{v} \in V$ ,  $\vec{v} \neq 0$ , tal que  $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ . En este caso,  $\vec{v}$  se dice vector propio o autovector asociado al valor propio  $\lambda$ .

**Observación.** Sea  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo y  $A$  la matriz del endomorfismo en una base  $B$  del e.v.  $V$ . Los valores propios de  $f$  coinciden con los valores propios de la matriz  $A$ . Al hallar los vectores propios de la matriz  $A$  lo que obtenemos son las coordenadas en la base  $B$  de los vectores propios de  $f$ .

Se cumple:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = \vec{0}.$$

Pero esta es la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Si  $\lambda$  es valor propio de  $A$ , este sistema tiene solución no trivial, y sabemos que esto ocurre si y sólo si  $|A - \lambda I| = 0$ . Entonces:

**Teorema 4.1.1.**  $\lambda$  es valor propio de  $A$  si y sólo si  $|A - \lambda I| = 0$ . En este caso, los vectores propios asociados a  $\lambda$  son las soluciones no triviales del sistema  $(A - \lambda I)X = \vec{0}$ . Como el conjunto solución de un sistema homogéneo es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ , el conjunto de vectores propios asociados a un valor propio  $\lambda$  más el vector nulo forma un subespacio vectorial.

**Definición 4.1.2.** El subespacio vectorial formado por los vectores propios asociados a un valor propio  $\lambda$  junto con el vector nulo se llama **subespacio propio** o **subespacio característico** asociado a  $\lambda$  y se denota por  $V(\lambda)$ .

**Definición 4.1.3.** La expresión  $|A - \lambda I|$  es un polinomio de grado  $n$  en  $\lambda$  que se llama **polinomio característico** de  $A$ , y se denota  $p_A(\lambda)$ .

Los valores propios de  $A$  son las raíces del polinomio característico (reales o complejas). Trabajaremos solo las raíces reales, y a lo sumo habrá  $n$  distintas.

**Teorema 4.1.2.** Si dos matrices son semejantes, tienen el mismo polinomio característico y, por tanto, los mismos valores propios.

*Demostración.* Supongamos que  $A$  y  $B$  son matrices semejantes, es decir,  $\exists P$  inversible tal que  $B = P^{-1}AP$ . Entonces

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= |B - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP| \\ &= |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |A - \lambda I| = p_A(\lambda). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo.** Hallar el polinomio característico, los valores propios y los subespacios propios asociados a cada valor propio de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Solución:* **1. Polinomio Característico.** El polinomio característico  $p_A(\lambda)$  se obtiene calculando el determinante de la matriz  $(A - \lambda I)$ :

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Expandimos el determinante por la tercera fila para simplificar el cálculo:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (2 - \lambda) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -6 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)[(-4 - \lambda)(5 - \lambda) - (-6)(3)] = \\ &= (2 - \lambda)[-20 + 4\lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 18] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2). \end{aligned}$$

Este es el polinomio característico.

**2. Valores Propios (Autovalores).** Los valores propios (o autovalores) son las raíces del polinomio característico, es decir,  $p_A(\lambda) = 0$ .

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0.$$

Esto nos da dos factores:

- $2 - \lambda = 0 \implies \lambda_1 = 2$ .
- $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ . Factorizando esta ecuación cuadrática:  $(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$ . Esto nos da las raíces  $\lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = -1$ .

Por lo tanto, los valores propios son:

- $\lambda = 2$  (con multiplicidad algebraica 2).
- $\lambda = -1$  (con multiplicidad algebraica 1).

**3. Subespacios Propios (Autoespacios).** Calculamos el subespacio propio  $V(\lambda)$  para cada valor propio distinto.

**Para  $\lambda = -1$ :** Resolvemos el sistema homogéneo  $(A + I)X = 0$ :

$$(A + I) = \begin{pmatrix} -4 + 1 & -6 & 0 \\ 3 & 5 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} -3x - 6y = 0 \implies x = -2y \\ 3x + 6y = 0 \text{ (ecuación redundante)} \\ 3z = 0 \implies z = 0 \end{cases}$$

La solución es de la forma  $(x, y, z) = (-2y, y, 0)$ . Si tomamos  $y = t$  como parámetro libre:

$$X = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El subespacio propio asociado a  $\lambda = -1$  es  $V(-1) = L\{(-2, 1, 0)\}$ .

**Para  $\lambda = 2$ :** Resolvemos el sistema homogéneo  $(A - 2I)X = 0$ :

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} -4 - 2 & -6 & 0 \\ 3 & 5 - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} -6x - 6y = 0 \implies x = -y \\ 3x + 3y = 0 \text{ (ecuación redundante)} \\ 0z = 0 \implies z \text{ es una variable libre} \end{cases}.$$

Tenemos dos variables libres. Sea  $y = t$  y  $z = s$ . Entonces  $x = -t$ . La solución es de la forma  $(x, y, z) = (-t, t, s)$ , que podemos descomponer como:

$$X = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El subespacio propio asociado a  $\lambda = 2$  es  $V(2) = L\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .  $\square$

**Definición 4.1.4.** Si  $\lambda_0$  es un valor propio de  $A$ , se llama **multiplicidad algebraica** de  $\lambda_0$  a la multiplicidad de  $\lambda_0$  como raíz del polinomio característico y **multiplicidad geométrica** a la dimensión del subespacio propio  $V(\lambda_0)$ .

**Teorema 4.1.3.** Sea  $\lambda_0$  un valor propio de la matriz  $A$ . Entonces la multiplicidad geométrica de  $\lambda_0$  es menor o igual que su multiplicidad algebraica.

*Demostración.* Sean  $r = \dim V(\lambda_0)$  y  $B^* = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$  una base de  $V(\lambda_0)$ . Completamos  $B^*$  hasta obtener una base  $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ . La matriz de  $f$  en la base  $B$  será

$$M = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \lambda_0 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \lambda_0 & & & \\ \hline & & & 0_{(n-r)xr} & & \\ & & & & D_{(n-r)x(n-r)} & \end{array} \right) \text{ pues } f(\vec{u}_i) = \lambda_0 \vec{u}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, r.$$

Como  $A$  y  $M$  son matrices semejantes (Teorema 3.4.1) tienen el mismo polinomio característico (Teorema 4.1.2):  $p_A(\lambda) = p_M(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^r |D - \lambda I_{n-r}|$ , y el orden de multiplicidad de  $\lambda_0$  como raíz de este polinomio es al menos  $r$  que es la dimensión del subespacio propio asociado a  $\lambda_0$ .  $\square$

## 4.2. Diagonalización

**Definición 4.2.1.** Se dice que una matriz  $A \in M_{n \times n}$  es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal  $D \in M_{n \times n}$  semejante a  $A$ , es decir, si  $\exists P$  inversible tal que  $P^{-1}AP$  es diagonal.

Un endomorfismo de un espacio vectorial  $f : V \rightarrow V$  es diagonalizable si su matriz en alguna base es diagonal.

**Teorema 4.2.1.** Una matriz  $A \in M_{n \times n}$  es diagonalizable si y sólo si  $A$  tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Si  $A$  es diagonalizable  $\exists P$  inversible tal que  $P^{-1}AP = D$  ( $D$  diagonal); pongamos

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

y evidentemente los valores propios de  $D$  (luego también de  $A$ ) son  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (no tienen que ser necesariamente distintos).

Consideremos las columnas de  $P$  como  $n$  vectores de  $\mathbb{R}^n$ ; como  $P$  es inversible, estos vectores son linealmente independientes. Denotemos por  $P^i$  a estas columnas; tendremos:

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \Rightarrow PD = AP \Rightarrow \\ \Rightarrow (P^1 | P^2 | \dots | P^n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} &= A \cdot (P^1 | P^2 | \dots | P^n), \end{aligned}$$

e igualando columna a columna, vemos que  $\lambda_i P^i = A \cdot P^i$ , luego  $P^i$  es vector propio de  $A$  asociado a  $\lambda_i$ ; como esto es cierto para cada  $P^i$ , ya tenemos  $n$  vectores propios de  $A$  linealmente independientes.

$\Leftarrow$ ) Sea  $B = \{P^1, P^2, \dots, P^n\}$  un conjunto de  $n$  vectores propios l.i. de  $A$ ; tendrán asociados unos valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , y sea  $P$  la matriz cuyas columnas son  $P^i$ ;  $P$  es inversible por ser  $B$  una base.

Llamemos  $D$  a la matriz  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ ; entonces,  $\lambda_i P^i = A \cdot P^i$  por ser

$P^i$  vector propio de  $A$  asociado a  $\lambda_i$ , luego

$$\begin{aligned} AP &= (AP^1 | AP^2 | \dots | AP^n) = (\lambda_1 P^1 | \lambda_2 P^2 | \dots | \lambda_n P^n) = \\ &= (P^1 | P^2 | \dots | P^n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = PD \Rightarrow D = P^{-1}AP. \end{aligned}$$

y por tanto  $A$  es diagonalizable.  $\square$

**Teorema 4.2.2.** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  valores propios distintos de  $A \in M_{n \times n}$ . Si  $\vec{x}_i$  es vector propio asociado a  $\lambda_i$ , entonces  $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$  es linealmente independiente.

*Demostración.* Por reducción al absurdo: supongamos que  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  es un conjunto linealmente dependiente. Reordenamos los vectores de modo que los  $r$  primeros,  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r\}$ , sean linealmente independientes, y que el siguiente,  $\vec{x}_{r+1}$ , sea combinación lineal de ellos.

Sea  $X_i$  la columna de coordenadas de  $\vec{x}_i$ . Entonces existen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$  tales que

$$X_{r+1} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_r X_r. \quad (\text{I})$$

Multiplicando por  $A$ , se tiene

$$AX_{r+1} = \alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2 + \dots + \alpha_r AX_r. \quad (\text{II})$$

De (I) se obtiene

$$\lambda_{r+1} X_{r+1} = \alpha_1 \lambda_{r+1} X_1 + \alpha_2 \lambda_{r+1} X_2 + \dots + \alpha_r \lambda_{r+1} X_r,$$

y de (II)

$$\lambda_{r+1} X_{r+1} = \alpha_1 \lambda_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 + \dots + \alpha_r \lambda_r X_r.$$

Igualando ambas expresiones:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})X_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})X_2 + \dots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})X_r = \vec{0}.$$

Como  $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$  son linealmente independientes, se tiene

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{r+1}) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r.$$

Dado que los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  son distintos, se concluye que

$$\alpha_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r.$$

Por tanto,  $\vec{x}_{r+1} = \vec{0}$ , lo cual es imposible, pues  $\vec{x}_{r+1}$  es un vector propio.  $\square$

## Consecuencias

- Si  $i \neq j$ , entonces  $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{\vec{0}\}$ .
- Si hay  $n$  valores propios distintos, hay  $n$  vectores propios linealmente independientes y la matriz es diagonalizable. Sin embargo, puede ocurrir que haya  $n$  vectores propios l.i. sin tener  $n$  valores propios distintos.

**Teorema 4.2.3** (Teorema Fundamental de Diagonalización). Una matriz cuadrada  $A$  de tamaño  $n \times n$  es diagonalizable si y sólo si:

- a) Todos sus valores propios son reales.
- b) Para todo valor propio de  $A$ , la multiplicidad geométrica coincide con la multiplicidad algebraica.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Si  $A$  es diagonalizable existe una matriz inversible  $P$  tal que  $P^{-1}AP = D$  es diagonal. Las matrices  $A$  y  $D$  tienen los mismos valores propios que serán los elementos de la diagonal de  $D$ , por tanto todos reales. Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  estos valores propios con multiplicidad algebraica respectivamente:  $k_1, k_2, \dots, k_r$  (es decir,  $p_A(\lambda) = p_D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot (\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \cdot \dots \cdot (\lambda_r - \lambda)^{k_r}$ ).

Según hemos visto en la demostración del teorema 4.2.1 las  $k_i$  columnas de  $P$  correspondientes al valor propio  $\lambda_i$  pertenecen a  $V(\lambda_i)$  y como son l.i. será  $\dim(V(\lambda_i)) \geq k_i$ . Por otra parte en el teorema 4.1.3 sabemos que  $\dim(V(\lambda_i)) \leq k_i$  con lo que queda demostrada la igualdad.

$\Leftarrow$ ) Si se cumplen (a) y (b) elegimos de cada  $V(\lambda_i)$  tantos vectores linealmente independientes como sea su dimensión (tendremos en total  $n$  vectores). El conjunto de todos estos vectores es l.i. (demostrarlo) y por tanto  $A$  es diagonalizable (4.2.1).  $\square$

## Casos

- **Caso I:** Las raíces de  $p_A(\lambda)$  no son todas reales  $\Rightarrow A$  no es diagonalizable (en  $\mathbb{R}$ ):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Solución:* Calculamos el polinomio característico  $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ :

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -2 & -1 \\ 2 & 0 - \lambda & -3 \\ 1 & 3 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & -\lambda & -3 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Expandimos por la primera fila:

$$p_A(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda((- \lambda)(- \lambda) - (-3)(3)) + 2((2)(- \lambda) - (-3)(1)) - 1((2)(3) - (- \lambda)(1)) = -\lambda(\lambda^2 + 9) + 2(-2\lambda + 3) - 1(6 + \lambda) = -\lambda^3 - 9\lambda - 4\lambda + 6 - 6 - \lambda = -\lambda^3 - 14\lambda.$$

Ahora, encontramos los valores propios (las raíces de  $p_A(\lambda) = 0$ ):

$$-\lambda^3 - 14\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 14) = 0.$$

Las raíces son:

- $\lambda_1 = 0$  (una raíz real).
- $\lambda^2 + 14 = 0 \implies \lambda^2 = -14 \implies \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{-14} = \pm i\sqrt{14}$ .

Dado que la matriz  $A$  tiene dos valores propios complejos no reales ( $\lambda_2 = i\sqrt{14}$  y  $\lambda_3 = -i\sqrt{14}$ ), el Teorema Fundamental de Diagonalización (condición a) falla.

Por lo tanto, **la matriz  $A$  no es diagonalizable** en  $\mathbb{R}$ . □

- **Caso II:** Todas las raíces son reales pero alguna multiplicidad algebraica  $\neq$  geométrica  $\implies A$  no es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### *Solución:* 1. Polinomio Característico y Valores Propios

Calculamos el polinomio característico  $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ . Dado que  $(A - \lambda I)$  es una matriz triangular (al igual que  $A$ ):

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal:

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(1 - \lambda)(1 - \lambda) = (1 - \lambda)^3.$$

Para hallar los valores propios, igualamos a cero:  $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3 = 0$ . Esto nos da un único valor propio:

- $\lambda = 1$  (con **multiplicidad algebraica 3**).

Todas las raíces son reales.

## 2. Multiplicidad Geométrica

Para que  $A$  sea diagonalizable, la multiplicidad geométrica de  $\lambda = 1$  debe coincidir con la algebraica. La multiplicidad geométrica es la dimensión del subespacio propio  $V(1)$  (número de vectores propios independientes asociados al mismo autovalor). Calculamos la matriz  $(A - I)$ :

$$A - I = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora resolvemos el sistema homogéneo  $(A - I)X = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Sustituyendo  $x = 0$  en la tercera ecuación, obtenemos  $0 + y = 0 \implies y = 0$ . La variable  $z$  no aparece en ninguna ecuación, por lo que  $z$  es una variable libre (sea  $z = t$ ). La solución del sistema es de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El subespacio propio  $V(1)$  está generado por un solo vector:

$$V(1) = L\{(0, 0, 1)\}.$$

La dimensión de este subespacio es 1. Como la multiplicidad algebraica es 3 y la geométrica es 1, la matriz  $A$  **no es diagonalizable** (falla la condición b del Teorema Fundamental de la Diagonalización).  $\square$

- **Caso III:** Todas las raíces reales y multiplicidades coinciden  $\implies A$  sí es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Solución:* Analizamos ambas matrices como ejemplos de este caso.

**Análisis de**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

### 1. Polinomio Característico y Valores Propios

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ -2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1 - \lambda)((2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 1) + 1(-1 - \lambda - (-2)) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2 - 1) + (1 - \lambda) =$$

$$(1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 3) + (1 - \lambda) = (1 - \lambda)[(\lambda^2 - \lambda - 3) + 1] = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0.$$

Las raíces (valores propios) son:

$$(1 - \lambda) = 0 \implies \lambda_1 = 1,$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \implies \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1.$$

Los valores propios son  $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = -1$ .

**2. Multiplicidades** Todos los valores propios son reales.

- $\lambda_1 = 1$ : Multiplicidad Algebraica 1.
- $\lambda_2 = 2$ : Multiplicidad Algebraica 1.
- $\lambda_3 = -1$ : Multiplicidad Algebraica 1.

La multiplicidad geométrica siempre debe ser al menos 1 (ya que es un valor propio). Por lo tanto, para los tres valores propios, esta es 1. Como ambas multiplicidades son iguales a 1 para todos los valores propios (y todos son reales), la matriz  $A$  es **diagonalizable**.

**Análisis de**  $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Esta es la matriz del ejercicio anterior.

**1. Valores Propios** El polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2),$$

y las raíces (valores propios) son:

- $\lambda_1 = 2$  (Multiplicidad Algebraica 2).
- $\lambda_2 = -1$  (Multiplicidad Algebraica 1).

Todas las raíces son reales.

**2. Multiplicidades Geométricas** En el ejercicio anterior se calcularon los subespacios propios:

- $V(2) = \{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ . La dimensión es 2.
- $V(-1) = \{(-2, 1, 0)\}$ . La dimensión es 1.

Como todos los valores propios son reales y para todos los valores propios las multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden, la matriz  $A$  es **diagonalizable**.  
□

**Teorema 4.2.4.** La multiplicidad geométrica de un autovalor  $\lambda$  se calcula como la dimensión de su subespacio propio asociado  $V_\lambda$ :

$$\text{m.g.}(\lambda) = \underbrace{n}_{\substack{\text{Dimensión} \\ \text{de la matriz}}} - \underbrace{\text{rg}(A - \lambda I)}_{\substack{\text{N}^\circ \text{ de ecuaciones} \\ \text{linealmente indep.}}} .$$

**Ejemplo.** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ . Estudiar para qué valores de  $a$  la matriz es diagonalizable.

*Solución:* Para estudiar la diagonalización, primero calculamos los valores propios de  $A$ .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & a & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & a - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & a - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2(a - \lambda)$$

Los valores propios son  $\lambda_1 = 1$  (con multiplicidad algebraica 2) y  $\lambda_2 = a$ .

Para que la matriz sea diagonalizable, la multiplicidad algebraica (m.a.) de cada valor propio debe ser igual a su multiplicidad geométrica (m.g.).

**Caso 1:**  $a = 1$ . El único valor propio es  $\lambda = 1$  con m.a. 3. Calculamos su multiplicidad geométrica:  $\text{m.g.}(1) = 3 - \text{rg}(A - I)$ .

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz es 2. Por tanto,  $\text{m.g.}(1) = 3 - 2 = 1$ . Como  $\text{m.a.}(1) \neq \text{m.g.}(1)$ , la matriz **no es diagonalizable** si  $a = 1$ .

**Caso 2:**  $a \neq 1$ . Los valores propios son  $\lambda_1 = 1$  (m.a. 2) y  $\lambda_2 = a$  (m.a. 1). Para  $\lambda_2 = a$ , como su m.a. es 1, su m.g. también es 1. Debemos comprobar la multiplicidad geométrica de  $\lambda_1 = 1$ :  $\text{m.g.}(1) = 3 - \text{rg}(A - I)$ .

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a - 1 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz depende de  $a$ .

- Si  $a = 0$ , la matriz es  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , cuyo rango es 1. En este caso,  $\text{m.g.}(1) = 3 - 1 = 2$ . Como  $\text{m.a.}(1) = \text{m.g.}(1)$ , la matriz **es diagonalizable** para  $a = 0$ .
- Si  $a \neq 0$  (y  $a \neq 1$ ), las filas primera y tercera son linealmente independientes, por lo que el rango es 2. En este caso,  $\text{m.g.}(1) = 3 - 2 = 1$ . Como  $\text{m.a.}(1) \neq \text{m.g.}(1)$ , la matriz **no es diagonalizable**.

**Conclusión:** La matriz  $A$  es diagonalizable únicamente para  $a = 0$ .

□

### 4.3. Diagonalización ortogonal

- Dado un endomorfismo  $f : V \rightarrow V$  donde  $V$  es un e.v.e., se trata de ver si existe una base ortonormal de  $V$  respecto a la cual la matriz asociada a  $f$  sea diagonal.
- Dada una matriz  $A \in M_{n \times n}$ , se trata de ver si existe una matriz ortogonal  $P$  (es decir  $P^{-1} = P^t$ ) tal que  $P^{-1}AP$  sea diagonal.

**Definición 4.3.1.** Se dice que una matriz  $A \in M_{n \times n}$  es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  es diagonal.

Un endomorfismo  $f : V \rightarrow V$  se dice **diagonalizable ortogonalmente** si existe una base ortonormal de  $V$  respecto a la cual su matriz asociada es diagonal.

**Definición 4.3.2.** Sea  $V$  un e.v.e. Un endomorfismo  $f : V \rightarrow V$  se dice **simétrico** si

$$\langle f(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, f(\vec{v}) \rangle \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

**Teorema 4.3.1.** Sean  $V$  e.v.e.,  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo y  $A$  la matriz asociada a  $f$  en una base ortonormal. El endomorfismo  $f$  es simétrico  $\Leftrightarrow A$  es simétrica.

*Demostración.* Sea  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  base ortonormal de  $V$  tal que  $[f]_B = A = (a_{ij})_{i,j}$ .  
 $\Rightarrow$ )

$$a_{ij} = \langle f(u_j), u_i \rangle = \langle u_j, f(u_i) \rangle = \langle f(u_i), u_j \rangle = a_{ji} \quad \forall i, j$$

por tanto  $A$  es simétrica.

$\Leftarrow$ ) Sean  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$  y  $V_1, V_2$  sus columnas de coordenadas en la base ortonormal  $B$ . Como  $B$  es ortonormal,  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = V_1^t V_2$ . Entonces

$$\langle f(\vec{v}_1), \vec{v}_2 \rangle = (AV_1)^t V_2 = V_1^t A^t V_2 = V_1^t (AV_2) = \langle \vec{v}_1, f(\vec{v}_2) \rangle,$$

por lo que  $f$  es simétrico.  $\square$

- Con los siguientes teoremas se demuestra que una matriz es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si es simétrica, y un endomorfismo es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si es simétrico (omitimos algunas demostraciones).

**Teorema 4.3.2.** Una matriz  $A \in M_{n \times n}$  es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si  $A$  tiene  $n$  vectores propios ortonormales.

**Teorema 4.3.3.** Sea  $A$  una matriz simétrica. Entonces todos sus valores propios son reales.

**Teorema 4.3.4.** Sea  $A$  una matriz simétrica. Entonces vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales (con el producto escalar en  $\mathbb{R}^n$ ).

*Demostración.* Sean  $\lambda_1, \lambda_2$  valores propios distintos,  $\vec{x}_1$  vector propio asociado a  $\lambda_1$ ,  $\vec{x}_2$  vector propio asociado a  $\lambda_2$ . Llamando  $X_1, X_2$  a sus columnas de coordenadas:

$$\begin{cases} AX_1 = \lambda_1 X_1 \\ AX_2 = \lambda_2 X_2 \end{cases} \Rightarrow X_2^t AX_1 = \lambda_1 X_2^t X_1, \quad X_1^t AX_2 = \lambda_2 X_1^t X_2.$$

Como  $A$  es simétrica,  $X_2^t AX_1 = X_1^t AX_2$ , por tanto  $(\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0$ . Como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , se sigue que  $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0$ , luego son ortogonales.  $\square$

**Teorema 4.3.5.**  $A$  es simétrica  $\Leftrightarrow A$  es diagonalizable ortogonalmente.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) No se demuestra aquí.

$\Leftarrow$ ) Si  $A$  es diagonalizable ortogonalmente, existe  $P$  ortogonal tal que  $P^{-1}AP = P^t AP = D$  diagonal. Entonces  $A = PDP^t \Rightarrow A^t = (PDP^t)^t = PDP^t = A$ , por tanto  $A$  es simétrica.  $\square$

**Teorema 4.3.6.** Sea  $V$  e.v.e.,  $f : V \rightarrow V$  endomorfismo. El endomorfismo  $f$  es diagonalizable ortogonalmente  $\Leftrightarrow f$  es simétrico.

**Ejemplo.** Diagonalizar ortogonalmente la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

*Solución:* Dado que  $A$  es una matriz simétrica, el Teorema Espectral garantiza que es diagonalizable ortogonalmente. Procedemos en cuatro pasos detallados:

## 1. Cálculo de los valores propios

Hallamos el polinomio característico de  $A$ :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$$

Las raíces del polinomio característico se obtienen resolviendo la ecuación de segundo grado  $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ , lo cual nos da los valores propios:

$$\lambda_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 32}}{2} = 4, \quad \lambda_2 = \frac{6 - \sqrt{36 - 32}}{2} = 2.$$

## 2. Cálculo de los subespacios propios

Calculamos los vectores propios asociados a cada autovalor resolviendo el sistema homogéneo  $(A - \lambda I)X = 0$ .

**Para**  $\lambda_1 = 4$ :

$$(A - 4I)X = 0 \implies \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto nos lleva a la ecuación  $-x + y = 0$ , es decir,  $x = y$ . El subespacio propio es:

$$V(4) = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\} = L\{(1, 1)\}.$$

Tomamos como vector base  $\vec{u}_1 = (1, 1)$ .

**Para**  $\lambda_2 = 2$ :

$$(A - 2I)X = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto nos lleva a la ecuación  $x + y = 0$ , es decir,  $x = -y$ . El subespacio propio es:

$$V(2) = \{(-t, t) : t \in \mathbb{R}\} = L\{(-1, 1)\}.$$

Tomamos como vector base  $\vec{u}_2 = (-1, 1)$ .

## 3. Comprobación de ortogonalidad y normalización

Como predice el teorema para matrices simétricas, los vectores propios asociados a autovalores distintos deben ser ortogonales. Comprobamos el producto escalar:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (1)(-1) + (1)(1) = -1 + 1 = 0.$$

Efectivamente son ortogonales. Para construir una matriz de paso ortogonal  $P$ , necesitamos una base ortonormal. Normalizamos los vectores dividiéndolos por su norma:

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_1\| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \implies \vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \\ \|\vec{u}_2\| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \implies \vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

#### 4. Construcción de las matrices $P$ y $D$

La matriz diagonal  $D$  contiene los autovalores y la matriz de paso  $P$  (que es ortogonal) contiene los vectores ortonormales en sus columnas:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Se verifica que  $P$  es ortogonal ( $P^{-1} = P^t$ ) y que se cumple la relación de semejanza  $A = PDP^t$ .  $\square$

**Teorema 4.3.7.** Sea  $V$  e.v.e.,  $f : V \rightarrow V$  endomorfismo. El endomorfismo  $f$  es diagonalizable ortogonalmente  $\Leftrightarrow f$  es simétrico.

### 4.4. Aplicación: vibraciones en un coche

En ingeniería mecánica, el estudio de las vibraciones en vehículos es fundamental para garantizar el confort, la seguridad y la resistencia estructural. Cuando un coche circula, las fuerzas generadas por el pavimento, el motor y otros componentes pueden provocar movimientos oscilatorios en el chasis y los ejes. Para analizar este comportamiento, se emplea un modelo físico discreto: el coche se representa por varias masas interconectadas mediante muelles (que simulan la suspensión) y, en ocasiones, amortiguadores.

Este análisis requiere el uso de **ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**, un concepto que, aunque se estudiará formalmente más adelante, tiene sus raíces en la física que se imparte en el bachillerato. Una ecuación diferencial no es más que una igualdad que relaciona una función desconocida con sus derivadas. El caso más familiar es la Segunda Ley de Newton ( $F = ma$ ) aplicada a un oscilador armónico (Ley de Hooke,  $F = -kx$ ). Dado que la aceleración es la segunda derivada de la posición respecto al tiempo ( $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ ), la física de un muelle se describe mediante la ecuación:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

donde la incógnita ya no es un número, sino la función del tiempo  $x(t)$  que describe la posición de la masa.

Matemáticamente, un vehículo real se modela mediante un sistema de varias EDOs **acopladas**, lo que significa que el movimiento de cada masa depende de la posición de las demás. El proceso de **diagonalización** de matrices que hemos estudiado en este capítulo es, precisamente, el puente que permite «desacoplar» estas ecuaciones para resolver el sistema. Esto permite encontrar los **modos normales de vibración** (formas básicas en que puede oscilar la estructura) y sus **frecuencias naturales** (las velocidades características a las que cada modo vibra).

Esto es esencial, por ejemplo, para:

- Prevenir resonancias que pueden dañar el vehículo.

- Optimizar el diseño de la suspensión y el reparto de masas.
- Mejorar el confort de los pasajeros reduciendo vibraciones.

En esta aplicación, veremos cómo la diagonalización ayuda a los ingenieros a comprender y controlar el comportamiento oscilatorio de sistemas mecánicos complejos.

## Modelo Físico y Matemático

Para el análisis de las vibraciones, es necesario considerar las leyes fundamentales del movimiento que el estudiantado ya conoce de Bachillerato y la asignatura de *Física I*: la Segunda Ley de Newton ( $F = ma$ ) y la Ley de Hooke ( $F = -kx$ ).

Supongamos un modelo simplificado de un vehículo representado por tres masas puntuales,  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  (ver Figura 4.1), unidas linealmente por muelles de constante elástica  $k$ . Sean  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$  los desplazamientos de cada una de estas masas respecto a su posición de equilibrio.

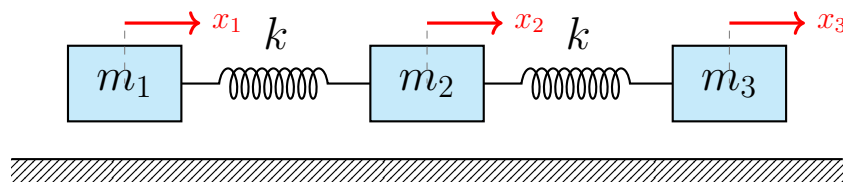


Figura 4.1: Modelo mecánico de tres masas y dos muelles para el análisis de vibraciones en un vehículo.

Se pide:

1. Plantear la ecuación matricial del movimiento  $M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = 0$ , definiendo las variables de desplazamiento  $\vec{x}$ .
2. Calcular las frecuencias naturales y los modos propios de vibración, asumiendo masas unitarias ( $m = 1$ ).

*Solución:* El vector de desplazamientos respecto al equilibrio se define como:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

## Planteamiento Matricial

Para un sistema libre donde las masas extremas solo tienen un resorte conectado (hacia el centro) y la masa central tiene dos, la matriz de rigidez  $K$  y la ecuación de movimiento son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

**Nota sobre la matriz  $K$ :**

- Los elementos diagonales (1, 1) y (3, 3) son  $k$  porque  $m_1$  y  $m_3$  están conectadas a un solo muelle.
- El elemento central (2, 2) es  $2k$  porque  $m_2$  interactúa con dos muelles.
- La suma de cada fila es cero, condición necesaria para permitir el movimiento de cuerpo rígido.

Para entender el origen de los términos de la matriz  $K$ , analizamos las fuerzas que actúan sobre cada masa individualmente aplicando la Ley de Hooke.

Definimos dos muelles en el sistema:

- **Muelle A (Izquierda):** Conecta  $m_1$  y  $m_2$ . Su elongación es  $(x_2 - x_1)$ .
- **Muelle B (Derecha):** Conecta  $m_2$  y  $m_3$ . Su elongación es  $(x_3 - x_2)$ .

**Ecuación para la Masa 1 (Frontal)** La masa  $m_1$  solo está conectada al Muelle A. Si  $m_2$  se desplaza más que  $m_1$ , el muelle tira de  $m_1$  hacia la derecha.

$$F_1 = k(x_2 - x_1)$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton ( $F = ma$ ):

$$m_1 \ddot{x}_1 = kx_2 - kx_1$$

Reordenando para la forma matricial (todo a la izquierda):

$$m_1 \ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0$$

*Esto genera la primera fila de la matriz:  $[k, -k, 0]$ .*

**Ecuación para la Masa 2 (Central)** Esta es la clave del término  $2k$ . La masa  $m_2$  sufre fuerzas de **ambos** muelles:

- El Muelle A tira hacia la izquierda (reacción):  $F_A = -k(x_2 - x_1)$
- El Muelle B tira hacia la derecha (acción):  $F_B = k(x_3 - x_2)$

La fuerza total es la suma:

$$F_{Total} = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -kx_2 + kx_1 + kx_3 - kx_2$$

Agrupamos los términos semejantes (aquí aparece la suma de rigideces):

$$m_2\ddot{x}_2 = kx_1 - \underbrace{(k+k)}_{2k}x_2 + kx_3$$

Reordenando:

$$m_2\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = 0$$

*Esto genera la segunda fila de la matriz:  $[-k, 2k, -k]$ . El  $2k$  surge porque la masa central lucha contra dos muelles simultáneamente.*

**Ecuación para la Masa 3 (Trasera)** La masa  $m_3$  solo está conectada al Muelle B. Si  $m_3$  se desplaza más que  $m_2$ , el muelle tira hacia la izquierda.

$$F_3 = -k(x_3 - x_2)$$

Newton:

$$m_3\ddot{x}_3 = -kx_3 + kx_2$$

Reordenando:

$$m_3\ddot{x}_3 - kx_2 + kx_3 = 0$$

*Esto genera la tercera fila de la matriz:  $[0, -k, k]$ .*

## Cálculo de Autovalores y Autovectores

Buscamos soluciones armónicas inspiradas en el movimiento de un muelle simple, de la forma  $\vec{x}(t) = \vec{v}e^{i\omega t}$ , o equivalentemente, mediante senos y cosenos como se vio en Bachillerato ( $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ ). Esta propuesta permite transformar el sistema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico de autovalores:

$$K\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \text{donde } \lambda = \omega^2$$

Calculamos el polinomio característico  $\det(K - \lambda I) = 0$ :

$$\det \begin{pmatrix} k - \lambda & -k & 0 \\ -k & 2k - \lambda & -k \\ 0 & -k & k - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Resolviendo, obtenemos las raíces:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = k$ ,  $\lambda_3 = 3k$ .

A continuación, obtenemos los modos normales ( $\vec{v}_i$ ) y las frecuencias naturales ( $\omega_i$ ):

## Modo 1: Traslación (Cuerpo Rígido)

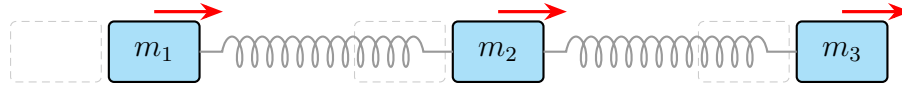


Figura 4.2: Las tres masas se mueven en fase con la misma amplitud.

$$\lambda_1 = 0 \implies \omega_1 = 0, \quad \vec{v}_1 = (1, 1, 1)$$

*Interpretación:* Todo el sistema se desplaza al unísono sin deformación de los muelles (frecuencia nula).

## Modo 2: Contrafase (Extremos opuestos)

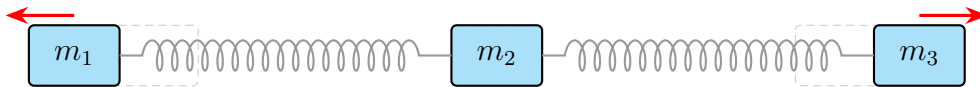


Figura 4.3: La masa central es un nodo (quieta). Los extremos oscilan en oposición.

$$\lambda_2 = k \implies \omega_2 = \sqrt{k}, \quad \vec{v}_2 = (1, 0, -1)$$

*Interpretación:* La masa central permanece quieta (nodo) y los extremos vibran en oposición de fase.

## Modo 3: Simétrico (Rebote Central)



Figura 4.4: Los extremos se mueven juntos, comprimiendo el muelle central.

$$\lambda_3 = 3k \implies \omega_3 = \sqrt{3k}, \quad \vec{v}_3 = (1, -2, 1)$$

*Interpretación:* Los extremos se mueven en la misma dirección, mientras el centro se mueve en dirección opuesta con mayor amplitud.

□

## Problemas

1. Hallar los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y los subespacios propios asociados a cada uno. ¿Es  $A$  diagonalizable?

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Hallar los valores propios de  $A$ .
- Hallar los subespacios propios asociados a cada valor propio.
- ¿Es  $A$  diagonalizable? ¿Por qué?

3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Estudiar la diagonalización de  $A$  en función de los valores de  $a$  y  $b$ .
- Para  $a = -1$  y  $b = -2$  se pide:
  - Diagonalizarla si es posible, expresando la matriz que la diagonalice.
  - Hallar una matriz  $P$  que diagonalice a la matriz  $A$  y tal que  $|P| = 1$ .
  - Demostrar que  $A^{69} = A^{171}$ .

4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4a^2 & -3a \end{pmatrix},$$

- ¿Para qué valores de  $a$  es diagonalizable?
- Diagonalizarla ortogonalmente en algún caso en que sea posible, hallando la matriz  $P$  que la diagonaliza.

5. Diagonalizar ortogonalmente las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Sea

$$f : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R}), \quad f(a + bx) = a + (6a - b)x.$$

- a) Encontrar la matriz estándar.
- b) Dar una base de la imagen y otra del núcleo. ¿Cuáles son sus dimensiones?
- c) Determinar una base de  $P_1(\mathbb{R})$  de manera que la matriz asociada a  $f$  en dicha base sea diagonal.

7. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(x, y) = (y, x - \frac{3}{2}y).$$

- a) ¿Es  $f$  un endomorfismo simétrico?
- b) Hallar, si es posible, una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  tal que la matriz asociada al endomorfismo en dicha base sea diagonal.
- c) Hallar la matriz del endomorfismo en la base  $\{(0, 1), (2, 1)\}$ .

8. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \{(0, 1), (2, 1)\}.$$

- a) Hallar la matriz de la aplicación en la base canónica.
- b) ¿Es  $f$  un endomorfismo simétrico? ¿Es  $f$  un endomorfismo diagonalizable ortogonalmente?

9. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación lineal de la que conocemos:

- I)  $(2, -1, 2)$  pertenece al núcleo de la aplicación.
  - II)  $f(1, 0, 0) = (-2, 2, -4)$ .
  - III)  $(1, 0, 1)$  es un vector propio asociado al valor propio 2.
- a) ¿Cuántas aplicaciones hay cumpliendo las tres condiciones anteriores? Justificar la respuesta.
  - b) Hallar la matriz de la aplicación en las bases canónicas.
  - c) Hallar la fórmula de la aplicación.
  - d) Hallar la dimensión y una base del núcleo.
  - e) Hallar la dimensión y una base de la imagen.
  - f) Hallar, si es posible, una base de  $\mathbb{R}^3$  respecto a la cual la matriz de la aplicación sea diagonal.
  - g) Hallar, si es posible, una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  respecto a la cual la matriz de la aplicación sea diagonal.

10. Sea  $A$  una matriz de orden  $n$  y sea  $c$  un número real. Si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ , demostrar que  $c\lambda$  es un valor propio de la matriz  $cA$ .

11. Probar que si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ , entonces  $\lambda^n$  es valor propio de  $A^n$ , cuando  $n$  es un entero positivo.

12. Sea la matriz  $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ b & 3 & e \\ c & e & 0 \end{pmatrix}$ , con  $b, c$  y  $e$  números reales. Determinar la forma concreta que debe tener la matriz para que admita (a la vez):  
el vector  $(-1, 0, 1)$  como vector propio asociado al valor propio  $\lambda = -2$ , el vector  $(1, -1, 1)$  como vector propio asociado al valor propio  $\lambda = 1$ .

13. Dada la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , encontrar para qué valores del número real  $a$  dicha matriz es diagonalizable, y hallar la matriz que la diagonaliza, comprobando el resultado.

14. Dada la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , encontrar para qué valores del número real  $a$  dicha matriz es diagonalizable, y hallar la matriz que la diagonaliza, comprobando el resultado.

15. Sea  $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \geq 0, a + c = b + d = 1 \right\}$

a) Estudia qué matrices  $M \in \mathcal{G}$  son diagonalizables.

b) Para las matrices  $M \in \mathcal{G}$  diagonalizables, obtén una matriz  $P$  que las diagonaliza.

16. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

a) Hallar  $a$  tal que el autovalor  $\lambda = 3$  tenga multiplicidad algebraica 2.

b) Hallar  $b$  tal que la matriz sea diagonalizable.

c) Hallar la matriz  $P$  que diagonaliza  $A$ .

d) Hallar la matriz diagonal  $D$  que satisface  $D = P^{-1}AP$ .

17. Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  tal que  $A^3 = A$ . Demostrar que los únicos valores propios posibles de  $A$  son 0, 1 y  $-1$ .

18. Demostrar que si  $A^2 = 0$ , entonces el único valor propio asociado a la matriz  $A$  es el cero.

## Soluciones

1. Valores propios: 1 y 2.

$$V(1) = L[(1, -1)], \quad V(2) = L[(-2, 1)].$$

Sí es diagonalizable.

2. a) Valores propios: 1 (doble) y 2 (simple).

b)

$$V(1) = L[(1, 1, 1)], \quad V(2) = L[(1, 0, 1)].$$

c) No es diagonalizable.

3. a) Si  $a = 1$  no es diagonalizable. Si  $a \neq 1$  y  $b = a - 1$ , sí lo es. Si  $a \neq 1$  y  $b \neq a - 1$ , no lo es.

b) 1) Sí se puede diagonalizar.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Se puede tomar

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4. a)  $A$  es diagonalizable para  $a \neq 0$ .

b) Se puede diagonalizar ortogonalmente para  $a = \pm \frac{1}{2}$ :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad P^TAP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad P^TBP = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. a)

$$[f]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Imagen:  $\{1, x\}$ . Núcleo:  $\{0\}$ .

c)

$$B = \{1 + 3x, x\}, \quad [f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. a) Sí.

b)

$$B = \left\{ \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}, \quad [f]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

c)

$$[f]_{\{(0,1),(2,1)\}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

8. a)

$$[f]_C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) No es simétrico, por tanto no es diagonalizable ortogonalmente.

9. a) Hay una única aplicación que cumple las condiciones.

b)

$$[f]_C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

c)

$$f(x, y, z) = (-2x + 4y + 4z, 2x - 2z, -4x + 4y + 6z).$$

d)  $\dim(\ker f) = 1$ , base  $\{(2, -1, 2)\}$ .

e)  $\dim(\text{Im } f) = 2$ , base  $\{(-1, 1, -2), (1, 0, 1)\}$ .

f) Base de diagonalización:  $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, -1, 2)\}$ .

g) No es posible ortogonalizar la diagonalización.

12.  $b = e = 1$  y  $c = 2$ .

13.  $a = 0$ ,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14.  $a = 0$ ,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15.

a)  $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - (a - b))$ . Autovalores:  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = a - b$ .

- Si  $a - b \neq 1$ : Existen dos autovalores distintos, por tanto  $M$  es diagonalizable.

- Si  $a - b = 1$ : Dadas las restricciones ( $0 \leq a, b \leq 1$ ), esto implica  $a = 1$  y  $b = 0$ , por lo que  $M = I$  (matriz identidad), la cual es diagonal.

Conclusión: Todas las matrices  $M \in \mathcal{G}$  son diagonalizables.

b) Para  $M \neq I$  (caso general):

$$P = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 - a & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}.$$

(En el caso particular  $M = I$ , basta tomar  $P = I$ ).

16. a)  $a = 1$ .

b)  $b = -3$ .

c)  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

d)  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

# Capítulo 5

## Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

### 5.1. Conceptos básicos

En la modelización de muchos problemas físicos y de ingeniería aparecen ecuaciones que, además de funciones incógnitas que hay que determinar, contienen derivadas de distintos órdenes de éstas. Este tipo de ecuaciones se denominan *ecuaciones diferenciales*.

**Ejemplo** (Desintegración radiactiva).

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

donde  $t$  es el tiempo,  $N(t)$  es el número de átomos en función del tiempo y  $\lambda$  es la constante de desintegración. La solución es  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ , siendo  $N_0 = N(0)$ .

**Ejemplo** (Ley de Newton en 3 dimensiones).

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \left( t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \Rightarrow \begin{cases} mx''(t) = F_1(t, x, y, z, x', y', z') \\ my''(t) = F_2(t, x, y, z, x', y', z') \\ mz''(t) = F_3(t, x, y, z, x', y', z') \end{cases}$$

donde  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  es el vector posición,  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  es la fuerza en función del tiempo, la posición y la velocidad, y  $m$  es la masa.

**Ejemplo** (Ecuación del calor).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + f(t, x, y, z)$$

donde  $T = T(t, x, y, z)$  es la temperatura,  $f$  es la fuente de calor y  $k$  es una constante.

Todos estos ejemplos son de ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales, lo que lleva a la siguiente definición genérica:

**Definición 5.1.1.** Se llama *ecuación diferencial* a una ecuación que contiene una o varias variables dependientes (funciones incógnita) y sus derivadas respecto a una o más variables independientes.

- Si hay una sola variable independiente, se trata de una *ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.)*.
- Si hay varias variables independientes, se llama *ecuación diferencial en derivadas parciales*.
- Si se trata de un sistema de ecuaciones con varias variables dependientes, se llama *sistema de ecuaciones diferenciales*.

El *orden* de una ecuación diferencial es el mayor de los órdenes de las derivadas que contiene.

A partir de ahora nos referiremos a E.D.O. de la forma  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , donde  $x$  es la variable independiente e  $y = y(x)$  es la variable dependiente.

**Ejemplo.**  $xy' + y = 0$ ,  $xy'' + 2y = x^4$ ,  $y''' - 8y = xe^x$  son E.D.O. de orden 1, 2 y 3 respectivamente.

**Definición 5.1.2.**

- Una función  $y = y(x)$  es *solución* de una E.D.O. en un conjunto  $D \subset \mathbb{R}$  si, al sustituirse en la ecuación junto con sus derivadas, la satisface para todo  $x \in D$ .
- La *solución general* o *integral general* de una E.D.O. de orden  $n$  es

$$y = S(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

tal que, para cada elección de las constantes  $C_i$ , la función  $y = S(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$  es solución de la E.D.O. Cada una de estas soluciones se llama *solución particular*.

- La solución también puede estar definida de forma implícita:

$$S(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0.$$

- Soluciones que no provienen de la integral general se llaman *soluciones singulares*.

**Ejemplo.** Para  $y' = f(x)$ , la solución general es  $y = F(x) + C$ , donde  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ .

**Ejercicio.**

1. Comprobar que  $y = 3 \sin x - 4 \cos x$  es solución de  $y'' + y = 0$ .
2. Encontrar la E.D.O. de la familia de curvas  $x^2 + y^2 = C^2$ .
3. Encontrar la E.D.O. de la familia de curvas  $y^2 = 2Cx$ .

**Observación.** En los apartados siguientes estudiaremos tipos de E.D.O. de primer orden  $F(x, y, y') = 0$  y técnicas exactas de integración. La existencia y unicidad de soluciones está garantizada en regiones del plano bajo ciertas condiciones sobre  $F$  (teoremas de existencia y unicidad), que no veremos en estos apuntes.

## 5.2. E.D.O. de primer orden resolubles con respecto a $y'$

Se dice que una E.D.O. de primer orden

$$F(x, y, y') = 0,$$

es *resoluble respecto a  $y'$*  si se puede expresar en la forma

$$y' = f(x, y) \quad \text{o, equivalentemente,} \quad dy = f(x, y)dx.$$

### 5.2.1. Ecuaciones de variables separadas

Una E.D.O. de primer orden se llama de *variables separadas* si puede ponerse en la forma

$$P(x)dx = Q(y)dy.$$

La *solución general* se obtiene integrando ambos miembros:

$$\int P(x)dx - \int Q(y)dy = C.$$

**Ejemplo.**

1. La E.D.O.  $x dx + y dy = 0$  tiene como solución general  $x^2 + y^2 = C$ .
2. Hallar la solución particular de la E.D.O.  $(1 + e^x) yy' = e^x$  pasando por el punto  $(0, 1)$  ( es decir, con la condición inicial  $y(0) = 1$  ).

*Solución:* La ecuación se puede escribir como:

$$y dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$$

Integrando ambos lados:

$$\int y \, dy = \int \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx \implies \frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C.$$

Aplicamos la condición inicial  $y(0) = 1$ :

$$\frac{1}{2} = \ln 2 + C \implies C = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Por tanto, la solución particular es:

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2,$$

que se puede expresar como:

$$y^2 = 2 \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right) + 1.$$

Hallar la solución general de la E.D.O.

$$(1 + y^2) + xy \, y' = 0.$$

Separando variables:

$$\frac{dx}{x} + \frac{y \, dy}{1 + y^2} = 0.$$

Integrando:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{y \, dy}{1 + y^2} = C_1.$$

Por tanto:

$$\ln|x| + \frac{\ln(1 + y^2)}{2} = C_1 \implies x^2(1 + y^2) = e^{2C_1}.$$

Finalmente, la solución general se escribe como:

$$x^2(1 + y^2) = C.$$

□

### 5.2.2. Ecuaciones homogéneas

Una función  $f(x, y)$  es homogénea de grado  $n$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) respecto a  $x$  e  $y$  si siempre se cumple  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ .

**Ejemplo.**

- $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$

Aplicamos la definición sustituyendo  $x$  por  $\lambda x$  e  $y$  por  $\lambda y$ :

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - \lambda^2 xy.$$

Sacamos factor común  $\lambda^2$ :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(x^2 + y^2 - xy).$$

Como  $(x^2 + y^2 - xy) = f(x, y)$ , tenemos:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y).$$

Por lo tanto, la función es homogénea de **grado 2**.

- $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Aplicamos la definición:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \frac{\lambda^2(x^2 - y^2)}{\lambda^2(x^2 + y^2)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Como

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = f(x, y),$$

tenemos:

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) = \lambda^0 f(x, y).$$

Por lo tanto, la función es homogénea de **grado 0**.

Una E.D.O.  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  se dice que es homogénea si las funciones  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son homogéneas del mismo grado.

Para encontrar la solución general de esta E.D.O. se hace el cambio de variable  $u = \frac{y}{x}$  (o bien  $u = \frac{x}{y}$ ) y se transforma en una E.D.O. de variables separadas.

$$(u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu)$$

**Ejemplo.** La E.D.O.  $(x - y)ydx - x^2dy = 0$  es una ecuación homogénea. Haciendo  $u = \frac{y}{x}$  ( $dy = udx + xdu$ ) queda:

$$(1 - u)udx - (udx + xdu) = 0 - u^2dx - xdu = 0,$$

dividiendo por  $-xu^2$  queda la ecuación de variables separadas

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u^2} = 0.$$

Integrando:  $\ln|x| - \frac{1}{u} = C_1$ , deshaciendo el cambio queda:

$$\ln|x| - \frac{x}{y} = C_1,$$

que se puede expresar de la forma

$$x = Ce^{\frac{x}{y}} \quad (C = \pm e^{C_1}).$$

### 5.2.3. Ecuaciones reducibles a homogéneas

Son de la forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad \text{con } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Resolvemos el sistema  $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ , y según sea su solución tenemos:

- Si es única  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ , haciendo el cambio  $x = X + \alpha$ ,  $y = Y + \beta$  ( $\Rightarrow dx = dX$ ,  $dy = dY$ ) la ecuación se transforma en una E.D.O. homogénea.
- En los demás casos haciendo el cambio  $z = a_1x + b_1y$  ( $\Rightarrow y = \frac{z}{b_1} - \frac{a_1x}{b_1}$ ,  $dy = \frac{dz}{b_1} - \frac{a_1dx}{b_1}$ ) la ecuación se transforma en una E.D.O. de variables separadas.

**Ejercicio.** Encontrar la solución general de las siguientes E.D.O.:

- $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$ .

*Solución:* **1. Identificación del tipo de E.D.O.**

La ecuación es de la forma  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ . Reescribiéndola como  $\frac{dy}{dx}$ , tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y - 2}{x - y + 4} = \frac{x + y - 2}{-(x - y + 4)} = \frac{x + y - 2}{-x + y - 4}$$

Esta es una E.D.O. de la forma  $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ .

#### 2. Comprobación del caso

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -x + y - 4 = 0 \end{cases}.$$

Sumando ambas ecuaciones (E1 + E2):

$$2y - 6 = 0 \implies 2y = 6 \implies y = 3.$$

Sustituyendo  $y = 3$  en la primera ecuación:

$$x + 3 - 2 = 0 \implies x + 1 = 0 \implies x = -1.$$

### 3. Sustitución para convertir a homogénea

Aplicamos el cambio de variable:

$$x = X - 1 \implies dx = dX,$$

$$y = Y + 3 \implies dy = dY.$$

Sustituimos en la E.D.O. original:

- $x + y - 2 = (X - 1) + (Y + 3) - 2 = X + Y + 2 - 2 = X + Y,$
- $x - y + 4 = (X - 1) - (Y + 3) + 4 = X - Y - 4 + 4 = X - Y.$

La ecuación se transforma en una E.D.O. homogénea:

$$(X + Y)dX + (X - Y)dY = 0.$$

Notar que, con el cambio de variable utilizado, hemos quitado la parte independiente de  $x$  e  $y$ , quedando una ecuación diferencial homogénea.

### 4. Resolución de la E.D.O. homogénea

Usamos la sustitución estándar para homogéneas:  $Y = uX$ , de donde  $dY = udX + Xdu$ . Sustituimos en  $(X + Y)dX + (X - Y)dY = 0$ :

$$(X + uX)dX + (X - uX)(udX + Xdu) = 0.$$

Dividimos todo por  $X$  (asumiendo  $X \neq 0$ ):

$$(1 + u)dX + (1 - u)(udX + Xdu) = 0,$$

$$(1 + u)dX + (u - u^2)dX + X(1 - u)du = 0.$$

Agrupamos los términos de  $dX$ :

$$(1 + u + u - u^2)dX + X(1 - u)du = (1 + 2u - u^2)dX + X(1 - u)du = 0.$$

Separamos las variables:

$$X(1 - u)du = -(1 + 2u - u^2)dX,$$

$$\frac{1 - u}{1 + 2u - u^2}du = -\frac{1}{X}dX.$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{1 - u}{1 + 2u - u^2}du = \int -\frac{1}{X}dX + C_1.$$

Integrando, llegamos a

$$\frac{1}{2} \ln |1 + 2u - u^2| = -\ln |X| + C_1.$$

Multiplicando por 2:

$$\ln |1 + 2u - u^2| = -2 \ln |X| + C_2,$$

$$\ln |1 + 2u - u^2| = \ln |X^{-2}| + C_2,$$

$$\ln |1 + 2u - u^2| - \ln |X^{-2}| = C_2,$$

$$\ln \left| \frac{1 + 2u - u^2}{X^{-2}} \right| = C_2 \implies \ln |X^2(1 + 2u - u^2)| = C_2$$

$$X^2(1 + 2u - u^2) = C_3.$$

## 5. Sustitución inversa

Primero, revertimos  $u = Y/X$ :

$$X^2 \left( 1 + 2\frac{Y}{X} - \frac{Y^2}{X^2} \right) = C_3,$$

$$X^2 + 2XY - Y^2 = C_3.$$

Ahora, revertimos  $X = x + 1$  e  $Y = y - 3$ :

$$(x + 1)^2 + 2(x + 1)(y - 3) - (y - 3)^2 = C_3,$$

$$(x^2 + 2x + 1) + 2(xy - 3x + y - 3) - (y^2 - 6y + 9) = C_3,$$

$$x^2 + 2x + 1 + 2xy - 6x + 2y - 6 - y^2 + 6y - 9 = C_3.$$

Agrupamos términos:

$$x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y - 14 = C_3,$$

$$x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y = C_3 + 14.$$

Multiplicamos por -1 y renombramos la constante  $C = -(C_3 + 14)$ :

$$-x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 8y = C,$$

$$y^2 - x^2 - 2xy - 8y + 4x = C.$$

□

■  $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$

*Solución:* **1. Identificación**

Observamos que la E.D.O. se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y+1}{2x+2y-1}.$$

Las rectas  $x+y+1=0$  y  $2x+2y-1=0$  (o  $x+y-1/2=0$ ) son paralelas, por lo que el sistema será compatible indeterminado. Esto sugiere una **reducción a variables separables** con la sustitución  $z = x + y$ .

**2. Resolución por Sustitución**

Sea  $z = x + y$ . Derivamos respecto a  $x$ :

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

Sustituimos  $y'$  y  $(x+y)$  en la E.D.O.:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} - 1 &= -\frac{z+1}{2z-1}, \\ \frac{dz}{dx} &= 1 - \frac{z+1}{2z-1} = \frac{(2z-1) - (z+1)}{2z-1} = \frac{z-2}{2z-1}. \end{aligned}$$

Ahora tenemos una E.D.O. de variables separables. Separamos las variables:

$$\frac{2z-1}{z-2} dz = dx.$$

Integramos ambos lados. El lado izquierdo requiere descomposición (división de polinomios):

$$\frac{2z-1}{z-2} = \frac{2(z-2)+4-1}{z-2} = \frac{2(z-2)+3}{z-2} = 2 + \frac{3}{z-2}.$$

Integramos:

$$\begin{aligned} \int \left( 2 + \frac{3}{z-2} \right) dz &= \int dx, \\ 2z + 3 \ln |z-2| &= x + C_1. \end{aligned}$$

Sustituimos de nuevo  $z = x + y$ :

$$\begin{aligned} 2(x+y) + 3 \ln |x+y-2| &= x + C_1, \\ 2x + 2y + 3 \ln |x+y-2| &= x + C_1, \\ x + 2y + 3 \ln |x+y-2| &= C_1. \end{aligned}$$

Para que coincida con la solución dada, usamos propiedades de logaritmos y exponenciales:

$$x + 2y + \ln |(x + y - 2)^3| = C_1,$$

$$\ln |(x + y - 2)^3| + (x + 2y) = C_1.$$

Tomamos la exponencial en ambos lados:

$$e^{\ln |(x+y-2)^3| + (x+2y)} = e^{C_1},$$

$$e^{\ln |(x+y-2)^3|} \cdot e^{x+2y} = e^{C_1}.$$

Absorbiendo el  $\pm$  del valor absoluto en la constante, obtenemos finalmente

$$(x + y - 2)^3 \cdot e^{x+2y} = C.$$

□

## 5.2.4. Ecuaciones lineales

Una E.D.O. de primer orden es **lineal en la variable  $y$**  si tiene la forma:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

De manera análoga, es **lineal en la variable  $x$**  si se escribe como:

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y).$$

Para resolver la ecuación

$$y' + p(x)y = q(x),$$

multiplicamos ambos miembros por el factor integrante:

$$e^{\int p(x) dx}.$$

Así obtenemos:

$$e^{\int p(x) dx} y' + p(x)e^{\int p(x) dx} y = q(x)e^{\int p(x) dx},$$

lo que equivale a:

$$(e^{\int p(x) dx} y)' = q(x)e^{\int p(x) dx}.$$

Integrando:

$$e^{\int p(x) dx} y = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C.$$

Por tanto, la solución general es:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left( C + \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx \right).$$

De forma análoga, la solución general de la ecuación

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$$

es:

$$x = e^{-\int p(y) dy} \left( C + \int q(y)e^{\int p(y) dy} dy \right).$$

**Ejemplo.**  $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ .

*Solución:* **1. Identificación de la E.D.O.**

La ecuación  $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$  es una **E.D.O. Lineal** de primer orden, con la forma estándar  $y' + p(x)y = q(x)$ . Identificamos los componentes:

$$p(x) = 2x, \quad q(x) = 2xe^{-x^2}.$$

**2. Cálculo del Factor Integrante  $\mu(x)$**

El factor integrante se calcula con la fórmula  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ .

$$\int p(x) dx = \int 2x dx = x^2.$$

Por lo tanto, el factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{x^2}.$$

**3. Resolución**

La solución general para una E.D.O. lineal viene dada por la fórmula:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[ \int \mu(x)q(x) dx + C \right].$$

Sustituimos nuestros  $\mu(x)$  y  $q(x)$ :

$$y(x) = \frac{1}{e^{x^2}} \left[ \int (e^{x^2}) \cdot (2xe^{-x^2}) dx + C \right].$$

Simplificamos la integral. Los términos exponenciales se cancelan mutuamente:

$$\int e^{x^2} \cdot 2xe^{-x^2} dx = \int 2x \cdot (e^{x^2} e^{-x^2}) dx = \int 2x \cdot (e^0) dx = \int 2x dx.$$

Resolvemos la integral simple:

$$\int 2x dx = x^2.$$

Sustituimos el resultado de la integral en la solución general:

$$y(x) = \frac{1}{e^{x^2}} [x^2 + C].$$

#### 4. Solución General

La solución general es:

$$y(x) = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

□

**Ejercicio.**  $(x \cos y + \sin 2y)dy = dx$ .

*Solución:* **1. Identificación de la E.D.O.**

Reordenamos la ecuación para expresar  $x$  en función de  $y$ :

$$\frac{dx}{dy} = x \cos y + \sin 2y.$$

Movemos el término en  $x$  hacia la izquierda:

$$\frac{dx}{dy} - (\cos y)x = \sin 2y.$$

Esta es una **E.D.O. Lineal** en  $x$ , que sigue la forma estándar:

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y).$$

Identificamos los componentes:

- $p(y) = -\cos y$ .
- $q(y) = \sin 2y$ .

#### 2. Cálculo del Factor Integrante $\mu(y)$

El factor integrante se calcula con la fórmula  $\mu(y) = e^{\int p(y)dy}$ .

$$\int p(y)dy = \int (-\cos y)dy = -\sin y.$$

Por lo tanto, el factor integrante es:

$$\mu(y) = e^{-\sin y}.$$

### 3. Resolución

La solución general para una E.D.O. lineal en  $x$  viene dada por:

$$x(y) = \frac{1}{\mu(y)} \left[ \int \mu(y)q(y)dy + C \right].$$

Sustituimos nuestros  $\mu(y)$  y  $q(y)$ :

$$x(y) = \frac{1}{e^{-\sin y}} \left[ \int (e^{-\sin y}) \cdot (\sin 2y)dy + C \right].$$

$$x(y) = e^{\sin y} \left[ \int e^{-\sin y} \sin 2ydy + C \right].$$

Para resolver la integral, usamos la identidad  $\sin 2y = 2 \sin y \cos y$ :

$$\int e^{-\sin y} (2 \sin y \cos y) dy.$$

Usamos la sustitución  $u = \sin y$ , lo que implica  $du = \cos y dy$ .

$$\int e^{-u} (2u) du = 2 \int u e^{-u} du.$$

Esta integral se resuelve por partes ( $\int f g' = f g - \int f' g$ ):

- Sea  $f = u \implies f' = 1$ .
- Sea  $g' = e^{-u} \implies g = -e^{-u}$ .

$$\begin{aligned} 2 \int u e^{-u} du &= 2 \left[ u(-e^{-u}) - \int (1)(-e^{-u}) du \right] = 2 \left[ -u e^{-u} + \int e^{-u} du \right] = \\ &= 2 \left[ -u e^{-u} - e^{-u} \right] = -2e^{-u}(u + 1) \end{aligned}$$

Deshacemos la sustitución  $u = \sin y$ :

$$\int e^{-\sin y} \sin 2y dy = -2e^{-\sin y}(\sin y + 1),$$

Finalmente, sustituimos este resultado en la solución general:

$$x(y) = e^{\sin y} \left[ -2e^{-\sin y}(\sin y + 1) + C \right].$$

Distribuimos  $e^{\sin y}$ :

$$x(y) = -2(e^{\sin y} e^{-\sin y})(\sin y + 1) + C e^{\sin y},$$

$$x(y) = -2(e^0)(\sin y + 1) + C e^{\sin y}.$$

## 4. Solución General

La solución general es:

$$x(y) = -2(\sin y + 1) + Ce^{\sin y}.$$

□

## 5.2.5. Ecuaciones de Bernoulli

Una E.D.O. de primer orden es de Bernoulli en la variable  $y$  si es de la forma  $y' + p(x)y = q(x)y^n$  con  $n \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$  (Si  $n = 0$  ó  $n = 1$  la ecuación es lineal).

Haciendo el cambio de variable  $z = y^{1-n}$  se obtiene una E.D.O. lineal en  $z$ .

Una E.D.O. de primer orden es de Bernoulli en la variable  $x$  si es de la forma  $\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)x^n$  con  $n \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$  (Si  $n = 0$  ó  $n = 1$  la ecuación es lineal).

Haciendo el cambio de variable  $z = x^{1-n}$  se obtiene una E.D.O. lineal en  $z$ .

**Ejercicio.** Encontrar la solución general de la siguiente E.D.O.:

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

*Solución:* **1. Identificación de la E.D.O.**

Primero, reescribimos la ecuación en su forma estándar. Asumiendo  $x \neq 0$ , dividimos toda la ecuación por  $x$ :

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2.$$

Esta es una **Ecuación de Bernoulli**, que tiene la forma  $y' + p(x)y = q(x)y^n$ . Identifiquemos:

- $p(x) = \frac{1}{x}$ .
- $q(x) = \frac{\ln x}{x}$ .
- $n = 2$ .

### 2. Sustitución de Bernoulli

Aplicamos el cambio de variable  $z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1}$ . Calculamos la derivada de  $z$  respecto a  $x$ :

$$\frac{dz}{dx} = -1 \cdot y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx} \implies z' = -\frac{y'}{y^2}.$$

Ahora, multiplicamos la E.D.O. estándar (paso 1) por  $y^{-2}$ :

$$y^{-2} \cdot y' + y^{-2} \cdot \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x},$$

$$(y^{-2}y') + \frac{1}{x}(y^{-1}) = \frac{\ln x}{x}.$$

Sustituimos  $z = y^{-1}$  y  $z' = -y^{-2}y'$  (o  $-z' = y^{-2}y'$ ):

$$-z' + \frac{1}{x}z = \frac{\ln x}{x}.$$

Multiplicamos por -1 para obtener la forma lineal estándar:

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}.$$

### 3. Resolución de la E.D.O. Lineal en $z$

Esta es una E.D.O. lineal de la forma  $z' + P(x)z = Q(x)$ , con:

- $P(x) = -\frac{1}{x}$ .
- $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$ .

Calculamos el factor integrante  $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ :

$$\int P(x)dx = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln x = \ln(x^{-1}).$$

$$\mu(x) = e^{\ln(x^{-1})} = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

La solución para  $z$  es  $z(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[ \int \mu(x)Q(x)dx + C \right]$ :

$$z(x) = \frac{1}{1/x} \left[ \int \left( \frac{1}{x} \right) \left( -\frac{\ln x}{x} \right) dx + C \right],$$

$$z(x) = x \left[ \int -\frac{\ln x}{x^2} dx + C \right].$$

Resolvemos la integral  $\int -\frac{\ln x}{x^2} dx$  usando integración por partes:

- $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx$ .
- $dv = -x^{-2} dx \implies v = x^{-1} = \frac{1}{x}$ .

$$\begin{aligned} \int -\frac{\ln x}{x^2} dx &= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx, \\ &= \frac{\ln x}{x} - (-x^{-1}) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Sustituimos el resultado de la integral en la solución para  $z$ :

$$z(x) = x \left[ \left( \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) + C \right],$$

$$z(x) = x \left[ \frac{\ln x + 1}{x} + C \right],$$

$$z(x) = \ln x + 1 + Cx.$$

#### 4. Solución General

Revertimos la sustitución  $z = y^{-1} = \frac{1}{y}$ :

$$\frac{1}{y} = \ln x + 1 + Cx.$$

La solución general es:

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$

□

### 5.2.6. Ecuaciones exactas y factores integrantes

#### Derivadas parciales: explicación y ejemplos

Cuando una función depende de varias variables, por ejemplo  $f(x, y)$ , podemos estudiar cómo cambia la función respecto a una sola variable, manteniendo las demás constantes. A esto se le llama *derivada parcial*.

$\frac{\partial f}{\partial x}$  significa: derivar  $f(x, y)$  respecto a  $x$  manteniendo  $y$  constante.

$\frac{\partial f}{\partial y}$  significa: derivar  $f(x, y)$  respecto a  $y$  manteniendo  $x$  constante.

#### Ejemplo.

1. Sea  $f(x, y) = x^2y + 3y$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 3y) = 2xy,$$

porque  $y$  se considera constante.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 3y) = x^2 + 3,$$

porque  $x$  se considera constante.

2. Sea  $f(x, y) = \sin(xy)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y,$$

ya que derivamos respecto a  $x$  y tratamos  $y$  como constante.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy) \cdot x,$$

porque ahora derivamos respecto a  $y$ .

**Interpretación geométrica:** Cada derivada parcial mide la pendiente de la función en la dirección de una variable, manteniendo las otras fijas.

### Ecuaciones exactas: definición

Una E.D.O. de la forma

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

es **exacta** en un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  si existe una función real  $u(x, y)$  tal que:

$$du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

lo que equivale a:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

La solución general se expresa como:

$$u(x, y) = C,$$

en general dada de forma implícita.

### Caracterización de las E.D.O. exactas

La ecuación

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

es exacta en una bola abierta  $D$  si y sólo si:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en los puntos de  $D$ .

**Observación.** Este resultado también es válido en conjuntos más generales:  $D$  dominio simplemente conexo (intuitivamente, conjuntos abiertos, de una sola “pieza” y sin “agujeros”).

### Resolución práctica de las E.D.O. exactas

Si la ecuación

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

es exacta, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

Integrando la primera respecto a  $x$ :

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y),$$

donde  $\varphi(y)$  es una función desconocida.

Derivamos respecto a  $y$  y comparamos con  $Q(x, y)$ :

$$Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + \varphi'(y).$$

Despejamos  $\varphi'(y)$  (que depende sólo de  $y$ ) e integramos para obtener  $\varphi(y)$ .

**Observación.** Dependiendo de la dificultad de las integrales, también se puede integrar

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

respecto a  $y$  y luego derivar respecto a  $x$ .

En algunos casos, cuando la ecuación

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

no es exacta, se puede hallar una función  $\mu(x, y)$  (llamada **factor integrante**) tal que la ecuación modificada:

$$\mu(x, y)P(x, y) dx + \mu(x, y)Q(x, y) dy = 0$$

sea exacta.

**Ejemplo.**  $(\sin xy + xy \cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0$ .

**Solución: 1. Identificación y Comprobación de Exactitud**

La ecuación es de la forma  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ .

- $P(x, y) = \sin(xy) + xy \cos(xy)$ .
- $Q(x, y) = x^2 \cos(xy)$ .

Comprobamos si es una ecuación exacta calculando las derivadas parciales cruzadas.

**Cálculo de  $\frac{\partial P}{\partial y}$ :** (Usamos la regla del producto para el segundo término)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin(xy)) + \frac{\partial}{\partial y}(xy \cos(xy)) = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy).$$

**Cálculo de  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ :** (Usamos la regla del producto)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos(xy)) = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy).$$

Dado que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , la ecuación es **exacta**.

## 2. Solución de la Ecuación Exacta

Buscamos una función potencial  $U(x, y)$  tal que  $\frac{\partial U}{\partial x} = P$  y  $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ . La solución general será  $U(x, y) = C$ .

Es más sencillo empezar integrando  $Q(x, y)$  respecto a  $y$ :

$$U(x, y) = \int Q(x, y)dy = \int x^2 \cos(xy)dy$$

Tratando  $x^2$  como constante (respecto a  $y$ ):

$$U(x, y) = x^2 \int \cos(xy)dy = x^2 \left( \frac{\text{sen}(xy)}{x} \right) + \varphi(x),$$

$$U(x, y) = x \text{sen}(xy) + \varphi(x).$$

Ahora, derivamos  $U(x, y)$  respecto a  $x$  y la igualamos a  $P(x, y)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \text{sen}(xy) + \varphi(x)) = \text{sen}(xy) + xy \cos(xy) + \varphi'(x).$$

Igualamos a  $P(x, y)$ :

$$\text{sen}(xy) + xy \cos(xy) + \varphi'(x) = \text{sen}(xy) + xy \cos(xy)$$

Esto simplifica a:

$$\varphi'(x) = 0$$

Integrando, obtenemos  $\varphi(x) = K$  (una constante).

Sustituimos  $\varphi(x)$  en  $U(x, y)$ :

$$U(x, y) = x \text{sen}(xy) + K.$$

La solución general es  $U(x, y) = C_1$ :

$$x \text{sen}(xy) + K = C_1.$$

Agrupando las constantes ( $C = C_1 - K$ ):

$$x \text{sen}(xy) = C.$$

□

## Factores integrantes

Como hemos mencionado, si la ecuación  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$  no es exacta (es decir,  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ ), a veces es posible encontrar una función  $\mu(x, y)$  tal que al multiplicar la ecuación por ella, la ecuación resultante:

$$\mu(x, y)P(x, y) dx + \mu(x, y)Q(x, y) dy = 0$$

sea exacta. Esta función  $\mu$  se llama **factor integrante**.

Aunque encontrar  $\mu(x, y)$  en el caso general es complicado (requiere resolver una E.D.P.), hay dos casos particulares sencillos en los que el factor integrante depende de una sola variable.

**Caso 1: Factor integrante dependiente sólo de  $x$ ,  $\mu(x)$ .**

Si la expresión

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

depende únicamente de la variable  $x$  (es decir, es una función  $h(x)$ ), entonces existe un factor integrante que depende sólo de  $x$ , dado por la fórmula:

$$\mu(x) = e^{\int h(x) dx} = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}.$$

**Caso 2: Factor integrante dependiente sólo de  $y$ ,  $\mu(y)$ .**

Si la expresión

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}$$

depende únicamente de la variable  $y$  (es decir, es una función  $g(y)$ ), entonces existe un factor integrante que depende sólo de  $y$ , dado por la fórmula:

$$\mu(y) = e^{\int g(y) dy} = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}.$$

**Ejemplo.** Resolver la ecuación diferencial:

$$(x^2 + y^2 + x) dx + xy dy = 0.$$

*Solución:* **1. Comprobar si es exacta.** Identificamos  $P(x, y) = x^2 + y^2 + x$  y  $Q(x, y) = xy$ . Calculamos sus derivadas parciales cruzadas:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y.$$

Como  $2y \neq y$ , la ecuación **no es exacta**.

**2. Buscar un factor integrante.** Probamos primero si existe un factor integrante que dependa sólo de  $x$ :

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

Como el resultado  $\frac{1}{x}$  depende sólo de  $x$ , podemos hallar  $\mu(x)$ :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x|.$$

Podemos tomar  $\mu(x) = x$  (para  $x > 0$ ) simplificando el valor absoluto para encontrar una solución.

**3. Multiplicar la ecuación original por  $\mu(x) = x$ .**

$$x(x^2 + y^2 + x) dx + x(xy) dy = 0,$$

$$(x^3 + xy^2 + x^2) dx + x^2y dy = 0.$$

Ahora consideremos  $\tilde{P} = x^3 + xy^2 + x^2$  y  $\tilde{Q} = x^2y$ . Comprobamos nuevamente la exactitud:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = 2xy.$$

Como coinciden, ¡la nueva ecuación es exacta!

**4. Resolver la ecuación exacta.** Buscamos la función potencial  $U(x, y)$ . Sabemos que  $\frac{\partial U}{\partial y} = \tilde{Q} = x^2y$ . Integramos respecto a  $y$ :

$$U(x, y) = \int x^2y dy = x^2 \frac{y^2}{2} + \varphi(x).$$

Derivamos esta expresión respecto a  $x$  e igualamos a  $\tilde{P}$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(x) \right) = xy^2 + \varphi'(x).$$

Igualemos a  $\tilde{P} = x^3 + xy^2 + x^2$ :

$$xy^2 + \varphi'(x) = x^3 + xy^2 + x^2 \implies \varphi'(x) = x^3 + x^2.$$

Integramos  $\varphi'(x)$  para hallar  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = \int (x^3 + x^2) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}.$$

(La constante la agruparemos al final). Sustituimos en  $U(x, y)$ :

$$U(x, y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}.$$

La solución general viene dada por  $U(x, y) = C$ :

$$\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} = C.$$

Multiplicando por 12 para eliminar denominadores, obtenemos la solución implícita:

$$6x^2y^2 + 3x^4 + 4x^3 = K.$$

□

### 5.3. Aplicación: caída libre

Sabemos por las leyes de Newton que

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial de caída libre con término de rozamiento proporcional a la velocidad es:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k \frac{dy}{dt},$$

que podemos reescribir como

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g - c \frac{dy}{dt},$$

donde  $m$  es la masa del objeto,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $c$  es el coeficiente de rozamiento y  $y$  es la posición del objeto en función del tiempo  $t$ .

Para resolver esta ecuación diferencial, podemos escribir  $v = dy/dt$ , por lo que

$$\frac{dv}{dt} = g - cv,$$

que podemos resolver fácilmente ya que es una ecuación diferencial de variables separadas, obteniendo

$$-\frac{1}{c} \ln(g - cv) = t + c_1.$$

La solución general de la ecuación es

$$g - cv = c_2 e^{-ct},$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. Asumiendo la condición inicial  $v = 0$  para  $t = 0$  nos da  $c_2 = g$ , así que

$$v = \frac{g}{c} (1 - e^{-ct}).$$

Como  $c$  es positivo, la velocidad límite ( $t \rightarrow \infty$ ) es  $v_{\text{lím}} = g/c$ .

Además de éste, existen otros ejemplos. Por ejemplo, se puede considerar un término de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad

$$\frac{dv}{dt} = g - cv^2.$$

Para resolverla, procedemos como antes y la expresamos en la forma

$$\frac{1}{g - cv^2} dv = dt.$$

Integrando ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{cg}} \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{\frac{c}{g}} v \right) = t + c_1,$$

donde  $c_1$  es la constante de integración. Despejando  $v$  se tiene

$$v = \sqrt{\frac{g}{c}} \tanh(\sqrt{cg}(t + c_1)).$$

En este caso, la velocidad límite viene dada por  $v_{\text{lím}} = \sqrt{g/c}$ .

## 5.4. Problemas aplicados

### 5.4.1. Datación por Radiocarbono

**Enunciado:** El isótopo radiactivo Plomo-209 (Pb-209) se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier momento  $t$  y tiene una vida media de 3 horas. Si al inicio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre un 87.5%?

*Solución:* Para modelar el proceso, consideramos que la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad presente  $A(t)$  en cualquier instante. Esto se traduce en la ecuación diferencial:

$$\frac{dA}{dt} = kA.$$

Separamos variables e integramos:

$$\frac{1}{A} dA = k dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{A} dA = \int k dt,$$

lo que nos da:

$$\ln A = kt + C_1.$$

Como  $A > 0$ , podemos escribir:

$$A(t) = e^{kt+C_1} = A_0 e^{kt},$$

donde  $A_0$  es la cantidad inicial. Dado que  $A(0) = 1$ , tenemos  $A_0 = 1$ , y el modelo se simplifica a:

$$A(t) = e^{kt}.$$

Para determinar  $k$ , usamos la vida media  $T_{1/2} = 3$  horas, que implica:

$$0.5 = e^{k \cdot 3} \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{\ln 2}{3}.$$

Así, la ecuación queda:

$$A(t) = e^{-\frac{\ln 2}{3}t}.$$

Ahora buscamos el tiempo  $t$  para que se desintegre el 87.5%. Esto significa que queda el 12.5% de la cantidad inicial, es decir,  $A(t) = 0.125$ .

$$0.125 = e^{-\frac{\ln 2}{3}t}$$

Reconocemos que  $0.125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ .

$$2^{-3} = e^{-\frac{\ln 2}{3}t}$$

Tomamos logaritmo natural en ambos lados:

$$\ln(2^{-3}) = \ln\left(e^{-\frac{\ln 2}{3}t}\right)$$

$$-3 \ln 2 = -\frac{\ln 2}{3}t$$

Dividimos ambos lados por  $-\ln 2$ :

$$3 = \frac{t}{3}$$

$$t = 9 \text{ horas.}$$

**Conclusión:** Para que se desintegre el 87.5% del Plomo-209, deben transcurrir exactamente 9 horas.  $\square$

### 5.4.2. Población Logística

**Enunciado:** La cantidad  $C(t)$  de supermercados que emplean cajas computarizadas en un país está definida por el problema de valor inicial:

$$\frac{dC}{dt} = C(1 - 0.0005C), \quad C(0) = 1,$$

donde  $t > 0$ . ¿Cuántos supermercados utilizarán el método computarizado cuando  $t = 10$ ? ¿Cuántos lo adoptarán después de un tiempo muy largo?

*Solución:* La ecuación diferencial dada es una ecuación logística:

$$\frac{dC}{dt} = C(1 - 0.0005C).$$

La forma estándar de la ecuación logística es:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

donde  $r$  es la tasa de crecimiento y  $K$  la capacidad de carga. Reescribimos la ecuación para identificar estos parámetros:

$$\frac{dC}{dt} = C \left(1 - \frac{C}{2000}\right),$$

por lo que  $r = 1$  y  $K = 2000$ . La condición inicial es  $C(0) = 1$ .

Esta es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables. El objetivo es agrupar todos los términos que dependen de  $C$  en un lado de la igualdad (con  $dC$ ) y los que dependen de  $t$  en el otro (con  $dt$ ).

Para facilitar la integración, reescribimos el término entre paréntesis usando fracciones comunes. Sabemos que  $0.0005 = \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}$ .

$$\frac{dC}{dt} = C \left( 1 - \frac{C}{2000} \right) = C \left( \frac{2000 - C}{2000} \right)$$

Por lo tanto:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C(2000 - C)}{2000}.$$

Pasamos los términos con  $C$  al lado izquierdo y el diferencial  $dt$  al lado derecho:

$$\frac{2000}{C(2000 - C)} dC = dt.$$

Integramos ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{2000}{C(2000 - C)} dC = \int dt.$$

Para resolver la integral de la izquierda, descomponemos la fracción en suma de fracciones parciales:

$$\frac{2000}{C(2000 - C)} = \frac{A}{C} + \frac{B}{2000 - C}.$$

Multiplicando todo por el denominador común  $C(2000 - C)$ :

$$2000 = A(2000 - C) + B(C).$$

Para hallar los coeficientes  $A$  y  $B$ , evaluamos en las raíces:

- Si  $C = 0$ :

$$2000 = A(2000) \implies A = 1.$$

- Si  $C = 2000$ :

$$2000 = B(2000) \implies B = 1.$$

Por lo tanto, la integral se reescribe como:

$$\int \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{2000 - C} \right) dC = \int dt.$$

Integrando término a término:

$$\ln |C| - \ln |2000 - C| = t + C_1.$$

Utilizamos las propiedades de los logaritmos ( $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ ):

$$\ln \left| \frac{C}{2000 - C} \right| = t + C_1.$$

Aplicamos la función exponencial a ambos lados para eliminar el logaritmo natural:

$$\frac{C}{2000 - C} = e^{t+C_1} = e^{C_1} \cdot e^t.$$

Renombramos la constante arbitraria  $e^{C_1}$  como  $K_0$ :

$$\frac{C}{2000 - C} = K_0 e^t.$$

Ahora realizamos el álgebra para despejar  $C$ :

$$\begin{aligned} C &= (2000 - C)K_0 e^t, \\ C &= 2000K_0 e^t - CK_0 e^t, \\ C + CK_0 e^t &= 2000K_0 e^t, \\ C(1 + K_0 e^t) &= 2000K_0 e^t, \\ C(t) &= \frac{2000K_0 e^t}{1 + K_0 e^t}. \end{aligned}$$

Para obtener la forma estándar (logística), dividimos numerador y denominador por  $K_0 e^t$ :

$$C(t) = \frac{2000}{\frac{1}{K_0 e^t} + 1} = \frac{2000}{1 + \frac{1}{K_0} e^{-t}}$$

Finalmente, definimos una nueva constante  $A = \frac{1}{K_0}$ , obteniendo la solución general de la ecuación logística:

$$C(t) = \frac{K}{1 + A e^{-rt}},$$

donde  $A$  se determina con la condición inicial:

$$C(0) = \frac{K}{1 + A} \implies A = \frac{K - C_0}{C_0} = \frac{2000 - 1}{1} = 1999.$$

Así, la solución particular es:

$$C(t) = \frac{2000}{1 + 1999e^{-t}}.$$

Para  $t = 10$ :

$$C(10) = \frac{2000}{1 + 1999e^{-10}}.$$

Como  $e^{-10} \approx 0.000045399$ , tenemos:

$$C(10) \approx \frac{2000}{1 + 0.090753} \approx \frac{2000}{1.090753} \approx 1833.58.$$

Por lo tanto, habrá aproximadamente 1834 supermercados.

Finalmente, calculamos el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \frac{2000}{1 + 1999 \cdot 0} = 2000.$$

**Conclusión:** Cuando  $t = 10$ , habrá aproximadamente 1834 supermercados usando el sistema, y a largo plazo el número se estabilizará en 2000.  $\square$

### 5.4.3. Modelado de Proceso Industrial (Volumen Variable)

**Enunciado:** En un tanque que inicialmente contiene 100 L de agua pura, entra una solución de salmuera con una concentración de 3 kg/L a un flujo de 2 L/min. La mezcla se mantiene agitada y sale del tanque a razón de 1 L/min. La ecuación diferencial que modela la cantidad de sal  $A(t)$  es:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100 + t} = 6.$$

Encuentre la solución  $A(t)$ .

*Solución:* Debemos resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{100 + t}A = 6,$$

con la condición inicial  $A(0) = 0$  (agua pura).

Identificamos que la ecuación está en la forma estándar:

$$\frac{dA}{dt} + P(t)A = Q(t),$$

donde  $P(t) = \frac{1}{100 + t}$  y  $Q(t) = 6$ .

Aplicamos la fórmula de la solución general para ecuaciones lineales:

$$A(t) = e^{-\int P(t) dt} \left( C + \int Q(t)e^{\int P(t) dt} dt \right).$$

Calculamos la integral del exponente:

$$\int P(t) dt = \int \frac{1}{100 + t} dt = \ln(100 + t).$$

Por tanto, el factor integrante es  $e^{\ln(100+t)} = 100 + t$ .

Sustituyendo en la fórmula general:

$$A(t) = \frac{1}{100+t} \left( C + \int 6(100+t) dt \right).$$

Resolviendo la integral:

$$\int (600 + 6t) dt = 600t + 3t^2.$$

Despejamos  $A(t)$ :

$$A(t) = \frac{3t^2 + 600t + C}{100+t}.$$

Aplicamos la condición inicial  $A(0) = 0$ :

$$0 = \frac{3(0)^2 + 600(0) + C}{100+0} \implies 0 = \frac{C}{100} \implies C = 0.$$

Finalmente, la solución particular es:

$$A(t) = \frac{3t^2 + 600t}{100+t}.$$

□

#### 5.4.4. Circuito RL en Serie

**Enunciado:** La ecuación diferencial para la corriente  $i(t)$  en un circuito RL en serie es:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t),$$

donde  $L$  (inductancia) y  $R$  (resistencia) son constantes. Un generador cuya fuerza electromotriz (EMF) es de 100 voltios se conecta en serie con una resistencia de  $10 \Omega$  y una inductancia de 2 henrios. Si el interruptor se cierra cuando  $t = 0$ , halle la intensidad de la corriente  $i(t)$  en función del tiempo.

*Solución:* Partimos de la ecuación:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t).$$

Con los datos  $L = 2$ ,  $R = 10$  y  $E(t) = 100$ , la ecuación se convierte en:

$$2 \frac{di}{dt} + 10i = 100.$$

Dividimos entre 2 para obtener la forma estándar:

$$\frac{di}{dt} + 5i = 50, \quad i(0) = 0.$$

Esta es una ecuación lineal de primer orden  $i' + p(t)i = q(t)$ , con  $p(t) = 5$  y  $q(t) = 50$ . Aplicamos la fórmula directa:

$$i(t) = e^{-\int 5 dt} \left( C + \int 50e^{\int 5 dt} dt \right).$$

Calculamos  $\int 5 dt = 5t$ . Sustituyendo:

$$i(t) = e^{-5t} \left( C + \int 50e^{5t} dt \right).$$

Resolviendo la integral:

$$\int 50e^{5t} dt = 50 \frac{e^{5t}}{5} = 10e^{5t}.$$

La solución general es:

$$i(t) = e^{-5t}(C + 10e^{5t}) = Ce^{-5t} + 10.$$

Integramos ambos lados:

$$i(t)e^{5t} = \int 50e^{5t} dt = 10e^{5t} + C.$$

Por tanto:

$$i(t) = 10 + Ce^{-5t}.$$

Aplicamos la condición inicial  $i(0) = 0$ :

$$0 = 10 + C \implies C = -10.$$

Finalmente, la solución particular es:

$$i(t) = 10 - 10e^{-5t}.$$

La corriente  $i(t)$  está en amperios (A). □

### 5.4.5. Interés Simple vs. Interés Compuesto Continuo

**Enunciado:** Un inversor dispone de un capital inicial de  $P_0 = 10,000$  euros y desea depositarlo en un fondo durante un tiempo  $t$  (en años). Se le presentan dos opciones de inversión, ambas con una tasa de interés anual del  $r = 5\%$  ( $r = 0.05$ ).

1. **Opción A (Modelo de Interés Simple):** La tasa de crecimiento del capital es constante y proporcional únicamente a la inversión inicial original  $P_0$ .
2. **Opción B (Modelo de Interés Compuesto Continuo):** La tasa de crecimiento del capital es proporcional a la cantidad acumulada en el fondo en cada instante  $t$ .

**Tareas:**

1. Plantee la ecuación diferencial que modela cada opción.
2. Resuelva las ecuaciones para encontrar las funciones del capital  $A(t)$  y  $B(t)$  para cada opción.
3. Calcule el monto acumulado en ambas opciones después de  $t = 20$  años.

*Solución:*

#### 1. Opción A: Interés Simple

En el interés simple, el dinero generado por intereses no se suma al capital para generar nuevos intereses. Por lo tanto, la velocidad a la que crece el dinero ( $\frac{dA}{dt}$ ) es constante y depende solo del principal inicial  $P_0$ .

**Planteamiento:**

$$\frac{dA}{dt} = rP_0, \quad (5.1)$$

sujeto a la condición inicial  $A(0) = P_0$ .

**Resolución:** Integramos ambos lados respecto a  $t$ :

$$\begin{aligned} \int dA &= \int rP_0 dt, \\ A(t) &= rP_0t + C. \end{aligned}$$

Aplicamos la condición inicial  $A(0) = P_0$ :

$$P_0 = rP_0(0) + C \implies C = P_0.$$

Por lo tanto, la función de capital para interés simple es una función lineal:

$$A(t) = P_0(1 + rt). \quad (5.2)$$

## 2. Opción B: Interés Compuesto Continuo

En el interés compuesto continuo, los intereses se suman al capital instantáneamente. La velocidad de crecimiento ( $\frac{dB}{dt}$ ) es proporcional al monto actual acumulado  $B(t)$ .

**Planteamiento:**

$$\frac{dB}{dt} = rB(t), \quad (5.3)$$

sujeto a la condición inicial  $B(0) = P_0$ .

**Resolución:** Esta es una ecuación diferencial de variables separables:

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} dB &= r dt, \\ \int \frac{1}{B} dB &= \int r dt, \\ \ln |B| &= rt + C_1. \end{aligned}$$

Despejamos  $B$  aplicando la función exponencial:

$$B(t) = e^{rt+C_1} = e^{rt} e^{C_1}.$$

Llamamos  $C = e^{C_1}$ . Aplicamos la condición inicial  $B(0) = P_0$ :

$$P_0 = C e^{r(0)} \implies C = P_0$$

Por lo tanto, la función de capital para interés compuesto es una función exponencial:

$$B(t) = P_0 e^{rt}. \quad (5.4)$$

## 3. Comparación Numérica ( $t = 20$ años)

Datos:  $P_0 = 10,000$ ,  $r = 0.05$ ,  $t = 20$ .

**Cálculo Opción A (Lineal):**

$$A(20) = 10,000(1 + 0.05 \times 20) = 20,000 \text{ €}.$$

**Cálculo Opción B (Exponencial):**

$$B(20) = 10,000 \cdot e^{0.05 \times 20} = 27,182.80 \text{ €}.$$

## Conclusión

Aunque ambas opciones comienzan con la misma tasa de interés nominal, la naturaleza exponencial de la ecuación diferencial del interés compuesto ( $\frac{dB}{dt} = rB$ ) genera un crecimiento mucho más acelerado a largo plazo que el crecimiento lineal del interés simple ( $\frac{dA}{dt} = \text{cte}$ ).

En 20 años, la diferencia es de 7,182.80 euros a favor del interés compuesto.  $\square$

### 5.4.6. Modelo de farmacocinética de un compartimento

Se quiere modelar la concentración  $C(t)$  de un fármaco en sangre mediante un modelo de un compartimento. Se supone que el cuerpo se comporta como un depósito bien mezclado y que el fármaco se elimina con una cinética de primer orden: la velocidad de eliminación es proporcional a la concentración. Un modelo clásico de farmacocinética de un compartimento es:

$$\frac{dC}{dt} = -k C(t),$$

donde  $k > 0$  es la constante de eliminación.

Trabajaremos con los valores:

$$k = \ln 2, \quad C(0) = C_0 = 16.$$

1. Resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = -k C(t), \quad C(0) = C_0,$$

de forma general, para  $k > 0$  y  $C_0$  arbitrarios.

2. Aplica el resultado anterior al caso concreto  $k = \ln 2$  y  $C_0 = 16$ , y simplifica la solución lo máximo posible:

$$C(t) = 16 e^{-(\ln 2)t}.$$

Escribe la solución en forma de potencias de 2.

3. Calcula, sin calculadora, los valores:

$$C(1), \quad C(2), \quad C(3), \quad C(4).$$

(Pista: usa que  $e^{\ln 2} = 2$ .)

4. La *vida media*  $t_{1/2}$  de un fármaco se define como el tiempo que tarda la concentración en reducirse a la mitad de su valor inicial. Es decir,  $t_{1/2}$  satisface

$$C(t_{1/2}) = \frac{C_0}{2}.$$

- a) Demuestra, a partir de la solución general, que

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}.$$

- b) Comprueba que, con  $k = \ln 2$ , se obtiene  $t_{1/2} = 1$  (en las mismas unidades de tiempo que  $t$ ).

5. Supón que se desea mantener la concentración entre 2 y 16 (un rango “terapéutico” idealizado). Usando la expresión

$$C(t) = 16 \cdot 2^{-t},$$

discute, sin calculadora, durante cuánto tiempo (aproximadamente) se mantiene  $C(t) \geq 2$ .

**Solución: 1. Solución general de la ecuación diferencial**

La ecuación es de variables separables:

$$\frac{dC}{C} = -k dt.$$

Integrando ambos lados:

$$\int \frac{1}{C} dC = \int -k dt \implies \ln|C| = -kt + K.$$

Despejando  $C$  (asumiendo  $C > 0$ ):

$$C(t) = e^{-kt+K} = e^K e^{-kt} = C_0 e^{-kt}.$$

Donde  $C_0$  es la concentración en  $t = 0$ . Solución general:  $C(t) = C_0 e^{-kt}$ .

**2. Aplicación al caso concreto**

Sustituimos  $k = \ln 2$  y  $C_0 = 16$ :

$$C(t) = 16 e^{-(\ln 2)t}.$$

Simplificamos la exponencial usando la propiedad  $e^{a \ln b} = b^a$ :

$$e^{-(\ln 2)t} = (e^{\ln 2})^{-t} = 2^{-t}.$$

Por tanto, la solución en potencias de 2 es:

$$C(t) = 16 \cdot 2^{-t} = 2^4 \cdot 2^{-t} = 2^{4-t}.$$

**3. Cálculo de valores**

Usando la fórmula simplificada  $C(t) = 2^{4-t}$ :

- $C(1) = 2^{4-1} = 2^3 = 8$ .
- $C(2) = 2^{4-2} = 2^2 = 4$ .
- $C(3) = 2^{4-3} = 2^1 = 2$ .
- $C(4) = 2^{4-4} = 2^0 = 1$ .

#### 4. Vida media $t_{1/2}$

(a) Partiendo de la condición  $C(t_{1/2}) = \frac{C_0}{2}$  y la solución general  $C(t) = C_0 e^{-kt}$ :

$$C_0 e^{-kt_{1/2}} = \frac{C_0}{2}.$$

Dividimos por  $C_0$ :

$$e^{-kt_{1/2}} = \frac{1}{2}.$$

Tomamos logaritmos naturales:

$$-kt_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \implies t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}.$$

(b) Comprobación para  $k = \ln 2$ :

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1.$$

Esto coincide con los cálculos del apartado 3, donde vemos que la concentración se reduce a la mitad cada 1 unidad de tiempo ( $16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \dots$ ).

#### 5. Rango terapéutico

Queremos mantener  $C(t) \geq 2$  partiendo de  $C_0 = 16$ . Usamos la expresión simplificada:

$$2^{4-t} \geq 2^1.$$

Igualando los exponentes (dado que la base 2 es mayor que 1, la desigualdad se mantiene):

$$4 - t \geq 1,$$

$$3 \geq t \quad \text{o bien} \quad t \leq 3.$$

**Conclusión:** El fármaco se mantiene dentro del rango terapéutico (por encima de 2) durante **3 unidades de tiempo**.  $\square$

## Problemas

1. Comprobar que  $e^{-y} - Cx = 1$  es la solución general de la E.D.O.  $xy' + 1 = e^y$ .
2.  $y' = 2y$  sol.:  $y = Ce^{2x}$
3.  $2y + 3xy' = 0$  sol.:  $y^3 x^2 = C$
4.  $x(x-1)dy + y(y-1)dx = 0$  sol.:  $(x-1)(y-1) = Cxy$
5.  $x(y-1)dy = ydx$  sol.:  $Cxy = e^y$
6.  $-x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$  sol.:  $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$

7.  $\operatorname{tg} y' = 0$  sol.:  $y = K\pi x + C$ ,  $K \in \mathbb{Z}$
8.  $e^{y'} = x$  sol.:  $y = x(\ln x - 1) + C$
9.  $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$  sol.:  $y = x \operatorname{sen}(\ln|x| + C)$
10.  $-4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$  sol.:  $y^2 - 3xy + 2x^2 = C$
11.  $-(2x - y + 2)dx + (4x - 2y - 1)dy = 0$  sol.:  $C(2x - y) = e^{-x-2y}$
12.  $-(3x + 4y + 1)dy + (2x + 3y + 1)dx = 0$  sol.:  $x^2 + 2y^2 + 3xy + x + y = C$
13.  $-(x + y)y' = 2y - 1$  sol.:  $C(y - x - 1)^2 = 2y - 1$
14.  $-y' = y + 2 - 2x$  sol.:  $y = 2x + Ce^x$
15.  $-y' \cos x + y \operatorname{sen} x = 1$  sol.:  $y = C \cos x + \operatorname{sen} x$
16.  $-(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$  sol.:  $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$
17.  $-y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy = 0$  sol.:  $y^2 = \frac{xe^x}{C+6e^x}$
18.  $-y' + y = y^2e^x$  sol.:  $y = (C - x)^{-1}e^{-x}$
19.  $-3y'y^2 - y^3 = x$  sol.:  $y^3 = Ce^x - 1 - x$
20.  $-(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$  sol.:  $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$
21.  $\left(x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{y}\right)dx + \left(y - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y^2}\right)dy = 0$  sol.:  $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = C$
22.  $4(y')^2 - 9x = 0$  sol.:  $(y - C)^2 = x^3$
23.  $-(y')^2 - (2x + y)y' + (x^2 + xy) = 0$  sol.:  $y = Ce^x - 1 - x$ ,  $y = \frac{x^2}{2} + C$
24.  $x = \ln y' + \operatorname{sen} y'$  sol.:  $\begin{cases} x = \ln p + \operatorname{sen} p \\ y = p + p \operatorname{sen} p + \cos p + C \end{cases}$
25.  $y = xy' + (y')^2$  sol.:  $y = Cx + C^2$ ;  $y = -\frac{x^2}{4}$
26. Hallar la solución particular de la ecuación  $y' = y \operatorname{tg} x + 3e^{-\operatorname{sen} x}$  que verifica  $y(0) = 2$  sol.:  $y \cos x = 5 - 3e^{-\operatorname{sen} x}$
27.  $x \operatorname{sen} y dx + (x^2 + 1) \cos y dy = 0$ ,  $y(1) = \frac{\pi}{2}$  sol.:  $(x^2 + 1) \operatorname{sen}^2 y = 2$
28.  $(2x \cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y)dy = 0$  sol.:  $x^2 \cos y + x^3y - \frac{y^2}{2} = k$
29.  $y' + y = y^2e^x$  sol.:  $y = \frac{e^{-x}}{C - x}$

30.  $(x + y) dx + x dy = 0$  sol.:  $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$
31.  $(y')^2 - (2y + 1)y' + 2y = 0$  sol.:  $y_1 = x + c_1, y_2 = c_2 e^{2x}$
32.  $y' = \frac{x-1}{x^2} - \frac{2}{x}y$  sol.:  $y = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$
33.  $ay' + by = ke^{-\lambda x}$ , con  $a, b, k, \lambda \in \mathbb{R}$  sol.:  $y = Ce^{-\frac{b}{a}x} + \frac{k}{b - \lambda a}e^{-\lambda x}$
34.  $(2xy + 3x^2) dx + x^2 dy = 0, y(1) = 0$  sol.:  $y = \frac{1}{x^2} - x$
35.  $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^3$  sol.:  $y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}$
36.  $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x}, y(1) = 0$  sol.:  $y = \frac{e^{-1} - e^{-x}}{x}$
37.  $xy' + y = x^4 y^3$  sol.:  $y^2 = \frac{1}{Cx^2 - x^4}$
38.  $\frac{dy}{dx} - 2x^3 = 1, y(0) = 0$  sol.:  $y = \frac{x^4}{2} + x$
39.  $(2x - 1)dx + (3y + 5)dy = 0$  sol.:  $x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 5y = C$
40.  $y' + 2y = 1, y(0) = 4$  sol.:  $y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}e^{-2x}$
41.  $3 \frac{dy}{dx} + 12y = 4$  sol.:  $y = \frac{1}{3} + Ce^{-4x}$
42.  $\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x + 3$  sol.:  $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C$
43.  $(2x + y)dx + (x + 6y)dy = 0$  sol.:  $x^2 + xy + 3y^2 = C$
44.  $y' + y = e^{4x}$  sol.:  $y = \frac{1}{5}e^{4x} + Ce^{-x}$
45.  $y dy = 4x(y^2 + 1)^{1/2} dx, y(0) = 1$  sol.:  $\sqrt{y^2 + 1} = 2x^2 + \sqrt{2}$
46.  $(1 + e^x)y y' = e^x, y(0) = 1, y = \sqrt{\ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right)^2 + 1}$
47.  $xy' + y = x^4 y^3$  sol.:  $y^2 = \frac{1}{Cx^2 - x^4}$

# Capítulo 6

## Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior

### 6.1. Conceptos básicos

**Definición 6.1.1.** Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden  $n$  es una ecuación de la forma:

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = g(x),$$

donde suponemos que  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  y  $g(x)$  son funciones reales continuas en un intervalo  $[a, b]$ .

Si  $g(x) = 0$ , la ecuación se denomina **homogénea**. En caso contrario, se dice que es **no homogénea** o **completa**.

Si las funciones  $f_i(x)$  son constantes, es decir,  $f_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces la ecuación:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = g(x),$$

es una E.D.O. lineal de orden  $n$  con **coeficientes constantes**.

**Observación.** Consideramos  $n > 1$ .

**Ejemplo.** Ejemplos de E.D.O. lineales:

- $y'' + x^2y' + 5y = \ln x$  es una E.D.O. lineal de orden 2.
- $y''' - 3e^xy'' - x^3y = 0$  es una E.D.O. lineal homogénea de orden 3.
- $y^{(4)} - 3y''' + 5y'' + 8y' + 6y = \cos x$  es una E.D.O. lineal de orden 4 con coeficientes constantes.

**Teorema 6.1.1** (Teorema de existencia y unicidad). Sea el problema de valor inicial (o problema de Cauchy):

$$\begin{cases} y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$  y  $g(x)$  son continuas en un intervalo  $I = [a, b]$ , con  $x_0 \in I$ , entonces existe una única solución  $y(x)$  del problema de valor inicial en  $I$ .

## 6.2. E.D.O. lineales homogéneas de orden superior

**Definición 6.2.1.** Las funciones  $h_1(x), h_2(x), \dots, h_k(x)$  son **linealmente independientes** en  $[a, b]$  si la igualdad:

$$\lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x) + \cdots + \lambda_k h_k(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in [a, b]$$

se cumple únicamente cuando  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ . Si no se cumple esta condición, se dice que son **linealmente dependientes**.

**Teorema 6.2.1.** El conjunto de soluciones de la ecuación lineal homogénea:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Si  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  son soluciones linealmente independientes, entonces la solución general es:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

**Ejemplo.** Sea la E.D.O. lineal  $y'' - 4y = 0$ . Comprobar que  $y_1(x) = e^{2x}$  y  $y_2(x) = e^{-2x}$  son soluciones linealmente independientes y dar la solución general.

*Solución:* Comprobamos primero que  $y_1(x) = e^{2x}$  es solución. Calculamos sus derivadas:

$$y_1' = 2e^{2x}, \quad y_1'' = 4e^{2x}.$$

Sustituimos en la ecuación:

$$y_1'' - 4y_1 = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0.$$

Por tanto,  $y_1$  es solución.

Para  $y_2(x) = e^{-2x}$ :

$$y_2' = -2e^{-2x}, \quad y_2'' = 4e^{-2x}.$$

Sustituimos:

$$y_2'' - 4y_2 = 4e^{-2x} - 4e^{-2x} = 0.$$

También es solución.

Como la ecuación es de orden 2 y hemos encontrado dos soluciones linealmente independientes, la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

□

### 6.3. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

**Definición 6.3.1.** Sea la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (\text{I}).$$

Su ecuación característica asociada es:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

**Ejercicio.** La función  $y(x) = e^{\lambda x}$  es solución de (I) si y solo si  $\lambda$  es raíz de la ecuación característica.

**Teorema 6.3.1.** Sea la ecuación diferencial:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0.$$

a) Si  $\lambda$  es una raíz real con multiplicidad  $k$ , las funciones:

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x}, \dots, y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}$$

son  $k$  soluciones linealmente independientes.

b) Si  $\lambda_1 = a + bi$  y  $\lambda_2 = a - bi$  son raíces complejas conjugadas, las soluciones reales son:

$$e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx),$$

y sus multiplicidades generan términos adicionales con potencias de  $x$ .

**Observación.** Si tenemos dos raíces distintas de la ecuación característica, las soluciones correspondientes de la ecuación diferencial son linealmente independientes. Como la ecuación característica tiene  $n$  raíces (reales o complejas), contando cada una tantas veces como su multiplicidad, podremos obtener  $n$  soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , y la solución general será combinación lineal de ellas:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x).$$

**Ejemplo.** Hallar la solución general de la ecuación  $y'' - y = 0$ .

*Solución:* La ecuación característica es:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1.$$

Por tanto, la solución general es:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

□

**Ejemplo.** Hallar la solución general de la ecuación  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .

*Solución:* La ecuación característica es:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies \lambda = 2 \text{ (raíz doble).}$$

La solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

□

**Ejemplo.** Hallar la solución general de la ecuación  $y'' - 2y' + 5y = 0$ .

*Solución:* La ecuación característica es:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = 1 \pm 2i.$$

Por tanto, la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^x \cos(2x) + C_2 e^x \sin(2x).$$

□

## 6.4. E.D.O. lineales completas de orden superior

Dada la ecuación lineal completa:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x),$$

su ecuación homogénea asociada es:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0.$$

**Teorema 6.4.1** (Principio de superposición). Si  $y_{P1}(x)$  e  $y_{P2}(x)$  son soluciones particulares de las ecuaciones:

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = g_1(x),$$

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = g_2(x),$$

entonces  $y_{P1}(x) + y_{P2}(x)$  es solución de:

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = g_1(x) + g_2(x).$$

**Teorema 6.4.2.** La solución general de la ecuación:

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = g(x)$$

se expresa como:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x),$$

donde  $y_H(x)$  es la solución general de la homogénea asociada e  $y_P(x)$  una solución particular de la completa.

### 6.4.1. Método de variación de las constantes

Dada la ecuación:

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_n(x)y = g(x),$$

si conocemos  $n$  soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , su solución general es:

$$y_H(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Ahora se busca una solución particular de la completa de la forma

$$y_P(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

y se llega a que  $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$  son funciones que verifican el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \dots + c_n'(x)y_n(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \dots + c_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = g(x) \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema obtenemos  $c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_n'(x)$  e integrando  $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ .

**Ejemplo.** Hallar la solución general de la ecuación:

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

*Solución:* Primero resolvemos la homogénea:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -1 \text{ (raíz doble)}.$$

Por tanto:

$$y_H(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}.$$

Para la completa, aplicamos variación de constantes:

$$y_P(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)xe^{-x}.$$

Imponemos condiciones para obtener  $c_1'(x)$  y  $c_2'(x)$ :

$$\begin{cases} c_1'e^{-x} + c_2'xe^{-x} = 0, \\ -c_1'e^{-x} + c_2'(e^{-x} - xe^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x}. \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} c_1' + xc_2' = 0, \\ -c_1' + (1-x)c_2' = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$c_2' = \frac{1}{x} \implies c_2(x) = \ln|x|.$$

Luego:

$$c_1' = -xc_2' = -1 \implies c_1(x) = -x.$$

Así:

$$y_P(x) = (-x)e^{-x} + (\ln|x|)xe^{-x}.$$

La solución general es:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + (\ln|x|)xe^{-x}.$$

Notar que el término de la particular  $(-x)e^{-x}$  no se añade ya que está contenido en la homogénea (y al sustituirlo en la ecuación diferencial dará cero).  $\square$

## 6.4.2. Método de los coeficientes indeterminados

Dada la ecuación:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = g(x),$$

de coeficientes constantes, para algunas funciones  $g(x)$  podemos calcular una solución particular mediante el **método de los coeficientes indeterminados**:

a) Si  $g(x) = e^{ax}P_m(x)$ , una solución particular es de la forma:

$$y_P(x) = x^k e^{ax} \tilde{P}_m(x),$$

donde  $\tilde{P}_m(x)$  es un polinomio de grado  $m$  y  $k$  es la multiplicidad de  $a$  como raíz de la ecuación característica (si  $a$  no es raíz,  $k = 0$ ). Si  $g(x) = P_m(x)$ , entonces  $a = 0$  y la solución particular es:

$$y_P(x) = x^k \tilde{P}_m(x).$$

b) Si  $g(x) = e^{ax}(P_m(x) \cos(bx) + Q_n(x) \sin(bx))$ , una solución particular es:

$$y_P(x) = x^k e^{ax} (\tilde{P}_r(x) \cos(bx) + \tilde{Q}_r(x) \sin(bx)),$$

donde  $\tilde{P}_r(x)$  y  $\tilde{Q}_r(x)$  son polinomios de grado  $r = \max\{m, n\}$  y  $k$  es la multiplicidad de  $a \pm bi$  como raíces de la ecuación característica (si no son raíces,  $k = 0$ ).

**Ejemplo.** Hallar la solución general de la ecuación:

$$y'' - y = e^x.$$

*Solución:* Primero resolvemos la homogénea:

$$y'' - y = 0 \implies \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1.$$

Por tanto:

$$y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Para la completa, como  $g(x) = e^x$  y 1 es raíz simple de la ecuación característica, la solución particular es:

$$y_P(x) = A x e^x.$$

Calculamos derivadas:

$$y'_P(x) = A(x+1)e^x, \quad y''_P(x) = A(x+2)e^x.$$

Sustituimos en la ecuación:

$$A(x+2)e^x - A x e^x = e^x \implies 2A e^x = e^x \implies A = \frac{1}{2}.$$

Por tanto:

$$y_P(x) = \frac{1}{2} x e^x.$$

La solución general es:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x.$$

□

### 6.4.3. Ecuación de Euler

Una ecuación de Euler tiene la forma:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = g(x).$$

Con el cambio  $x = e^t$  (considerando  $x > 0$ ), se transforma en una ecuación lineal con coeficientes constantes.

**Ejemplo.** Hallar la solución general de:

$$x^2 y'' - 2x y' + 2y = x^3.$$

*Solución:* Hacemos el cambio  $x = e^t$ , con  $t = \ln x$ . Calculamos derivadas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right).$$

Sustituimos en la ecuación:

$$x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) - 2x \cdot \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t},$$

lo que se reduce a:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}.$$

Resolviendo la homogénea:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = 1, 2.$$

Por tanto:

$$y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Para la completa, proponemos:

$$y_P(t) = Ae^{3t} \implies y'_P(t) = 3Ae^{3t}, \quad y''_P(t) = 9Ae^{3t}.$$

Sustituimos:

$$9Ae^{3t} - 9Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = e^{3t} \implies 2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}.$$

Por tanto:

$$y_P(t) = \frac{1}{2} e^{3t}.$$

La solución general en  $t$  es:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}.$$

Deshaciendo el cambio  $t = \ln x$ :

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3.$$

□

## 6.5. Aplicación: flexión de una viga

Como modelo básico de ingeniería estructural, la ecuación diferencial de la deflexión de una viga se utiliza para describir la flexión de una viga bajo una carga aplicada [3].

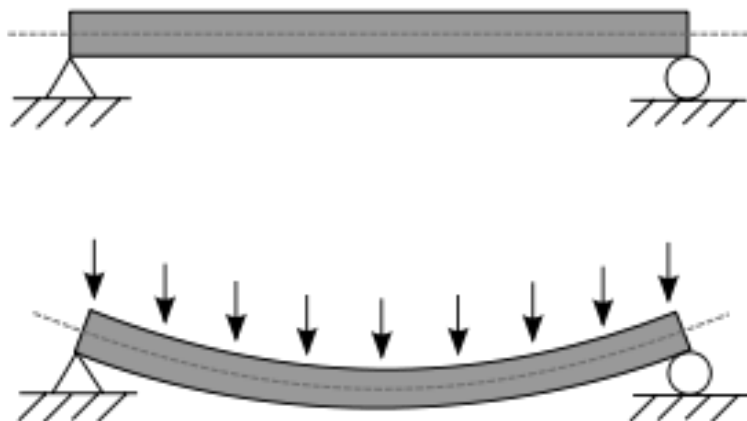


Figura 6.1: Esquema de la deflexión de una viga.

La ecuación diferencial de la deflexión de una viga se puede escribir como:

$$EI \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = w(x),$$

siendo  $E$  el módulo de Young de elasticidad del material,  $I$  el momento de inercia de la sección transversal de ésta,  $w(x)$  la carga por unidad de longitud, y  $y(x)$  la flexión de la viga. El producto  $EI$  se denomina rigidez a la flexión de la viga.

El módulo de Young es una medida de la rigidez de un material elástico. Se define como la relación entre la fuerza aplicada y la deformación resultante en el material. Un material con un módulo de Young alto es más rígido y requiere más fuerza para deformarse que un material con un módulo de Young bajo. Se expresa en unidades de presión, como  $\text{N/m}^2$  o Pa.

Las condiciones en la frontera asociadas a esta ecuación dependen de la forma en que están sostenidos los extremos de la viga. En concreto, nos vamos a centrar en el ejemplo de la Fig. 6.1, en donde ambos extremos están fijos. En este sistema, la flexión  $y(x)$  debe satisfacer las dos condiciones siguientes:

- $y(0) = 0$  y  $y(L) = 0$ , porque no hay flexión en ese lugar.
- $y'(0) = 0$  y  $y'(L) = 0$ , porque la curva de deflexión es tangente al eje  $x$  (o, en otras palabras, la pendiente de la curva de flexión es nula en ese punto, ya que es un máximo).

Como ejemplo sencillo, consideremos el caso en el que la carga es uniforme en toda la viga, es decir,  $w(x) = w_0$  para  $0 < x < L$ . La ecuación diferencial a resolver es

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{w_0}{EI},$$

a la que posteriormente añadiremos las condiciones de contorno. Primero resolvemos la ecuación homogénea

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = 0,$$

de donde obtenemos

$$y_H(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3.$$

Encontrar una solución particular es fácil en este caso, ya que la derivada cuarta debe dar el término  $w_0/EI$ , por lo que

$$y_p(x) = \frac{w_0}{24EI} x^4,$$

quedando la solución completa

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + \frac{w_0}{24EI} x^4.$$

Por último, tenemos que aplicar las condiciones de contorno. De  $y(0) = 0$  y  $y'(0) = 0$  vemos fácilmente que  $c_1 = c_2 = 0$ , respectivamente. Con las otras condiciones,  $y(L) = 0$  y  $y'(L) = 0$ , obtenemos,

$$c_3 L^2 + c_4 L^3 + \frac{w_0}{24EI} L^4 = 0, \quad 2c_3 L + 3c_4 L^2 + \frac{w_0}{6EI} L^3 = 0.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para las constantes obtenemos finalmente

$$y(x) = \frac{w_0 L^2}{24EI} x^2 - \frac{w_0}{12EI} x^3 + \frac{w_0}{24EI} x^4 = \frac{w_0}{24EI} x^2 (x - L)^2.$$

## 6.6. Problemas aplicados

### 6.6.1. Movimiento del Péndulo Simple

**Enunciado:** Determinar el ángulo de desplazamiento  $\theta(t)$  de un péndulo simple de longitud  $l$  y masa  $m$ , considerando las fuerzas que actúan sobre la masa suspendida.

#### Planteamiento Físico y Modelo Diferencial No Lineal

Considere una masa  $m$  suspendida de una varilla inextensible o alambre de longitud  $l$ , oscilando en un plano vertical. Sea  $\theta$  el ángulo de desplazamiento medido respecto a la vertical, tomado como positivo hacia la derecha.

Aplicando la Segunda Ley de Newton ( $\sum F = ma$ ), la fuerza tangencial a la trayectoria es la componente del peso,  $mg \sin(\theta)$ , dirigida en sentido opuesto al desplazamiento positivo de  $\theta$ . La aceleración tangencial es  $a_t = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , por lo que la ecuación de movimiento resulta:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin(\theta) \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0.$$

**Nota:** Esta ecuación es no lineal y no se puede resolver en términos de funciones elementales. Por ello, se suele recurrir a su linealización para pequeñas oscilaciones.

### Linealización (Aproximación para Pequeñas Oscilaciones)

Si los desplazamientos angulares  $\theta$  son pequeños, se puede aproximar  $\sin(\theta) \approx \theta$  (radianes), obteniendo la ecuación lineal:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}.$$

### Solución del Problema de Valor Inicial (PVI)

**Datos:**

- $l = 2.45$  m
- $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>
- $\theta(0) = 10^\circ$
- $\theta'(0) = -0.4$  rad/s

*Solución:*

**Paso 1: Determinar la frecuencia angular y la EDO específica**

$$\omega^2 = \frac{g}{l} = \frac{9.8}{2.45} = 4 \implies \omega = 2 \text{ rad/s},$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 4\theta = 0.$$

**Paso 2: Solución general**

Ecuación característica:  $r^2 + 4 = 0 \implies r = \pm 2i$ . Solución general:

$$\theta(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t), \quad \theta'(t) = -2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t).$$

**Paso 3: Aplicar condiciones iniciales**

Convertimos el ángulo inicial a radianes:

$$\theta(0) = 10^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18} \text{ rad.}$$

**Posición en  $t = 0$ :**

$$\theta(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 = \frac{\pi}{18}.$$

**Velocidad en  $t = 0$ :**

$$\theta'(0) = -2c_1 \sin(0) + 2c_2 \cos(0) = 2c_2 = -0.4 \implies c_2 = -0.2.$$

**Resultado final:**

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18} \cos(2t) - 0.2 \sin(2t), \quad \text{con } \theta \text{ en radianes y } t \text{ en segundos.}$$

□

### 6.6.2. Sistema Masa-Resorte Amortiguado y Forzado

**Enunciado:** La ecuación diferencial general para un sistema masa-resorte amortiguado y forzado es:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F(t).$$

En este caso:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 64x = 128 \cos(8t),$$

con condiciones iniciales  $x(0) = \frac{1}{3}$ ,  $x'(0) = 0$ .

*Solución:* La solución general:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t).$$

**Parte homogénea:** Ecuación característica:

$$r^2 + 8r + 64 = 0 \implies r = -4 \pm 4\sqrt{3}i.$$

Por tanto:

$$x_c(t) = e^{-4t}(A \cos(4\sqrt{3}t) + B \sin(4\sqrt{3}t)).$$

**Parte particular:** Para  $128 \cos(8t)$ , se obtiene:

$$x_p(t) = 2 \sin(8t).$$

**Solución general:**

$$x(t) = e^{-4t}(A \cos(4\sqrt{3}t) + B \sin(4\sqrt{3}t)) + 2 \sin(8t).$$

Aplicando condiciones iniciales:

$$x(0) = \frac{1}{3}, \quad x'(0) = 0,$$

se obtiene:

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{11\sqrt{3}}{9}.$$

Finalmente:

$$x(t) = \frac{e^{-4t}}{9} (3 \cos(4\sqrt{3}t) - 11\sqrt{3} \sin(4\sqrt{3}t)) + 2 \sin(8t).$$

□

### 6.6.3. Modelado de Dinámica de Poblaciones Forzadas

**Enunciado:** Consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{d^3P}{dt^3} + 6\frac{d^2P}{dt^2} + 11\frac{dP}{dt} + 6P = 60,$$

con condiciones iniciales:

$$P(0) = 1010, \quad P'(0) = -2000, \quad P''(0) = 4000.$$

Calcule el tiempo mínimo  $t$  (en años) para que el componente transitorio  $P_c(t)$  sea menor al 1% del valor de estado estable.

*Solución:* La ecuación diferencial dada es lineal, no homogénea y de coeficientes constantes:

$$P''' + 6P'' + 11P' + 6P = 60.$$

**1. Solución de Estado Estable ( $P_p$ )** Buscamos una solución particular constante  $P_p(t) = A$ . Sustituyendo en la ecuación (donde las derivadas de una constante son cero):

$$0 + 6(0) + 11(0) + 6A = 60 \implies 6A = 60 \implies A = 10.$$

El valor de estado estable es  $P_{estable} = 10$ .

**2. Solución Transitoria ( $P_c$ )** Resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$P_c''' + 6P_c'' + 11P_c' + 6P_c = 0.$$

La ecuación característica es:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0.$$

Para factorizar, probamos divisores de 6. Probamos  $\lambda = -1$ :  $(-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$ . Como  $\lambda = -1$  es raíz, factorizamos (usando Ruffini o división sintética) y obtenemos:

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 5\lambda + 6) = 0 \implies (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0.$$

Las raíces son  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -3$ . La solución general es:

$$P(t) = \underbrace{c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-3t}}_{P_c(t)} + \underbrace{10}_{P_p(t)}.$$

**3. Cálculo de Constantes usando Condiciones Iniciales** Necesitamos  $P(t)$  y sus derivadas evaluadas en  $t = 0$ :

$$P(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-3t} + 10,$$

$$P'(t) = -c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t} - 3c_3e^{-3t},$$

$$P''(t) = c_1e^{-t} + 4c_2e^{-2t} + 9c_3e^{-3t}.$$

Aplicamos las condiciones iniciales:

$$1. P(0) = 1010 \implies c_1 + c_2 + c_3 + 10 = 1010 \implies c_1 + c_2 + c_3 = 1000.$$

$$2. P'(0) = -2000 \implies -c_1 - 2c_2 - 3c_3 = -2000.$$

$$3. P''(0) = 4000 \implies c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 4000.$$

Sustituyendo

$$c_1 = c_3 = 0, \quad c_2 = 1000.$$

El componente transitorio específico es:

$$P_c(t) = 0e^{-t} + 1000e^{-2t} + 0e^{-3t} = 1000e^{-2t}.$$

**4. Tiempo de Decaimiento** Buscamos  $t$  tal que  $P_c(t)$  sea menor al 1% del estado estable ( $P_{estable} = 10$ ).

$$\text{Umbral} = 0.01 \times 10 = 0.1.$$

Planteamos la desigualdad:

$$1000e^{-2t} < 0.1,$$
$$e^{-2t} < \frac{0.1}{1000} = 10^{-4}.$$

Tomamos logaritmo natural:

$$-2t < \ln(10^{-4}),$$
$$-2t < -4 \ln(10).$$

Dividimos por  $-2$  (invierte la desigualdad):

$$t > 2 \ln(10).$$

Como  $\ln(10) \approx 2.3026$ :

$$t > 4.6052.$$

El tiempo mínimo requerido es aproximadamente 4.61 años. □

## Problemas

1. Estudiar si las funciones siguientes son linealmente independientes en su dominio de definición:

a)  $\{\sin x, \cos x, \cos(2x)\}$

b)  $\{x + 1, x^2 + x, x^2 - 1\}$

c)  $\{\log_a x, \ln x^2, \ln x\}$  con  $a > 0$  y  $a \neq 1$

2. Se considera la ecuación  $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ . Indicar cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial:

- a)  $y_1(x) = x$
- b)  $y_2(x) = e^x \operatorname{sen} x \cos x$
- c)  $y_3(x) = x - e^x \cos(2x)$
- d)  $y_4(x) = xe^x$

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

3.  $y'' - 3y' + 2y = 0$
4.  $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$
5.  $y''' + 4y'' + 13y' = 0$
6.  $y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0$
7.  $y'' - 8y' + 16y = 2x - 1$
8.  $y'' - y' - 2y = e^{-x}$
9.  $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(2 \cos x + x \operatorname{sen} x)$
10.  $y''' + y' = 2 \operatorname{sen} x + e^{-3x}$
11.  $y'' - 4y = 36xe^{4x}$
12.  $y''' + y' = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$
13.  $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$
14.  $y'' + 9y = \frac{1}{4 \operatorname{sen}(3x)}$
15.  $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \ln x$
16.  $x^2 y'' + xy' + y = 0$
17.  $x^2 y'' + 6xy' + 6y = \frac{1}{x^2}$
18.  $x^3 y''' + 3x^2 y'' + 5y = 0$
19.  $(2x + 1)^3 y''' + 2(2x + 1)^2 y'' + (2x + 1)y' = 0$
20. Encontrar, para cada caso, la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes, de menor orden posible, para la cual las siguientes funciones son soluciones particulares de la misma:
  - a)  $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x}, y_3(x) = 1$
  - b)  $y_1(x) = x^2, y_2(x) = 3 \operatorname{sen} x, y_3(x) = xe^{-x} \cos(2x)$
  - c)  $y_1(x) = x^2, y_2(x) = xe^{3x}, y_3(x) = e^{-2x} \cos x$

$$d) y_1(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x}, y_2(x) = \cos x + 5$$

21. Hallar la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, de menor orden posible, para la cual las funciones  $y_1(x) = xe^x$  e  $y_2(x) = \operatorname{sen} x$  son soluciones particulares de la ecuación homogénea, y la función  $y_p(x) = x^2$  es una solución particular de la ecuación completa.
22. Resolver la ecuación diferencial  $y''(x) + y(x) = 2 \cos x$  y determinar la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 2 \cos x \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

23.  $y'' - ay = 0$

24.  $y'' + y = e^{2x}$

25.  $y'' + y = 2 \cos x$

26.  $y'' - y = \frac{1}{e^x + 1}$

27.  $y'' - y = e^x$

28.  $y'' + 4y = \frac{1}{\cos(2x)}$

29.  $y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$

30.  $y'' + 4y' + 4y = e^{-x}$

31.  $y'' - 4y' + 4y = 0$

## Soluciones

1.
  - a) Son l.i.
  - b) Son l.d.
  - c) Son l.d.
2.
  - a) Sí
  - b) Sí
  - c) Sí
  - d) No

3.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$
4.  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x$
5.  $y = c_1 + e^{-2x}(c_2 \cos(3x) + c_3 \operatorname{sen}(3x))$
6.  $y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x) \cos x + (c_4 + c_5 x) \operatorname{sen} x$
7.  $y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} + \frac{1}{8} x$
8.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{3} x e^{-x}$
9.  $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) - e^{2x} \left( \frac{1}{4} x^2 \cos x - \frac{5}{4} x \operatorname{sen} x \right)$
10.  $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} x - \frac{1}{30} e^{-3x}$
11.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + e^{4x}(3x - 2)$
12.  $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + \ln \left| \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \right| - \cos x \ln |\operatorname{sen} x| - x \operatorname{sen} x$
13.  $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} - \ln |x| e^{3x}$
14.  $y = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{12} x \cos(3x) + \frac{1}{36} \operatorname{sen}(3x) \ln |\operatorname{sen}(3x)|$
15.  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln x - \frac{3}{4} x^2 e^x$
16.  $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x)$
17.  $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \ln x$
18.  $y = \frac{c_1}{x} \cos(\ln x^2) + \frac{c_2}{x} \operatorname{sen}(\ln x^2)$
19.  $y = c_1(2x + 1) \cos(\ln \sqrt{2x + 1}) + c_2(2x + 1) \operatorname{sen}(\ln \sqrt{2x + 1}) + c_3$
20. a)  $y''' - 3y'' + 2y' = 0$   
 b)  $y^{(9)} + 4y^{(8)} + 15y^{(7)} + 24y^{(6)} + 39y^{(5)} + 20y^{(4)} + 25y''' = 0$   
 c)  $y^{(7)} - 2y^{(6)} - 10y^{(5)} + 6y^{(4)} + 45y''' = 0$   
 d)  $y^{(6)} + 3y^{(5)} + 4y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y'' + y' = 0$
21.  $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 4$
22. Solución general:  $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x$   
 Solución del problema de valores iniciales:  $y = 5 \cos x + 2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x$
23.  $y = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{a}x} + c_2 e^{-\sqrt{a}x}, & a > 0 \\ c_1 + c_2 x, & a = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{-a}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-a}x), & a < 0 \end{cases}$

$$24. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{5}e^{2x}$$

$$25. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x$$

$$26. y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \ln(e^x + 1) \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{x}{2} e^x - \frac{1}{2}$$

$$27. y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$$

$$28. y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4} \ln(\cos(2x)) \cos(2x) + \frac{x}{2} \sin(2x)$$

$$29. y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos(x) \ln(\cos x) + x \sin x$$

$$30. y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + e^{-x}$$

$$31. y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$



Si las funciones  $f_{ij}(t)$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ , son constantes (es decir,  $f_{ij}(t) = a_{ij} \in \mathbb{R}$ ), entonces el sistema es un S.E.D.O. lineal con coeficientes constantes.

**Ejemplo.** El sistema

$$\begin{cases} x' = 2tx + t^2y + \operatorname{sen} t, \\ y' = 3x + (\cos t)y + e^t, \end{cases}$$

es un S.E.D.O. lineal completo de primer orden en forma canónica, con variable independiente  $t$  y funciones desconocidas  $x(t)$  e  $y(t)$ .

**Ejemplo.** Una solución del sistema

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 2y, \end{cases}$$

es

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}, \\ y(t) = -e^{-t}. \end{cases}$$

Cualquier S.E.D.O. puede escribirse como un sistema de primer orden, es decir, un sistema en el que solo intervienen derivadas primeras.

**Ejemplo.** Dado el sistema

$$\begin{cases} x'' + tx' + 2y = t^3 + 1, \\ y'' + tx' = \operatorname{sen}(2t), \end{cases}$$

definiendo  $z = x'$  y  $v = y'$ , se obtiene el sistema de primer orden

$$\begin{cases} x' = z, \\ y' = v, \\ z' + tz + 2y = t^3 + 1, \\ v' + tz = \operatorname{sen}(2t). \end{cases}$$

A partir de ahora se consideran S.E.D.O. lineales de primer orden en forma canónica.

**Teorema 7.1.1** (Teorema de existencia y unicidad). Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'_1 = f_{11}(t)x_1 + f_{12}(t)x_2 + \dots + f_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x'_2 = f_{21}(t)x_1 + f_{22}(t)x_2 + \dots + f_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ \vdots \\ x'_n = f_{n1}(t)x_1 + f_{n2}(t)x_2 + \dots + f_{nn}(t)x_n + g_n(t), \\ x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases}$$

donde  $x_1^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}$ . Si  $f_{ij}(t)$  y  $g_i(t)$  son continuas en un intervalo  $I = [a, b]$ , con  $t_0 \in I$ , entonces existe una única solución  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  en  $I$ .

El sistema anterior puede escribirse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Equivalente a

$$X'(t) = F(t) X(t) + G(t),$$

donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

El sistema homogéneo asociado es

$$X'(t) = F(t) X(t). \tag{II}$$

**Ejemplo.** El sistema

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x + y + t, \end{cases}$$

puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Una solución es

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \\ \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8}, \\ y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8}. \end{cases}$$

## 7.2. S.E.D.O. lineales homogéneos

**Definición 7.2.1.** Las funciones vectoriales

$$H_1(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) \\ h_{21}(t) \\ \vdots \\ h_{n1}(t) \end{pmatrix}, H_2(t) = \begin{pmatrix} h_{12}(t) \\ h_{22}(t) \\ \vdots \\ h_{n2}(t) \end{pmatrix}, \dots, H_k(t) = \begin{pmatrix} h_{1k}(t) \\ h_{2k}(t) \\ \vdots \\ h_{nk}(t) \end{pmatrix},$$

son linealmente independientes (l.i.) en  $[a, b]$ , si la igualdad  $\lambda_1 H_1(t) + \lambda_2 H_2(t) + \dots + \lambda_k H_k(t) = 0$  para todo  $t \in [a, b]$  se cumple únicamente para  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ . Si no son linealmente independientes, se dice que son linealmente dependientes (l.d.).

**Teorema 7.2.1.** Sean el sistema lineal homogéneo dado en (II)  $X'(t) = F(t)X(t)$  y las  $n$  soluciones

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, X_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \dots, X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{III})$$

Entonces,  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$  son linealmente independientes en  $[a, b]$ .

**Teorema 7.2.2.** El conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo (II),  $X'(t) = F(t)X(t)$ , es un espacio vectorial de dimensión  $n$ .

Si  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  son soluciones linealmente independientes, entonces la solución general es

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t),$$

donde  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  son arbitrarios.

**Definición 7.2.2.** Sea el sistema lineal homogéneo (II),  $X'(t) = F(t)X(t)$ .

Un *conjunto fundamental de soluciones* en  $I$  es un conjunto formado por  $n$  soluciones linealmente independientes en  $I$ .

Una *matriz fundamental de soluciones* en  $I$  es una matriz cuyas columnas forman un conjunto fundamental de soluciones en  $I$ .

**Observación.** Si

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de  $X'(t) = F(t)X(t)$ , la solución general puede escribirse como

$$X(t) = \phi(t)C, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

### 7.2.1. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff X'(t) = AX(t),$$

donde  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  para todo  $i, j$ .

**Teorema 7.2.3.** Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un autovalor de  $A$  y  $\vec{u}$  es un autovector asociado, entonces

$$X(t) = e^{\lambda t} \vec{u}$$

es solución de  $X'(t) = AX(t)$ .

**Teorema 7.2.4.** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  (no necesariamente distintos) autovalores de  $A$  con autovectores asociados  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  linealmente independientes. Entonces

$$e^{\lambda_1 t} \vec{u}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \vec{u}_n$$

forman un conjunto linealmente independiente de soluciones del sistema.

**Observación.** Si  $\lambda = a + bi$  ( $b \neq 0$ ) es un autovalor complejo de  $A$ , y su autovector asociado es  $\vec{z} = \vec{z}_1 + i\vec{z}_2$  con  $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\lambda^c = a - bi$  es también autovalor con autovector asociado  $\vec{z}^c = \vec{z}_1 - i\vec{z}_2$ .

Además,

$$e^{\lambda t} \vec{z} = e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt)) (\vec{z}_1 + i\vec{z}_2)$$

y sus partes real e imaginaria son soluciones reales linealmente independientes.

**Teorema 7.2.5.** Sea  $\lambda = a + bi$  ( $b \neq 0$ ) un autovalor de  $A$  con autovector  $\vec{z} = \vec{z}_1 + i\vec{z}_2$ ,  $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in \mathbb{R}^n$ . Entonces

$$X_1(t) = e^{at} (\vec{z}_1 \cos(bt) - \vec{z}_2 \sin(bt)), \quad X_2(t) = e^{at} (\vec{z}_1 \sin(bt) + \vec{z}_2 \cos(bt))$$

son dos soluciones reales linealmente independientes de  $X'(t) = AX(t)$ .

**Teorema 7.2.6.** Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  un autovalor de  $A$  con multiplicidad algebraica  $m$  y  $\dim V(\lambda) = 1$ . Sean

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\vec{u}_1 &= 0, & \vec{u}_1 &\neq 0, \\ (A - \lambda I)\vec{u}_2 &= \vec{u}_1, & (A - \lambda I)\vec{u}_3 &= \vec{u}_2, & \dots, & (A - \lambda I)\vec{u}_m &= \vec{u}_{m-1}. \end{aligned}$$

Entonces las funciones

$$\begin{aligned}
 & e^{\lambda t} \vec{u}_1, \\
 & e^{\lambda t} (\vec{u}_2 + \vec{u}_1 t), \\
 & e^{\lambda t} \left( \vec{u}_3 + \vec{u}_2 t + \vec{u}_1 \frac{t^2}{2!} \right), \\
 & \dots, \\
 & e^{\lambda t} \left( \vec{u}_m + \vec{u}_{m-1} t + \dots + \vec{u}_2 \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \vec{u}_1 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \right)
 \end{aligned}$$

son  $m$  soluciones linealmente independientes de (IV).

A continuación estudiamos los casos posibles cuando  $A$  es de orden 2 o 3.

### A matriz de orden 2

Sean  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de  $A$ .

**a)**  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ .

$$e^{\lambda_1 t} \vec{u}_1, \quad e^{\lambda_2 t} \vec{u}_2$$

son dos soluciones linealmente independientes, donde  $\vec{u}_i$  es un autovector asociado a  $\lambda_i$ .

**b)**  $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi, b \neq 0$ .

$$X_1(t) = e^{at} (\vec{z}_1 \cos(bt) - \vec{z}_2 \sin(bt)), \quad X_2(t) = e^{at} (\vec{z}_1 \sin(bt) + \vec{z}_2 \cos(bt))$$

son soluciones reales linealmente independientes, donde  $\vec{z} = \vec{z}_1 + i\vec{z}_2$  es un autovector asociado a  $\lambda_1$ .

**c)**  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ .

■  $\dim V(\lambda) = 2$ :

$$e^{\lambda t} \vec{u}_1, \quad e^{\lambda t} \vec{u}_2$$

son dos soluciones linealmente independientes.

■  $\dim V(\lambda) = 1$ :

$$e^{\lambda t} \vec{u}_1, \quad e^{\lambda t} (\vec{u}_2 + \vec{u}_1 t)$$

son soluciones linealmente independientes, con  $(A - \lambda I)\vec{u}_2 = \vec{u}_1$ .

### A matriz de orden 3

Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  los valores propios de  $A$ .

a)  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  **distintos dos a dos.**

$$e^{\lambda_1 t} \vec{u}_1, \quad e^{\lambda_2 t} \vec{u}_2, \quad e^{\lambda_3 t} \vec{u}_3$$

son tres soluciones linealmente independientes.

b)  $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$  ( $b \neq 0$ ),  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ .

$$e^{at} (\vec{z}_1 \cos(bt) - \vec{z}_2 \sin(bt)), \quad e^{at} (\vec{z}_1 \sin(bt) + \vec{z}_2 \cos(bt)), \quad e^{\lambda_3 t} \vec{u}_3$$

son tres soluciones linealmente independientes.

c)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda_3 \neq \lambda$ .

▪  $\dim V(\lambda) = 2$ :

$$e^{\lambda t} \vec{u}_1, \quad e^{\lambda t} \vec{u}_2, \quad e^{\lambda_3 t} \vec{u}_3$$

▪  $\dim V(\lambda) = 1$ :

$$e^{\lambda t} \vec{u}_1, \quad e^{\lambda t} (\vec{u}_2 + \vec{u}_1 t), \quad e^{\lambda_3 t} \vec{u}_3$$

$$\text{con } (A - \lambda I)\vec{u}_2 = \vec{u}_1.$$

d)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ .

▪  $\dim V(\lambda) = 3$ :

$$e^{\lambda t} \vec{u}_1, \quad e^{\lambda t} \vec{u}_2, \quad e^{\lambda t} \vec{u}_3.$$

▪  $\dim V(\lambda) = 2$ :

$$e^{\lambda t} \vec{u}_1, \quad e^{\lambda t} \vec{u}_2, \quad e^{\lambda t} (\vec{u}_3 + (c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2)t),$$

$$\text{donde } (A - \lambda I)\vec{u}_3 = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2.$$

▪  $\dim V(\lambda) = 1$ :

$$e^{\lambda t} \vec{u}_1, \quad e^{\lambda t} (\vec{u}_2 + \vec{u}_1 t), \quad e^{\lambda t} \left( \vec{u}_3 + \vec{u}_2 t + \vec{u}_1 \frac{t^2}{2!} \right),$$

$$\text{con } (A - \lambda I)\vec{u}_2 = \vec{u}_1 \text{ y } (A - \lambda I)\vec{u}_3 = \vec{u}_2.$$

**Ejemplo.** Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$$

**Solución: 1. Expresión matricial**

El sistema se escribe como  $X' = AX$  con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**2. Valores propios**

Calculamos  $|A - \lambda I| = 0$ :

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1.$$

**3. Vectores propios**

Para  $\lambda_1 = 4$ :

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad -3v_x + 2v_y = 0.$$

Tomando  $v_x = 2$ , resulta  $v_y = 3$ :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Para  $\lambda_2 = -1$ :

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2v_x + 2v_y = 0.$$

Tomando  $v_x = 1$ , resulta  $v_y = -1$ :

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**4. Solución general**

La solución es

$$X(t) = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En componentes:

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}, \\ y(t) = 3C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t}. \end{cases}$$

□

**Ejemplo.** Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y, \\ y' = -2y + e^{-2t}\sqrt{t}. \end{cases}$$

*Solución:* La solución general es  $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$ . Escribimos el sistema como  $X' = AX + G(t)$ :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t}\sqrt{t} \end{pmatrix}.$$

### 1. Solución homogénea $X_H$

El autovalor es  $\lambda = -2$  (multiplicidad 2). Un autovector es

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Buscamos un vector generalizado  $\vec{v}_2$  tal que  $(A + 2I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2v_{2y} = 1 \Rightarrow v_{2y} = -\frac{1}{2}.$$

Tomamos

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{-2t} (t\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

La solución homogénea es

$$X_H(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t),$$

es decir,

$$\begin{cases} x_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}, \\ y_H(t) = -\frac{C_2}{2} e^{-2t}. \end{cases}$$

### 2. Solución particular $X_P$ (variación de constantes)

Tomamos

$$X_P(t) = c_1(t)X_1(t) + c_2(t)X_2(t),$$

y resolvemos

$$X_1 c_1' + X_2 c_2' = G(t).$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} e^{-2t} c_1' + t e^{-2t} c_2' = 0, \\ -\frac{1}{2} e^{-2t} c_2' = e^{-2t} \sqrt{t}. \end{cases}$$

De la segunda ecuación:

$$c_2' = -2\sqrt{t} = -2t^{1/2}.$$

De la primera ecuación (dividiendo por  $e^{-2t}$ ):

$$c_1' + tc_2' = 0 \Rightarrow c_1' = 2t^{3/2}.$$

Integración:

$$c_1(t) = \int 2t^{3/2} dt = \frac{4}{5}t^{5/2}, \quad c_2(t) = \int -2t^{1/2} dt = -\frac{4}{3}t^{3/2}.$$

Construimos  $X_P$ :

$$X_P(t) = c_1X_1 + c_2X_2 = \left(\frac{4}{5}t^{5/2}\right) \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{4}{3}t^{3/2}\right) \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

$$X_P(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}t^{5/2}e^{-2t} - \frac{4}{3}t^{3/2}e^{-2t} \\ \frac{2}{3}t^{3/2}e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{15}t^{5/2}e^{-2t} \\ \frac{2}{3}t^{3/2}e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

### 3. Solución general

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{8}{15}t^{5/2}e^{-2t} \\ \frac{2}{3}t^{3/2}e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

En componentes:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} - \frac{8}{15}t^{5/2}e^{-2t}, \\ y(t) = -\frac{C_2}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}t^{3/2}e^{-2t}. \end{cases}$$

□

## 7.3. Aplicación: modelización de terremotos

El comportamiento de los edificios frente a terremotos puede ser modelado utilizando ecuaciones diferenciales que describen la dinámica estructural del edificio.

Para ello, se modela el edificio como un sistema mecánico compuesto por masas, resortes y amortiguadores. Las masas representan los diferentes componentes del edificio, como columnas, vigas, muros, etc. Los resortes representan la rigidez de los materiales, mientras que los amortiguadores modelan la resistencia al movimiento debido a la fricción y otros factores.

Las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del edificio son entonces resueltas numéricamente para determinar cómo se moverá la estructura durante un terremoto. Estas ecuaciones incluyen términos que representan las fuerzas que actúan sobre el edificio, como la fuerza del terremoto y las fuerzas de fricción.

En general, un edificio se considera seguro si su respuesta a un terremoto se mantiene dentro de ciertos límites aceptables. Estos límites se basan en factores como la capacidad del edificio para soportar cargas, la capacidad de los materiales de construcción para resistir deformaciones y la capacidad de los sistemas de anclaje y sujeción para mantener las partes del edificio unidas.

Vamos a ver ahora un ejemplo sencillo de cómo modelar un edificio y estudiar su comportamiento frente a terremotos [3]. Supondremos que el  $i$ -ésimo piso de un edificio tiene masa  $m_i$ , y que los adyacentes están unidos por un conector elástico, cuya acción se parece a la de un resorte. En el caso normal, los elementos estructurales de los grandes edificios son de acero, que es un material muy elástico. Cada unión suministra una fuerza de restitución cuando los pisos se desplazan entre sí. Supondremos que es válida la ley de Hooke, cuando la constante de proporcionalidad es  $k$ , entre los pisos  $i$ -ésimo e  $(i + 1)$ -ésimo. Es decir, la fuerza de restitución entre esos dos pisos es

$$F = k_i(x_{i+1} - x_i),$$

donde  $x_i$  representa el desplazamiento horizontal del  $i$ -ésimo piso, respecto del equilibrio, y  $x_{i+1} - x_i$  es el desplazamiento del  $(i + 1)$ -ésimo, en relación con el  $i$ -ésimo piso. También supondremos que hay una relación similar entre el primer piso y el suelo, y que su constante de proporcionalidad es  $k_0$ .

Aplicando la segunda ley de Newton a cada piso del edificio se tiene el sistema de ecuaciones de segundo orden:

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = & -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = & -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\ m_n x_n'' = & -k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

Podemos ver el sistema de ecuaciones diferenciales de forma matricial:

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} -(k_0 + k_1) & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_1 & -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} & -k_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Así que el sistema se puede escribir de la forma

$$MX'' = KX. \quad (7.1)$$

A las matrices  $M$  y  $K$  se les llama matriz de masa y matriz de rigidez  $n \times n$  del edificio, respectivamente. Nótese que la matriz  $M$  es diagonal, donde la masa del  $i$ -ésimo piso del edificio es el  $i$ -ésimo elemento diagonal. Como la matriz  $M$  tiene por inversa

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} m_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n^{-1} \end{pmatrix},$$

llegamos a la ecuación matricial de un sistema homogéneo de segundo orden, en la forma normal

$$X'' = AX,$$

donde  $A = M^{-1}K$ .

Hay dos formas distintas de resolver este problema. Por un lado, podemos convertir el sistema en uno lineal con más variables, a saber

$$x_3 = x'_1, \quad x_4 = x'_2.$$

De esta manera, tendremos un sistema con 4 variables en vez de 2, pero lineal, lo que nos permitirá resolverlo siguiendo los apuntes vistos en las clases de teoría.

Sin embargo, una forma más fácil de proceder es asumir una solución con senos y cosenos (ya que estamos trabajando con el equivalente a muelles), es decir

$$X_i = c_i V_i \cos \omega_i t \quad \text{o} \quad X_i = s_i V_i \sin \omega_i t,$$

con  $c_i$  y  $s_i$  constantes y  $V_i$  un vector de  $n$  componentes. Entonces, sustituyendo esto en la ecuación diferencial vemos que, tanto para la solución con seno o coseno, se cumple

$$(A + \omega_i^2 I)V_i = 0,$$

es decir,  $\omega_i$  está relacionada con los valores propios de la matriz mediante  $\omega_i^2 = -\lambda_i$  y  $V_i$  es un vector propio asociado. La solución genérica vendrá entonces dada por

$$X(t) = \sum_i V_i (c_i \cos \omega_i t + s_i \sin \omega_i t).$$

Los valores propios de  $A$  indican la estabilidad del edificio durante un terremoto. Son negativos y distintos. Por lo tanto, si el periodo de oscilación es mayor al de un terremoto normal (que suele ser entre 2 y 3 segundos), el edificio no correrá peligro.

Como ejemplo sencillo, consideraremos un edificio de dos pisos, cada uno con masa  $m = 5000$  kg, y con constante de restitución  $k = 10000$  kg/s<sup>2</sup>. En este caso, el sistema de ecuaciones diferenciales se simplifica así:

$$\begin{cases} x_1'' = -4x_1 + 2x_2 \\ x_2'' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

A partir de la matriz correspondiente vemos que los valores propios son  $\lambda = -3 \pm \sqrt{5}$ , por lo que  $\omega_1 = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$  y  $\omega_2 = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ . Los vectores propios asociados son

$$V_1 = \left(1, \frac{1}{2}(4 - \omega_1^2)\right), \quad V_2 = \left(1, \frac{1}{2}(4 - \omega_2^2)\right),$$

respectivamente. Por lo tanto, la solución al sistema vendrá dada por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t + c_3 \cos \omega_2 t + c_4 \sin \omega_2 t, \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}(4 - \omega_1^2)(c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t) + \frac{1}{2}(4 - \omega_2^2)(c_3 \cos \omega_2 t + c_4 \sin \omega_2 t). \end{aligned}$$

## 7.4. Problemas aplicados

### 7.4.1. Circuito Eléctrico (Red RL Acoplada)

**Enunciado:** Considere una red eléctrica en serie con un inductor y un resistor. Según la Ley de Kirchhoff, la ecuación diferencial para la corriente  $i(t)$  en un circuito LR en serie con un solo bucle es:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t),$$

donde  $L$  (inductancia) y  $R$  (resistencia) son constantes.

En un ejemplo más complejo, para un generador con  $E = 100$  V,  $R = 10 \Omega$  y  $L = 1$  H, el sistema de ecuaciones diferenciales que describe las corrientes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  en una red eléctrica acoplada es:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -20i_1 + 10i_2 + 100, \\ \frac{di_2}{dt} = 10i_1 - 20i_2, \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$i_1(0) = 0, \quad i_2(0) = 0.$$

Hallar las corrientes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  en función del tiempo.

*Solución:* Para resolver el sistema, comenzamos escribiéndolo en forma matricial:

$$I' = AI + B, \quad A = \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Primero buscamos una solución particular constante  $I_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . Esta debe satisfacer:

$$AI_p + B = 0,$$

lo que conduce al sistema:

$$-20a + 10b = -100, \quad 10a - 20b = 0.$$

Resolviendo, obtenemos:

$$a = \frac{20}{3}, \quad b = \frac{10}{3},$$

por tanto:

$$I_p = \begin{pmatrix} 20/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}.$$

A continuación, calculamos la solución homogénea. Para ello hallamos los autovalores de  $A$ :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies (\lambda + 20)^2 = 100,$$

de donde:

$$\lambda_1 = -10, \quad \lambda_2 = -30.$$

Los autovectores asociados son:

$$\lambda_1 : (1, 1), \quad \lambda_2 : (1, -1).$$

Así, la solución homogénea se escribe como:

$$I_h(t) = C_1 e^{-10t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-30t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La solución general es la suma:

$$I(t) = I_h(t) + I_p.$$

Aplicando la condición inicial  $I(0) = 0$ , obtenemos:

$$C_1 + C_2 = -\frac{20}{3}, \quad C_1 - C_2 = -\frac{10}{3},$$

de donde:

$$C_1 = -5, \quad C_2 = -\frac{5}{3}.$$

Finalmente, la solución queda:

$$i_1(t) = -5e^{-10t} - \frac{5}{3}e^{-30t} + \frac{20}{3}, \quad i_2(t) = -5e^{-10t} + \frac{5}{3}e^{-30t} + \frac{10}{3}.$$

□

## 7.4.2. Problema de Mezclas

El estudio de sistemas de tanques acoplados es un ejemplo clásico de ecuaciones diferenciales aplicadas a procesos de transporte y mezcla. En este problema, dos tanques, A y B, contienen inicialmente 100 gal de salmuera cada uno y están conectados mediante flujos que permiten el intercambio continuo de solución entre ellos, además de la entrada y salida desde el exterior.

Los caudales impuestos determinan tanto la variación del volumen en cada tanque como la evolución temporal de la cantidad de sal disuelta. Dado que la concentración en cada tanque cambia con el tiempo, el sistema resultante es dinámico y requiere plantear ecuaciones diferenciales que describan la tasa de entrada y salida de sal en función de los volúmenes y concentraciones instantáneas. Este tipo de modelos ilustra cómo el balance de masa conduce de manera natural a sistemas lineales, en general no autónomos, que permiten predecir la evolución de la mezcla.

En el caso concreto a estudiar, los flujos entre el exterior y los tanques, así como los intercambios entre ellos, están dados por:

$$A \rightarrow B : 5 \text{ gal/min}, \quad B \rightarrow A : 1 \text{ gal/min},$$

$$\text{Exterior} \rightarrow A : 1 \text{ gal/min con concentración } 2 \text{ lb/gal}, \quad B \rightarrow \text{Exterior} : 4 \text{ gal/min}.$$

A partir de estos datos se debe formular el modelo matemático que describe la evolución temporal de la cantidad de sal en cada tanque.

*Solución:* Definimos  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  como las cantidades de sal (lb) en A y B. La ecuación general es:

$$\text{Tasa de cambio} = \text{entrada} - \text{salida}.$$

Primero, calculamos los volúmenes: - Tanque A: flujo neto  $1 + 1 - 5 = -3$  gal/min, por lo que:

$$V_A(t) = 100 - 3t.$$

- Tanque B: flujo neto  $5 - 1 - 4 = 0$ , entonces:

$$V_B(t) = 100.$$

Luego, la ecuación para A es:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2 + \frac{x_2}{100} - \frac{5x_1}{100 - 3t}.$$

La ecuación para B es:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{5x_1}{100 - 3t} - \frac{x_2}{20}.$$

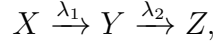
Finalmente, el modelo queda:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2 - \frac{5}{100 - 3t} x_1 + \frac{1}{100} x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{5}{100 - 3t} x_1 - \frac{1}{20} x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.$$

Este sistema es lineal pero no autónomo debido al término  $100 - 3t$ . □

### 7.4.3. Serie de Desintegración Radiactiva

Consideramos una serie de desintegración radiactiva en cadena:



donde  $X(t)$  es la cantidad del nucleido inicial,  $Y(t)$  la del intermediario (también inestable) y  $Z(t)$  la del producto final estable. Los parámetros  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 > 0$  representan las constantes de desintegración, bajo el modelo estándar

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x.$$

La evolución temporal de las cantidades  $x(t), y(t), z(t)$  está dada por el sistema lineal:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y, \\ \frac{dz}{dt} = \lambda_2 y. \end{cases}$$

Supondremos que inicialmente solo está presente el primer elemento:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0.$$

**1. Solución para  $x(t)$ .** La ecuación es separable:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-\lambda_1 t}.$$

**2. Solución para  $y(t)$ .** Sustituimos  $x(t)$ :

$$\frac{dy}{dt} + \lambda_2 y = \lambda_1 x_0 e^{-\lambda_1 t}.$$

Se trata de una ecuación lineal de primer orden  $y' + p(t)y = q(t)$ , con  $p(t) = \lambda_2$ . Aplicando la fórmula de la solución general presentada en el Capítulo 5:

$$y(t) = e^{-\int \lambda_2 dt} \left( C + \int \lambda_1 x_0 e^{-\lambda_1 t} e^{\int \lambda_2 dt} dt \right) = e^{-\lambda_2 t} \left( C + \lambda_1 x_0 \int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} dt \right).$$

**Caso general  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .** Resolviendo la integral:

$$y(t) = e^{-\lambda_2 t} \left( C + \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \right) = C e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}.$$

Aplicando  $y(0) = 0$ :

$$0 = C + \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \Rightarrow C = -\frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Por tanto,

$$y(t) = \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

**Caso especial**  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . La integral se simplifica a  $\int e^0 dt = t$ :

$$y(t) = e^{-\lambda t} (C + \lambda x_0 t).$$

Como  $y(0) = 0$ , tenemos  $C = 0$ , y resulta:

$$y(t) = \lambda x_0 t e^{-\lambda t}.$$

**3. Solución para  $z(t)$ .** El sistema conserva la cantidad total:

$$x(t) + y(t) + z(t) = x_0.$$

Por tanto,

$$z(t) = x_0 - x(t) - y(t).$$

Para el caso general  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ :

$$z(t) = x_0 - x_0 e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

#### 7.4.4. Modelo de brote zombie (S–I–Z–R)

Considera una población en la que puede producirse un brote “zombie”. Se dividen los individuos en cuatro clases:

$S(t)$  : susceptibles,  $I(t)$  : infectados humanos,  $Z(t)$  : zombies,  $R(t)$  : removidos (muertos).

Un modelo tipo SIZR propone el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SZ, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SZ - \rho I, \\ \frac{dZ}{dt} &= \rho I - \alpha SZ, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha SZ. \end{aligned}$$

En este ejercicio trabajaremos con los valores numéricos:

$$\beta = \frac{1}{100}, \quad \rho = 1, \quad \alpha = \frac{1}{100},$$

y las condiciones iniciales:

$$S(0) = 100, \quad I(0) = 0, \quad Z(0) = 1, \quad R(0) = 0.$$

Este sistema no tiene coeficientes constantes y por lo tanto no podemos resolverlo con los métodos que hemos visto. Sin embargo, se puede estudiar su comportamiento de forma numérica.

1. Explica el significado de cada término de las ecuaciones anteriores a partir de interacciones del tipo susceptible–zombie e infectado–zombie.
2. Considera la población total

$$N(t) = S(t) + I(t) + Z(t) + R(t).$$

Demuestra, usando el sistema de ecuaciones, que  $N(t)$  es constante para todo  $t$ .

3. Encuentra los puntos de equilibrio del sistema bajo la hipótesis de que  $N$  es constante. ¿Existe un equilibrio sin zombies ( $Z = 0$ )? Discute, de forma cualitativa, la estabilidad de un equilibrio sin zombies frente a pequeñas perturbaciones (por ejemplo, aparición de unos pocos zombies).
4. Para los parámetros y condiciones iniciales dados,

$$\beta = \frac{1}{100}, \quad \rho = 1, \quad \alpha = \frac{1}{100}, \quad S(0) = 100, \quad I(0) = 0, \quad Z(0) = 1, \quad R(0) = 0,$$

realiza dos pasos del método de Euler explícito con paso  $h = 1$ :

$$(S_{n+1}, I_{n+1}, Z_{n+1}, R_{n+1}) = (S_n, I_n, Z_n, R_n) + h(f_S, f_I, f_Z, f_R)(S_n, I_n, Z_n, R_n),$$

donde  $(f_S, f_I, f_Z, f_R)$  son las funciones dadas por el sistema.

- a) Calcula  $(S(1), I(1), Z(1), R(1))$  aproximados.
- b) Calcula  $(S(2), I(2), Z(2), R(2))$  aproximados.

(Las operaciones deben poder realizarse a mano, usando solo sumas, productos y fracciones sencillas.)

5. Interpreta cualitativamente la evolución aproximada obtenida en el apartado anterior: ¿aumenta o disminuye el número de zombies al principio?, ¿cómo reaccionan las otras poblaciones?

**Solución: 1. Significado de cada término de las ecuaciones**

- $\beta SZ$ : Representa la tasa de transmisión de la “infección”. Ocurre cuando un Susceptible ( $S$ ) se encuentra con un Zombie ( $Z$ ). El signo negativo en  $dS/dt$  indica que los susceptibles disminuyen, y el signo positivo en  $dI/dt$  indica que pasan a ser Infectados (en periodo de latencia).
- $\rho I$ : Representa la tasa de transformación o conversión. Los humanos Infectados ( $I$ ) mueren y se reaniman como Zombies ( $Z$ ). Disminuye la población  $I$  y aumenta la población  $Z$ .
- $\alpha SZ$ : Representa la tasa de eliminación de zombies. Ocurre cuando un Susceptible interactúa con un Zombie y logra eliminarlo (destruirlo). Disminuye la población  $Z$  y aumenta la población de Removidos ( $R$ ).

## 2. Demostración de que la población total $N(t)$ es constante

Definimos  $N(t) = S(t) + I(t) + Z(t) + R(t)$ . Derivando respecto al tiempo:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dZ}{dt} + \frac{dR}{dt}.$$

Sustituyendo las ecuaciones del sistema:

$$\frac{dN}{dt} = (-\beta SZ) + (\beta SZ - \rho I) + (\rho I - \alpha SZ) + (\alpha SZ).$$

Agrupando términos semejantes:

$$\frac{dN}{dt} = (\beta SZ - \beta SZ) + (\rho I - \rho I) + (\alpha SZ - \alpha SZ) = 0.$$

Al ser la derivada nula,  $N(t)$  es constante para todo  $t$ .

## 3. Puntos de equilibrio y estabilidad sin zombies

Para encontrar los puntos de equilibrio, igualamos las derivadas a cero:

1.  $-\beta SZ = 0$ .
2.  $\beta SZ - \rho I = 0$ .
3.  $\rho I - \alpha SZ = 0$ .
4.  $\alpha SZ = 0$ .

De la ecuación (1) y (4), suponiendo  $\beta, \alpha \neq 0$ , tenemos dos posibilidades:  $S = 0$  o  $Z = 0$ .

- Si  $Z = 0$ : Sustituyendo en (2) o (3), obtenemos  $\rho I = 0 \implies I = 0$ . Por tanto, cualquier estado de la forma  $(S^*, 0, 0, R^*)$  es un punto de equilibrio. Este es el **equilibrio libre de enfermedad** (sin zombies).
- Si  $S = 0$ : Sustituyendo en (2),  $-\rho I = 0 \implies I = 0$ . Sustituyendo en (3),  $Z' = 0$  se cumple siempre si  $I = 0$  y  $S = 0$ . Por tanto,  $(0, 0, Z^*, R^*)$  también son equilibrios (extinción humana).

*Discusión cualitativa sobre  $Z = 0$ :* Si estamos en un equilibrio  $(S_0, 0, 0, 0)$  y se introduce una pequeña perturbación (un zombie,  $Z > 0$ ), observamos  $dI/dt = \beta SZ$ . Como  $S$  es grande y  $\beta > 0$ , el número de infectados crecerá inicialmente. Estos infectados acabarán convirtiéndose en nuevos zombies ( $dZ/dt$  recibe  $\rho I$ ). A menos que la capacidad de los humanos para matar zombies ( $\alpha SZ$ ) sea enormemente superior a la tasa de infección ( $\beta SZ$ ), la introducción de zombies desestabilizará el equilibrio y comenzará el brote.

## 4. Método de Euler explícito ( $h = 1$ )

Condiciones iniciales:  $S_0 = 100$ ,  $I_0 = 0$ ,  $Z_0 = 1$ ,  $R_0 = 0$ . Parámetros:  $\beta = 0.01$ ,  $\rho = 1$ ,  $\alpha = 0.01$ .

Las funciones de derivada son:

$$\begin{aligned}f_S &= -0.01 \cdot S \cdot Z, \\f_I &= 0.01 \cdot S \cdot Z - 1 \cdot I, \\f_Z &= 1 \cdot I - 0.01 \cdot S \cdot Z, \\f_R &= 0.01 \cdot S \cdot Z.\end{aligned}$$

**(a) Paso 1: Calcular para  $t = 1$  Valores en  $n = 0$ :  $S = 100, I = 0, Z = 1, R = 0$ .**

$$\begin{aligned}f_S(0) &= -0.01 \cdot 100 \cdot 1 = -1, \\f_I(0) &= 0.01 \cdot 100 \cdot 1 - 0 = 1, \\f_Z(0) &= 0 - 0.01 \cdot 100 \cdot 1 = -1, \\f_R(0) &= 0.01 \cdot 100 \cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Actualización ( $h = 1$ ):

$$\begin{aligned}S_1 &= 100 + 1(-1) = 99, \\I_1 &= 0 + 1(1) = 1, \\Z_1 &= 1 + 1(-1) = 0, \\R_1 &= 0 + 1(1) = 1.\end{aligned}$$

Resultado aproximado en  $t = 1$ :  $\boxed{(99, 1, 0, 1)}$ .

**(b) Paso 2: Calcular para  $t = 2$  Valores en  $n = 1$ :  $S = 99, I = 1, Z = 0, R = 1$ .**

$$\begin{aligned}f_S(1) &= -0.01 \cdot 99 \cdot 0 = 0, \\f_I(1) &= 0.01 \cdot 99 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1, \\f_Z(1) &= 1 \cdot 1 - 0.01 \cdot 99 \cdot 0 = 1, \\f_R(1) &= 0.01 \cdot 99 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Actualización ( $h = 1$ ):

$$\begin{aligned}S_2 &= 99 + 1(0) = 99, \\I_2 &= 1 + 1(-1) = 0, \\Z_2 &= 0 + 1(1) = 1, \\R_2 &= 1 + 1(0) = 1.\end{aligned}$$

Resultado aproximado en  $t = 2$ :  $\boxed{(99, 0, 1, 1)}$ .

### 5. Interpretación cualitativa

En el primer paso, la interacción entre los 100 humanos y el único zombie resulta en que el zombie es eliminado ( $Z$  baja a 0 y  $R$  sube a 1), pero antes logra infectar a un humano ( $S$  baja a 99 e  $I$  sube a 1). En el segundo paso, como no hay zombies activos, no hay nuevas infecciones ni muertes de zombies, pero el humano infectado completa su periodo de incubación y se transforma en zombie ( $I$  baja a 0 y  $Z$  sube a 1). El número de zombies oscila en esta aproximación debido al tamaño del paso, pero refleja la dinámica de infección  $\rightarrow$  latencia  $\rightarrow$  transformación.

□

### 7.4.5. Dinámica del Amor: Romeo y Julieta

Inspirado en el trabajo de [4], podemos modelar la dinámica de una relación amorosa mediante un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Sean  $R(t)$  el amor de Romeo por Julieta y  $J(t)$  el amor de Julieta por Romeo en el instante  $t$ .

- $R > 0$  significa que Romeo ama a Julieta (si  $R < 0$ , siente rechazo).
- $J > 0$  significa que Julieta ama a Romeo.

El modelo general es:

$$\begin{cases} R' = aR + bJ, \\ J' = cR + dJ, \end{cases} \quad (7.2)$$

donde las constantes  $a, b, c, d$  determinan el “estilo romántico”.

- **Estilo Ansioso/Cauteloso** (términos  $a, d$ ): Si  $a > 0$ , Romeo se excita por su propio amor (ansioso). Si  $a < 0$ , se retira si siente demasiado apego (cauteloso).
- **Estilo Seguro/Narcisista** (términos  $b, c$ ): Si  $b > 0$ , Romeo responde positivamente al amor de Julieta. Si  $b < 0$ , le disgusta que le amen demasiado.

Analicemos tres casos prototípicos:

#### Caso 1: El Ciclo Sin Fin (Centro)

Romeo es inseguro ( $a = 0$ ) y solo reacciona al amor de ella ( $b = 1$ ). Julieta es voluble ( $d = 0$ ), le atrae Romeo si él la ignora, pero huye si él la ama ( $c = -1$ ).

$$\begin{cases} R' = J \\ J' = -R \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son  $\lambda = \pm i$ . Al ser imaginarios puros, el equilibrio  $(0, 0)$  es un **centro**. Las trayectorias son círculos  $R^2 + J^2 = C$ . La pareja vive un ciclo eterno donde se alternan fases de amor mutuo, amor unilateral y odio mutuo, sin llegar nunca a un estado estable.

#### Caso 2: Fuego y Fuego (Punto de Silla)

Ambos amantes responden exclusivamente al amor del otro de forma positiva ( $a = d = 0, b = c = 1$ ).

$$\begin{cases} R' = J \\ J' = R \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son las raíces de  $\lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$ . Dado que son reales de signo opuesto, el origen es un **punto de silla** (inestable).

- Autovector asociado a  $\lambda_1 = 1$ :  $\vec{v}_1 = (1, 1)$ . Si comienzan amándose ( $R, J > 0$ ), el amor crece exponencialmente hacia el infinito.
- Autovector asociado a  $\lambda_2 = -1$ :  $\vec{v}_2 = (1, -1)$ . Si tienen sentimientos opuestos, tienden al origen (indiferencia), pero cualquier perturbación los llevará eventualmente a la rama inestable (amor u odio infinito).

### Caso 3: Los Cautelosos (Nodo Estable)

Ambos son cautelosos con sus propios sentimientos ( $a = d = -2$ ) pero les agrada ser amados ( $b = c = 1$ ).

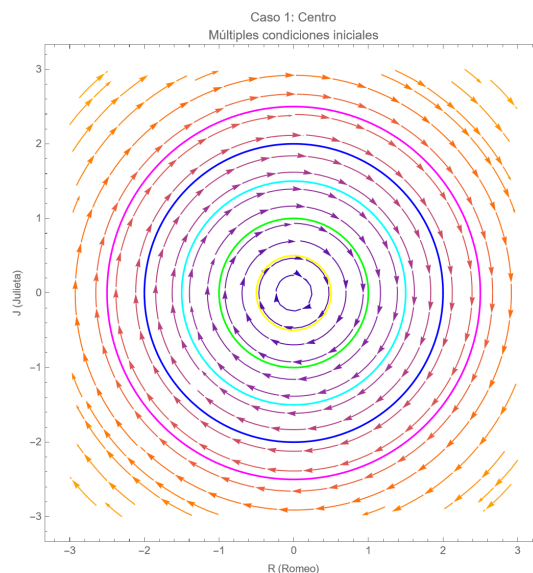
$$\begin{cases} R' = -2R + J \\ J' = R - 2J \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -3$ . Ambos negativos y distintos. El origen es un **nodo estable**. Independientemente de la pasión inicial, el mecanismo de freno interno de ambos (el miedo al compromiso o a sufrir, representado por el  $-2$ ) es más fuerte que la atracción mutua. Inevitablemente, la relación converge asintóticamente hacia la indiferencia  $(0, 0)$ .

### Visualizaciones interactivas

A continuación se presentan los planos de fase y animaciones para cada caso. Las animaciones muestran cómo diferentes **condiciones iniciales** ( $R_0, J_0$ ) producen distintas trayectorias, manteniendo siempre los mismos parámetros del sistema.

### Caso 1: Centro (Ciclo Sin Fin)

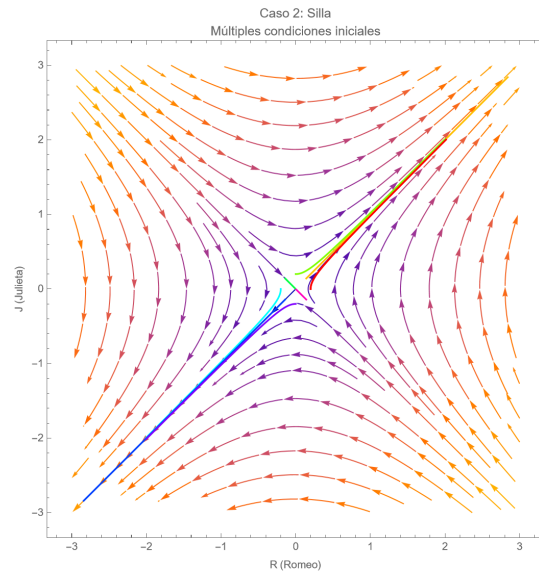


En esta figura vemos círculos concéntricos alrededor del origen, lo que representa una relación cíclica.

- **La Dinámica:** Es la típica relación de “ni contigo ni sin ti”. Romeo se enamora y Julieta se agobia (se aleja); cuando él pierde interés, ella vuelve a buscarlo.
- **Resultado:** La pareja vive en un ciclo eterno de persecución sin llegar nunca a un equilibrio estable ni a la ruptura total.

Al variar la amplitud inicial  $R_0$ , observamos cómo las órbitas cambian de tamaño: cuanto mayor es el amor (u odio) inicial, más intensas son las oscilaciones del ciclo.

## Caso 2: Punto de Silla (Inestabilidad)

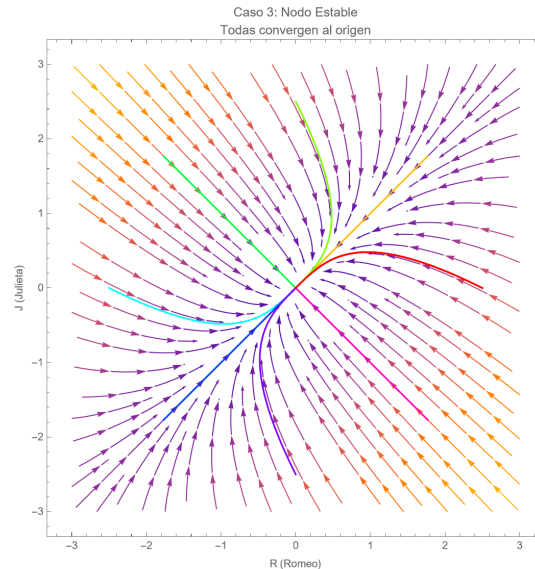


Aquí observamos hipérbolas que se alejan del origen (punto de silla), representando una relación inestable y explosiva.

- **La Dinámica:** Es una situación de “todo o nada”. Ambos amantes se retroalimentan: si empiezan con amor, este crece indefinidamente; si hay rechazo, este aumenta hasta la guerra total.
- **Resultado:** Pequeños cambios o dudas al inicio determinan si serán la pareja más feliz o los peores enemigos. No hay término medio.

La animación muestra cómo trayectorias muy cercanas pueden divergir drásticamente hacia el amor infinito o el odio absoluto.

### Caso 3: Nodo Estable (Los Cautelosos)



La figura muestra que todas las trayectorias terminan en el origen (sumidero o nodo estable), lo que representa el triunfo de la cautela sobre la pasión.

- **La Dinámica:** Aunque la relación comienza con mucha intensidad, el miedo al compromiso o el freno interno de ambos (coeficientes negativos propios) acaba apagando la llama.
- **Resultado:** Inevitablemente, la relación converge asintóticamente hacia la indiferencia mutua, muriendo por “exceso de prudencia”.

La animación ilustra que, independientemente de la pasión inicial, el destino final es siempre el (0,0).

### Resumen comparativo

Figura	Tipo Matemático	Estabilidad	Significado Emocional
Círculos	Centro	Neutra (Cíclica)	Montaña rusa eterna, nunca se estabiliza.
Hipérbolas	Punto de Silla	Inestable	Todo o nada: amor eterno o guerra total.
Sumidero	Nodo Estable	Asintótica	La relación se enfría y muere por exceso de cautela.

## Problemas

Hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema  $X'(t) = AX(t)$ , en los siguientes casos:

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hallar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$4. \begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = 6x + 4y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 5y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x + y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x' = 5x - 3y - 2z \\ y' = 8x - 5y - 4z \\ z' = -4x + 3y + 3z \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2x + y - z \\ z' = -3x + 2y + 4z \end{cases}$$

$$10. X'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} X(t)$$

$$11. \begin{cases} x' = x + y + 2z \\ y' = x - z \\ z' = -x + z \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x' = -4x - 2y - \frac{2}{e^t - 1} \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1} \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x' = 2x + 2e^t \\ y' = x + y + e^t \\ z' = y + z + e^t \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x' = y + e^t \\ y' = -x + 2y \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x'_2 = 2x_2 - x_3 \\ x'_3 = 2x_3 \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + z(t) \\ x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1 \end{cases}$$

$$17. X'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$18. \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -5x + y \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + e^t \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x' = -y - \sin t \\ y' = x + \cos t \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y - t \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 2t \end{cases}$$

## Soluciones

$$1. \left\{ \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} \right\}$$

$$2. \left\{ \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} \right\}$$

$$3. \left\{ \begin{pmatrix} e^t \cos(2t) \\ -e^t(\cos(2t) + \sin(2t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) \\ e^t(\cos(2t) - \sin(2t)) \end{pmatrix} \right\}$$

$$4. \begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{10t} \\ y(t) = -2c_1 e^t + c_2 e^{10t} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 (t+1)e^{3t} \\ y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x(t) = e^{2t}(2c_1 \cos t - c_1 \sin t + 2c_2 \sin t + c_2 \cos t) \\ y(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 e^t + 2c_3 e^{3t} \\ y(t) = -c_1 - c_2 e^t + c_3 e^{3t} \\ z(t) = -c_1 + c_3 e^{3t} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x(t) = e^t (3c_1 + c_2 + c_3 (2t + \frac{1}{2})) \\ y(t) = e^t (4c_1 + 4c_3 t) \\ z(t) = e^t (2c_2 - 2c_3 t) \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x(t) = e^{2t}(-c_2 - c_3(2+t)) \\ y(t) = e^{2t} \left( -c_1 - c_2 t - c_3 \left( 3 + t + \frac{t^2}{2} \right) \right) \\ z(t) = e^{2t} \left( c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} \right) \end{cases}$$

10. 
$$\begin{cases} x(t) = 2c_1e^{-t} + c_3(1 + 4t)e^{-t} \\ y(t) = c_2e^{-t} + 3c_3te^{-t} \\ z(t) = -c_1e^{-t} - 2c_3te^{-t} \end{cases}$$
11. 
$$\begin{cases} x(t) = c_1 - c_2e^t \sin t + c_3e^t \cos t \\ y(t) = -3c_1 + c_2e^t \cos t + c_3e^t \sin t \\ z(t) = c_1 - c_2e^t \cos t - c_3e^t \sin t \end{cases}$$
12. 
$$\begin{cases} x(t) = c_1 + 2c_2e^{-t} + 2e^{-t} \ln |e^t - 1| \\ y(t) = -2c_1 - 3c_2e^{-t} - 3e^{-t} \ln |e^t - 1| \end{cases}$$
13. 
$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{2t} - 2e^t \\ y(t) = c_1e^{2t} + (c_3 - t - 2)e^t \\ z(t) = c_1e^{2t} + e^t(c_2 + c_3t - \frac{t^2}{2} - t - 2) \end{cases}$$
14. 
$$\begin{cases} x(t) = e^t (1 - \frac{1}{2}t^2) \\ y(t) = -e^t (t + \frac{1}{2}t^2) \end{cases}$$
15. 
$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + 5t - \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ x_2(t) = (2 - t)e^{2t} \\ x_3(t) = e^{2t} \end{cases}$$
16. 
$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = -1 - t + e^t \\ z(t) = 2 + t - e^t \end{cases}$$
17. 
$$\begin{cases} x(t) = -(\frac{8}{9} + t)e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \\ y(t) = e^{3t} \\ z(t) = (\frac{1}{9} + 2t)e^{3t} - \frac{1}{3}te^{3t} - \frac{1}{9} \end{cases}$$
18. 
$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{5t} + c_2e^{3t} \\ y(t) = -3c_1e^{5t} - c_2e^{3t} \end{cases}$$
19. 
$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}(2c_1 \cos 3t + 2c_2 \sin 3t) \\ y(t) = e^{2t}(-c_1(\cos 3t + 3 \sin 3t) + c_2(3 \cos 3t - \sin 3t)) \end{cases}$$
20. 
$$\begin{cases} x(t) = e^t(c_1 + c_2t + \frac{t^2}{2}) \\ y(t) = e^t(t + c_2) \end{cases}$$

21. 
$$\begin{cases} x(t) = 3c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} \\ y(t) = c_1e^{2t} - c_2e^{-2t} \end{cases}$$
22. 
$$\begin{cases} x(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t - t \sin t \\ y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \cos t \end{cases}$$
23. 
$$\begin{cases} x(t) = e^{3t}(c_1 + c_2(1 + t)) \\ y(t) = e^{3t}(c_1 + c_2t) \end{cases}$$
24. 
$$\begin{cases} x(t) = e^t(c_1 \sin t - c_2 \cos t) \\ y(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \end{cases}$$
25. 
$$\begin{cases} x(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + t + 1 \\ y(t) = -2c_1e^t - c_2e^{2t} - 2(t + 1) \end{cases}$$

# Bibliografía

- [1] J.G. Cabello. *Álgebra Lineal. Sus Aplicaciones en Economía, Ingenierías y otras Ciencias*. Delta Publicaciones, 2005.
- [2] H.A. Moon, T.J. Asaki, and M.A. Snipes. *Application-Inspired Linear Algebra*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer International Publishing, 2022.
- [3] D.G. Zill. *Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones de Modelado*. CENGAGE Learning, 2009.
- [4] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press, Boulder, CO, 1988.