Álgebra y Ecuaciones Diferenciales
Capítulo 4: Diagonalización

José Javier Relancio Martínez

Universidad de Burgos

2026

Índice

Definiciones Básicas

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ (o un endomorfismo $f : V \to V$).

Valor Propio y Vector Propio

Un número $\lambda \in \mathbb{R}$ es **valor propio** (autovalor) de A si existe un vector $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

A $\vec{x}$ se le llama **vector propio** (autovector) asociado a λ.

Interpretación Geométrica: Los vectores propios son direcciones donde la transformación actúa simplemente como un escalado (alargamiento o contracción) por un factor λ.

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$

Cálculo de Autovalores

Para que exista solución no trivial $\vec{x} \neq \vec{0}$ al sistema $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, el determinante debe ser cero.

Polinomio Característico

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Ejemplo

Hallar los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

Cálculo de Autovalores

Para que exista solución no trivial $\vec{x} \neq \vec{0}$ al sistema $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, el determinante debe ser cero.

Polinomio Característico

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Ejemplo

Hallar los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \implies \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 2$$

Subespacios Propios

Definition

Para cada valor propio λ_i, el conjunto de todos sus vectores propios forma un subespacio vectorial llamado **subespacio propio** asociado a λ_i:

$$V(\lambda_i) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$$

Propiedades:

- La dimensión de $V(\lambda_i)$ es la **multiplicidad geométrica** $m_g(\lambda_i)$.
- Autovectores de autovalores distintos son siempre linealmente independientes.
- La suma de subespacios propios de distintos autovalores es siempre una suma directa.

Diagonalizar consiste en encontrar una base uniendo bases de cada $V(\lambda_i)$, lo que es posible solo si $\sum m_g(\lambda_i) = n$.

Preguntas de Concepto (Valores Propios)

- **1. ¿Pertenece el vector nulo $\vec{0}$ a todos los subespacios propios?**

Preguntas de Concepto (Valores Propios)

- **1. ¿Pertenece el vector nulo $\vec{0}$ a todos los subespacios propios?** $\rightarrow$ **SÍ**. Como todo subespacio vectorial, $V(\lambda)$ debe contener al vector nulo (además, $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ se cumple trivialmente para cualquier λ).
- **2. ¿Puede ser $\lambda = 0$ un valor propio?**

Preguntas de Concepto (Valores Propios)

- **1. ¿Pertenece el vector nulo $\vec{0}$ a todos los subespacios propios?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Como todo subespacio vectorial, $V(\lambda)$ debe contener al vector nulo (además, $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ se cumple trivialmente para cualquier λ).

- **2. ¿Puede ser $\lambda = 0$ un valor propio?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ocurre si $\det(A) = 0$ (matriz no inversible).

- **3. ¿Cuántos autovalores tiene una matriz $n \times n$?**

Preguntas de Concepto (Valores Propios)

- **1. ¿Pertenece el vector nulo $\vec{0}$ a todos los subespacios propios?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Como todo subespacio vectorial, $V(\lambda)$ debe contener al vector nulo (además, $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ se cumple trivialmente para cualquier λ).

- **2. ¿Puede ser $\lambda = 0$ un valor propio?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ocurre si $\det(A) = 0$ (matriz no inversible).

- **3. ¿Cuántos autovalores tiene una matriz $n \times n$?**
  $\rightarrow$ A lo sumo n (raíces del polinomio de grado n).

- **4. Si A es triangular, ¿cuáles son sus autovalores?**

Preguntas de Concepto (Valores Propios)

- **1. ¿Pertenece el vector nulo $\vec{0}$ a todos los subespacios propios?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Como todo subespacio vectorial, $V(\lambda)$ debe contener al vector nulo (además, $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ se cumple trivialmente para cualquier λ).
- **2. ¿Puede ser $\lambda = 0$ un valor propio?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ocurre si $\det(A) = 0$ (matriz no inversible).
- **3. ¿Cuántos autovalores tiene una matriz $n \times n$?**
  $\rightarrow$ A lo sumo n (raíces del polinomio de grado n).
- **4. Si A es triangular, ¿cuáles son sus autovalores?**
  $\rightarrow$ Los elementos de la **diagonal principal**.
- **5. Si λ es autovalor de A, ¿es λ^2 autovalor de A^2?**

Preguntas de Concepto (Valores Propios)

- **1. ¿Pertenece el vector nulo $\vec{0}$ a todos los subespacios propios?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Como todo subespacio vectorial, $V(\lambda)$ debe contener al vector nulo (además, $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ se cumple trivialmente para cualquier λ).

- **2. ¿Puede ser $\lambda = 0$ un valor propio?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ocurre si $\det(A) = 0$ (matriz no inversible).

- **3. ¿Cuántos autovalores tiene una matriz $n \times n$?**
  $\rightarrow$ A lo sumo n (raíces del polinomio de grado n).

- **4. Si A es triangular, ¿cuáles son sus autovalores?**
  $\rightarrow$ Los elementos de la **diagonal principal**.

- **5. Si λ es autovalor de A, ¿es λ^2 autovalor de A^2?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Si $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, entonces $A^2\vec{x} = A(\lambda\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}$.

Matriz Diagonalizable

Definition

A es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal D. Existe P inversible tal que:

$$D = P^{-1}AP$$

Las columnas de P son los vectores propios de A.

Condición Necesaria y Suficiente

$A \in M_{n\times n}$ es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes.

Esto equivale a:

1. Todas las raíces del polinomio característico son reales (condición necesaria en $\mathbb{R}$).
2. **Multiplicidad Algebraica = Multiplicidad Geométrica** $\forall\lambda$ (condición necesaria y suficiente).

Multiplicidades

Para cada autovalor λ_i:

- **Multiplicidad Algebraica (m_a):** Número de veces que λ_i aparece como raíz de $p_A(\lambda)$.
- **Multiplicidad Geométrica (m_g):** Dimensión del subespacio propio $V(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$.

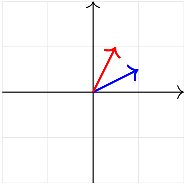
$$m_g(\lambda_i) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_i I)$$

Propiedad: $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$.

Diagonalizar es encontrar una base donde la matriz actúa solo estirando los ejes.

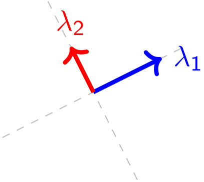
Base Canónica

La matriz A mezcla x e y.



Base de Autovectores

La matriz D solo estira.



"A es complicada, pero D es simple"

Ejemplo de NO Diagonalización

Ejemplo (Caso II de los apuntes)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Polinomio: $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3 \implies \lambda = 1$ (triple).

- Multiplicidad Algebraica $m_a(1) = 3$.

Ejemplo de NO Diagonalización

Ejemplo (Caso II de los apuntes)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Polinomio: $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3 \implies \lambda = 1$ (triple).

- Multiplicidad Algebraica $m_a(1) = 3$.

Calculamos la dimensión del subespacio propio $V(1)$.

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 2.

$$m_g(1) = 3 - \mathrm{rg}(A - I) = 3 - 2 = 1$$

Ejemplo de NO Diagonalización

Ejemplo (Caso II de los apuntes)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Polinomio: $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3 \implies \lambda = 1$ (triple).

- Multiplicidad Algebraica $m_a(1) = 3$.

Calculamos la dimensión del subespacio propio $V(1)$.

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 2.

$$m_g(1) = 3 - \mathrm{rg}(A - I) = 3 - 2 = 1$$

Como $m_g(1) = 1 \neq 3 = m_a(1)$, la matriz **NO es diagonalizable**.

Preguntas de Concepto (Diagonalización)

- **1. Si A tiene n autovalores distintos, ¿es diagonalizable?**

Preguntas de Concepto (Diagonalización)

- **1. Si** A **tiene** n **autovalores distintos, ¿es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Vectores propios de valores distintos son L.I.
- **2. ¿La matriz identidad es diagonalizable?**

Preguntas de Concepto (Diagonalización)

- **1. Si A tiene n autovalores distintos, ¿es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Vectores propios de valores distintos son L.I.
- **2. ¿La matriz identidad es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ya es diagonal.
- **3. Si $m_a(\lambda) = 2$, ¿puede ser $m_g(\lambda) = 1$?**

Preguntas de Concepto (Diagonalización)

- **1. Si A tiene n autovalores distintos, ¿es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Vectores propios de valores distintos son L.I.

- **2. ¿La matriz identidad es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ya es diagonal.

- **3. Si $m_a(\lambda) = 2$, ¿puede ser $m_g(\lambda) = 1$?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ese autovalor no aportaría suficientes autovectores L.I. para diagonalizar.

- **4. ¿Qué ponemos en la diagonal de D?**

Preguntas de Concepto (Diagonalización)

- **1. Si A tiene n autovalores distintos, ¿es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Vectores propios de valores distintos son L.I.
- **2. ¿La matriz identidad es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ya es diagonal.
- **3. Si $m_a(\lambda) = 2$, ¿puede ser $m_g(\lambda) = 1$?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ese autovalor no aportaría suficientes autovectores L.I. para diagonalizar.
- **4. ¿Qué ponemos en la diagonal de D?**
  $\rightarrow$ Los **valores propios** de A.
- **5. ¿Es única la matriz P que diagonaliza?**

Preguntas de Concepto (Diagonalización)

- **1. Si A tiene n autovalores distintos, ¿es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Vectores propios de valores distintos son L.I.
- **2. ¿La matriz identidad es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ya es diagonal.
- **3. Si $m_a(\lambda) = 2$, ¿puede ser $m_g(\lambda) = 1$?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ese autovalor no aportaría suficientes autovectores L.I. para diagonalizar.
- **4. ¿Qué ponemos en la diagonal de D?**
  $\rightarrow$ Los **valores propios** de A.
- **5. ¿Es única la matriz P que diagonaliza?**
  $\rightarrow$ **NO**. Podemos reordenar columnas o escalar los vectores.

Aplicación: Potencias de una Matriz

Si A es diagonalizable ($A = PDP^{-1}$), entonces:

$$A^k = (PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$$

Cálculo de A^{10}

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Diagonalizar:** $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$. $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. **Elevar la Diagonal:** $D^{10} = \begin{pmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59049 & 0 \\ 0 & 1024 \end{pmatrix}$
3. **Reconstruir:** $A^{10} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59049 & 0 \\ 0 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo: Sucesión de Fibonacci

La sucesión $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8...$ se define como $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Podemos escribirla matricialmente:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

- Los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ (Número Áureo)}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

- Para n grande, el comportamiento está dominado por $\lambda_1 \approx 1{,}618$.
- Esto explica por qué el cociente de términos consecutivos tiende a φ.

Matrices Simétricas

Definición

Una matriz A es **simétrica** si $A = A^t$.

Teorema Espectral (Propiedades clave): Si A es una matriz real simétrica:

1. Todos sus valores propios son **REALES**.
2. Vectores propios de autovalores distintos son **ORTOGONALES**.
3. Siempre es diagonalizable **ortogonalmente**.

$$P^{-1}AP = D \quad \text{con } P \text{ ortogonal } (P^{-1} = P^t)$$

Matrices Ortogonales

Definition

Una matriz cuadrada P es **ortogonal** si sus columnas forman una base ortonormal.

$$P^t P = PP^t = I \iff P^{-1} = P^t$$

Propiedades:

- Conservan el producto escalar: $\langle P\vec{u}, P\vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$.
- Conservan la norma (longitud) de los vectores: $\|P\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.
- Su determinante es ± 1 (Rotaciones o Reflexiones).

Objetivo: Buscamos P ortogonal tal que $P^t AP = D$.

Algoritmo de Diagonalización Ortogonal

Dada una matriz simétrica A:

1. Calcular el **polinomio característico** y los autovalores λ_i.
2. Hallar una base para cada **subespacio propio** $V(\lambda_i)$.
3. **Ortonormalizar** la base de cada subespacio:
   - Si $m_g(\lambda) = 1$, basta con normalizar el vector (dividir por su norma).
   - Si $m_g(\lambda) > 1$, usar el método de Gram-Schmidt si los vectores no son ya ortogonales.
4. Construir P colocando estos vectores ortonormales como columnas.
5. La matriz diagonal D tendrá los autovalores en la diagonal.

Ejemplo de Diagonalización Ortogonal

Diagonalizar ortogonalmente $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Autovalores: $|A - \lambda I| = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$.

Ejemplo de Diagonalización Ortogonal

Diagonalizar ortogonalmente $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Autovalores: $|A - \lambda I| = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$.

2. Autovectores:

- Para $\lambda_1 = 4$: $-x + y = 0 \implies \vec{u}_1 = (1, 1)$.
- Para $\lambda_2 = 2$: $x + y = 0 \implies \vec{u}_2 = (1, -1)$.

Observamos que $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1(1) + 1(-1) = 0$. ¡Son ortogonales! (Teorema Espectral).

Ejemplo de Diagonalización Ortogonal

Diagonalizar ortogonalmente $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Autovalores: $|A - \lambda I| = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$.

2. Autovectores:

- Para $\lambda_1 = 4$: $-x + y = 0 \implies \vec{u}_1 = (1,1)$.
- Para $\lambda_2 = 2$: $x + y = 0 \implies \vec{u}_2 = (1,-1)$.

Observamos que $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1(1) + 1(-1) = 0$. ¡Son ortogonales! (Teorema Espectral).

3. Normalización:

$$\vec{v}_1 = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}, \quad \vec{v}_2 = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo de Diagonalización Ortogonal

Diagonalizar ortogonalmente $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Autovalores: $|A - \lambda I| = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$.

2. Autovectores:

- Para $\lambda_1 = 4$: $-x + y = 0 \implies \vec{u}_1 = (1,1)$.
- Para $\lambda_2 = 2$: $x + y = 0 \implies \vec{u}_2 = (1,-1)$.

Observamos que $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1(1) + 1(-1) = 0$. ¡Son ortogonales! (Teorema Espectral).

3. Normalización:

$$\vec{v}_1 = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}, \quad \vec{v}_2 = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$$

4. Matrices Finales:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos: $PDP^t = A$.

Vibraciones en Vehículos

En ingeniería mecánica, el estudio de las vibraciones es clave para el confort y la seguridad.

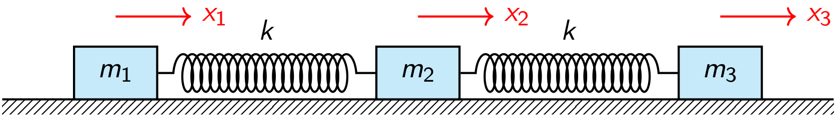
- El coche se modela como masas interconectadas por muelles (suspensión).
- La **diagonalización** de la matriz de rigidez revela los **modos normales** y sus **frecuencias naturales**.

Importancia

- Prevenir resonancias destructivas.
- Optimizar el diseño estructural.

Modelo de 3 Masas y 2 Muelles

Supongamos un modelo simplificado (frontal, chasis, trasera):



- $M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = 0 \quad$ con $m = 1$.
- La matriz K que aparece a continuación ya incorpora la constante k de los muelles.

Planteamiento Matricial

Analizando las fuerzas de Hooke para cada masa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

- El término **2k** en la masa central surge por estar conectada a dos muelles.
- La suma de cada fila es cero (permite traslación global).

Frecuencias y Modos Propios

Buscamos autovalores de K: $\det(K - \lambda I) = 0$.

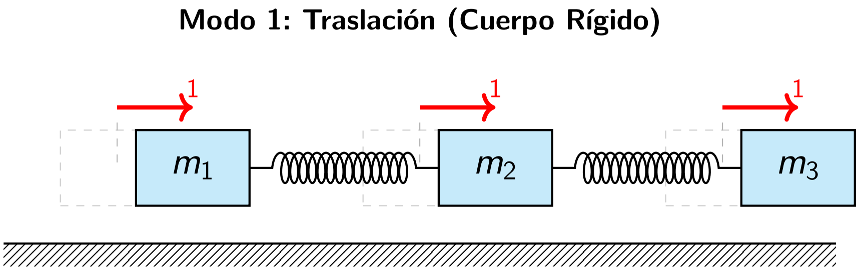
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = k, \quad \lambda_3 = 3k$$

Las frecuencias naturales son $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Interpretación del autovalor cero

$\lambda = 0 \implies$ No hay fuerza restauradora. El coche se mueve como un bloque rígido (traslación pura).

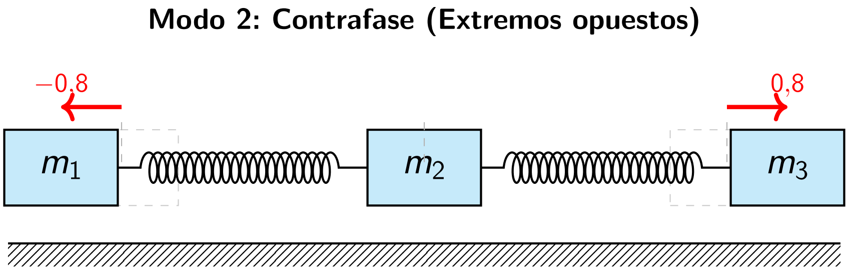
Modo 1: Traslación (Cuerpo Rígido)



Interpretación

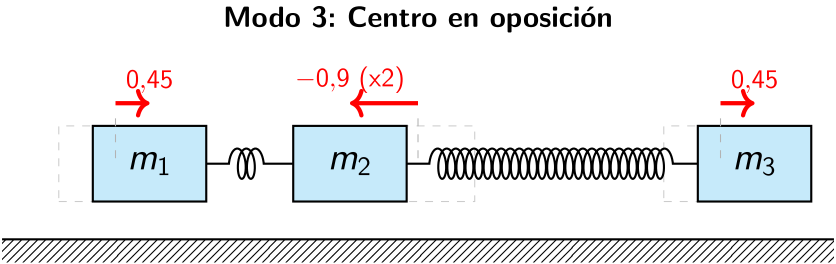
Las tres masas se mueven en fase con la misma amplitud. No hay deformación de los muelles ($\omega = 0$).

Modo 2: Contrafase (Extremos opuestos)



Interpretación

La masa central es un nodo (quieta). Los extremos oscilan en oposición ($\omega = \sqrt{k}$).



Interpretación

El centro oscila en oposición a los extremos con doble amplitud ($\omega = \sqrt{3k}$).

Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Toda matriz simétrica es diagonalizable?**

Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Toda matriz simétrica es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Siempre, en $\mathbb{R}$.

- **2. Si A es simétrica, ¿cómo son sus autovalores?**

Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Toda matriz simétrica es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Siempre, en $\mathbb{R}$.

- **2. Si A es simétrica, ¿cómo son sus autovalores?**
  $\rightarrow$ **Reales**. (No salen complejos).

- **3. ¿Qué cumple una matriz ortogonal P?**

Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Toda matriz simétrica es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Siempre, en $\mathbb{R}$.

- **2. Si A es simétrica, ¿cómo son sus autovalores?**
  $\rightarrow$ **Reales**. (No salen complejos).

- **3. ¿Qué cumple una matriz ortogonal P?**
  $\rightarrow$ $P^t P = I$ (su inversa es su traspuesta).

- **4. ¿Dos vectores propios del mismo autovalor son siempre ortogonales?**

Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Toda matriz simétrica es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Siempre, en $\mathbb{R}$.
- **2. Si A es simétrica, ¿cómo son sus autovalores?**
  $\rightarrow$ **Reales**. (No salen complejos).
- **3. ¿Qué cumple una matriz ortogonal P?**
  $\rightarrow$ $P^t P = I$ (su inversa es su traspuesta).
- **4. ¿Dos vectores propios del mismo autovalor son siempre ortogonales?**
  $\rightarrow$ **NO** necesariamente, pero podemos ortonormalizarlos.
- **5. ¿Podemos diagonalizar ortogonalmente una matriz que no sea simétrica?**

Preguntas de Concepto Finales

- **1. ¿Toda matriz simétrica es diagonalizable?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Siempre, en $\mathbb{R}$.
- **2. Si A es simétrica, ¿cómo son sus autovalores?**
  $\rightarrow$ **Reales**. (No salen complejos).
- **3. ¿Qué cumple una matriz ortogonal P?**
  $\rightarrow$ $P^t P = I$ (su inversa es su traspuesta).
- **4. ¿Dos vectores propios del mismo autovalor son siempre ortogonales?**
  $\rightarrow$ **NO** necesariamente, pero podemos ortonormalizarlos.
- **5. ¿Podemos diagonalizar ortogonalmente una matriz que no sea simétrica?**
  $\rightarrow$ **NO** (en $\mathbb{R}$). Solo las matrices simétricas admiten una base ortonormal de autovectores.

Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Si una matriz 3×3 tiene autovalores $2, 2, 5$, es seguro que NO es diagonalizable.**

Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Si una matriz 3×3 tiene autovalores $2, 2, 5$, es seguro que NO es diagonalizable.** **FALSO**.
   Depende de si la dimensión del subespacio propio del 2 es 2 (sí diagonalizable) o 1 (no diagonalizable).

2. **Si A es inversible, entonces es diagonalizable.**

Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Si una matriz 3×3 tiene autovalores $2, 2, 5$, es seguro que NO es diagonalizable.** **FALSO**.
   Depende de si la dimensión del subespacio propio del 2 es 2 (sí diagonalizable) o 1 (no diagonalizable).

2. **Si A es inversible, entonces es diagonalizable.** **FALSO**.
   Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *es inversible (det=1) pero no diagonalizable.*

3. **Si A es diagonalizable, A^T también lo es.**

Quiz Rápido: ¿Verdadero o Falso?

1. **Si una matriz 3×3 tiene autovalores $2, 2, 5$, es seguro que NO es diagonalizable.** **FALSO**.
   Depende de si la dimensión del subespacio propio del 2 es 2 (sí diagonalizable) o 1 (no diagonalizable).

2. **Si A es inversible, entonces es diagonalizable.** **FALSO**.
   Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *es inversible (det=1) pero no diagonalizable.*

3. **Si A es diagonalizable, A^T también lo es.** **VERDADERO**.
   $\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$, *luego comparten polinomio característico y multiplicidades.*

Cálculo Mental: Propiedades de la Traza y Determinante

Truco:

- $\sum \lambda_i = \text{tr}(A)$ (Suma de la diagonal).
- $\prod \lambda_i = \det(A)$.

Ejercicio Rápido

La matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene un autovalor $\lambda_1 = 6$. ¿Cuál es el otro autovalor λ_2?

Cálculo Mental: Propiedades de la Traza y Determinante

Truco:

- $\sum \lambda_i = \text{tr}(A)$ (Suma de la diagonal).
- $\prod \lambda_i = \det(A)$.

Ejercicio Rápido

La matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene un autovalor $\lambda_1 = 6$. ¿Cuál es el otro autovalor λ_2?

Solución usando la Traza:

$$\text{tr}(A) = 5 + 2 = 7$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 7 \implies 6 + \lambda_2 = 7 \implies \lambda_2 = 1$$

Cálculo Mental: Propiedades de la Traza y Determinante

Truco:

- $\sum \lambda_i = \text{tr}(A)$ (Suma de la diagonal).
- $\prod \lambda_i = \det(A)$.

Ejercicio Rápido

La matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene un autovalor $\lambda_1 = 6$. ¿Cuál es el otro autovalor λ_2?

Solución usando la Traza:

$$\text{tr}(A) = 5 + 2 = 7$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 7 \implies 6 + \lambda_2 = 7 \implies \lambda_2 = 1$$

Comprobación con Determinante: $10 - 4 = 6 = 6 \cdot 1$. *Correcto.*

Reto Conceptual: Potencias y Límites

Sea A una matriz diagonalizable con autovalores $\lambda_1 = 0{,}5$ y $\lambda_2 = 0{,}8$. Consideramos el vector $\vec{x}_k = A^k \vec{x}_0$.

Pregunta: ¿Qué pasa con $\vec{x}_k$ cuando $k \to \infty$?

Reto Conceptual: Potencias y Límites

Sea A una matriz diagonalizable con autovalores $\lambda_1 = 0{,}5$ y $\lambda_2 = 0{,}8$. Consideramos el vector $\vec{x}_k = A^k \vec{x}_0$.

Pregunta: ¿Qué pasa con $\vec{x}_k$ cuando $k \to \infty$?

$$\vec{x}_k \to \vec{0}$$

Razón: Como $|\lambda_i| < 1$, al elevarlos a potencias infinitas, ambos tienden a cero. Es un sistema estable.

La Pregunta Trampa

Si $A^2 = I$ (Matriz involutiva), ¿cuáles pueden ser sus autovalores?

La Pregunta Trampa

Si $A^2 = I$ (Matriz involutiva), ¿cuáles pueden ser sus autovalores?
Si λ es autovalor de A, entonces λ^2 es autovalor de A^2.

$$\lambda^2 = 1 \implies \lambda = 1 \text{ ó } \lambda = -1$$

Ejemplos:

- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \lambda = \{1, 1\}$ (Identidad).
- $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \lambda = \{-1, -1\}$ (Simetría central).
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \lambda = \{1, -1\}$ (Reflexión respecto al eje X).
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \lambda = \{1, -1\}$ (Reflexión respecto a la recta $y = x$).

Fin del Capítulo 4

Diagonalización

Autovalores · Diagonalización · Diag. ortogonal · Vibraciones