Álgebra y Ecuaciones Diferenciales
Capítulo 5: E.D.O. de Primer Orden

José Javier Relancio Martínez

Universidad de Burgos

2026

Índice

Definiciones: Ecuación Diferencial

Definición

Una **Ecuación Diferencial** es una ecuación que relaciona una función incógnita con sus derivadas y la variable independiente.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

- **E.D.O. (Ordinaria):** Una sola variable independiente ($y(x)$).
- **E.D.P. (Parciales):** Varias variables independientes ($u(x, t)$).
- **Orden:** El de la derivada más alta que aparece.

Ejemplos

- $y' = -\lambda y$ (Orden 1, Lineal)
- $mx'' + kx = 0$ (Orden 2, Lineal)
- $(y')^2 + y = x$ (Orden 1, No Lineal por $(y')^2$)

Solución General y Particular

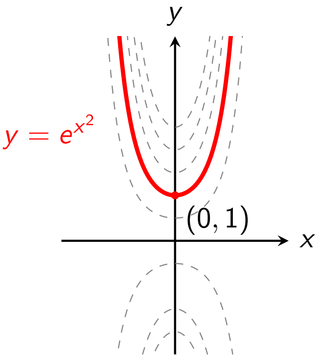
Dada la ecuación: $\boldsymbol{y' = 2xy}$

- **Solución General:** Familia de funciones con constantes arbitrarias ($\boldsymbol{C}$).

$$\boldsymbol{y(x) = Ce^{x^2}}$$

- **Solución Particular:** Una función específica obtenida al fijar las constantes (usando condiciones iniciales).

$$\boldsymbol{y(0) = 1 \implies C = 1 \implies y(x) = e^{x^2}}$$



Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Cuál es el orden de $y''' + (y')^4 = \sin x$?**

Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Cuál es el orden de $y''' + (y')^4 = \sin x$?**
  $\rightarrow$ **3**. La potencia no afecta al orden, solo la derivada.

- **2. ¿La solución general de una EDO orden 2 tiene 2 constantes?**

Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Cuál es el orden de $y''' + (y')^4 = \sin x$?**
  $\rightarrow$ **3**. La potencia no afecta al orden, solo la derivada.

- **2. ¿La solución general de una EDO orden 2 tiene 2 constantes?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Normalmente (C_1, C_2).

- **3. ¿Es $y' = y^2$ una ecuación lineal?**

Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Cuál es el orden de $y''' + (y')^4 = \sin x$?**
  $\rightarrow$ **3**. La potencia no afecta al orden, solo la derivada.
- **2. ¿La solución general de una EDO orden 2 tiene 2 constantes?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Normalmente (C_1, C_2).
- **3. ¿Es $y' = y^2$ una ecuación lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. La variable dependiente y está al cuadrado.
- **4. ¿Qué es un Problema de Valor Inicial (PVI)?**

Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Cuál es el orden de $y''' + (y')^4 = \sin x$?**
  $\rightarrow$ **3**. La potencia no afecta al orden, solo la derivada.
- **2. ¿La solución general de una EDO orden 2 tiene 2 constantes?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Normalmente (C_1, C_2).
- **3. ¿Es $y' = y^2$ una ecuación lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. La variable dependiente y está al cuadrado.
- **4. ¿Qué es un Problema de Valor Inicial (PVI)?**
  $\rightarrow$ Una EDO + condiciones para hallar una solución **única**.
- **5. ¿Toda EDO tiene solución?**

Preguntas de Concepto (Definiciones)

- **1. ¿Cuál es el orden de $y''' + (y')^4 = \sin x$?**
  $\rightarrow$ **3**. La potencia no afecta al orden, solo la derivada.
- **2. ¿La solución general de una EDO orden 2 tiene 2 constantes?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Normalmente (C_1, C_2).
- **3. ¿Es $y' = y^2$ una ecuación lineal?**
  $\rightarrow$ **NO**. La variable dependiente y está al cuadrado.
- **4. ¿Qué es un Problema de Valor Inicial (PVI)?**
  $\rightarrow$ Una EDO + condiciones para hallar una solución **única**.
- **5. ¿Toda EDO tiene solución?**
  $\rightarrow$ **NO**. O puede no ser única (Teorema de Existencia y Unicidad).

1. Variables Separadas

Forma:

$$P(x)dx = Q(y)dy$$

Se resuelve integrando ambos lados:

$$\int P(x)dx = \int Q(y)dy + C$$

Ejemplo

Resolver $xdx + ydy = 0$.

$$\int xdx = -\int ydy$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C \implies x^2 + y^2 = K$$

(Circunferencias céntricas).

Funciones Homogéneas (I)

Una función $f(x, y)$ es **homogénea de grado n** si se cumple:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Ejemplo: Homogénea (grado 2)

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$$

Sustituyendo x por λx e y por λy:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(x^2 + y^2 - xy) = \lambda^2 f(x, y)$$

Funciones Homogéneas (II)

Ejemplo: NO Homogénea

$$f(x, y) = x^2 + y$$

Sustituyendo comprobamos que las λ no se pueden sacar factor común con el mismo exponente:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda y \neq \lambda^n f(x, y)$$

2. Ecuaciones Homogéneas (I)

Una E.D.O. $y' = f(x,y)$ es **homogénea** si $f(x,y)$ es homogénea de **grado 0**:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x,y) = f(x,y)$$

Método: Cambio de variable $u = \frac{y}{x}$ (o $y = ux \implies y' = u'x + u$), y se convierte en **variables separadas**.

Ejemplo: Resolver $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ (Parte 1)

1. Comprobar que es homogénea (grado 0):

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{\lambda^2(x^2+y^2)}{\lambda^2(xy)} = \frac{x^2+y^2}{xy} = f(x,y)$$

Ejemplo: Resolver $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ (Parte 2)

2. Resolución: Notar que $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{u} + u$.

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u \implies u'x = \frac{1}{u} \implies u\,du = \frac{dx}{x}$$

Integramos a ambos lados:

$$\int u\,du = \int \frac{dx}{x} \implies \frac{u^2}{2} = \ln|x| + C$$

Deshaciendo el cambio $u = \frac{y}{x}$:

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$$

2.1 Ecuaciones Reducibles a Homogéneas

Forma: $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Sistema asociado: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$

- **Secantes (solución única α, β):** Hacemos el cambio de variables para trasladar el origen:

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta$$

  La ecuación se transforma en una **E.D.O. homogénea**.

- **Paralelas (sin solución):** Hacemos el cambio $z = a_1x + b_1y$. La ecuación se transforma en una de **variables separadas**.

Ejemplo: Reducible a Hom. (Secantes 1/2)

Resolver la E.D.O.

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$$

1. Sistema Asociado:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -x + y - 4 = 0 \end{cases} \implies \text{Solución única: } x = -1,\ y = 3$$

2. Cambio de variable (traslación):

$$x = X - 1 \implies dx = dX, \quad y = Y + 3 \implies dy = dY$$

3. Ecuación transformada: Sustituyendo en la E.D.O. original, los términos independientes se cancelan:

$$(X + Y)dX + (X - Y)dY = 0$$

Esta es una **E.D.O. homogénea**. Se resuelve con el cambio $Y = uX$.

Ejemplo: Reducible a Hom. (Secantes 2/2)

4. Resolución de la homogénea: con $Y = uX \implies dY = udX + Xdu$. Sustituimos en $(X+Y)dX + (X-Y)dY = 0$:

$$X(1+u)dX + X(1-u)(udX + Xdu) = 0$$

Dividiendo por X y agrupando términos de dX:

$$(1+2u-u^2)dX + X(1-u)du = 0 \implies \frac{1-u}{1+2u-u^2}du = -\frac{1}{X}dX$$

5. Integración:

$$\frac{1}{2}\ln|1+2u-u^2| = -\ln|X| + C_1 \implies X^2(1+2u-u^2) = C_2$$

6. Deshacer el cambio: $u = Y/X \implies X^2 + 2XY - Y^2 = C_2$. Sustituyendo $X = x+1$ y $Y = y-3$:

$$x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y = C$$

Ejemplo: Reducible a Hom. (Paralelas 1/2)

Resolver la E.D.O.

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$$

1. Identificación: Las rectas $x + y + 1 = 0$ y $2x + 2y - 1 = 0$ son paralelas (no hay punto de corte).
2. Cambio de variable: Tomamos $z = x + y$. Derivando respecto a x: $z' = 1 + y' \implies y' = z' - 1$.
3. Ecuación transformada: Escribiendo la E.D.O. como $y' = -\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}$:

$$z' - 1 = -\frac{z+1}{2z-1} \implies z' = \frac{z-2}{2z-1}$$

$$\frac{2z-1}{z-2}dz = dx$$

Esta es una **E.D.O. separables**.

Ejemplo: Reducible a Hom. (Paralelas 2/2)

4. Resolución de la E.D.O. de variables separadas:

$$\frac{2z-1}{z-2}dz = dx$$

Dividimos el polinomio del integrando:

$$\frac{2z-1}{z-2} = \frac{2(z-2)+3}{z-2} = 2 + \frac{3}{z-2}$$

5. Integración:

$$\int \left(2 + \frac{3}{z-2}\right) dz = \int dx \implies 2z + 3\ln|z-2| = x + C_1$$

6. Deshacer el cambio ($z = x + y$):

$$2(x+y) + 3\ln|x+y-2| = x + C_1$$

Simplificando y aplicando propiedades de logaritmos:

$$x + 2y + \ln|(x+y-2)^3| = C_1 \implies (x+y-2)^3 e^{x+2y} = C$$

3. Ecuaciones Lineales

Forma estándar:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Método del Factor Integrante: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. Multiplicando por $\mu(x)$, el lado izquierdo se convierte en derivada de un producto:

$$(\mu(x) \cdot y)' = \mu(x)q(x)$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)q(x)dx + C \right]$$

Ejemplo Simple

$y' + y = e^x \implies p(x) = 1 \implies \mu(x) = e^x$.

$$y = e^{-x} \left(\int e^x \cdot e^x \, dx + C \right) = e^{-x} \left(\frac{e^{2x}}{2} + C \right) = \frac{e^x}{2} + Ce^{-x}$$

Una ecuación de **Bernoulli en** y tiene la forma:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

(Si $n = 0$ o $n = 1$, la ecuación ya sería lineal).

Método de resolución: Se aplica el cambio de variable dependiente:

$$z = y^{1-n}$$

Al derivar y sustituir en la ecuación original, ésta se transforma en una **E.D.O. lineal** respecto a la nueva variable z.

Ejemplo: Ecuación de Bernoulli (1/2)

Resolver la E.D.O.

$$xy' + y = y^2 \ln x$$

1. Forma estándar: Dividimos por x (con $x \neq 0$):

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2 \quad \text{(Bernoulli con } n = 2\text{)}$$

2. Cambio de variable: $z = y^{1-n} = y^{-1} \implies z' = -y^{-2}y'$
Multiplicando la ecuación original por $-y^{-2}$:

$$-y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{\ln x}{x} \implies z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$$

3. E.D.O. Lineal en z: Factor integrante $\mu(x) = e^{\int -1/x dx} = 1/x$.

$$z(x) = x\left[\int \left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{\ln x}{x}\right)dx + C\right] = x\left[\int -\frac{\ln x}{x^2}dx + C\right]$$

Ejemplo: Ecuación de Bernoulli (2/2)

4. Integración por partes: Para la integral $\int -\frac{\ln x}{x^2} dx$:

$$u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = -x^{-2} dx \implies v = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$\int -\frac{\ln x}{x^2} dx = uv - \int v du = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$$

5. Sustitución en z:

$$z(x) = x \left[\frac{\ln x + 1}{x} + C \right] = \ln x + 1 + Cx$$

6. Solución General (deshaciendo el cambio):

$$z = y^{-1} = \frac{1}{y} \implies y(x) = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$$

4. Ecuaciones Exactas

Forma: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Es **exacta** si sus derivadas cruzadas coinciden:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Existe una función potencial $U(x,y)$ tal que $dU = 0 \implies U(x,y) = C$.

1. Integrar P respecto a x: $U = \int P dx + \phi(y)$.
2. Derivar respecto a y e igualar a Q: $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$.
3. Despejar $\phi(y)$.

Factor Integrante: Si no es exacta, buscamos μ tal que al multiplicar lo sea.

- Si $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ depende solo de $x \implies \mu(x)$.
- Si $\frac{Q_x - P_y}{P}$ depende solo de $y \implies \mu(y)$.

Ejemplo: Ecuación Exacta (1/2)

Resolver la E.D.O.

$$(\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy))\,dx + x^2\cos(xy)\,dy = 0$$

Identificamos los componentes:

- $P(x, y) = \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy)$
- $Q(x, y) = x^2\cos(xy)$

1. Comprobar exactitud:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos(xy) - x^2y\operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2y\operatorname{sen}(xy)$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, concluimos que la ecuación **es exacta**.

Ejemplo: Ecuación Exacta (2/2)

2. Buscar función potencial $\boldsymbol{U(x,y)}$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \implies U(x,y) = \int x^2 \cos(xy)\, dy = x \operatorname{sen}(xy) + \varphi(x)$$

3. Derivar respecto a $\boldsymbol{x}$ e igualar a $\boldsymbol{P}$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy) + \varphi'(x)$$

Igualando a $P(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy)$:

$$\implies \varphi'(x) = 0 \implies \varphi(x) = K$$

Solución general implícita

$$x \operatorname{sen}(xy) = C$$

Ejemplo: Factor Integrante (1/2)

Resolver la E.D.O.

$$(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$$

1. Comprobar exactitud:

$$P(x,y) = x^2 + y^2 + x \implies P_y = 2y$$

$$Q(x,y) = xy \implies Q_x = y$$

Como $P_y \neq Q_x$, la ecuación **no es exacta**.

2. Buscar factor integrante:

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

Como depende sólo de x, existe un factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x \quad (x > 0)$$

Ejemplo: Factor Integrante (2/2)

3. Multiplicar por el factor integrante $\mu(x) = x$:

$$x(x^2 + y^2 + x)\,dx + x(xy)\,dy = 0$$

$$(x^3 + xy^2 + x^2)\,dx + x^2y\,dy = 0$$

Esta **nueva ecuación ya es exacta** (comprobamos: $\tilde{P}_y = 2xy$, $\tilde{Q}_x = 2xy$).
4. Resolver la exacta: Buscamos $U(x, y)$ tal que $U_y = \tilde{Q}$:

$$U(x, y) = \int \tilde{Q}\,dy = \int x^2y\,dy = \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(x)$$

Derivando respecto a x e igualando a $\tilde{P}$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = xy^2 + \varphi'(x) = x^3 + xy^2 + x^2 \implies \varphi'(x) = x^3 + x^2$$

$$\varphi(x) = \int (x^3 + x^2)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}$$

Solución General: $\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} = C$

Preguntas de Concepto (Métodos)

- **1. ¿Puede una ecuación ser separable y lineal a la vez?**

Preguntas de Concepto (Métodos)

- **1. ¿Puede una ecuación ser separable y lineal a la vez?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ej: $y' = y$ (variable separable y lineal homogénea).
- **2. ¿Qué cambio convierte una Bernoulli en lineal?**

Preguntas de Concepto (Métodos)

- **1. ¿Puede una ecuación ser separable y lineal a la vez?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ej: $y' = y$ (variable separable y lineal homogénea).
- **2. ¿Qué cambio convierte una Bernoulli en lineal?**
  $\rightarrow z = y^{1-n}$.
- **3. Si** $Pdx + Qdy = 0$ **es exacta, ¿qué implica?**

Preguntas de Concepto (Métodos)

- **1. ¿Puede una ecuación ser separable y lineal a la vez?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ej: $y' = y$ (variable separable y lineal homogénea).
- **2. ¿Qué cambio convierte una Bernoulli en lineal?**
  $\rightarrow z = y^{1-n}$.
- **3. Si $Pdx + Qdy = 0$ es exacta, ¿qué implica?**
  $\rightarrow$ Que proviene de un gradiente $\nabla U = (P, Q)$.
- **4. ¿El factor integrante es único?**

Preguntas de Concepto (Métodos)

- **1. ¿Puede una ecuación ser separable y lineal a la vez?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ej: $y' = y$ (variable separable y lineal homogénea).
- **2. ¿Qué cambio convierte una Bernoulli en lineal?**
  $\rightarrow z = y^{1-n}$.
- **3. Si $Pdx + Qdy = 0$ es exacta, ¿qué implica?**
  $\rightarrow$ Que proviene de un gradiente $\nabla U = (P, Q)$.
- **4. ¿El factor integrante es único?**
  $\rightarrow$ **NO**. Puede haber varios, salvo constante multiplicativa.
- **5. ¿Cómo identifico una ecuación homogénea?**

Preguntas de Concepto (Métodos)

- **1. ¿Puede una ecuación ser separable y lineal a la vez?**
  $\rightarrow$ **SÍ**. Ej: $y' = y$ (variable separable y lineal homogénea).
- **2. ¿Qué cambio convierte una Bernoulli en lineal?**
  $\rightarrow z = y^{1-n}$.
- **3. Si $Pdx + Qdy = 0$ es exacta, ¿qué implica?**
  $\rightarrow$ Que proviene de un gradiente $\nabla U = (P, Q)$.
- **4. ¿El factor integrante es único?**
  $\rightarrow$ **NO**. Puede haber varios, salvo constante multiplicativa.
- **5. ¿Cómo identifico una ecuación homogénea?**
  $\rightarrow$ Si al sustituir (x, y) por (tx, ty) la ecuación no cambia (se cancelan las t).

Ejemplo: Desintegración Radiactiva

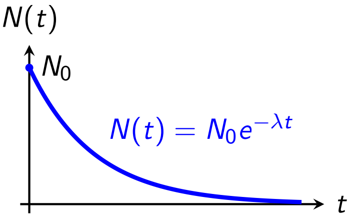
La tasa de desintegración de núcleos es proporcional a la cantidad presente en cada instante t.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Ejemplo: Desintegración Radiactiva

La tasa de desintegración de núcleos es proporcional a la cantidad presente en cada instante t.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$



Solución

Variables separadas: $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$.
Integrando ambos miembros:

$$\ln |N| = -\lambda t + C$$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Aplicación: Datación por Radiocarbono

El Plomo-209 se desintegra proporcionalmente a la cantidad presente: $A'(t) = kA(t) \implies A(t) = A_0 e^{kt}$. **Dato:** Vida media de 3 horas ($A(3) = A_0/2$).

Aplicación: Datación por Radiocarbono

El Plomo-209 se desintegra proporcionalmente a la cantidad presente: $A'(t) = kA(t) \implies A(t) = A_0 e^{kt}$. **Dato:** Vida media de 3 horas ($A(3) = A_0/2$).

Solución

Hallamos k:

$$0{,}5A_0 = A_0 e^{3k} \implies \ln(0{,}5) = 3k \implies k = -\frac{\ln 2}{3}$$

El modelo es $A(t) = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{3}t}$.

¿Tiempo para desintegrar el 87.5 % (queda el 12.5 %)?

$$0{,}125 = e^{-\frac{\ln 2}{3}t} \implies \ln(2^{-3}) = -\frac{\ln 2}{3}t \implies -3\ln 2 = -\frac{\ln 2}{3}t$$

$$t = 9 \text{ horas.}$$

Aplicación: Caída Libre

La ecuación diferencial de caída libre con término de rozamiento proporcional a la velocidad es:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt} \implies \frac{dv}{dt} = g - cv$$

donde $v = \frac{dy}{dt}$ y $c = \frac{k}{m}$.

Aplicación: Caída Libre

La ecuación diferencial de caída libre con término de rozamiento proporcional a la velocidad es:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt} \implies \frac{dv}{dt} = g - cv$$

donde $v = \frac{dy}{dt}$ y $c = \frac{k}{m}$.

Solución

Es una ecuación de variables separadas:

$$\frac{dv}{g - cv} = dt \implies -\frac{1}{c}\ln(g - cv) = t + C_1$$

Despejando y aplicando la condición $v(0) = 0$:

$$v(t) = \frac{g}{c}(1 - e^{-ct})$$

La velocidad límite cuando $t \to \infty$ es $v_{\text{lím}} = \frac{g}{c}$.

Aplicación: Caída Libre (Rozamiento Cuadrático)

Si el término de rozamiento es proporcional al **cuadrado de la velocidad**:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \implies \frac{dv}{dt} = g - cv^2$$

Aplicación: Caída Libre (Rozamiento Cuadrático)

Si el término de rozamiento es proporcional al **cuadrado de la velocidad**:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \implies \frac{dv}{dt} = g - cv^2$$

Solución

Separando variables e integrando:

$$\int \frac{dv}{g - cv^2} = \int dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{cg}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{c}{g}}v\right) = t + C_1$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{c}}\tanh\left(\sqrt{cg}(t + C_1)\right)$$

La velocidad límite ($t \to \infty$) es $v_{\text{lím}} = \sqrt{g/c}$.

Aplicación: Población Logística

Cantidad $C(t)$ de supermercados con cajas computarizadas:

$$\frac{dC}{dt} = C(1 - 0{,}0005C), \quad C(0) = 1$$

Aplicación: Población Logística

Cantidad $C(t)$ de supermercados con cajas computarizadas:

$$\frac{dC}{dt} = C(1 - 0{,}0005C), \quad C(0) = 1$$

Solución

Reescribimos como ecuación logística con capacidad de carga $K = 2000$:

$$\frac{dC}{dt} = C\left(\frac{2000 - C}{2000}\right) \implies \frac{2000\,dC}{C(2000 - C)} = dt$$

Al integrar por fracciones parciales obtenemos:

$$C(t) = \frac{2000}{1 + 1999e^{-t}}$$

- Para $t = 10$: $C(10) \approx 1834$ supermercados.
- A largo plazo $(t \to \infty)$: $C \to 2000$.

Aplicación: Proceso Industrial (Mezclas)

En un tanque con 100 L de agua, entra salmuera (3 kg/L) a 2 L/min y sale a 1 L/min. El volumen aumenta. La cantidad de sal $A(t)$ obedece:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100+t} = 6, \quad A(0) = 0$$

Aplicación: Proceso Industrial (Mezclas)

En un tanque con 100 L de agua, entra salmuera (3 kg/L) a 2 L/min y sale a 1 L/min. El volumen aumenta. La cantidad de sal $A(t)$ obedece:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100+t} = 6, \quad A(0) = 0$$

Solución

Es una ecuación lineal $A' + p(t)A = q(t)$, con factor integrante $\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100+t} dt} = 100 + t$.

$$A(t) = \frac{1}{100+t}\left(\int (600 + 6t) dt + C\right) = \frac{3t^2 + 600t + C}{100+t}$$

Usando $A(0) = 0 \implies C = 0$.

$$\text{Cantidad final: } A(t) = \frac{3t^2 + 600t}{100+t} \text{ kg.}$$

Aplicación: Circuito RL en Serie

La corriente $i(t)$ satisface $L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$. Datos: $L = 2$, $R = 10$, $E = 100$.

$$2\frac{di}{dt} + 10i = 100 \implies \frac{di}{dt} + 5i = 50, \quad i(0) = 0$$

Aplicación: Circuito RL en Serie

La corriente $i(t)$ satisface $L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$. Datos: $L = 2$, $R = 10$, $E = 100$.

$$2\frac{di}{dt} + 10i = 100 \implies \frac{di}{dt} + 5i = 50, \quad i(0) = 0$$

Solución

Ecuación lineal con factor integrante $\mu(t) = e^{5t}$.

$$(i \cdot e^{5t})' = 50e^{5t} \implies i \cdot e^{5t} = \int 50e^{5t}dt = 10e^{5t} + C$$

$$i(t) = 10 + Ce^{-5t}$$

Como $i(0) = 0 \implies C = -10$.

$$i(t) = 10(1 - e^{-5t}) \text{ Amperios.}$$

Aplicación: Farmacocinética

Concentración $C(t)$ de un fármaco en sangre, eliminada de forma proporcional a sí misma:

$$\frac{dC}{dt} = -k\, C(t)$$

Se da $k = \ln 2$ y $C(0) = 16$.

Aplicación: Farmacocinética

Concentración $C(t)$ de un fármaco en sangre, eliminada de forma proporcional a sí misma:

$$\frac{dC}{dt} = -k\,C(t)$$

Se da $k = \ln 2$ y $C(0) = 16$.

Solución y Vida Media

Solución general: $C(t) = 16e^{-(\ln 2)t} = 16 \cdot 2^{-t} = 2^{4-t}$.

Vida media $\left(C(t_{1/2}) = C_0/2\right)$**:**

$$C_0 e^{-kt_{1/2}} = \frac{C_0}{2} \implies t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$$

La concentración se reduce a la mitad cada unidad de tiempo. Para que se mantenga en rango terapéutico $C(t) \geq 2$:

$$2^{4-t} \geq 2^1 \implies 4 - t \geq 1 \implies t \leq 3$$

Fin del Capítulo 5

E.D.O. de Primer Orden

Separables · Homogéneas · Lineales · Exactas