

Álgebra y Ecuaciones Diferenciales

Capítulo 6: E.D.O. de Orden Superior

José Javier Relancio Martínez

Universidad de Burgos

2026

- 1 Conceptos Básicos
- 2 E.D.O. Homogéneas
- 3 E.D.O. Completas
- 4 Ecuación de Euler
- 5 Aplicaciones

Definición: E.D.O. Lineal de Orden n

Ecuación Lineal

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_n(x)y = g(x)$$

- **Homogénea:** Si $g(x) = 0$.
- **Completa (No homogénea):** Si $g(x) \neq 0$.
- **Coeficientes Constantes:** Si todos los $f_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

- $y'' + 3y' + 2y = 0$ (Homogénea, Coef. Constantes)
- $y''' + x^2y' = \sin x$ (Completa, Coef. Variables)

Teorema de Existencia y Unicidad

Problema de Valor Inicial (PVI)

Dada la EDO y n condiciones en un punto x_0 :

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Condición de Existencia: Si $f_i(x)$ y $g(x)$ son **continuas** en un intervalo I que contiene a x_0 , entonces existe una **única** solución en ese intervalo.

Importante

En orden n , necesitamos exactamente n condiciones iniciales para fijar la solución.

Dependencia Lineal

Definition

y_1, y_2, \dots, y_n son **Linealmente Independientes (L.I.)** si:

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0 \implies c_i = 0 \quad \forall i$$

Estructura de la Solución

Si tenemos n soluciones L.I., la **solución general** es:

$$y_H(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

Ejemplo: ¿Son e^x y e^{-x} linealmente independientes?

Dependencia Lineal

Definition

y_1, y_2, \dots, y_n son **Linealmente Independientes (L.I.)** si:

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0 \implies c_i = 0 \quad \forall i$$

Estructura de la Solución

Si tenemos n soluciones L.I., la **solución general** es:

$$y_H(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

Ejemplo: ¿Son e^x y e^{-x} linealmente independientes?

Planteamos la combinación lineal: $c_1e^x + c_2e^{-x} = 0 \quad \forall x$. Evaluamos en dos puntos cualesquiera (ej. $x = 0$ y $x = 1$):

- $x = 0 \implies c_1 + c_2 = 0 \implies c_2 = -c_1$
- $x = 1 \implies c_1e + c_2e^{-1} = 0 \implies c_1(e - e^{-1}) = 0 \implies c_1 = 0$

Como $c_1 = 0$ implica $c_2 = 0$, **sí** son linealmente independientes.

Ecuaciones con Coeficientes Constantes

Buscamos soluciones del tipo $y = e^{\lambda x}$. Sustituyendo en la EDO llegamos a la **Ecuación Característica**:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Casos de las raíces:

- **Reales distintas:** $\lambda_1, \lambda_2 \dots \implies e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \dots$
- **Reales repetidas:** λ con multiplicidad $k \implies e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$
- **Complejas:** $\alpha \pm \beta i \implies e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
- **Complejas repetidas:** $\alpha \pm \beta i$ mult.
 $k \implies e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (I)

1. Raíces reales distintas

Resolver $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (I)

1. Raíces reales distintas

Resolver $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \implies \lambda = 2, 3$.

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (I)

1. Raíces reales distintas

Resolver $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \implies \lambda = 2, 3$.

Solución general: $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

2. Raíces reales repetidas

Resolver $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (I)

1. Raíces reales distintas

Resolver $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \implies \lambda = 2, 3$.

Solución general: $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

2. Raíces reales repetidas

Resolver $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies (\lambda - 2)^2 = 0 \implies \lambda = 2$ (doble).

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (I)

1. Raíces reales distintas

Resolver $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \implies \lambda = 2, 3$.

Solución general: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

2. Raíces reales repetidas

Resolver $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies (\lambda - 2)^2 = 0 \implies \lambda = 2$ (doble).

Soluciones L.I.: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$.

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (I)

1. Raíces reales distintas

Resolver $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \implies \lambda = 2, 3$.

Solución general: $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

2. Raíces reales repetidas

Resolver $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies (\lambda - 2)^2 = 0 \implies \lambda = 2$ (doble).

Soluciones L.I.: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$. Solución general:

$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (II)

3. Raíces complejas

Resolver $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (II)

3. Raíces complejas

Resolver $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = 1 \pm 2i$.

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (II)

3. Raíces complejas

Resolver $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = 1 \pm 2i$. Soluciones reales (con $a = 1$, $b = 2$): $e^x \cos(2x)$, $e^x \sin(2x)$.

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (II)

3. Raíces complejas

Resolver $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = 1 \pm 2i$. Soluciones reales (con $a = 1$, $b = 2$): $e^x \cos(2x)$, $e^x \sin(2x)$. Solución general:

$$y(x) = C_1 e^x \cos(2x) + C_2 e^x \sin(2x).$$

4. Raíces complejas repetidas

Resolver $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (III)

4. Raíces complejas repetidas

Resolver $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \implies (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \implies \lambda = \pm i$
(doble).

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (III)

4. Raíces complejas repetidas

Resolver $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \implies (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \implies \lambda = \pm i$
(doble). Soluciones L.I. (con $a = 0, b = 1$):

$$\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x$$

Ejemplos: Ec. Homogéneas con Coef. Constantes (III)

4. Raíces complejas repetidas

Resolver $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Ec. característica: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \implies (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \implies \lambda = \pm i$
(doble). Soluciones L.I. (con $a = 0, b = 1$):

$$\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x$$

Solución general:

$$y(x) = (C_1 + C_2x) \cos x + (C_3 + C_4x) \sin x$$

Preguntas de Concepto (Homogéneas)

- 1. ¿Cuál es la ec. característica de $y'' - 5y' + 6y = 0$?

Preguntas de Concepto (Homogéneas)

- **1. ¿Cuál es la ec. característica de $y'' - 5y' + 6y = 0$?
→ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. (Raíces 2 y 3).**
- **2. Si las raíces son $\pm 3i$ ($a = 0$), ¿cuál es la solución?**

Preguntas de Concepto (Homogéneas)

- **1. ¿Cuál es la ec. característica de $y'' - 5y' + 6y = 0$?**
→ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. (Raíces 2 y 3).
- **2. Si las raíces son $\pm 3i$ ($a = 0$), ¿cuál es la solución?**
→ $y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$.
- **3. ¿Qué pasa si la raíz $\lambda = 0$ es doble?**

Preguntas de Concepto (Homogéneas)

- **1. ¿Cuál es la ec. característica de $y'' - 5y' + 6y = 0$?**
→ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. (Raíces 2 y 3).
- **2. Si las raíces son $\pm 3i$ ($a = 0$), ¿cuál es la solución?**
→ $y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$.
- **3. ¿Qué pasa si la raíz $\lambda = 0$ es doble?**
→ Genera soluciones $e^{0x} = 1$ y $xe^{0x} = x$. (Polinomio $A + Bx$).
- **4. ¿Pueden dos soluciones L.I. cruzarse en el eje x ?**

Preguntas de Concepto (Homogéneas)

- **1. ¿Cuál es la ec. característica de $y'' - 5y' + 6y = 0$?**
→ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. (Raíces 2 y 3).
- **2. Si las raíces son $\pm 3i$ ($a = 0$), ¿cuál es la solución?**
→ $y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$.
- **3. ¿Qué pasa si la raíz $\lambda = 0$ es doble?**
→ Genera soluciones $e^{0x} = 1$ y $xe^{0x} = x$. (Polinomio $A + Bx$).
- **4. ¿Pueden dos soluciones L.I. cruzarse en el eje x ?**
→ Sí, pero no pueden tener el mismo valor y la misma pendiente en un punto (por unicidad del PVI).

Estructura de la Solución Completa

La solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

donde:

- y_H : Solución general de la homogénea.
- y_P : Una solución particular de la completa.

Métodos para hallar y_P :

- 1 **Coeficientes Indeterminados:** Si $g(x)$ es "sencilla" (polinomios, senos, cosenos, exponenciales).
- 2 **Variación de Parámetros:** General, pero requiere integrales.

Método de Coeficientes Indeterminados

Hacemos un **tanteo** según la forma de $g(x)$:

Si $g(x)$ es...	Proponemos $y_P = \dots$
Polinomio $P_n(x)$	$x^k(A_n x^n + \dots + A_0)$
Exponencial $e^{\alpha x}$	$x^k A e^{\alpha x}$
Sen/Cos $\sin(\beta x)$	$x^k(A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x))$

Regla de modificación (x^k): Si la propuesta ya aparece en y_H , multiplicamos por x hasta que sea linealmente independiente.

Práctica: Propuesta de y_P (I)

Dada la ecuación $y'' - 5y' + 6y = g(x)$, la homogénea tiene raíces $\lambda = 2, \lambda = 3$.

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

¿Qué forma proponemos para y_P según $g(x)$?

- **1.** $g(x) = 4e^{5x}$

Práctica: Propuesta de y_P (I)

Dada la ecuación $y'' - 5y' + 6y = g(x)$, la homogénea tiene raíces $\lambda = 2, \lambda = 3$.

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

¿Qué forma proponemos para y_P según $g(x)$?

- **1.** $g(x) = 4e^{5x}$
 $\rightarrow y_P(x) = Ae^{5x} \quad (5 \neq 2, 3)$
- **2.** $g(x) = 4e^{2x}$

Práctica: Propuesta de y_P (I)

Dada la ecuación $y'' - 5y' + 6y = g(x)$, la homogénea tiene raíces $\lambda = 2, \lambda = 3$.

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

¿Qué forma proponemos para y_P según $g(x)$?

- **1.** $g(x) = 4e^{5x}$
 $\rightarrow y_P(x) = Ae^{5x}$ ($5 \neq 2, 3$)
- **2.** $g(x) = 4e^{2x}$
 $\rightarrow y_P(x) = Axe^{2x}$ (2 ya es raíz de y_H , multiplicamos por x)
- **3.** $g(x) = x^2 - 1$

Práctica: Propuesta de y_P (I)

Dada la ecuación $y'' - 5y' + 6y = g(x)$, la homogénea tiene raíces $\lambda = 2, \lambda = 3$.

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

¿Qué forma proponemos para y_P según $g(x)$?

- **1.** $g(x) = 4e^{5x}$
 $\rightarrow y_P(x) = Ae^{5x}$ ($5 \neq 2, 3$)
- **2.** $g(x) = 4e^{2x}$
 $\rightarrow y_P(x) = Axe^{2x}$ (2 ya es raíz de y_H , multiplicamos por x)
- **3.** $g(x) = x^2 - 1$
 $\rightarrow y_P(x) = Ax^2 + Bx + C$ (0 no es raíz)

Práctica: Propuesta de y_P (II)

Dada la ecuación $y'' + 4y = g(x)$, la homogénea tiene raíces $\lambda = \pm 2i$.

$$y_H(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

¿Qué forma proponemos para y_P según $g(x)$?

- **1.** $g(x) = 5 \sin(3x)$

Práctica: Propuesta de y_P (II)

Dada la ecuación $y'' + 4y = g(x)$, la homogénea tiene raíces $\lambda = \pm 2i$.

$$y_H(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

¿Qué forma proponemos para y_P según $g(x)$?

- **1.** $g(x) = 5 \sin(3x)$
 $\rightarrow y_P(x) = A \sin(3x) + B \cos(3x) \quad (\pm 3i \neq \pm 2i)$
- **2.** $g(x) = 5 \cos(2x)$

Práctica: Propuesta de y_P (II)

Dada la ecuación $y'' + 4y = g(x)$, la homogénea tiene raíces $\lambda = \pm 2i$.

$$y_H(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

¿Qué forma proponemos para y_P según $g(x)$?

- **1.** $g(x) = 5 \sin(3x)$
 $\rightarrow y_P(x) = A \sin(3x) + B \cos(3x) \quad (\pm 3i \neq \pm 2i)$
- **2.** $g(x) = 5 \cos(2x)$
 $\rightarrow y_P(x) = x (A \sin(2x) + B \cos(2x)) \quad (\text{Solución ya en } y_H, \text{ multiplica por } x)$
- **3.** $g(x) = 3xe^x$

Práctica: Propuesta de y_P (II)

Dada la ecuación $y'' + 4y = g(x)$, la homogénea tiene raíces $\lambda = \pm 2i$.

$$y_H(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

¿Qué forma proponemos para y_P según $g(x)$?

- **1.** $g(x) = 5 \sin(3x)$
 $\rightarrow y_P(x) = A \sin(3x) + B \cos(3x) \quad (\pm 3i \neq \pm 2i)$
- **2.** $g(x) = 5 \cos(2x)$
 $\rightarrow y_P(x) = x (A \sin(2x) + B \cos(2x)) \quad (\text{Solución ya en } y_H, \text{ multiplica por } x)$
- **3.** $g(x) = 3xe^x$
 $\rightarrow y_P(x) = (A_1x + A_0)e^x \quad (\text{Polinomio por exponencial, } 1 \neq \pm 2i)$

Ejemplo: Coeficientes Indeterminados (I)

Ejemplo: Resolver $y'' - y = e^x$. ¿Sirve $y_p = Ae^x$?

Ejemplo: Coeficientes Indeterminados (I)

Ejemplo: Resolver $y'' - y = e^x$. ¿Sirve $y_P = Ae^x$?

Resolución paso a paso

1. Homogénea asociada: $y'' - y = 0 \implies \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$.

$$y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

2. Solución Particular (y_P): La carga es $g(x) = e^x$. Como $\lambda = 1$ es raíz simple de la ecuación característica, proponemos:

$$y_P(x) = Axe^x$$

Ejemplo: Coeficientes Indeterminados (II)

Continuación

Derivando y sustituyendo en $y'' - y = e^x$:

$$A(x+2)e^x - Axe^x = e^x \implies 2Ae^x = e^x \implies A = \frac{1}{2}$$

3. Solución General ($y_H + y_P$):

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$$

Método de Variación de las Constantes

Dada la solución de la homogénea $y_H(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, buscamos una solución particular cambiando las constantes por funciones de x :

$$y_P(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

Para encontrar $c_1'(x)$ y $c_2'(x)$, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x) \end{cases}$$

Luego, se integran $c_1'(x)$ y $c_2'(x)$ para obtener $c_1(x)$ y $c_2(x)$.

Ejemplo: Variación de las Constantes (I)

$$\text{Resolver } y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$$

1. **Homogénea:** $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -1$ (doble).

$$y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \implies y_1 = e^{-x}, y_2 = x e^{-x}$$

2. **Sistema para** $y_P = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)xe^{-x}$:

$$\begin{cases} c_1' e^{-x} + c_2' x e^{-x} = 0 \\ -c_1' e^{-x} + c_2'(e^{-x} - x e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x} \end{cases}$$

Dividiendo por e^{-x} en ambas ecuaciones y despejando:

$$\begin{cases} c_1' + c_2' x = 0 \implies c_1' = -x c_2' \\ -c_1' + c_2'(1 - x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Ejemplo: Variación de las Constantes (II)

Continuación de la resolución

Sustituyendo c_1' en la segunda ecuación:

$$xc_2' + c_2 - xc_2' = \frac{1}{x} \implies c_2' = \frac{1}{x}$$

Para c_1' :

$$c_1' = -x \left(\frac{1}{x} \right) = -1$$

Integramos para hallar las funciones:

$$c_1(x) = \int -1 dx = -x \quad c_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

Ejemplo: Variación de las Constantes (III)

Construcción final

Sustituimos en y_P :

$$y_P(x) = (-x)e^{-x} + (\ln |x|)xe^{-x}$$

La **solución general** resulta en:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + (\ln |x|)xe^{-x}$$

(Nota: El término $-xe^{-x}$ se absorbió en la parte homogénea).

Ecuación de Euler

Una ecuación diferencial de Euler es aquella donde la potencia de x coincide con el orden de la derivada:

$$a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$$

Método de resolución (para $x > 0$): Se introduce el cambio de variable independiente $x = e^t$, transformándola en una EDO de **coeficientes constantes**.

$$t = \ln x \implies \frac{dx}{dt} = x$$

Las derivadas se transforman usando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Ejemplo: Ecuación de Euler (I)

$$\text{Resolver } x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3$$

1. Aplicar cambio de variable $x = e^t$: Sustituimos las expresiones de las derivadas:

$$x^2 \left(\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right) - 2x \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) + 2y = (e^t)^3$$

Simplificando:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2 \frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t} \implies \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$$

2. Resolver homogénea asociada en t :

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = 1, 2$$

$$y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

Ejemplo: Ecuación de Euler (II)

Continuación de la resolución

3. Solución Particular (Coef. Indeterminados): Proponemos $y_P(t) = Ae^{3t}$. Derivamos e introducimos en $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$:

$$9Ae^{3t} - 3(3Ae^{3t}) + 2Ae^{3t} = e^{3t} \implies 2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}$$

Luego $y_P(t) = \frac{1}{2}e^{3t}$.

4. Solución General en función de x : La solución general en t es:

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

Deshacemos el cambio $e^t = x$:

$$y(x) = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

Flexión de una Viga

La curva elástica $y(x)$ de una viga de longitud L bajo una carga $w(x)$ satisface:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w(x)$$

- E : Módulo de Young (material).
- I : Momento de inercia (forma de la sección).
- EI : Rigidez a la flexión.

Condiciones de contorno (Empotrada): En $x = 0$ y $x = L$:

$$y = 0 \quad (\text{sin flecha}), \quad y' = 0 \quad (\text{tangente horizontal})$$

Ejemplo: Carga Uniforme

Si $w(x) = w_0$ (constante):

$$y^{(4)} = \frac{w_0}{EI}$$

Integrando cuatro veces:

$$y(x) = \frac{w_0}{24EI}x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$$

donde las c_i se determinan con las condiciones de contorno.
(Aplicaremos las condiciones en la siguiente diapositiva).

Ejemplo: Carga Uniforme (II)

Aplicando $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$, vemos que $c_4 = 0$ y $c_3 = 0$.

$$y(x) = \frac{w_0}{24EI}x^4 + c_1x^3 + c_2x^2$$

Las condiciones en el otro extremo son $y(L) = 0$ y $y'(L) = 0$:

$$\begin{cases} c_2L^2 + c_1L^3 + \frac{w_0}{24EI}L^4 = 0 \\ 2c_2L + 3c_1L^2 + \frac{w_0}{6EI}L^3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema para c_1 y c_2 :

$$c_1 = -\frac{w_0}{12EI}, \quad c_2 = \frac{w_0L^2}{24EI}$$

$$y(x) = \frac{w_0}{24EI}x^4 - \frac{w_0}{12EI}x^3 + \frac{w_0L^2}{24EI}x^2 = \frac{w_0}{24EI}x^2(x - L)^2$$

Péndulo Simple: Linealización

Ecuación de movimiento de un péndulo de masa m y longitud l :

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin(\theta) \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

Para pequeñas oscilaciones, podemos aproximar $\sin(\theta) \approx \theta$ (en radianes), obteniendo la ecuación armónica (lineal):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Solución general:

$$\theta(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

Ejemplo: Péndulo Simple (P.V.I.)

Resolver para $l = 2,45 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Condiciones iniciales: $\theta(0) = 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$, $\theta'(0) = -0,4 \text{ rad/s}$.

1. Frecuencia y Solución general: $\omega^2 = \frac{9,8}{2,45} = 4 \implies \omega = 2 \text{ rad/s}$.

$$\theta(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \implies \theta'(t) = -2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t)$$

2. Aplicar condiciones:

$$\theta(0) = c_1 = \frac{\pi}{18}$$

$$\theta'(0) = 2c_2 = -0,4 \implies c_2 = -0,2$$

3. Solución (en radianes):

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18} \cos(2t) - 0,2 \sin(2t)$$

Sistema Masa-Resorte Amortiguado y Forzado (I)

Ecuación diferencial general:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Resolver: $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 64x = 128 \cos(8t)$

1. Solución Homogénea: $\lambda^2 + 8\lambda + 64 = 0 \implies \lambda = -4 \pm 4\sqrt{3}i$.

$$x_c(t) = e^{-4t} (A \cos(4\sqrt{3}t) + B \sin(4\sqrt{3}t))$$

2. Solución Particular: Haciendo coeficientes indeterminados con senos y cosenos debidos a la fuerza excitadora, se obtiene:

$$x_p(t) = 2 \sin(8t)$$

Sistema Masa-Resorte Amortiguado y Forzado (II)

Continuación para condiciones $x(0) = \frac{1}{3}, x'(0) = 0$

Solución general:

$$x(t) = e^{-4t} (A \cos(4\sqrt{3}t) + B \sin(4\sqrt{3}t)) + 2 \sin(8t)$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$x(0) = A = \frac{1}{3}$$

$$x'(0) = -4A + 4\sqrt{3}B + 16 = 0 \implies 4\sqrt{3}B = \frac{4}{3} - 16 \implies B = -\frac{11\sqrt{3}}{9}$$

Solución final:

$$x(t) = \frac{e^{-4t}}{9} (3 \cos(4\sqrt{3}t) - 11\sqrt{3} \sin(4\sqrt{3}t)) + 2 \sin(8t)$$

Dinámica de Poblaciones Forzadas (I)

$$\text{Sea } P''' + 6P'' + 11P' + 6P = 60$$

Interpretación: P es la población, P' su tasa de crecimiento, P'' la aceleración y P''' el cambio en dicha aceleración.

Con $P(0) = 1010$, $P'(0) = -2000$, $P''(0) = 4000$. Calcular el tiempo mínimo para que el transitorio sea $\leq 1\%$ del estado estable.

1. Estado Estable (P_p): Una solución constante a la completa.

$$6A = 60 \implies A = 10 \implies P_{\text{estable}} = 10$$

2. Componente Transitorio (P_c): Resolvemos la homogénea:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$P_c(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-3t}$$

Continuación

3. Condiciones Iniciales: Con un sistema de 3×3 al derivar $P(t) = P_c + P_p$ e igualar en $t = 0$, se obtiene: $c_1 = 0$, $c_2 = 1000$, $c_3 = 0$.

$$P_c(t) = 1000e^{-2t}$$

4. Tiempo de decaimiento: El 1% del estado estable (10) es 0,1.

$$1000e^{-2t} \leq 0,1 \implies e^{-2t} \leq 10^{-4}$$

$$-2t \leq -4 \ln(10) \implies t \geq 2 \ln(10) \approx 4,61 \text{ años}$$

Fin del Capítulo 6

E.D.O. de Orden Superior

Ec. característica · Coef. indeterminados · Var. parámetros