Álgebra y Ecuaciones Diferenciales
Capítulo 7: Sistemas de E.D.O. Lineales

José Javier Relancio Martínez

Universidad de Burgos

2026

Índice

Un sistema de primer orden relaciona las derivadas de varias funciones con las propias funciones.

Forma Normal:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

Forma Matricial:

$$X'(t) = A(t)X(t) + G(t)$$

- **Homogéneo:** Si $G(t) = 0$.
- **Autónomo:** Si la matriz A no depende de t.

Reducción a un Sistema de Primer Orden

Cualquier EDO de orden n puede escribirse como un sistema de n ecuaciones de primer orden.

Ejemplo

Sea $y'' + 3y' + 2y = 0$. Definimos: $x_1 = y,\ x_2 = y'$. Entonces:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 - 3x_2 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: ¿Cómo convertirías $y''' - y = 0$?

Reducción a un Sistema de Primer Orden

Cualquier EDO de orden n puede escribirse como un sistema de n ecuaciones de primer orden.

Ejemplo

Sea $y'' + 3y' + 2y = 0$. Definimos: $x_1 = y,\ x_2 = y'$. Entonces:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 - 3x_2 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: ¿Cómo convertirías $y''' - y = 0$?
Definimos: $x_1 = y,\ x_2 = y',\ x_3 = y''$.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_1 \end{cases} \implies \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Método de Autovalores y Autovectores

Para el sistema autónomo $X' = AX$, buscamos soluciones $X(t) = \vec{v}e^{\lambda t}$. Esto nos lleva al problema de autovalores:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

Estructura de la solución:

- Si λ es autovalor real con autovector $\vec{v} \implies$

$$X(t) = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

- Sistemas 2×2, λ complejo $(a \pm ib)$ con $\vec{z} = \vec{z}_1 \pm i\vec{z}_2$:

$$X(t) = c_1 e^{at}(\vec{z}_1 \cos bt - \vec{z}_2 \sin bt) + c_2 e^{at}(\vec{z}_1 \sin bt + \vec{z}_2 \cos bt)$$

- Sistemas 2×2, λ real doble con un autovector $\vec{v}_1$. Se busca $\vec{v}_2$ tal que $(A - \lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$:

$$X(t) = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda t} + c_2(\vec{v}_1 t + \vec{v}_2)e^{\lambda t}$$

Ejemplo: Sistema Homogéneo (I)

Resolver $X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X$

1. Autovalores:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Raíces: $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1.$

2. Autovectores: Para $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies -3v_x + 2v_y = 0 \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Sistema Homogéneo (II)

Continuación

Para $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies 2v_x + 2v_y = 0 \implies \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Solución general ($X_H = C_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$):

$$X(t) = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En componentes:

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t} \\ y(t) = 3C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Ejemplo: Raíz Real Doble (I)

Resolver $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$

1. Autovalores:

$$|A - \lambda I| = (1 - \lambda)^2 = 0 \implies \lambda = 1 \text{ (doble)}$$

2. Autovector y vector generalizado:

$$(A - I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_y = 0 \implies \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Raíz Real Doble (II)

Continuación

Vector generalizado $\vec{u}$:

$$(A - I)\vec{u} = \vec{v} \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Solución general:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t$$

En componentes:

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^t \\ y(t) = c_2 e^t \end{cases}$$

Ejemplo: Raíces Complejas (I)

Resolver $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$

1. Autovalores:

$$|A - \lambda I| = (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \pm i$$

Aquí $\alpha = 1, \beta = 1$.

2. Autovector para $\lambda = 1 + i$:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies -iv_x + v_y = 0$$

$$\implies \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos $\vec{a} = \binom{1}{0}$ y $\vec{b} = \binom{0}{1}$.

Ejemplo: Raíces Complejas (II)

Continuación

3. Solución general:

$$X(t) = c_1 e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t \right) + c_2 e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t \right)$$

En componentes:

$$\begin{cases} x(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\ y(t) = e^t(-c_1 \sin t + c_2 \cos t) \end{cases}$$

Sistemas Completos: Variación de las Constantes

Para un sistema no homogéneo $X' = AX + G(t)$, la general es $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$.
Conocidas 2 soluciones del homogéneo X_1 y X_2, proponemos la particular variando las constantes:

$$X_P(t) = c_1(t)X_1(t) + c_2(t)X_2(t)$$

Sustituyendo en la ecuación original, obtenemos el sistema para las derivadas $c_1'(t)$ y $c_2'(t)$:

$$c_1'(t)X_1(t) + c_2'(t)X_2(t) = G(t)$$

Resolviendo este sistema algebraico, hallamos $c_1'(t)$ y $c_2'(t)$, que luego integramos para obtener $c_1(t)$ y $c_2(t)$.

Ejemplo: Sistema Completo (I)

Sea $X' = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t}\sqrt{t} \end{pmatrix}$

1. Solución Homogénea: $\lambda = -2$ (doble). Con $\vec{v}_1 = \binom{1}{0}$ y generalizado $\vec{v}_2 = \binom{0}{-1/2}$, obtenemos:

$$X_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} t \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

2. Variación de constantes para $X_P = c_1 X_1 + c_2 X_2$:

$$X_1 c_1' + X_2 c_2' = G(t) \implies \begin{cases} e^{-2t} c_1' + t e^{-2t} c_2' = 0 \\ -\frac{1}{2} e^{-2t} c_2' = e^{-2t}\sqrt{t} \end{cases}$$

Ejemplo: Sistema Completo (II)

Continuación

De la 2ª ecuación: $-\frac{1}{2}c_2' = \sqrt{t} \implies c_2' = -2\sqrt{t}$. Sustituyendo en la 1ª:
$c_1' + t(-2\sqrt{t}) = 0 \implies c_1' = 2t^{3/2}$.
Integramos:

$$c_1(t) = \int 2t^{3/2}dt = \frac{4}{5}t^{5/2}, \qquad c_2(t) = \int -2t^{1/2}dt = -\frac{4}{3}t^{3/2}$$

Construimos X_P operando con los vectores y sumando términos:

$$X_P(t) = \frac{4}{5}t^{5/2}e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{4}{3}t^{3/2}e^{-2t}\begin{pmatrix}t\\-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{8}{15}t^{5/2}e^{-2t}\\ \frac{2}{3}t^{3/2}e^{-2t}\end{pmatrix}$$

La solución final será $X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + X_P(t)$.

Terremotos en Edificios (I)

Podemos modelar los pisos de un edificio como masas m_i unidas por resortes elásticos k_i. La segunda ley de Newton genera un S.E.D.O. de segundo orden:

$$MX''(t) = KX(t) \implies X'' = (M^{-1}K)X = AX$$

Para resolverlo sin aumentar el orden, proponemos soluciones tipo oscilador (sin rozamiento):

$$X(t) = \vec{v}\cos(\omega t) \quad \text{o} \quad X(t) = \vec{v}\sin(\omega t)$$

Sustituyendo:

$$-\omega^2\vec{v} = A\vec{v} \implies (A + \omega^2 I)\vec{v} = 0$$

Las secuencias características (frecuencias propias ω_i) salen de $\omega_i^2 = -\lambda_i$. Si las frecuencias coinciden con un terremoto (resonancia), el edificio peligra.

Terremotos en Edificios (II)

Edificio de 2 pisos ($m = 5000$ kg, $k = 10000$ kg/s^2)

El sistema característico se reduce a:

$$\begin{cases} x_1'' = -4x_1 + 2x_2 \\ x_2'' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0 \implies \lambda = -3 \pm \sqrt{5}$$

Terremotos en Edificios (III)

Continuación

Ambos autovalores son negativos ($\lambda_1 \approx -0{,}76$, $\lambda_2 \approx -5{,}23$). Las frecuencias de vibración natural del edificio $\omega = \sqrt{-\lambda}$ son:

$$\omega_1 = \sqrt{3 + \sqrt{5}} \approx 2{,}29 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = \sqrt{3 - \sqrt{5}} \approx 0{,}87 \text{ rad/s}$$

La estabilidad dependerá de que el temblor no excite estas frecuencias naturales (ω_1, ω_2), evitando la fatídica resonancia estructural.

Circuito Eléctrico: Red RL Acoplada (I)

Resolver el S.E.D.O. de corriente con dos inductores

$$\begin{cases} i_1' = -20i_1 + 10i_2 + 100 \\ i_2' = 10i_1 - 20i_2 \end{cases} \implies I' = \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} I + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Condiciones: $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$.

1. Solución Particular (I_p): Proponemos un vector de constantes: $I_p = \binom{a}{b}$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20a + 10b + 100 \\ 10a - 20b \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -20a + 10b = -100 \\ 10a - 20b = 0 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos $a = \frac{20}{3}$, $b = \frac{10}{3}$.

Circuito Eléctrico: Red RL Acoplada (II)

Continuación

2. Homogénea: Autovalores de A:

$$(-20-\lambda)^2 - 100 = 0 \implies \lambda_1 = -10, \quad \lambda_2 = -30$$

Autovectores: $\vec{v}_1 = \binom{1}{1}$, $\vec{v}_2 = \binom{1}{-1}$.

$$I(t) = C_1 e^{-10t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-30t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}20/3\\10/3\end{pmatrix}$$

3. C. Iniciales $I(0) = \binom{0}{0}$:

$$C_1 + C_2 + \frac{20}{3} = 0, \quad C_1 - C_2 + \frac{10}{3} = 0 \implies C_1 = -5, C_2 = -\frac{5}{3}$$

$$i_1(t) = -5e^{-10t} - \frac{5}{3}e^{-30t} + \frac{20}{3}, \quad i_2(t) = -5e^{-10t} + \frac{5}{3}e^{-30t} + \frac{10}{3}$$

Problema de Mezclas (Tanques Acoplados)

Dos tanques (A y B) con 100 gal de volumen inicial intercambian salmuera. Flujos: De Ext a A (1 gal/min a 2 lb/gal); de A a B (5 gal/min); de B a A (1 gal/min); de B a Ext (4 gal/min).

1. Volúmenes netos:

$$V_A'(t) = \text{Entradas}_A - \text{Salidas}_A = 1 + 1 - 5 = -3 \implies V_A(t) = 100 - 3t$$

$$V_B'(t) = \text{Entradas}_B - \text{Salidas}_B = 5 - 1 - 4 = 0 \implies V_B(t) = 100$$

2. Variación de sal (x_1 **y** x_2 **):**

$$\begin{cases} x_1' = 2(1) - \frac{5}{100-3t}x_1 + \frac{1}{100}x_2 \\ x_2' = \frac{5}{100-3t}x_1 - \frac{5}{100}x_2 \end{cases}$$

Como hay división por t, es un S.E.D.O. **no autónomo**.

Serie de Desintegración Radiactiva (I)

Resolver el sistema para $X \xrightarrow{\lambda_1} Y \xrightarrow{\lambda_2} Z$

Con $x(0) = x_0$, $y(0) = z(0) = 0$.

$$\begin{cases} x' = -\lambda_1 x \\ y' = \lambda_1 x - \lambda_2 y \\ z' = \lambda_2 y \end{cases}$$

1. **Resolviendo en cascada:** $x' = -\lambda_1 x \implies x(t) = x_0 e^{-\lambda_1 t}$.
2. **Elemento medio Y:** Sustituimos en y': $y' + \lambda_2 y = \lambda_1 x_0 e^{-\lambda_1 t}$.

Serie de Desintegración Radiactiva (II)

Continuación

Resolviendo la EDO lineal por factor integrante:

$$y(t) = \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) \quad (\text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2)$$

3. Elemento final Z: Usamos la conservación local $x + y + z = x_0$:

$$z(t) = x_0 - x(t) - y(t) = x_0\left(1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)$$

Modelo S-I-Z-R (Brote Zombie)

Población dividida: S (humanos vulnerables), I (infectados durmientes), Z (zombies), R (removidos/muertos crónicos).

$$\begin{cases} S' = -0{,}01\, SZ \quad \text{(humanos contraen la infección)} \\ I' = 0{,}01\, SZ - 1\, I \quad \text{(infección latente} \to \text{zombie)} \\ Z' = 1\, I - 0{,}01\, SZ \quad \text{(humanos logran abatir zombies)} \\ R' = 0{,}01\, SZ \quad \text{(zombies eliminados pasan a removidos } R\text{)} \end{cases}$$

- Sumando el sistema: $N' = S' + I' + Z' + R' = 0$ (población const.).
- Soluciones explícitas imposibles por los términos no lineales $(S \cdot Z)$. Acudimos inevitablemente al **Método de Euler** (aprox numérico paso a paso).

Modelo Zombie: Método de Euler ($h = 1$)

Dado $S(0) = 100, I(0) = 0, Z(0) = 1, R(0) = 0$:

Paso 1 ($t = 1$):

$S' = -0{,}01(100)(1) = -1$
$I' = 0{,}01(100)(1) - 1(0) = 1$
$Z' = 1(0) - 0{,}01(100)(1) = -1$
$R' = 0{,}01(100)(1) = 1$
Actualizando:
$(S, I, Z, R)_{t=1} = (100, 0, 1, 0) + (-1, 1, -1, 1) = (\mathbf{99}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

Paso 2 ($t = 2$):

$S' = -0{,}01(99)(0) = 0$
$I' = 0{,}01(99)(0) - 1(1) = -1$
$Z' = 1(1) - 0{,}01(99)(0) = 1$
$R' = 0{,}01(99)(0) = 0$
Actualizando: $(S, I, Z, R)_{t=2} = (99, 1, 0, 1) + (0, -1, 1, 0) = (\mathbf{99}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$

Dinámica del Amor: Romeo y Julieta

Modelamos el amor (positivo o negativo) entre Romeo (R) y Julieta (J):

$$\begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

Donde los coeficientes miden sensibilidades (a: Reacción a sí mismo, b: Reacción al otro, etc). Según esos perfiles, la pareja fluye hacia tres dinámicas características:

1. **Ni contigo ni sin ti:** (Centro de energía oscilante).
2. **Fuego y Fuego:** (Punto de Silla hiperinestable).
3. **Los Cautelosos:** (Nodo Estable asintótico hacia 0).

Caso 1: El Ciclo Sin Fin

Romeo influenciable, Julieta voluble:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

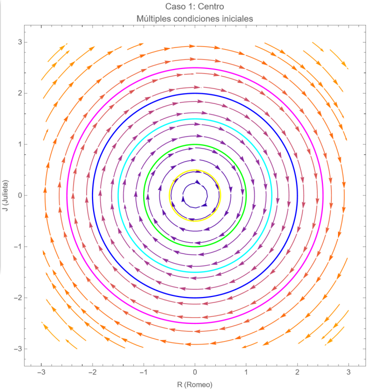
Romeo y Julieta: Caso 1 (Centro)

Caso 1: El Ciclo Sin Fin

Romeo influenciable, Julieta voluble:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = \pm i$. Al ser imaginarios puros, orbitan en círculos. Oscilan eternamente sufriendo periodos dolorosos de amor y luego desencuentro.



Romeo y Julieta: Caso 2 (Punto de Silla)

Caso 2: Fuego y Fuego

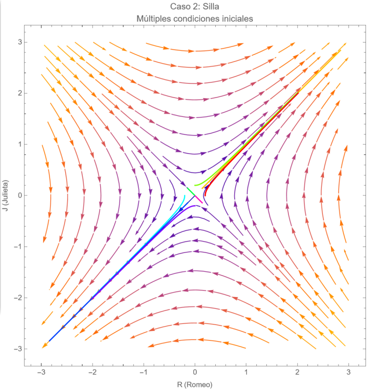
Romeo y Julieta responden sólo y equitativamente a lo que el otro les proyecta:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Romeo y Julieta: Caso 2 (Punto de Silla)

Caso 2: Fuego y Fuego

Romeo y Julieta responden sólo y equitativamente a lo que el otro les proyecta: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda = \pm 1$. Origen de silla inestable con una rama en el primer cuadrante. Termina abocada inevitablemente a la eternidad del amor mutuo o la destrucción.



Romeo y Julieta: Caso 3 (Nodo Estable)

Caso 3: Los Cautelosos

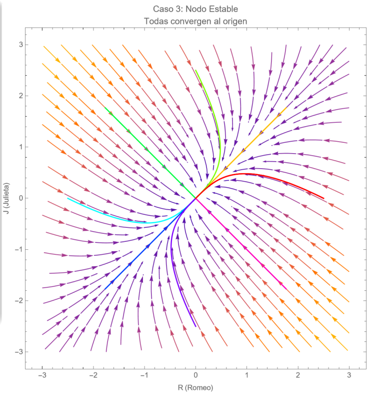
Les frena el miedo antes que el sentimiento correspondido ($A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$):

Romeo y Julieta: Caso 3 (Nodo Estable)

Caso 3: Los Cautelosos

Les frena el miedo antes que el sentimiento correspondido ($A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$):

$\lambda = -1, \lambda = -3$. Ambos negativos; esto dibuja un sumidero hacia el infinito de **nodo estable**. La relación claudica ante los frenos y muere de fría indiferencia en el origen $(0, 0)$.



Fin del Capítulo 7

Sistemas de E.D.O. Lineales

Autovalores · Plano de fase · Aplicaciones