Apuntes resumidos de Álgebra y Ecuaciones diferenciales

José Javier Relancio Martínez

Universidad de Burgos
Escuela Politécnica Superior,
Departamento de Matemática Aplicada y Computación
Área de Matemática Aplicada

Índice general

1 Nociones básicas

1.1 Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 1.1. Clasificación de Sistemas

- **Compatible (C)**: Si tiene solución.
  - **Determinado (S.C.D.)**: Solución única.
  - **Indeterminado (S.C.I.)**: Infinitas soluciones.
- **Incompatible (S.I.)**: No tiene solución.

Nota sobre Sistemas Homogéneos (Términos independientes nulos):

- Siempre son **Compatibles** (poseen la solución trivial $X = 0$).

1.2 Matrices, rango y solvencia

1.2.1. Rango y Rouché-Fröbenius

Definición 1.2. El **Rango** ($\mathrm{rg}(A)$) es el número de filas no nulas de la matriz escalonada.

Teorema 1.1 (Rouché-Fröbenius). El sistema $AX = B$ es compatible si y solo si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$.

- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = n$ (incógnitas): **S.C.D.**
- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) < n$: **S.C.I.**
- $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A|B)$: **S.I.**

1.2.2. Determinantes e Inversa

- **Invertibilidad**: Una matriz cuadrada A es inversible si y solo si $|A| \neq 0$.
- **Determinante**:
  - Para matriz triangular: es el **producto** de los elementos de la diagonal.
  - No varía si se suma un múltiplo de una fila a otra.
- **Inversa**: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)^t$.

2 Espacios vectoriales

2.1 Espacios y subespacios vectoriales

2.1.1. Conceptos fundamentales

Definición 2.1. Un **Espacio Vectorial (e.v.)** V sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto con dos operaciones: **Suma (+)** ($v + w \in V$) y **Producto por un escalar (·)** ($\alpha \cdot v \in V$).

Definición 2.2. Una **Combinación Lineal (C.L.)** de un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ es una expresión de la forma $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r$.

2.1.2. Subespacios vectoriales

Definición 2.3. Un **Subespacio Vectorial** S de V es un subconjunto de V que, con las operaciones de V, es a su vez un espacio vectorial.

Nota (Criterios de subespacio): S es subespacio de V si es cerrado bajo la suma ($\vec{u} + \vec{v} \in S$ para $\vec{u}, \vec{v} \in S$) y el producto por escalares ($\alpha \cdot \vec{u} \in S$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in S$).

- La **Intersección** de dos subespacios ($S_1 \cap S_2$) es siempre un subespacio de V.
- La **Suma** de subespacios ($S_1 + S_2$) también es un subespacio de V.

2.2 Dependencia, generadores y base

2.2.1. Clasificación y naturaleza

Definición 2.4. Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ es **Linealmente Independiente (l.i.)** si $\alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r = \vec{0}$ solo se cumple si $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Si no son l.i., son **Linealmente Dependientes (l.d.)**.

2.2.2. Bases y dimensión

Definición 2.5. Un conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ es un **Sistema Generador** de V si todo vector de V es C.L. de dicho conjunto, denotado por $L\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$.

Definición 2.6. Una **Base** (B) de V es un conjunto ordenado de vectores que es a la vez sistema generador de V y linealmente independiente.

Definición 2.7. La **Dimensión** de un espacio vectorial V, $\dim(V)$, es el número de elementos de cualquiera de sus bases.

Definición 2.8. **Fórmula de la dimensión de Grassmann:** Sean S_1 y S_2 subespacios de un espacio vectorial V. Entonces:

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$$

2.3 Coordenadas y cambio de base

2.3.1. Coordenadas

Definición 2.9. Sea $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V. Las **Coordenadas** de un vector $\vec{u}$ en la base B son los escalares únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{u}_n$.

2.3.2. Cambio de base

Nota sobre Matriz de Cambio de Base: Dados dos bases B y B', la matriz de cambio de base $P_{BB'}$ permite relacionar las coordenadas de un vector $\vec{u}$ en ambas bases: $[\vec{u}]_{B'} = P_{BB'}[\vec{u}]_B$. La matriz se construye escribiendo en columnas las coordenadas de los vectores de B en función de los de B'.

2.4 Producto interno y ortogonalidad

2.4.1. Ortogonalidad

Definición 2.10. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **Ortogonales** ($\vec{u} \perp \vec{v}$) si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Definición 2.11. Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ es **Ortonormal** si son ortogonales entre sí y cada vector tiene norma 1.

2.4.2. Matrices ortogonales

Definición 2.12. Una matriz cuadrada inversible A es **Ortogonal** cuando $A^{-1} = A^t$.

3 Aplicaciones lineales

3.1 Concepto de endomorfismo y propiedades

3.1.1. Definición de endomorfismo

Definición 3.1. Sean U y V dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, y sea la función $f : U \to V$. f es una **aplicación lineal** si se cumplen las condiciones:

1. $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in U$.
2. $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$ para todo $\vec{u} \in U$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Endomorfismo: Si $U = V$, la aplicación lineal $f : V \to V$ se denomina **endomorfismo** (u operador lineal).

3.2 Imagen y núcleo de una aplicación lineal

3.2.1. Definiciones y subespacios

Definición 3.2. Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal.

- El **Núcleo** de f, Ker(f), es el conjunto de vectores $\vec{u} \in U$ cuya imagen es el vector nulo: $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{u} \in U | f(\vec{u}) = \vec{0}\}$.
- La **Imagen** de f, Im(f), es el conjunto de vectores $\vec{v} \in V$ que son imagen de algún vector $\vec{u} \in U$.

Teorema 3.1. Tanto Im(f) como Ker(f) son **subespacios vectoriales**.

Definición 3.3. El **Rango de** f se define como la dimensión de la imagen de f: $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$.

3.2.2. Teorema de la dimensión

Teorema 3.2. Sea f una aplicación lineal de U en V. Se cumple:

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(U)$$

3.3 Matriz de un endomorfismo y semejanza

3.3.1. Matriz asociada a un endomorfismo

Definición 3.4. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo y B una base de V. La **matriz de f respecto a la base** B, denotada $[f]_B$, es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de las imágenes de los vectores de B expresadas en la misma base B.

3.3.2. Semejanza de matrices

Definición 3.5. Dos matrices cuadradas A y B son **semejantes** si existe una matriz inversible P tal que $B = P^{-1}AP$.

Teorema 3.3 (Teorema de Semejanza). Sea f un endomorfismo de V, y sean B y B' dos bases de V. Las matrices asociadas a f en estas bases, $[f]_B$ y $[f]_{B'}$, son semejantes. La relación se da mediante la matriz de paso $P_{BB'}$ (la matriz que cambia de B a B'):

$$[f]_{B'} = (P_{BB'})^{-1} \cdot [f]_B \cdot P_{BB'}$$

4 Diagonalización

4.1 Valores y vectores propios

4.1.1. Definiciones y subespacios

Definición 4.1. Sea A una matriz $n \times n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se dice que λ es un **valor propio** o **autovalor** de A si existe un vector $X \in \mathbb{R}^n$, con $X \neq 0$, tal que $AX = \lambda X$. X es el **vector propio** o **autovector** asociado a λ.

Definición 4.2. El subespacio vectorial formado por los vectores propios asociados a λ (junto con el vector nulo) se llama **subespacio propio** o **subespacio característico** asociado a λ, y se denota por $V(\lambda)$.

4.1.2. Polinomio característico y cálculo

Teorema 4.1. λ es valor propio de A si y solo si $|A - \lambda I| = 0$.

Definición 4.3. La expresión $|A - \lambda I|$ es un polinomio de grado n en λ llamado **polinomio característico** de A, denotado $p_A(\lambda)$. Los valores propios son las raíces reales (y, en general, complejas) de este polinomio.

Propiedad de matrices semejantes: Si dos matrices son semejantes, tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores propios.

4.1.3. Multiplicidades

Definición 4.4. Sea λ_0 un valor propio de A.

- La **Multiplicidad Algebraica** (k) de λ_0 es la multiplicidad de λ_0 como raíz de $p_A(\lambda)$.
- La **Multiplicidad Geométrica** (r) de λ_0 es la dimensión del subespacio propio $V(\lambda_0)$, $\dim(V(\lambda_0))$.

Teorema 4.2. Para cualquier valor propio λ_0, la multiplicidad geométrica es menor o igual que su multiplicidad algebraica: $\dim(V(\lambda_0)) \leq k$.

4.2 Diagonalización

4.2.1. Condición de diagonalización

Definición 4.5. Una matriz $A_{n\times n}$ es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal $D_{n\times n}$ semejante a A (es decir, si existe P inversible tal que $D = P^{-1}AP$).

Teorema 4.3. Una matriz $A_{n\times n}$ es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.

Nota (Matriz de paso): La matriz P que diagonaliza A (es decir, $D = P^{-1}AP$) tiene como columnas los n vectores propios linealmente independientes de A. La matriz diagonal D tiene como elementos de su diagonal los valores propios asociados a esos vectores, en el mismo orden.

4.2.2. Teorema fundamental de diagonalización

Teorema 4.4. Una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ es diagonalizable si y solo si se cumplen dos condiciones:

a) Todos sus valores propios son reales.

b) Para todo valor propio λ de A, la multiplicidad geométrica coincide con la multiplicidad algebraica ($\dim(V(\lambda)) = k$).

Propiedad de vectores propios distintos: Vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes. Entonces, **una matriz será siempre diagonalizable si sus valores propios son reales y distintos**.

Teorema 4.5. La multiplicidad geométrica de un autovalor λ se calcula como la dimensión de su subespacio propio asociado V_λ:

$$\text{m.g.}(\lambda) = \underbrace{n}_{\substack{\text{Dimensión}\\ \text{de la matriz}}} - \underbrace{\text{rg}(A-\lambda I)}_{\substack{\text{Nº de ecuaciones}\\ \text{linealmente indep.}}} .$$

4.3 Diagonalización ortogonal

4.3.1. Matrices simétricas y ortogonalidad

Definición 4.6. Una matriz A es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz **ortogonal** P (es decir, $P^{-1} = P^t$) tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

Definición 4.7. Un endomorfismo $f : V \to V$ (en un espacio vectorial euclídeo, e.v.e.) es **simétrico** si $\langle f(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, f(\vec{v}) \rangle$.

4.3.2. Teorema de la diagonalización ortogonal

Teorema 4.6. Una matriz A es simétrica si y solo si A es diagonalizable ortogonalmente.

Propiedad de ortogonalidad: Si A es una matriz simétrica, los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.

5 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

5.1 Conceptos básicos

Definición 5.1. Una **Ecuación Diferencial (E.D.)** es una ecuación que contiene variables dependientes (funciones incógnitas) y sus derivadas respecto a una o más variables independientes.

- **E.D. Ordinaria (E.D.O.):** Si solo hay una variable independiente. Nos referimos a $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.
- **Orden:** Es el mayor de los órdenes de las derivadas que contiene.

5.2 E.D.O. de primer orden resolubles respecto a y'

Se dice que $F(x, y, y') = 0$ es resoluble respecto a y' si se puede expresar como $y' = f(x, y)$ (o $dy = f(x, y)dx$).

5.2.1. Tipos principales

- **Variables Separadas:** Se pueden poner de la forma $P(x)dx = Q(y)dy$.
  - Solución: $\int P(x)dx - \int Q(y)dy = C$.
- **Homogéneas:** $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, donde P y Q son funciones homogéneas del mismo grado.
  - Se resuelven con el cambio $u = y/x$ (o $u = x/y$).
- **Reducibles a Homogéneas:** De la forma $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$.
  - Si el sistema de numeradores es compatible determinado (C.D.), se hace el cambio $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$, obteniendo una E.D.O. homogénea.
  - En los demás casos $z = a_1x + b_1y$ $\left(\Rightarrow y = \frac{z}{b_1} - \frac{a_1x}{b_1}, \quad dy = \frac{dz}{b_1} - \frac{a_1dx}{b_1}\right)$ la ecuación se transforma en una E.D.O. de variables separadas.
- **Lineales:** De la forma $y' + p(x)y = q(x)$. La solución viene dada por

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right)$$

- **Bernoulli:** De la forma $y' + p(x)y = q(x)y^n$ con $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
  - Se resuelve con el cambio $z = y^{1-n}$, transformándola en una E.D.O. lineal en z.

- **Exactas:** $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ si existe $u(x,y)$ tal que $du = Pdx + Qdy$.
    - Condición de exactitud: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. La solución viene dada implícitamente por $u(x,y) = C$.
    - Si no es exacta, se busca un **Factor Integrante** μ que al multiplicar a la E.D.O. la convierta en exacta.
        - Si $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ depende solo de x, entonces $\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}$.
        - Si $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}$ depende solo de y, entonces $\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy}$.

6 Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

6.1 Conceptos básicos

Definición 6.1. Una **Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de orden** n es una ecuación de la forma:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$$

Clasificación:

- **Homogénea**: Si $g(x) = 0$.
- **No Homogénea o Completa**: Si $g(x) \neq 0$.
- **Con Coeficientes Constantes**: Si las funciones $f_i(x)$ son constantes, $f_i(x) = a_i$.

6.2 E.D.O. homogéneas con coeficientes constantes

Consideremos la ecuación diferencial homogénea de segundo orden:

$$y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$$

Definición 6.2. La **ecuación característica** asociada se obtiene sustituyendo y'', y' y y por λ^2, λ y 1, respectivamente:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Las raíces de esta ecuación determinan la forma de la solución general $y_H(x)$.

Casos posibles

1. **Raíces reales y distintas** $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$y_H(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$$

2. **Raíz real doble** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:

$$y_H(x) = (c_1 + c_2x)e^{\lambda x}$$

3. **Raíces complejas conjugadas** $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, con $b \neq 0$:

$$y_H(x) = e^{ax}\left[c_1\cos(bx) + c_2\sin(bx)\right]$$

6.3 Estructura de la solución general

La solución general de una ecuación diferencial lineal completa de segundo orden

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$$

se expresa como la suma de la solución homogénea y una solución particular:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

- La **solución homogénea** $y_H(x)$ resuelve la ecuación asociada sin término independiente.
- La **solución particular** $y_P(x)$ tiene en cuenta la función no homogénea $g(x)$.

6.3.1. Método de variación de las constantes

Objetivo: Determinar una solución particular $y_P(x)$ de la ecuación no homogénea.

- Se parte de la solución general de la ecuación homogénea:

  $$y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

  donde y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes.

- Se propone sustituir las constantes por funciones:

  $$y_P(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

- Para determinar $c_1'(x)$ y $c_2'(x)$ se imponen las condiciones:

  $$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = g(x) \end{cases}$$

  Este sistema lineal permite calcular las derivadas $c_1'(x)$ y $c_2'(x)$.

- Finalmente, se integran estas derivadas para obtener $c_1(x)$ y $c_2(x)$, y así la solución particular $y_P(x)$.

6.3.2. Método de coeficientes indeterminados

Objetivo: Determinar una solución particular $y_P(x)$ de una E.D.O. lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$$

- **Condición de aplicabilidad:** Solo es válido si $g(x)$ es combinación de polinomios, exponenciales o funciones seno/coseno.
- **Propuesta:** Se elige $y_P(x)$ con la misma estructura funcional que $g(x)$, pero con coeficientes indeterminados.
- **Ajuste por multiplicidad:** Si la forma de $g(x)$ está asociada a una raíz del polinomio característico, se multiplica la propuesta por x^k, siendo k la multiplicidad de esa raíz.
- **Determinación de coeficientes:** Se sustituye $y_P(x)$ en la ecuación y se igualan coeficientes para hallar los valores indeterminados.

Casos más comunes según la forma de $g(x)$

1. **Polinomio multiplicado por una exponencial:**

$$g(x) = e^{ax} P_m(x)$$

donde $P_m(x)$ es un polinomio de grado m. Se propone:

$$y_P(x) = x^k e^{ax} \tilde{P}_m(x)$$

con $\tilde{P}_m(x)$ un polinomio genérico de grado m y k la multiplicidad de a como raíz de la ecuación característica.

2. **Combinación de funciones trigonométricas:**

$$g(x) = e^{ax} \left[P_m(x) \cos(bx) + Q_n(x) \sin(bx)\right]$$

donde $P_m(x)$ y $Q_n(x)$ son polinomios de grados m y n. Sea $r = \max(m, n)$. Se propone:

$$y_P(x) = x^k e^{ax} \left[\tilde{P}_r(x) \cos(bx) + \tilde{Q}_r(x) \sin(bx)\right]$$

con $\tilde{P}_r(x)$ y $\tilde{Q}_r(x)$ polinomios genéricos de grado r, y k la multiplicidad de $a \pm bi$ como raíces de la ecuación característica.

6.3.3. Ecuación de Euler

Definición 6.3. Una **Ecuación de Euler** es de la forma:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$$

Resolución: Con el cambio de variable $x = e^t$ (considerando $x > 0$), esta ecuación se transforma en una E.D.O. lineal con coeficientes constantes.

7 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

7.1 Conceptos básicos

Definición 7.1. Un **Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (S.E.D.O.)** lineal de **primer orden** está dado en **forma canónica** si tiene la expresión:

$$\begin{cases} x_1' = f_{11}(t)x_1 + \cdots + f_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \ldots \\ x_n' = f_{n1}(t)x_1 + \cdots + f_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

o en forma matricial: $X'(t) = F(t)X(t) + G(t)$.

Clasificación:

- **Homogéneo**: Si $G(t) = 0$.
- **No Homogéneo o Completa**: Si $G(t) \neq 0$.
- **Con Coeficientes Constantes**: Si $F(t)$ es una matriz de constantes A.

7.2 Resolución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

Consideremos el sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t) \end{cases}$$

que puede escribirse en forma matricial como $X'(t) = AX(t) + G(t)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Estrategia general:

(A) **Resolver el sistema homogéneo** $X'(t) = AX(t)$. Se busca la solución $X_H(t) = e^{At}C$, donde C es un vector constante. Para hallarla, se determinan los autovalores y autovectores de A:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Según la naturaleza de los autovalores, se distinguen tres casos:

(i) **Autovalores reales y distintos** λ_1, λ_2:

$$X_H(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2.$$

(ii) **Autovalores reales e iguales** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: Si sólo hay un autovector $\mathbf{v}_1$, se construye un vector generalizado $\mathbf{v}_2$ tal que $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Entonces:

$$X_H(t) = e^{\lambda t}\left(c_1\mathbf{v}_1 + c_2(t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\right).$$

(iii) **Autovalores complejos conjugados** $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$: Si $\vec{z} = \vec{z}_1 + i\vec{z}_2$ es el autovector asociado, entonces:

$$X_H(t) = e^{\alpha t}\left[c_1(\vec{z}_1\cos\beta t - \vec{z}_2\sin\beta t) + c_2(\vec{z}_1\sin\beta t + \vec{z}_2\cos\beta t)\right].$$

(B) **Encontrar una solución particular** $X_P(t)$ del sistema completo. Usaremos el método de variación de las constantes. Buscamos una solución particular en la forma

$$x_P(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t), \qquad y_P(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t),$$

con c_1, c_2 funciones a determinar. Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = f_1(t), \\ c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) = f_2(t). \end{cases}$$

Este es un sistema lineal de dos ecuaciones para $c_1'(t)$ y $c_2'(t)$. Integrando $c_i(t) = \int c_i'(t)\,dt$ se obtiene c_1, c_2 y por tanto x_P, y_P.

(C) **Escribir la solución general**:

$$X(t) = X_H(t) + X_P(t).$$

Test final tema 1

Preguntas de verdadero o falso sobre definiciones y conceptos

1. Un sistema de ecuaciones lineales es Compatible Determinado (S.C.D.) si tiene infinitas soluciones.

2. La matriz ampliada o matriz del sistema se construye a partir de la matriz de coeficientes (A) y el vector de términos independientes (B).

3. Un sistema es Incompatible (S.I.) si no tiene ninguna solución.

4. Todo sistema homogéneo de ecuaciones lineales es compatible, ya que la solución trivial ($x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$) es siempre una solución.

5. Un sistema homogéneo con menos ecuaciones que incógnitas es siempre Compatible Indeterminado (S.C.I.).

6. Una matriz es simétrica si es cuadrada y coincide con su opuesta ($A = -A^t$).

7. Si una matriz cuadrada A tiene inversa (A^{-1}), esta inversa es única.

8. El rango de una matriz A se puede definir como el número de filas no nulas de la matriz escalonada B obtenida a partir de A mediante operaciones elementales.

Respuestas del Test

1. **Falso.** Un S.C.D. tiene solución única. Si tiene infinitas soluciones es S.C.I.
2. **Verdadero.** La matriz ampliada es $(A|B)$.
3. **Verdadero.**
4. **Verdadero.** La solución $x_i = 0$ para todas las incógnitas se llama solución trivial.
5. **Verdadero.**
6. **Falso.** Una matriz es simétrica si $A = A^t$. La condición $A = -A^t$ corresponde a una matriz antisimétrica.
7. **Verdadero.**
8. **Verdadero.** Este es un método para redefinir el rango de una matriz.

Test final tema 2

Preguntas de verdadero o falso sobre definiciones y conceptos

1. Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ necesita que las operaciones de suma y producto por escalar cumplan, entre otras, la propiedad asociativa y la existencia de elemento neutro para la suma.

2. Si un subconjunto S de un espacio vectorial V contiene el vector cero ($\vec{0}$), es suficiente para garantizar que S es un subespacio vectorial de V.

3. Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ es Linealmente Dependiente (l.d.) si al menos uno de ellos puede expresarse como una combinación lineal de los demás.

4. Si en un espacio vectorial V de dimensión n, se toma un conjunto de m vectores donde $m > n$, este conjunto es necesariamente Linealmente Dependiente (l.d.).

5. Para que un conjunto de vectores sea una Base de un espacio vectorial V, debe ser Linealmente Independiente (l.i.) o ser un Sistema Generador, pero no necesariamente ambas al mismo tiempo.

6. La Dimensión de un espacio vectorial V es el número de vectores que tiene cualquiera de sus bases.

7. La matriz de cambio de base de B' a B, $P_{B'B}$, tiene como columnas las coordenadas de los vectores de la base B' expresadas en la base B.

8. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en un espacio vectorial con producto interno son Ortogonales si su producto interno $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ es distinto de cero.

9. Una matriz cuadrada A es Ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta, es decir, $A^{-1} = A^t$.

10. La fórmula de Grassman establece que para dos subespacios S_1 y S_2 de un espacio vectorial V: $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$.

Respuestas del Test

1. **Verdadero.** Las propiedades fundamentales incluyen conmutatividad y asociatividad para la suma, y existencia de elemento neutro y opuesto.

2. **Falso.** La existencia del vector cero es necesaria, pero no suficiente. Debe ser cerrado bajo la suma y el producto por escalares.

3. **Verdadero.** Esta es una condición equivalente a la dependencia lineal.

4. **Verdadero.** Si $m > n$, el conjunto es l.d..

5. **Falso.** Una base debe cumplir obligatoriamente ambas condiciones: ser Linealmente Independiente y ser un Sistema Generador.

6. **Verdadero.** Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de vectores, y este número es la dimensión.

7. **Verdadero.** La matriz de cambio de base P se construye usando las coordenadas de los vectores de la nueva base respecto a la base antigua.

8. **Falso.** Dos vectores son ortogonales si su producto interno es igual a cero ($\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$) .

9. **Verdadero.** Esta es la definición de una matriz ortogonal .

10. **Verdadero.** La fórmula de Grassman es una fórmula fundamental en álgebra lineal que relaciona las dimensiones de dos subespacios, su suma y su intersección. Esta fórmula es válida para cualquier par de subespacios de un espacio vectorial.

Test final del tema 3

Preguntas de verdadero o falso sobre definiciones y conceptos

1. Una función $f : V \to V$ es un **endomorfismo** si cumple que $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Si $f : V \to V$ es un endomorfismo, el vector nulo del espacio vectorial de partida V no tiene que mapearse necesariamente al vector nulo del espacio de llegada V.

3. El **Núcleo** de un endomorfismo f, $\mathrm{Ker}(f)$, es un subespacio vectorial del espacio V [T.3.2.1].

4. El **Rango** de un endomorfismo f se define como la dimensión del Núcleo de f, $\dim(\mathrm{Ker}\, f)$ [D.3.2.2].

5. Si $f : V \to V$ es un endomorfismo, el Teorema de la Dimensión establece que $\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(V)$ [T.3.2.3].

6. La **matriz de un endomorfismo** $f : V \to V$ respecto a una base B se construye usando como columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de B expresadas en la misma base B.

7. El rango de un endomorfismo f es siempre igual al rango de su matriz asociada A ($\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$).

8. Si A es la matriz de un endomorfismo f respecto a una base B, el Núcleo $\mathrm{Ker}(f)$ se obtiene resolviendo el sistema homogéneo $AX = 0$.

9. La matriz asociada a un endomorfismo f en una base B, $[f]_B$, y la matriz asociada a f en otra base B', $[f]_{B'}$, son semejantes [T.3.4.1].

10. Dos matrices A y B son semejantes si y solo si $B = PAP^{-1}$ para alguna matriz P inversible [D.3.4.1].

Respuestas del Test

1. **Verdadero.** Esta es la condición combinada (T.3.1.1) de las dos condiciones de linealidad. Si $U = V$, se llama endomorfismo [1].

2. **Falso.** Si f es una aplicación lineal (y por tanto un endomorfismo), una de sus propiedades fundamentales es que $f(\vec{0}) = \vec{0}$ [T.3.1.2(1)].

3. **Verdadero.** Si f es una aplicación lineal de U en V (y por lo tanto, si es un endomorfismo de V en V), Ker(f) es un subespacio de U [T.3.2.1(b)], que en este caso es V.

4. **Falso.** El **Rango de** f se define como la dimensión de la **Imagen** de f, dim(Im f) [D.3.2.2].

5. **Verdadero.** El Teorema de la Dimensión establece $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(U)$, que en el caso de endomorfismos es $\dim(V)$ [T.3.2.3].

6. **Verdadero.** Si $f : V \to V$ y B es una base de V, la matriz $[f]_B$ tiene como columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de B en la base B.

7. **Verdadero.** El rango de la matriz A coincide con el rango de la aplicación lineal f.

8. **Verdadero.** El Ker(f) se obtiene como el conjunto solución del sistema lineal homogéneo $AX = 0$.

9. **Verdadero.** El Teorema de Semejanza (T.3.4.1) establece que $[f]_B$ y $[f]_{B'}$ son matrices semejantes.

10. **Verdadero.** Dos matrices A y B son semejantes si $\exists P$ inversible tal que $B = P^{-1}AP$ [D.3.4.1].

Test final tema 4

Preguntas de verdadero o falso sobre definiciones y conceptos

1. Un escalar λ es un valor propio de una matriz $A_{n\times n}$ si y solo si el determinante de $(A - \lambda I)$ es cero [T.4.1.1].

2. Los vectores propios asociados a un valor propio λ, junto con el vector nulo, forman un subespacio vectorial llamado subespacio característico $V(\lambda)$ [D.4.1.2].

3. La multiplicidad geométrica de un valor propio λ_0 se define como la multiplicidad de λ_0 como raíz del polinomio característico [D.4.1.4].

4. La multiplicidad geométrica de cualquier valor propio λ_0 es siempre menor o igual que su multiplicidad algebraica [T.4.1.3].

5. Si dos matrices son semejantes, necesariamente tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores propios [T.4.1.2].

6. Una matriz $A_{n\times n}$ es diagonalizable si y solo si existe una matriz diagonal D semejante a A, es decir, si existe una matriz P inversible tal que $D = P^{-1}AP$ [D.4.2.1].

7. Para que una matriz $A_{n\times n}$ sea diagonalizable, es necesario que la matriz tenga n vectores propios linealmente dependientes [T.4.2.1].

8. Una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A sea diagonalizable es que todos sus valores propios sean reales y que la multiplicidad geométrica de cada valor propio coincida con su multiplicidad algebraica [T.4.2.3].

9. Si una matriz A es simétrica ($A = A^t$), entonces los vectores propios correspondientes a valores propios distintos no son necesariamente ortogonales [T.4.3.4].

10. Una matriz cuadrada A es diagonalizable ortogonalmente si y solo si A es una matriz simétrica [T.4.3.5].

Respuestas del Test

1. **Verdadero.** Esta es la condición para que el sistema homogéneo $(A - \lambda I)X = 0$ tenga solución no trivial [T.4.1.1].

2. **Verdadero.** Este conjunto se llama subespacio propio o subespacio característico asociado a λ [D.4.1.2].

3. **Falso.** Esa es la definición de **multiplicidad algebraica**. La multiplicidad geométrica es la dimensión del subespacio propio $V(\lambda_0)$ [D.4.1.4].

4. **Verdadero.** El teorema T.4.1.3 establece esta relación: $\dim(V(\lambda_0)) \leq k$ [T.4.1.3].

5. **Verdadero.** El Teorema T.4.1.2 establece que matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

6. **Verdadero.** Esta es la definición de una matriz diagonalizable [D.4.2.1].

7. **Falso.** Una matriz A es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios **linealmente independientes** [T.4.2.1].

8. **Verdadero.** Estas son las dos condiciones del Teorema Fundamental de Diagonalización [T.4.2.3].

9. **Falso.** Si A es una matriz simétrica, los vectores propios correspondientes a valores propios distintos **son ortogonales** [T.4.3.4].

10. **Verdadero.** Esta es la caracterización principal de la diagonalización ortogonal [T.4.3.5].

Test final tema 5

Preguntas de verdadero o falso sobre definiciones y conceptos

1. El orden de una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O.) se define como el mayor de los órdenes de las derivadas que contiene.

2. Una E.D.O. de primer orden es de Variables Separadas si se puede escribir de la forma $P(x)dx - Q(y)dy = C$, donde $P(x)$ y $Q(y)$ son funciones de una sola variable.

3. Una E.D.O. de la forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es exacta si se cumple la condición $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$.

4. La ecuación de Bernoulli, $y' + p(x)y = q(x)y^n$, es un tipo de E.D.O. lineal siempre y cuando $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

5. Si una EDO $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es exacta, su solución general se encuentra implícitamente como $u(x,y) = C$, donde u es una función tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$.

6. Si una EDO $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ no es exacta, se puede buscar un factor integrante $\mu(x,y)$ tal que la nueva ecuación $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ satisfaga $\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial y}$.

Respuestas del Test

1. **Verdadero.** El orden es el **mayor de los órdenes de las derivadas que contiene** la E.D.

2. **Falso.** La solución se obtiene integrando los dos miembros de la igualdad, siendo la forma integrada: $\int P(x)dx - \int Q(y)dy = C$. La forma diferencial de una EDO de variables separadas es $P(x)dx = Q(y)dy$.

3. **Falso.** La condición de exactitud es que la **derivada de P respecto a y sea igual a la derivada de Q respecto a x**, es decir, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

4. **Falso.** La ecuación de Bernoulli es lineal solo si $n = 0$ o $n = 1$. Si $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, requiere un cambio de variable ($z = y^{1-n}$) para convertirse en lineal.

5. **Verdadero.** Si la ecuación es exacta, su solución general es $u(x, y) = C$, donde $u(x, y)$ es la función potencial tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

6. **Falso.** Para que $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ sea exacta, debe cumplir la condición de exactitud: la derivada de μP respecto a y debe ser igual a la derivada de μQ respecto a x. Es decir: $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$. La afirmación planteada intercambia x e y en las derivadas, lo cual es incorrecto para la condición de exactitud.

Test final tema 6

Preguntas de verdadero o falso sobre definiciones y conceptos

1. Una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O.) lineal de orden n se considera **homogénea** si el término $g(x)$ es igual a cero.

2. Para una E.D.O. lineal de orden n, si los coeficientes $f_i(x)$ son constantes, se considera una E.D.O. lineal de orden n con coeficientes constantes.

3. El conjunto de soluciones de una E.D.O. lineal homogénea de orden n es un espacio vectorial de dimensión n, y su solución general es una combinación lineal de n soluciones cualesquiera (no necesariamente linealmente independientes) [T.6.2.3].

4. Si λ es una raíz real de la ecuación característica con multiplicidad k, las funciones $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ son k soluciones linealmente independientes de la E.D.O. [T.6.2.4].

5. Si $\lambda = a \pm bi$ $(b \neq 0)$ son un par de raíces complejas conjugadas de la ecuación característica (multiplicidad 1), las dos soluciones reales linealmente independientes son $e^{ax}\cos(bx)$ y $xe^{ax}\sin(bx)$.

6. La solución general de la E.D.O. lineal completa $y(x)$ se puede expresar como la suma de una solución particular de la completa ($y_P(x)$) y la solución general de la homogénea asociada ($y_H(x)$).

7. En el Método de Variación de las Constantes, si se parte de la solución homogénea $y_H = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$, la solución particular $y_P = c_1(x)y_1 + \cdots + c_n(x)y_n$ se halla resolviendo un sistema para las funciones $c_1(x), \ldots, c_n(x)$, las cuales se obtienen integrando $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$.

8. El Método de Coeficientes Indeterminados puede ser aplicado para encontrar una solución particular $y_P(x)$ de una EDO lineal completa con coeficientes constantes, siempre y cuando la función no homogénea $g(x)$ sea continua en el intervalo de definición, sin importar su forma funcional.

Respuestas del Test

1. **Verdadero.** Si $g(x) = 0$, la ecuación se denomina homogénea.

2. **Verdadero.** Si las funciones $f_i(x)$ son constantes a_i, es una E.D.O. lineal de orden n con coeficientes constantes.

3. **Falso.** Si bien es un espacio vectorial de dimensión n, la solución general debe ser una combinación lineal de n soluciones **linealmente independientes** [T.6.2.3].

4. **Verdadero.** Esta es la regla para raíces reales con multiplicidad k [T.6.2.4].

5. **Falso.** Las dos soluciones reales l.i. son $e^{ax}\cos(bx)$ y $e^{ax}\sin(bx)$. La multiplicación por x se usa solo si las raíces tienen multiplicidad $k > 1$.

6. **Verdadero.** La solución general es $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ [T.6.3.2].

7. **Verdadero.** El método implica determinar $c_i'(x)$ mediante el sistema y luego integrar para obtener $c_i(x)$.

8. **Falso.** El método de coeficientes indeterminados solo puede ser aplicado para ciertas funciones $g(x)$, específicamente cuando $g(x)$ es producto de polinomios por exponenciales, o que incluyen funciones seno/coseno [8, 9]. Si $g(x)$ no tiene esta forma (ej., $\ln(x)$), se debe usar el método de variación de las constantes.

Test final tema 7

Preguntas de verdadero o falso sobre definiciones y conceptos

1. Un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (S.E.D.O.) lineal es **homogéneo** si el vector de términos independientes $G(t)$ es igual al vector cero, es decir, si $G(t) = 0$.

2. La matriz fundamental de soluciones $\phi(t)$ de un S.E.D.O. lineal homogéneo está formada por columnas que son n soluciones linealmente dependientes del sistema.

3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de la matriz de coeficientes A y u es el autovector asociado, entonces $X(t) = e^{\lambda t}u$ es una solución del sistema $X'(t) = AX(t)$ [T.7.2.4].

4. Si el autovalor complejo es $\lambda = a + bi$ ($b \neq 0$) con autovector $z = z_1 + z_2 i$, las soluciones reales linealmente independientes son $X_1(t) = e^{at}(\cos(bt)z_1 + \operatorname{sen}(bt)z_2)$ y $X_2(t) = e^{at}(\operatorname{sen}(bt)z_1 - \cos(bt)z_2)$ [T.7.2.6].

5. La solución general de un sistema lineal completo ($X'(t) = F(t)X(t) + G(t)$) es la suma de una solución particular de la completa ($X_P(t)$) y la solución general de la homogénea asociada ($X_H(t)$) [T.7.3.2].

6. Si $X_{P1}(t)$ es solución para $G_1(t)$ y $X_{P2}(t)$ es solución para $G_2(t)$, entonces $X_{P1}(t) \cdot X_{P2}(t)$ es solución para $G_1(t) \cdot G_2(t)$.

7. El Método de Variación de las Constantes busca una solución particular $X_P(t)$ del sistema completo de la forma $X_P(t) = \phi(t)C(t)$, donde $\phi(t)$ es la matriz fundamental de soluciones del homogéneo.

8. Una solución particular del sistema completo es $X_P(t) = \phi(t) \int \phi^{-1}(t)G(t)dt$, donde $\phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado [T.7.3.3].

Respuestas del Test

1. **Verdadero.** Si $G(t) = 0$, el sistema es homogéneo.

2. **Falso.** La matriz fundamental $\phi(t)$ debe estar formada por n soluciones **linealmente independientes** del sistema.

3. **Verdadero.** Si λ es un autovalor y u su autovector asociado, $X(t) = e^{\lambda t} u$ es solución [T.7.2.4].

4. **Falso.** Las soluciones reales linealmente independientes son $X_1(t) = e^{at}(\cos(bt)z_1 - \operatorname{sen}(bt)z_2)$ y $X_2(t) = e^{at}(\operatorname{sen}(bt)z_1 + \cos(bt)z_2)$ [T.7.2.6].

5. **Verdadero.** La solución general es $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$ [T.7.3.2].

6. **Falso.** El Principio de Superposición (T.7.3.1) se aplica a la **suma** de los términos no homogéneos y sus correspondientes soluciones particulares, no al producto.

7. **Verdadero.** El método propone buscar $X_P(t)$ en la forma $X_P(t) = \phi(t)C(t)$.

8. **Verdadero.** El Teorema T.7.3.3 proporciona esta fórmula de integración matricial para obtener la solución particular.