UNIVERSIDAD DE BURGOS

PROGRAMA INTERNACIONAL DE DOCTORADO

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

Departamento de Didácticas Específicas

PROPOSTA, IMPLEMENTAÇÃO E AVALIAÇÃO DE UMA METODOLOGIA DE ENSINO NO CONTEÚDO DE FUNÇÃO, UTILIZANDO UMA ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FUNDAMENTADA NA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL.

TESIS DOCTORAL

JENEFFER ARAÚJO DE ASSUNÇÃO

Burgos, Setembro de 2019

UNIVERSIDAD DE BURGOS

PROGRAMA INTERNACIONAL DE DOCTORADO

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

Departamento de Didácticas Específicas

PROPOSTA, IMPLEMENTAÇÃO E AVALIAÇÃO DE UMA METODOLOGIA DE ENSINO NO CONTEÚDO DE FUNÇÃO, UTILIZANDO UMA ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FUNDAMENTADA NA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL.

JENEFFER ARAÚJO DE ASSUNÇÃO

Tesis doctoral realizada por Da **Jeneffer Araújo de Assunção**, para optar al Grado de Doctor por la Universidad de Burgos, bajo la dirección de la **Dr. Marco Antonio Moreira y Dra. María Concesa Caballero**

Burgos, Setembro de 2019

Esta pesquisa é dedicada especialmente ao meu Senhor e salvador Jesus Cristo pela graça recebida, aos meus pais Otacílio de Assunção e Mª Francisca Martins da Rocha Araújo e a minhas tia Tânia Rodrigues Martins, tia Branca e tia Maria que sempre me incentivaram na caminhada acadêmica e com muito amor e carinho me apoiaram durante a realização de mais este sonho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao meu Senhor Jesus Cristo, pela graça concedida em fazer parte do doutorado em Educação da Universidade de Burgos. A minha família, pois sempre me apoiaram nos meus estudos. Ao meu Orientador, Marco Antônio Moreira pela dedicação e compromisso durante o período de estudo empenhado em ajudar. A minha Co orientadora profª Maria Concesa Caballero pelas grandes contribuições durante toda a pesquisa. A Direção geral e direção de Ensino do Colégio da Polícia Militar de Roraima, administrado pelo Ten Cel. PM Evandro da Silva Dias e Rozmeri Binsfeld Assunção, no qual apoiaram nesta caminhada que me fez alcançar mais um objetivo.

Ao meu grande amigo Sub.PM Sandro da Silva Araújo, que sempre me apoiou, me incentivou, na caminhada. As minhas amigas Herika do Valle, Arlene Oliveira Souza e Alessandra Rufino Santos, pelas contribuições epistemológicas e metodológicas. Ao meu amigo Paulo Diego Alves Oliveira, que me ajudou no meu equilíbrio emocional, me acompanhando nas atividades físicas. Aos sujeitos da pesquisa, que foram fundamentais em cada fase e em cada etapa do planejamento. Aos grandes amigos e companheiros de estudo Adriana Regina Chirone, Arthur Philipe Candido Magalhães, Walter Kenedy e Claudete dos Anjos, pelas viagens a congressos e pela verdadeira amizade construída. A turma de doutorandos em Educação da Universidade de Burgos, pela caminhada e pelo companheirismo. A todos vocês que fizeram parte desta realização, muito obrigada!

RESUMO

O processo de ensino aprendizagem deve estar fundamentado sobre bases científicas da psicologia cognitiva, dotado de uma metodologia para o professor conduzir o processo docente e com as particularidades das didáticas específicas. Esta pesquisa foi desenvolvida em 2016-2017 no âmbito do Doutorado em Educação da Universidade de Burgos e teve como sujeitos estudantes da 1ª série do Ensino Médio de um Colégio da Polícia Militar do Estado de Roraima. Essa investigação teve como questão norteadora: A implementação de uma estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, possibilitará aos estudantes da 1ª série do Ensino Médio aprender significativamente o conteúdo de função? O planejamento contemplou como metodologia a estratégia de resolução de problemas, juntamente com a teoria de Ausubel, no qual deu suporte na organização do plano de ação, do guia de observação e da sequência didática. Os procedimentos estão classificados como estudo de caso, relacionados com a assimilação das ideias conceituais de função e função afim e ao evento quantitativo em quase experimental, dividido em grupo experimental e grupo de controle. O objetivo desta pesquisa é analisar a efetividade da estratégia de resolução de problemas (ERP) como metodologia de ensino fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, buscando evidências de aprendizagem significativa dos estudantes. Para isso, 84 estudantes da 1º série do Ensino Médio de um Colégio Militar do Estado de Roraima, distribuídos em quatro turmas, no turno vespertino, com idades entre 15 e 16 anos, foram submetidos a essa metodologia (grupo experimental) e a metodologia tradicional (grupo controle) para desenvolver os conteúdos de função e função afim. Do total da amostra, 43 estudantes (turmas B e D) fizeram parte do grupo experimental e o restante (n=41) congregaram o grupo de controle (turmas A e C). Deste modo, a partir da análise dos resultados obtidos, concluiu-se que a metodologia de resolução de problemas foi eficaz, no qual os discentes desenvolveram habilidades e competências no conteúdo de função e função afim e um avanço no desempenho nas ações e operações da estratégia de resolução de problemas. Concluímos que o aproveitamento do grupo experimental foi maior após a aplicação da metodologia. Além disso, comparando os resultados do grupo experimental e do grupo controle, pode-se concluir que a estratégia de resolução de problemas, é uma metodologia que contribuiu de forma significativa no processo de ensino, assim como do processo de compreensão e construção de conceitos, fazendo dos estudantes sujeitos autônomos no processo de aprendizagem e do professor um mediador e facilitador deste processo, ao escolher as atividades e intervir quando necessário para a construção de novos saberes.

Palavras-chave: Aprendizagem significativa. Ensino e Aprendizagem do conceito de Função. Estratégia de Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This research was based on the assumption that the teaching-learning process depended on the scientific bases of cognitive psychology. It assumed that the teacher had a methodology that agreed with specific didactical features. It was developed from 2016-2017 at the Doctorate in Education at the University of Burgos, Spain, having as subjects 1st-grade high school students of a Police Military School in the Brazilian state of Roraima. The guiding question here was: Problem Solving as a teaching methodology for the content *functions based* on the theoretical framework of Meaningful Learning can favor meaningful learning of the content *function* in those high school students? In answer to this question, the objective was to analyze the teaching-learning process using the problem-solving methodology while teaching the content *functions* with the Meaningful Learning Theory approach. Its planning stage involved problem-solving strategies in the viewpoint of Ausubel`s theory that offered its support to the action planning organization, observation guidelines, and didactic sequencing. Didactic procedures were those of a case study related to the assimilation of conceptual ideas of function, polynomial function, and to the quasi-experimental teaching-learning event. The group was divided into two groups: experimental and control group. It encompassed 84 first grade students of a Police Military High School, Roraima, Brazil, ages 15 to 16, distributed along with four different evening classes. The experimental group was taught with the methodology as mentioned earlier, while the control group developed the prescribed contents of function and polynomial function with the use of a traditional method. Forty-three (43) students (classes B and D), out of the 84 subjects sample, integrated the experimental group; forty-one(41) incorporated the control group (classes A and C). Thus, after data analysis of the obtained results, it might be inferred that the students involved in this research developed skills and competencies related to the content of *function because* they seemed to have meaningfully assimilated the previously planned content. They might also have presented what can be qualified as an improvement in their performance related to actions and operations on the problem-solving strategy. It is possible to conclude that the outcomes of the experimental group improved after the implementation of the methodology, as mentioned earlier. Moreover, when the two groups underwent a comparison, one might conclude that the problem-solving strategy can meaningfully contribute to the teaching and learning processes, as it favored the comprehension, grasping, and the construction of concepts. The students became more autonomous subjects in their learning process, in which they had the teacher as a mediator and facilitator in such a means as she/he selected the classroom activities and intervened whenever necessary to facilitate the construction of new knowledge.

Keywords: Meaningful Learning; the concept of function; polynomial function; problem-solving strategy.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÃO

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

INTRODUÇÃO

A finalidade desta introdução é apresentar uma visão geral sobre a pesquisa, destacando a estratégia de resolução de problemas (ERP) como metodologia de ensino, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. Também são apresentados a problemática envolvida e o tema de estudo. Ainda são mostradas a motivação e a justificativa desta autora na escolha do tema envolvendo os estudantes da 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de Roraima no processo de aprendizagem do conteúdo de função e função afim. Por fim, são expostos os objetivos gerais e específicos que foram estabelecidos para a execução da pesquisa, bem como a estrutura da tese.

Contextualização e problema de pesquisa

O processo de ensino-aprendizagem da Matemática vem sendo um grande problema para o sistema educacional brasileiro. Isso ocorre porque a maioria das escolas, principalmente as públicas, adota metodologia de ensino consideradas ultrapassadas, preocupada em preparar os estudantes para exames, tornando assim uma aprendizagem mecânica. Para Oliveira (2007, p.01), essa dificuldade está associada a fatores como "a má formação do professor, metodologias de ensino inadequadas e insuficientes, dificuldades dos professores em motivar os estudantes, divergência na relação professor-aluno, entre outros".

A aprendizagem no Ensino Médio das escolas brasileiras é um mero "treinamento" para o exame nacional do Ensino Médio (ENEM), ou seja, preparam os estudantes tecnicamente para o ingresso no Ensino Superior, sendo que essas escolas são bem qualificadas quando estão no ranking das escolas que obtiveram melhores notas no ENEM, tal modo de ensino não se preocupa com o processo de aprendizagem cognitiva dos estudantes, Santarosa (2016) enfatiza que "esta visão geral do contexto de aprendizagens mecânicas recai com grande preocupação para as áreas de formação que envolvem a Matemática, cuja abstração é necessária para o entendimento de diversos fenômenos científicos, históricos e sociais que regem o universo" (Santarosa, 2016 p. 59). Desde uma visão cognitiva, o processo de aprendizagem é como construção do sentido do conhecimento, onde se privilegiam os processos por meio dos quais as pessoas codificam, organizam, elaboram, transformam e interpretam o conhecimento adquirido.

Sendo assim, o processo de ensino aprendizagem deve estar fundamentado por teorias de aprendizagem, pois a estrutura cognitiva é um complexo organizado de ideias, logo, é importante saber como o estudante armazena as informações em sua estrutura cognitiva e de que forma o professor deve conduzir este processo. Contudo, o processo de ensino aprendizagem de conteúdos matemáticos deve estar fundamentado sobre bases científicas da psicologia educacional, dotado de uma metodologia para o professor conduzir o processo docente com as particularidades da didática específica. Portanto, surgem algumas interrogações: Como se assimila e organiza os conhecimentos na estrutura cognitiva? Qual é a teoria psicológica que explica o processo de retenção e aquisição do conhecimento? Que metodologia devo utilizar para realizar a direção adequada do processo de ensino aprendizagem?

Segundo Ausubel, Novak Hanesian (1980), a assimilação ocorre quando os novos conhecimentos interagem com os conceitos e proposições específicos relevantes da estrutura cognitiva do estudante, neste processo os novos conhecimentos adquirem significado para o estudante e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva. Este processo de interação do conhecimento passa por diversas etapas internas, no qual resulta numa alteração das novas informações e do significado dos conceitos ou proposições aos quais estão ancorados, criando assim um novo produto ideário que constitui o novo significado para o estudante.

Considerando as inquietações abordadas, surgiu a questão norteadora da pesquisa: A implementação de uma estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, possibilitará aos estudantes da 1ª série do Ensino Médio aprender significativamente o conteúdo de função?

De acordo com o que é destacado pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (Brasil, 2013), o conteúdo específico de função pode possibilitar aos alunos o entendimento de situações diretamente relacionadas ao seu cotidiano. Nessa ótica, a aplicação de problemas do cotidiano do estudante na Matemática, pode facilitar o entendimento de um determinado conteúdo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1999), descrevem a relevância do estudo do conceito, destacando que, a partir do estudo de função é possível “[...] descrever e estudar através de leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia” (BRASIL, 1999, p. 96).

O estudo de funções é, sem dúvida, um dos mais importantes dentre os conteúdos matemáticos abordados no Ensino Médio. Sua relevância pode justificar-se pelo fato do conteúdo estabelecer relações com vários outros conceitos matemáticos, além de ser aplicado no estudo de fenômenos em diversas áreas do conhecimento como por exemplo, a ideia de função aparece quando um botânico estuda o crescimento de uma planta ao longo de determinado período, ou quando um físico estuda a variação da temperatura de um corpo em função da quantidade de calor recebida. Tal importância deste objeto de estudo é justificada por Ponte (1990), ao afirmar que diversos ramos da matemática lidam de alguma forma, direta ou indiretamente, com funções. O autor cita exemplos, como o uso de funções de *n* variáveis na área de análise infinitesimal, onde se estudam as propriedades bem como as de suas derivadas; funções como soluções de equações nas teorias de equações diferenciais e integrais dentre outros.

A abordagem apresentada encontra apoio na epistemologia da Matemática e na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel et al. (1980). O foco desta teoria está na aquisição e retenção do conhecimento. Em outras palavras, o processo de aprendizagem consiste no acréscimo sucessivo de novas ideias e conceitos. Sendo assim, dada a complexidade da temática, a pesquisa visou problematizar os resultados das atividades realizadas com os estudantes da 1º série do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Boa Vista, no Estado de Roraima. Esses estudantes foram escolhidos porque concluíram o Ensino Fundamental e se encontravam na etapa inicial do Ensino Médio, no qual nesta etapa, é ministrado todo o conteúdo de função.

Quanto a metodologia adotada, Luckesi (1990, p. 82) enfatiza que no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, não se aprende resolver problemas na disciplina de Matemática, mas, se aprende matemática resolvendo problemas. Com base nesta perspectiva, Mendoza (2009, p. 66) destaca que qualquer situação que esteja situada em favor da aprendizagem da Matemática, deve estar concebida sobre a base de situações problema.

A importância da resolução de problemas no processo de ensino–aprendizagem é ressaltada na literatura da área de educação matemática e em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais referentes ao Ensino Fundamental – Matemática (BRASIL, 1999), que a prenunciam como perspectiva metodológica de ensino, permitindo a abordagem de conceitos, procedimentos e atitudes necessários à formação do estudante e de problemas do cotidiano, relacionando-os a diversos assuntos da matemática.

A resolução de problema pode ser estudada de três formas em que se ensina sobre resolução de problema, a resolver problema e matemática por meio da resolução de problema. Quando o professor ensina através da resolução de problema, está torna-se uma metodologia na aprendizagem. Segundo os PCN’S a resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática tem como princípio que a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição.

Neste processo, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. O uso da resolução de problemas não é uma atividade mecânica, e o problema deve ser interpretado pelo aluno, no qual um determinado conceito matemático é construído através de outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, o aluno constrói um conjunto de conceitos que torna sentido num conjunto de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular.

Está claro nesta contextualização do tema que o conhecimento de função precisa estimular o raciocínio dos estudantes na medida em que buscam a solução dos problemas que estão resolvendo. Assim, torna possível o professor demonstrar aos estudantes que o conteúdo de função é importante para eles, e não é apenas etapa da vida escolar que precisa ser cumprida, como poderá ser visualizado, a seguir, nos objetivos da pesquisa.

Objetivo Geral

- Analisar a efetividade da estratégia de resolução de problemas como Metodologia de ensino fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, buscando evidências de aprendizagem significativa dos estudantes.

Objetivos Específicos

- Diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes no conteúdo de Função;
- Elaborar e pôr em prática uma sequência didática utilizando a estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel;
- Avaliar a efetividade da sequência didática utilizando a estratégia de resolução de problemas no processo de assimilação dos estudantes, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel.

Motivação pessoal

A construção do objeto de estudo surgiu durante a realização do curso de mestrado profissional em ensino de Ciências, na Universidade Estadual de Roraima (UERR), entre os anos de 2013-2015. Em contato com os alunos de uma escola pública do Ensino Fundamental, percebia neles a compreensão superficial dos conceitos através de problemas matemáticos, bem como pouca efetividade nas relações de ensino e aprendizagem.

Tais percepções, possibilitadas pela convivência com os estudantes no decorrer da pesquisa de mestrado e na sala de aula enquanto professora da educação básica, conduziram-me ao questionamento sobre o sentido do Ensino Médio para os alunos de um colégio militar, com as suas características específicas, no qual visa um ensino pautado em preparar o estudante para o vestibular e para olimpíadas, tais como, olimpíadas brasileiras de Matemática, de História, Química, dentre outras. Neste período, eu era justamente a professora que preparava os estudantes para serem medalhistas das olimpíadas brasileiras de Matemática. De certa forma os estudantes se sentiam motivados devido ao fato das competições, pois por dois anos consecutivos, foi a escola mais premiada do Estado, porém, como professora havia em mim uma inquietação: será que os alunos estão realmente assimilando o conteúdo?

Quanto ao público-alvo, estudantes da 1ª série do ensino médio, além da escolha ser motivada por se tratar de uma estratégia de resolução de problemas a partir do conteúdo de função, há um fator pessoal envolvido devido minha formação ser na área da Matemática e, por conta disso, presenciei no exercício da docência as dificuldades dos estudantes nas aulas de matemática em relação a formalização do conceito deste conteúdo.

Estrutura da tese

Para estruturação dos argumentos e considerações que favorecem a problemática deste estudo, a presente tese de doutorado está dividida em cinco capítulos.

A título de esclarecimento, o primeiro capítulo intitulado “Revisão de Literatura” traz uma visão geral sobre o trabalho ao evidenciar a revisão de literatura, dando suporte para o problema a ser analisado e os objetivos a serem cumpridos.

Iniciando a investigação das metas objetivas, o segundo capítulo apresenta uma abordagem geral dos conceitos teóricos da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. Inicia-se conceituando os princípios básicos da teoria, formas e tipos de aprendizagem e o processo de assimilação. Seguindo, portanto, os aspectos fundamentadores de cunho teórico e metodológico, e realçando o objetivo do escopo, destina-se a estudar a estratégia de resolução problemas (ERP) como forma especial de aprendizagem significativa, aplicado ao conteúdo de função e função afim, propondo uma análise conforme os aspectos cognitivos desta teoria.

Na sequência, o terceiro capítulo aborda os procedimentos metodológicos aplicados, propondo uma análise discursiva e explicativa do evento. Inicia-se com os dados obtidos no teste diagnóstico de características descritiva e exploratória, para formar uma correlação com o nível de partida ideal e as novas ideias do conteúdo de função, chegando à explicativa, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa.

As análises foram realizadas por enfoques metodológicos qualitativos e quantitativos, prevendo resultados triangulados do efeito da sequência didática da estratégia de resolução de problemas, na aprendizagem dos estudantes, fundamentado nos aspectos de assimilação das etapas qualitativas (cognitiva) da teoria de Ausubel. encontram-se os aspectos metodológicos da pesquisa, os procedimentos utilizados na coleta de dados, métodos de análise do objeto e a validade da pesquisa.

O quarto capítulo intitulado “Funções, história e conceitos preliminares: uma proposta de ensino baseada na estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino” traz uma abordagem da história e formação do conceito de função ao longo do tempo, bem como a definição e propriedades de funções e função afim, neste capítulo, descreve-se a sequência didática utilizada na pesquisa. O capítulo cinco discorre da análise e discussão dos resultados. Para finalizar, nas demais seções são expostas as considerações finais deste estudo, as referências os apêndices e anexos.

CAPÍTULO 1

REVISÃO DE LITERATURA

CAPÍTULO 1: REVISÃO DE LITERATURA

A aprendizagem significativa de conteúdos matemáticos tem sido discutida sob diferentes abordagens metodológicas. No entanto, é comum em todas elas a preocupação em minimizar as dificuldades dos estudantes em aprender os conteúdos didáticos, a partir do uso de metodologias de ensino diferenciadas. Neste capítulo é apresentado a revisão de literatura, que contempla um levantamento de estudos realizados entre os anos de 2007 a 2017, com o propósito de subsidiar a nossa proposta de pesquisa. O objetivo é fazer uma análise de estudos publicados em periódicos, teses e dissertações, buscando averiguar semelhanças e diferenças nas estratégias adotadas no ensino e aprendizagem do conteúdo de função e quais implicações destes estudos para nossa proposta de pesquisa. Estes artigos foram selecionados pois trazem metodologias ou sequencias didáticas para o ensino-aprendizagem de funções.

Foram analisados 48 trabalhos nos seguintes periódicos: Boletim de educação matemática-BOLEMA, revista ibero-americana de educação matemática-UNION, enseñanza de las ciências, educação matemática pesquisa, revista latino-americana de investigação em matemática educativa, scientia cum indústria, revista reflexão e ação, além de teses, dissertações e artigos publicados em anais.

Os artigos analisados foram divididos em cinco categorias: modelagem; resolução de problemas; representação semiótica, uso de software/aplicativos e sequências didáticas com metodologias variadas, a divisão dessas categorias foi no intuito de averiguar de que forma o conteúdo de funções estava sendo desenvolvido em diferentes metodologias e como se deu o processo de assimilação do conceito a partir dessas metodologias. Posteriormente, adaptamos de Costa (2008) as eleições das informações gerais, que foram organizadas em quadros seguindo a ordem cronológica. As informações foram especificadas em autor/ano, objetivo do estudo, base teórica, amostra, metodologia adotada e resultados obtidos.

1.1 Metodologias diferenciadas utilizadas no ensino de conteúdos matemáticos.

Compreender que a matemática é um conjunto de conhecimentos acabados, torna a aula meramente expositiva e não abre espaços para a criação e participação ativa do estudante, sendo que os PCN’s (1999) enfatizam que esse obstáculo deve ser superado em prol de uma educação matemática de qualidade e indicam como ponto indispensável a preparação e atuação docente em que, ao lançar mão de práticas educacionais, o professor entenda a matemática como ciência dinâmica, ao passo que construa um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área, propiciando assim a criação de ambientes favoráveis ao aprendizado discente (Feitosa, 2014, p. 27).

De acordo com Carvalho (2012), o processo de aprendizagem matemática acontece de forma gradual, por isso ensiná-la é ampliar as habilidades do aluno, tornando-o capaz de realizar mudanças em sua realidade. Sendo assim,

> “A atividade matemática escolar não é ‘olhar para as coisas prontas e definitivas’, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade”. (PCNs, 1999, p.19).

A matemática não é só mais um componente curricular, é uma área do conhecimento que permite solucionar problemas, interpretar situações, realizar análises e é a partir desse ponto de vista que o ensino da matemática deve ser levado aquém e além do cálculo, revelando a natureza problemática das matemáticas. O cálculo deve ser entendido como instrumento do raciocínio matemático (Morin, 2003, p. 23).

Para Feitosa (2014), na organização do processo de ensino e aprendizagem é imprescindível o conhecimento do processo de assimilação, ou seja, como o ser aprende? e quais suas particularidades? Por isso Majmutov (1983) e Talizina (1988), afirmam que sem uma concepção psicológica da aprendizagem não se pode organizar cientificamente o processo de ensino, ou seja, é necessário uma teoria psicológica para amparar o processo educativo de modo que o professor direcione todo o processo de assimilação do conteúdo. Os próximos tópicos apresentam resultados de pesquisas na qual foram utilizadas diversas metodologias de ensino que fazem parte da revisão de literatura.

1.1.2 Modelagem matemática

A modelagem vem sendo investigada como um campo metodológico de ensino e pesquisa, utilizando situações-problema que nos intrigam nas diversas áreas do conhecimento. “A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual” (Bassanezi, 2002, p. 24). O uso dessa prática torna-se importante por proporcionar o surgimento de hipóteses característica, aproximações, efeitos e parâmetros que muitas vezes não estão sendo visualizados a partir da análise do fenômeno por outros meios de investigação. O Quadro 1 traz informações sobre os autores, ano, título, objetivos e sujeitos da pesquisa, o Quadro 2 informações sobre referencial teórico, metodologias e resultados de pesquisas que utilizaram a modelagem como metodologia de ensino.

Quadro 1- Estudos sobre modelagem matemática.

Autor/ Ano	Revista	Título	Objetivo	Amostra
Ross Alvez do Nascimento 2007	Tese Doutorado em Educação UFPE	Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções.	Identificar as habilidades mobilizadas por estudantes da Licenciatura em Matemática na aplicação do conceito de função, explorando uma estratégia de modelagem matemática que faz uso da construção de simulações computacionais por via do software Modellus.	6 estudantes do curso de licenciatura em Matemática de uma IES do Recife.
Lorena Luquini de Barros Abreu 2011	Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências-UFPE	Estudando conteúdos matemáticos com direcionamentos de modelagem matemática: o caso da função afim	Aproximar a disciplina à realidade em que esses estudantes se inserem, por meio de uma situação-problema envolvendo os alunos em uma pizzaria próxima à escola.	Um grupo de quatro alunos da 1ª série do ensino médio
Luiz Gonçalves Filho 2011	Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. PUC/SP	Modelagem matemática e o ensino de função do 1º grau.	Desenvolver a aplicação de algumas atividades da proposta curricular da secretaria de Estado da Educação adequando-as a formação de modelos matemáticos.	Uma turma da 1ª série do ensino médio
Belissa Schonardie 2011	Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática-UFRGS	Modelagem matemática e introdução da função afim no Ensino Fundamental.	Criar condições para que os alunos aprendam a fazer modelos matemáticos, aprimorando seus conhecimentos.	Uma turma da 1ªsérie do Ensino Médio
Valdirene Rosa de Souza 2011	Dissertação de mestrado profissional em Ensino de Matemática. PUC/SP	Função no Ensino Médio: história e modelagem	Abordar as funções no Ensino Médio por meio de relações estabelecidas entre a história da matemática e o uso de modelagem no ensino da matemática.	Uma turma da 1ªsérie do Ensino Médio
Rudolph dos Santos Gomes Pereira; Guataçara dos Santos Júnior 2013	Revista BOLEMA	Modelagem matemática e o ensino de ajuste de funções: um caderno pedagógico	Apoiar professores interessados em utilizar a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem de ajuste de funções, ou, ainda, em outros conteúdos pertencentes à matriz curricular do referido curso.	Professores da Licenciatura em Matemática

Fonte: a autora

Quadro 2- Análise das teorias, metodologias e resultados das pesquisas que utilizaram a modelagem como metodologia de ensino.

Autor/Ano	Referencial Teórico	Metodologia	Resultados
Ross Alvez do Nascimento 2007	Bassanezi, 2002; Biembengut & Hein, 2003; Barbosa, 2003.	Modelagem/ análise qualitativa das atividades proposta aos estudantes.	Os Resultados indicam habilidades específicas para modelar, influência de regras de contato didático, contexto utilizado nos problemas trouxeram elementos do cotidiano como é típico em situações de modelagem e que a dificuldade da fase de validação foi minimizada com a presença do software Modellus.

Lorena Luquini de Barros Abreu 2011	Bassanezi, Bean, Burak, Biembengut e Barbosa	Pesquisa qualitativa tendo como abordagem o estudo de caso	A realização da pesquisa de campo (comércio de pizza) mostrou, através dos resultados e das falas dos alunos, que a modelagem matemática pode contribuir para a contextualização de matemática no cotidiano deles.
Luiz Gonçalves Filho 2011	Modelagem de Bassanezi	Análise qualitativa das atividades realizadas pelos estudantes.	A realização deste trabalho contribuiu para não só promover uma reflexão acerca das dificuldades inerentes aos alunos do ensino médio nas aulas de Matemática no que diz respeito ao assunto de funções, como também adotar novas posturas em relação ao ensino de matemática, propondo um caminho para minimizar essas dificuldades.
Belissa Schonardie 2011	Barbosa (2001); Biembergut (2000) e Skovsmose (2000)	Pesquisa qualitativa tendo como abordagem o estudo de caso	O desempenho dos alunos durante as aulas e os resultados por eles apresentados no final da sequência de atividades mostrou que a proposta desenvolvida é válida e adequada para a faixa etária em questão, bem como que através da modelagem matemática, ocorre uma melhor compreensão da matemática envolvida no trabalho.
Valdirene Rosa de Souza 2011	Estudo da variação do movimento de Nicole Oresme e a modelagem de Bassanezi	A autora não apresenta uma metodologia de pesquisa.	A pesquisa levou a entender que o desenvolvimento da matemática está relacionado aos acontecimentos presentes na sociedade nas diversas áreas do conhecimento.
Rudolph dos Santos Gomes Pereira; Guataçara dos Santos Júnior 2013	Modelagem de Bassanezi	Pesquisa qualitativa	No final do projeto, percebeu-se que a Modelagem Matemática, como estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática, pode contribuir para o aprendizado de conceitos matemáticos e elaborou-se um Caderno Pedagógico que contém a atividade desenvolvida para ser utilizada por outros professores do Ensino Superior na contextualização de conceitos.

Fonte: a autora

Dentre os estudos acima mencionados, analisou-se a tese de doutorado de Ross Alves do Nascimento, que tem como título: Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de função, apresentada ao curso de doutorado em Educação, do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal de Pernambuco.

Nascimento (2007), investigou a modelagem matemática como caminho metodológico para a aprendizagem do conhecimento de função afim, quadrática e exponencial, em situações que utilizam a construção de simulações no computador. Para ele, a modelagem além de aplicar conceitos matemáticos, a construção de modelos tem sido vista como uma forma de construir novos conceitos, como a própria história do conhecimento matemático aponta.

O objetivo do estudo é identificar quais habilidades matemáticas e computacionais são mobilizadas para usar o conhecimento de função na modelagem de soluções para a construção de simulações. Ao focar esse conhecimento, procurou-se incluir como ferramenta auxiliar para a pesquisa, o software modellus.

Tem-se como questões norteadoras da pesquisa: Uma abordagem de modelagem envolvendo algumas famílias de funções utilizando simulação computacional pode levar o aluno a desenvolver habilidades para aplicar o conhecimento que domina? Que habilidades são necessárias para modelar situações problema relativas ao conhecimento de função? Qual é a relação entre os recursos computacionais e as habilidades mobilizadas em situações de modelagem? O autor teve como referencial teórico Bassanezi, 2002; Biembengut & Hein, 2003; Barbosa, 2003.

Realizou-se uma abordagem qualitativa que foi dividida em duas etapas. Na primeira, foi realizada uma análise das habilidades relativas ao processo de modelagem, já exploradas em abordagens presentes em livro-didático, de forma a compor um mapeamento dessas habilidades. Na segunda etapa, investigou as habilidades desenvolvidas pelos alunos ao explorarem funções em atividades de modelagem de situações com o uso do software modellus.

Dessa forma, o autor construiu uma sequência de três problemas, caracterizados como problemas do tipo “completamente aberto”, cuja solução demandava o conhecimento de função. Selecionou três duplas de estudantes de uma faculdade da região metropolitana do Recife para vivenciar a experiência. Os estudantes já dominavam o software modellus, o que permitiu o avanço na investigação. Após ler e interpretar o problema, os sujeitos eram levados a utilizar o software, tratando-o como uma ferramenta auxiliar para solucionar as questões. Utilizavam os recursos oferecidos no software, tratando os problemas como fatos reais.

Durante a realização do estudo verificou-se que a utilização de problemas do tipo completamente aberto enriqueceu a proposta de trabalho e resgatou informações sobre fenômenos didáticos envolvidos nas relações de ensino-aprendizagem. Os resultados indicam habilidades especificas para modelar, influência de regras de contrato didático. Os contexto utilizado nos problemas trouxeram elementos do cotidiano como é típico em situações de modelagem e que a dificuldade da fase de validação foi minimizada com a presença do software modellus.

A pesquisa da dissertação de mestrado realizada por Schonardie (2011), intitulada modelagem matemática e introdução da função afim no ensino fundamental. A autora teve como base uma investigação acerca dos planos de telefonia celular oferecidos pelas companhias existentes no Rio Grande do Sul, com o intuito de descobrir qual delas apresenta a proposta mais vantajosa, dependendo da necessidade do cliente.

Seu principal objetivo é apresentar uma proposta para o ensino de função afim, desenvolvendo todas as atividades em turmas do sétimo ano do Ensino Fundamental. A pesquisadora utilizou como referencial teórico, os conceitos de modelagem matemática apresentados por Barbosa (2001), Biembengut (2000) e Skovsmose (2000).

A pergunta central norteadora da pesquisa é: Como trabalhar com modelagem matemática para ensinar tópicos de função aos estudantes da 1ª série do Ensino Médio? A metodologia de pesquisa escolhida foi a pesquisa qualitativa por meio de estudo de caso. A experimentação ocorreu em uma turma de 28 estudantes da 1ª série do Ensino Médio, em uma escola de Porto Alegre, a pesquisa teve a duração de um mês sendo cinco aulas de 150 minutos. A autora relata sua motivação para realização do estudo:

> Algo motivador para a realização desse trabalho foi o fato de estar como professora titular do grupo de alunos desde do início do ano letivo, e eles estarem já acostumados com meu ritmo de trabalho. Sempre foram muito atenciosos e responderam bem as atividades que propus, realizando-as com dedicação. Sendo que na escola contamos com o laboratório de aprendizagem, o qual atende os alunos que apresentam dificuldades (Schonardie 2011, p. 58)

Para iniciar a atividade, a professora leu, juntamente com a turma, um texto falando sobre a situação da telefonia celular no Brasil, trazendo-lhes dados relevantes com relação ao número de aparelhos utilizados em nosso país. A turma foi dividida em seis grupos: dois investigaram a operadora Claro, dois a Vivo, um a Oi e um a Tim. Os estudantes pesquisaram a respeito dos planos existentes para cada operadora, criando assim um cartaz propaganda, através do qual mostraram aos colegas o quanto se gasta em ligações e torpedos, posteriormente os alunos elaboraram um modelo matemático para cada situação pesquisada.

Um ponto a destacar foi que eles encontraram dificuldades em relação a ideia de gráfico. Quando questionados sobre o que acontece ao se esboçar os dados de um gráfico, a maioria dos estudantes afirmaram que quanto maior a quantidade de minutos utilizados, mais elevado será também o valor a ser pago. Na verdade, o esperado era que os estudantes percebessem que os pontos no gráfico se encontravam alinhados.

O desempenho dos estudantes durante a aulas e os resultados por eles apresentados no final da sequência didática mostrou que a proposta desenvolvida é válida e adequada para a faixa etária em questão, e que o uso da modelagem matemática torna possível uma melhor compreensão da matemática envolvida no trabalho. A pesquisadora elaborou um material como produto final que pode ser utilizado futuramente por professores que busquem valer-se de atividades semelhantes em suas aulas.

Outro estudo realizado, foi a pesquisa de Abreu (2011), no qual teve como finalidade trabalhar com as funções matemáticas mediante as contribuições concedidas pela prática da modelagem Matemática, por meio de uma concepção que permite ao educador desenvolver uma busca pela interação proveniente da matemática contextualizada na realidade dos estudantes. O objetivo da pesquisa consiste em apresentar atividades envolvendo funções afins, de modo que os estudantes atribuam significados do seu uso em situações contextualizadas.

O problema da pesquisa resume-se em: Como a modelagem matemática pode contribuir para a contextualização da matemática no cotidiano dos alunos, para que eles possam atribuir significados ao conceito da função afim? Para isso, a modelagem matemática é utilizada como principal metodologia empregada na busca pela conexão entre professores e alunos. A autora destaca que:

> A busca por um referencial teórico que auxilie na quebra dessa forma tradicional de tratar as funções mostra que há algumas metodologias alternativas para o educador que podem direcionar suas aulas por um caminho que desperte nos alunos o prazer, a vontade e a conexão da matemática com o seu cotidiano (Abreu, 2011, p.73).

A pesquisa de campo desenvolvida com os alunos é de caráter qualitativo, tendo sido abordado o estudo de caso. O trabalho investigativo aconteceu num período extra turno, com duas horas semanais de duração, totalizando seis encontros. Quatro estudantes foram convidados pela pesquisadora, para participar das atividades, sendo a pesquisadora docente da turma. O objetivo era que esses quatro alunos pesquisassem, em uma pizzaria, nas proximidades da escola, dados que pudessem auxiliar no levantamento de modelos, para que estudassem as funções afins, além de outros conteúdos que surgissem com o propósito de atingirem as respostas (Abrel, 2011, p. 96).

A pesquisa exploratória, *in loco* em uma pizzaria da cidade, foi presidida pelos estudantes, que buscaram algumas respostas para questionamentos levantados na sala de aula. No levantamento dos problemas, os estudantes foram incentivados a relacionar os preços com os tamanhos ou pesos das pizzas e a relatar acerca da margem de lucro da pizzaria.

Abreu (2011) faz um levantamento das questões feitas pelos estudantes na pizzaria: o que pode ser dito em relação à proporcionalidade entre preço e tamanho (ou pesos das pizzas)?

Analisando-se os gráficos e as leis de formação que encontraram para as funções afins, o que é possível concluir em relação ao lucro da pizzaria? O que podem dizer das funções afins?

Posteriormente, os participantes teceram alguns comentários para responder às questões iniciais, como a relação entre preços e tamanhos/pesos utilizando as funções afins, dentre outras indagações e questionamentos. A autora ressalta sobre as contribuições do uso das hipóteses no estudo:

> A pesquisadora e professora mediadora propõe hipóteses para orientar as discussões e aproveitar ao máximo aquilo que os alunos mencionaram acerca de situações matemáticas. Com a questão levantada, surgiu a conexão do que eles se lembram ao fazer um corte na pizza passando por sua metade. Dessa forma, Geraldo logo afirma que, se for de um lado ao outro, é o diâmetro, e Jhon Jhonas, por sua vez, diz que esse diâmetro aumenta se o tamanho da forma da pizza for aumentado. Esses alunos já trazem a concepção de diâmetro e de raio e associam naturalmente suas concepções com o formato da pizza, que geralmente é circular (Abreu, 2011, p.101)

É importante ressaltar que, a modelagem oferece obstáculo aos educadores como o fato de fugir ao cumprimento de um currículo de forma linear, e, na maioria das escolas, o educador tem um currículo pronto, que precisa ser seguido num curto espaço de tempo. Dessa forma, a realidade e matemática tornam-se ferramenta indissolúvel para os alunos compreenderem situações cotidianas que integram a disciplina às mais variadas experiências, garantindo-se, assim ao corpo docente e discente ampla possibilidade de desenvolverem, juntos, o entendimento de tal disciplina, numa interação necessária a um aprendizado de qualidade.

Porém, analisando as pesquisas mencionadas, observa-se a necessidade de se trabalhar a construção do conceito, pois em todas as etapas da atividade de modelagem Matemática o aluno é convidado a agir, indagar, problematizar, investigar (Barbosa, 2003), formular hipóteses, testar suas hipóteses, trocar conhecimentos com seus pares, ou seja, é quase uma exigência que ele relacione substancialmente os novos conhecimentos com os seus conhecimentos prévios, o que nas pesquisas não houve a importância de verificar os conhecimentos prévios dos estudantes nem levou em consideração a importância da verbalização. Dessa forma, as tarefas de aprendizagem que o estudante precisa desenvolver durante a atividade de modelagem não são tarefas que envolvem uma mera recepção memorística, ou um problema contextualizado, mas sim, são tarefas potencialmente significativas que podem conduzir os alunos para a ocorrência da aprendizagem significativa do conteúdo matemático envolvido na atividade.

1.1.3 A Resolução de problemas como metodologia de ensino

A resolução de problemas representa um contexto bastante propício à construção de conhecimento matemático a partir da observação e percepção de padrões, especialmente se considerada como metodologia de ensino, ou seja, se o problema for proposto como gerador de novos conceitos e conteúdos matemáticos (Onuchi e Alevato, 2011, p. 90). O Quadro 3 traz informações sobre os autores, ano, título, objetivos e sujeitos da pesquisa, O Quadro 4 informações sobre referencial teórico, metodologias e resultados de pesquisas que utilizaram a modelagem como metodologia de ensino.

Quadro 3-Estudos sobre resolução de problemas, tendo como objeto de estudo o conteúdo de funções.

Autor/ Ano	Revista	Título	Objetivo	Amostra
Renata Cristina Geromel Meneghetti; Julyette Priscila Redling 2012	Revista BOLEMA	Tarefas Alternativas para o Ensino e a aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio	Analisar o potencial didático-pedagógico deste tipo de metodologia no Ensino Médio.	Uma classe de 13 alunos da 3ª série do Ensino Médio
Valdneide Pereira Santos de Almeida 2014	Dissertação de Mestrado UFPE	Análise da resolução de problemas de função afim na modalidade mista de ensino: a efetividade de rede social educativa.	Analisar a resolução de problemas de função afim na modalidade mista de ensino.	84 estudantes da 1ª série do Ensino Médio
Victor Hugo Duarte de Assis 2015	Dissertação de Mestrado-UNESP	Características da Função Quadrática e a Metodologia de Resolução de Problemas.	Fundamentar teoricamente as propriedades da função quadrática para obtenção do seu gráfico; apresentar aspectos da metodologia de resolução de problemas e os resultados de sua aplicação na terceira série do Ensino médio para o ensino da função quadrática.	Uma turma da 3ª série do ensino médio
Viviane Cristina Boschetto 2015	Dissertação de Mestrado-UNESP	Função afim e suas propriedades através da resolução de problemas	Mostrar como desenvolver os conceitos relacionados à função afim com o uso da metodologia de resolução de problemas.	Uma turma da 1ª série do ensino médio
Matheus Pierry Banhato 2015	Dissertação de Mestrado-UNESP	Máximos e mínimos com proposta de aplicação para funções quadráticas	Estudar os máximos e mínimos de funções de uma e de duas variáveis reais, bem como apresentar uma proposta para estudo dos pontos extremos de funções quadráticas no ensino médio.	Uma turma da 1ª série do Ensino médio
Silvia Vrancken, Adriana Engler;	Revista UNION	Función de primer grado. Construcción de significados desde una perspectiva variacional	Desenhar e implementar uma situação de aprendizagem para dar significado à função de primeiro grau como modelo de fenômenos de mudança	35 estudantes do curso de engenharia agrônoma

Ana Leyendecker, Daniela Müller 2017				

Fonte: a autora

Quadro 4- Análise das teorias, metodologias e resultados das pesquisas que utilizaram a Resolução de Problemas como metodologia de ensino**.**

Autor/Ano	Referencial Teórico	Metodologia	Resultados
Renata Cristina Geromel Meneghetti; Julyette Priscila Redling 2012	Aprendizagem significativa de Ausubel	Utilizou-se uma abordagem de pesquisa qualitativa (caracterizada como estudo de caso).	Verificou que tarefas favorecem uma aprendizagem mais significativa aos alunos, permitindo-lhes maior compreensão conceitual, e tornam-se ainda mais potentes quando se considera o contexto sociocultural dos alunos.
Valdneide Pereira Santos de Almeida 2014	*Blended learning* modalidade mista de aprendizagem	O trabalho apresenta a análise qualitativa das estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas matemáticos envolvendo o conceito de função afim na modalidade mista de ensino.	Com a execução da pesquisa, 08 estratégias de aprendizagem foram identificadas e através da análise dessas estratégias, foi possível constatar que a modalidade mista mostrou-se efetiva quando adotada no contexto previamente descrito.
Victor Hugo Duarte de Assis 2015	Polya, Dante e Onuchic	Não apresentou metodologia de pesquisa, apenas uma sequência didática baseada em problemas.	Com o trabalho apresentado, foi possível ao professor compreender todas as características da função quadrática. Parte delas pode ser trabalhada na 1ª série do ensino médio e, pela aplicação já desenvolvida na 3ª série, mostrou ser viável o uso da metodologia para a compreensão de tais propriedades.
Viviane Cristina Boschetto 2015	Onuchic e Polya	Análise qualitativa das atividades realizadas pelos estudantes.	Trabalhar com a metodologia resolução de problemas motivou não apenas o aluno, mas também o professor constatou a aprendizagem e a construção gradativa dos conceitos pelos alunos a cada aula.
Matheus Pierry Banhato 2015	Não informado	Não informada	O estudo através destas situações permitiu ao aluno o desenvolvimento da sua capacidade de raciocínio, gerando resultados positivos no crescimento intelectual discente
Silvia Vrancken, Adriana Engler; Ana Leyendecker, Daniela Müller 2017	Cantoral, Montiel e Reyes (2014)	Análise qualitativa das atividades dos estudantes	Os alunos foram capazes de reconhecer elementos importantes que caracterizam essa função e de identificar os tipos de situações que se permite modelar. As tarefas promoveram o emprego de estratégias e argumentos importantes para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem.

Fonte: a autora

O artigo escrito pelas autoras Renata Cristina Geromel Meneghetti e Julyette Priscila Redling publicado na revista Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 193-229, abr. 2012, apresenta resultados da aplicação de duas tarefas matemáticas alternativas para o ensino e a aprendizagem de funções, junto a estudantes do Ensino Médio, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa. As tarefas foram elaboradas levando em consideração a seguinte abordagem metodológica: (i) resolução de problemas e/ou investigação matemática e (ii) uma proposta pedagógica que defende o desenvolvimento do conhecimento matemático mediante um equilíbrio entre lógica e intuição.

As pesquisadoras utilizaram de uma abordagem qualitativa (caracterizada como estudo de caso), para analisar o potencial didático-pedagógico deste tipo de metodologia no Ensino Médio. O trabalho de campo foi realizado em um minicurso dirigido pelas autoras a uma turma de 13 estudantes do Ensino Médio, com as seguintes etapas: (i) aplicação de um questionário de identificação e realização de uma avaliação diagnóstica inicial (para um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos); (ii) aplicação das tarefas elaboradas; e (iii) avaliação do minicurso.

A avaliação diagnóstica inicial se compôs de exercícios que envolviam: definir função; verificar se uma relação representava ou não uma função; identificar domínio, contradomínio e imagem de uma função; construir gráficos de funções. Ademais, essa avaliação trouxe três situações-problema, abrangendo, respectivamente, função do 1º grau, do 2º grau e exponencial, conforme explica as autoras:

> Tal avaliação foi muito importante, pois permitiu-nos identificar os conhecimentos prévios dos alunos e as dificuldades que eles apresentavam quanto ao tema funções. Observamos que, dos 13 alunos que participaram dessa avaliação, a maioria apresentava dificuldades em definir precisamente o conceito de função, fato que certamente se apresentaria como um obstáculo na compreensão de outros conceitos relacionados com esse. (Meneghetti e Redling, 2012, p.214)

Nos resultados, segundo as autoras, pode-se verificar que é possível, com este tipo de tarefa, partindo dos conhecimentos prévios dos estudantes, chegar aos poucos aos conceitos formais dos conteúdos abordados. Assim, a passagem do intuitivo para o lógico foi sendo obtida paulatinamente, em diversos momentos, exigindo uma forte atuação do professor nessa direção.

Para as autoras, a evidência mais clara da ocorrência da aprendizagem significativa durante todo o processo de ensino, esteve na utilização de tarefas de aprendizagem que, ao se apresentarem em níveis cada vez mais elaborados, se mostraram sequencialmente dependentes umas das outras, onde os estudantes tiveram necessariamente que apresentar um domínio dos conceitos precedentes para que assim, pudessem seguir na busca pela resolução das tarefas subsequentes; ou seja, houve transferência de conhecimento de uma situação-problema para outra.

Almeida (2014), analisou a resolução de problemas de função afim na modalidade mista de ensino. Portanto, com o foco na análise da resolução de problema de função afim, tendo em vista as dificuldades encontradas por alunos na definição do conceito, na terminologia, na simbologia, nas diferentes representações, especificamente, a algébrica e na passagem de uma representação para outra.

Para a autora, o problema da pesquisa reside na falta de evidências sobre a efetividade da adoção do modelo *Blended Learning* (*BL*) no processo ensino-aprendizagem de resolução de problemas de função afim. Diante disso, propôs como questões da pesquisa: Quais estratégias são utilizadas para resolver problemas envolvendo o conceito de função afim? Qual a efetividade da adoção de *Blended Learning* na estruturação das estratégias de resolução de problemas envolvendo conceito de função afim, considerando as contribuições do:

> *Blended Learning (BL),* que surge para superar as desvantagens da aprendizagem tradicional, fornecendo uma combinação de várias estratégias de aprendizagem. A utilização de diversas atividades de aprendizagem, incluindo a sala de aula presencial e as diversas ferramentas disponíveis, aumentam a qualidade da aprendizagem, o contexto social e a interatividade dos alunos (Almeida, 2014, p.25).

Para responder a problemática da pesquisa, a autora realizou uma análise qualitativa das estratégias utilizadas pelos estudantes para resolverem problemas matemáticos envolvendo o conceito de função afim na modalidade mista de ensino. A pesquisa envolveu 02 professores de Matemática e 84 alunos da 1ª série do Ensino Médio em uma escola pública do Recife.

Foram realizadas observações presenciais e on-line através da análise de mensagens postadas por alunos e professores no mural da Rede Social Educacional (REDU). Além disto, um questionário foi aplicado, a fim de coletar informações mais detalhadas sobre as estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução de problema de função afim. Estes dados foram analisados qualitativamente com o auxílio do software NVivo10.

A pesquisa foi desenvolvida da seguinte forma: foram duas salas de aula de Matemática no modelo tradicional de ensino-aprendizagem, em uma sala tinha 43 alunos e a outra 41 com 200 horas/aula com a intervenção da pesquisadora, o estudo de função estava na grade curricular e correspondeu a 400 horas de ensino, distribuídos em aulas expositivas e na resolução de exercícios. A pesquisadora promoveu novas formas de colaboração e comunicação no ensino para que os usuários pudessem criar e desenvolver criativas formas de interação, para isso, utilizou uma Rede Social Educativa REDU, por meio da qual foi possível, proporcionar ao processo de ensino-aprendizagem, maior dinâmica na relação aluno/professor e aluno/aluno. A proposta da REDU é utilizar a tecnologia de análise da interação em Redes Sociais para permitir a criação de comunidades com diferentes níveis de acesso.

Os estudantes foram incentivados pelo professor a utilizarem o mural da REDU para discutir, aprimorar e tirar dúvidas sobre o assunto ministrado. No mural, eles puderam expor para o professor a resolução do problema encontrado, questionar o professor sobre eventuais passos na resolução do problema de função afim e, também, colaborarem com os outros colegas no processo de construção do conhecimento. Além disso, foi possível constatar que a modalidade de sala de aula combinada com a modalidade *on-line*, apresenta um modelo mais efetivo no processo de aprendizagem de resolução de problema de função afim por alunos do Ensino Médio. Com a adoção de *BL* é possível inserir organizadores de aprendizagem que facilitam a compreensão de um conceito abstrato como é a definição de função afim.

Boschetto (2015) desenvolveu os conceitos relacionados à função afim, com o uso da metodologia de resolução de problemas fundamentados em Onuchic, L. R. et al., 2014 e Polya, 2006. Neste trabalho foi proposta uma sequência didática para ensinar os conceitos relacionados à função afim com uso da metodologia de resolução de problemas e do programa computacional geogebra. Essa sequência foi desenvolvida com os alunos da primeira série do Ensino Médio e compreendeu a aplicação de atividades, com a metodologia de resolução de problemas, mais especificamente, em dez etapas, conforme indica Onuchic et al (2014).

O problema foi proposto, no qual os estudantes fizeram a leitura individual do problema e depois a leitura em coletivo; resolveram o problema, destacando as quatro etapas de Polya (2006). Durante a aula o professor desenvolveu um diálogo instigando e incentivando os estudantes. Eles registraram as soluções na lousa, defenderam as conclusões obtidas, e discutiram até o consenso sobre os resultados corretos. O professor apresentou a formalização do conteúdo, estruturada em linguagem matemática, para então, propor novos problemas com a intenção de avaliar e ampliar a construção dos conceitos (Boschetto 2015, p.44).

Para a autora, trabalhar os conceitos de função afim através da resolução de problemas tornou o aluno mais autônomo na formação do seu conhecimento e mais motivado. Os alunos adquiriram independência ao longo das aulas e, foram construindo as conjecturas com suas próprias palavras, tendo assim, uma aprendizagem satisfatória. Entretanto, estudos desenvolvidos com as mídias informatizadas demonstram que os estudantes aprenderam mais através da experimentação realizada com as tecnologias e também que o professor possui papel de destaque neste processo.

As pesquisas desenvolvidas na área da resolução de problemas foram pertinentes, somente uma delas fundamentada em uma base teórica da psicologia cognitiva, no qual a partir da análise dos conhecimentos prévios dos estudantes que foi realizada a partir de três problemas, Meneghette & Redling (2012) desenvolveram a sequência de atividades nos outros três encontros, porém creio que pouco tempo para verificar se realmente ocorreu a aprendizagem significativa e assimilação do conteúdo. Já Almeida (2014), a partir do apoio do REDU, onde houve uma maior interação entre aluno-aluno e professor-aluno, foi pertinente durante todo o desenvolvimento da pesquisa, porém assim como Boschetto (2015), a resolução de problemas está sendo vista apenas como uma estratégia procedimental de ensino, estão deixando de considerar os subsunçores dos estudantes e de construir o conceito a partir do problema dado.

1.1.4 Representações semióticas como metodologia de ensino.

Conforme Lucas (2009), a teoria dos registros de representação semiótica, de autoria do psicólogo e filósofo francês Raymund Duval, tem sido largamente utilizada como modelo para os estudos sobre o funcionamento cognitivo do pensamento, em particular sobre a atividade matemática e os problemas de aprendizagem de tal disciplina. O Quadro 5 traz informações sobre os autores, ano, título, objetivos e sujeitos da pesquisa, o Quadro 6 informações sobre referencial teórico, metodologias e resultados de pesquisas que utilizaram a representação semiótica como metodologia de ensino.

Quadro 5- Estudos sobre representação semiótica, tendo como objeto de estudo o conteúdo de funções.

Autor/ Ano	Revista	Título	Objetivo	Amostra
Diana Maia 2007	Dissertação de mestrado em Educação Matemática. PUC/SP	Função Quadrática: Um estudo didático de uma abordagem computacional.	Complementar estudos já realizados a respeito do ensino de função quadrática e da utilização de software para este fim.	Uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental.
Edilson Paiva de Souza 2010	Dissertação de mestrado em Educação Matemática. PUC/SP	As funções seno e cosseno: Diagnóstico de dificuldades de aprendizagem através de sequencias didáticas com diferentes mídias.	Diagnosticar as dificuldades de aprendizagem de alunos do ensino médio em relação ao conceito das funções trigonométricas seno e cosseno.	Uma turma da 2ª série do Ensino Médio.
Paulo César Oliveira Rogério Fernando Pires 2012	Revista reflexão e Ação	O conceito de função na educação básica via registros de representação Semiótica.	Investigar que categorias de registros escritos são mobilizadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental envolvidos com atividades matemáticas relativas ao pensamento	Uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental.

			funcional, tendo como principal referencial teórico as ideias da teoria dos registros de representação Semiótica de Raymond Duval.	
Jael Miriam Andrade; Manuel Joaquim \saraiva 2012	Revista RELIME	Múltiplas representações: Uma contribuição para a aprendizagem do conceito de função.	Identificar e compreender as dificuldades que os estudantes manifestam na aprendizagem de funções, conhecendo melhor a conexões feitas pelos alunos entre as diversas representações das funções consideradas.	Alunos de uma turma do 9º ano do ensino fundamental.
Eliana Bevilacqua Salin 2014	Dissertação de mestrado em Ensino de Matemática. UFRGS	Matemática dinâmica: uma abordagem para o ensino de funções afim e quadráticas a partir de situações geométricas.	Investigar o papel dos registros de representação semiótica na construção do conceito de função, em particular do tipo afim e quadrática.	Uma turma da 1ª série do ensino médio
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão; Vera Helena Giusti de Souza; Paulo Masanobo Miashiro 2016	Revista BOLEMA	A transição das razões para as funções trigonométricas.	Investigar a contribuição de um ensino apoiado em construções com uma geometria dinâmica e em materiais concretos.	9 estudantes do curso de licenciatura em Matemática

Fonte: a autora

Quadro 6- Análise das teorias, metodologias e resultados das pesquisas que utilizaram a representação semiótica como metodologia de ensino.

Autor/ Ano	**Referencial Teórico**	**Metodologia**	**Resultados**
Diana Maia 2007	Representação Semiótica de Raymond Duval	Engenharia didática de Artique	Os resultados obtidos levam a concluir que houve um avanço por parte dos alunos, na apreensão do conceito de função quadrática, propiciando pela compreensão e articulação entre as variáveis visuais e unidades simbólicas significativas.
Edilson Paiva de Souza 2010	Representação Semiótica de Raymond Duval	Engenharia didática de Artique	Os dados coletados foram analisados e levaram a concluir que a utilização da tecnologia, através de um processo de ensino dinâmico proporcionado pelo software gráfico graphmatic, proporcionou um aumento no conhecimento sobre os conceitos das funções seno e cosseno.
Paulo César Oliveira Rogério Fernando Pires 2012	Representação Semiótica de Raymond Duval	Análise qualitativa das atividades dos estudantes.	Os resultados encontrados após a análise da produção de informações revelam que os registros mais utilizados foram os multifuncionais de representação discursiva e os registros monofuncionais de representação discursiva e, ainda que as relações entre a congruência e não-congruência das representações de um objeto matemático, delimitam a compreensão do mesmo.

Jael Miriam Andrade; Manuel Joaquim \saraiva 2012	Representação Semiótica de Raymond Duval	Qualitativa interpretativa	Os resultados indicam que a coordenação que os estudantes fazem entre os diversos registros de representação de uma função e de diferentes funções, lhes permite alcançar diferentes perspectivas de uma função.
Eliana Bevilacqua Salin 2014	Representação Semiótica de Raymond Duval	Engenharia didática de Artique	A observação de relações entre variáveis a partir da manipulação de pontos em uma construção no geogebra propiciou a compreensão do conceito de função e gráfico, através de constantes processo de conversão de registro.
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão; Vera Helena Giusti de Souza; Paulo Masanobo Miashiro 2016	Representação Semiótica de Raymond Duval	Aplicamos uma intervenção, com base no design based research, num trabalho em quatro sessões.	Ao final da intervenção, verificamos que esta não foi suficiente para uma aprendizagem significativa desses conceitos; contudo, observamos que todos os participantes conseguiram construir uma tabela e um gráfico de uma função periódica e, para dois deles, esse gráfico é o da função seno.

Fonte: a autora

Andrade e Saraiva (2012), expõem resultados de um estudo centrado na compreensão do conceito de função por alunos do 10º ano de escolaridade. Eles estudaram as conexões que os alunos estabelecem entre as diversas representações de uma função, mobilizando e interligando os seus conceitos, definições e imagem de uma função, ao resolverem tarefas de resolução de problemas, exploratórias e investigativas, usando a calculadora gráfica, mediados pelo professor, bem como a importância das múltiplas representações para o desenvolvimento da aprendizagem do conceito de função.

Os autores fundamentaram sua pesquisa na teoria definida por Duval (registro de representações semióticas) e a teoria cognitiva de Vinner (conceito imagem e conceito definição). A metodologia da investigação é do tipo qualitativa e interpretativa. A coleta de dados foi efetuada durante o 2º e 3º períodos do ano letivo em uma turma do 10º ano de escolaridade de uma escola básica e secundária de uma região do interior de Portugal. Foram selecionadas duas alunas da turma para o estudo de caso - Rita e Ângela.

Segundo os autores, a primeira tem um bom desempenho nas diversas disciplinas, a segunda tem um percurso escolar com classificação médio/baixa. Os instrumentos de coleta de dados compreenderam, i) um questionário no início do estudo, aplicado a cada e a todos os alunos da turma, respondido individualmente, ii) produtos escritos pelos alunos nas aulas, iii) uma entrevista semiestruturada, no final do estudo, realizada as duas alunas em conjunto, gravada em áudio e depois transcrita, e iv) um diário da investigadora. As respostas ao questionário permitiram apontar linhas orientadoras de realização de tarefas para algumas aulas e orientaram a seleção das alunas para o estudo de caso.

Os resultados indicaram que a coordenação que os alunos fazem entre vários registros de representação de uma função e de funções diferentes, permitiu-lhes alcançar diversas perspectivas de uma função. Segundo os autores, a compreensão das atividades foi posto em evidência pelas alunas através da coordenação que fizeram dos registros de representações semióticas (linguagem natural, algébrico, tabela e gráfico), que lhes permitiu deixar de confundir o objeto matemático função com a sua representação e, ainda, alcançar uma forte convergência do conceito imagem ao conceito definição de função.

Oliveira e Pires (2012), apresentam uma reflexão de um processo de investigação que teve como objetivo investigar que categorias de registros escritos são mobilizadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental envolvidos com atividades matemáticas relativas ao pensamento funcional. Os autores utilizaram como principal referencial teórico a representação semiótica de Raymond Duval e também, embasaram-se em: Bassoi (2006), Silva (2008) e Argendhi (2008).

O problema que desencadeou a investigação compreendeu quais as categorias de registros escritos são mobilizadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental envolvidos com atividades matemáticas relativas ao pensamento funcional? Para responder a pergunta da pesquisa, os autores utilizaram de uma metodologia de natureza qualitativa descritiva, realizada com um grupo constituído de 38 estudantes de uma escola pública estadual de São Paulo. Os autores relataram algumas dificuldades apresentadas pelos estudantes durante a realização das atividades:

> A dificuldade central dos alunos durante o desenvolvimento das atividades, deu-se no momento da conversão de um registro escrito em língua natural ou em escrita numérica para um registro na forma algébrica. Alguns generalizavam a sentença em linguagem natural, mas no momento de convertê-las em linguagem algébrica acabavam escrevendo uma expressão que era válida apenas para alguns resultados, não generalizando a situação como um todo (Oliveira e Pires 2012, p. 236).

Os resultados mostraram que os registros mais utilizados foram os multifuncionais de representação discursiva e os registros monofuncionais de representação discursiva. Logo, a relação de congruência e não congruência entre registros de representação de um determinado objeto pode ser algo que delimita a sua compreensão, foi constatado no presente estudo que esse fato delimita sim,a sua compreensão. As questões que apresentavam um objeto matemático com características congruentes em suas diversas formas de registro foram as mais acertadas pelos alunos.

A pesquisadora Salin (2014), investigou o papel dos registros de representação semiótica na construção do conceito de função, em particular a afim e a quadrática, e de que forma o geogebra pode ajudar no processo de ensino aprendizagem. Ela fundamentou sua pesquisa na teoria dos registros de representação semiótica (Duval, 2003; 2011) e o potencial semiótico dos softwares de matemática dinâmica (Gravina & Santarosa, 1998, Gravina 2011).

A questão que é objeto de investigação da pesquisa, abrange as articulações entre os diferentes registros de representação semiótica, aliadas a situações geométricas e ao software de matemática dinâmica, de como essas podem ajudar o processo de aprendizagem do conceito de função?

A autora utilizou a metodologia da engenharia didática, caracterizada pela realização de sequências didáticas em sala de aula, com enfoque na concepção, realização, observação e análise das produções em dois momentos: a priori e a posteriori, considerando todas as etapas descritas a seguir:

> A engenharia didática é composta por quatro fases: a primeira é a análise preliminar que consiste em considerações de natureza epistemológica, cognitivas e didáticas dos conteúdos a serem ensinados. Na segunda fase, da concepção e análise a priori da sequência de atividades a ser usada na experiência de ensino, o investigador, toma como subsídio a análise preliminar. A terceira fase da engenharia didática trata do experimento. É a parte prática em que os alunos, diante das atividades que lhes são propostas, colocam em ação se conhecimento, a fim de resolver o que foi solicitado e, com isso, adquirir novos conhecimentos. A quarta fase constitui-se do momento em que se valida a proposta efetuada através da verificação se o que foi produzido pelos alunos é condizente com o que foi anunciado na análise a priori (Salin, 2014, p.80).

No confronto entre análises a priori e a posteriori, das diferentes atividades realizadas, constatou-se que os alunos, de um modo geral, se apropriaram do conceito de função, em particular das características de uma função quadrática. Eles também compreenderam os conceitos de domínio, imagem e intervalos de crescimento e decrescimento da função, sendo que as articulações entre os diferentes registros de representação semiótica, aliadas a situações geométricas e ao software de matemática dinâmica, podem ajudar o processo de aprendizagem do conceito de função.

1.1.5 O uso de software no ensino de Matemática

Para Valente (2007), a introdução do computador na educação tem comprovado uma verdadeira revolução na concepção de ensino e de aprendizagem. A quantidade de programas educacionais e as diferentes modalidades de uso do computador mostram que esta tecnologia pode ser bastante útil no processo de ensino (Valente, 2007, p. 02). O Quadro 7 traz informações sobre os autores, ano, título, objetivos e sujeitos da pesquisa, o Quadro 8 informações sobre referencial teórico, metodologias e resultados de pesquisas que utilizaram software como apoio didático-pedagógico no ensino da Matemática, em específico o conteúdo de funções.

Quadro 7- Estudos sobre o uso de softwares, tendo como objeto de estudo o conteúdo de funções.

Autor/ Ano	Revista	Título	Objetivo	Amostra
Fábio Rodrigues de Siqueira 2012	Dissertação de mestrado em Educação Matemática. PUC/SP	A programação no ensino médio como recurso de aprendizagem dos zeros da função polinomial do 2º grau.	Verificar se a proposta de um algoritmo a ser convertido em programa de computador pode contribuir na aprendizagem de um objeto de estudo matemático.	5 estudantes da 1ª série do Ensino Médio
Gercílio da Rocha Melo 2013	Dissertação de mestrado em Ensino de Ciencias- UNIVATES	A inserção do software kmplot na aprendizagem de funções afim e quadráticas.	Ampliar a compreensão dos conceitos abordados em sala de aula	12 alunos da 1ª série do Ensino Médio
Clóvis José Dazzi Maria Madalena Dullius 2013	Revista BOLEMA	Ensino de funções polinomiais de grau maior que dois através da análise de seus gráficos, com auxílio do *Software Graphmatica.*	Investigar e propor uma abordagem alternativa para esse conteúdo, utilizando o *software Graphmatica*	150 alunos de 3ª série do Ensino Médio
Hercules Nascimento Silva 2017	Dissertação de mestrado em Educação Matemática. PUC/SP	Estudo de função: uma proposta de reconstrução de atividades do *Imagiciel* mediadas pelo geogebra.	Verificar em que medida construções dinâmicas no Geogebra e aplicadas em uma sequência de atividades possibilitam facilitar a aprendizagem de função, em especial, a função real definida por sentença.	Uma turma da 1ª série do Ensino Médio

Fonte: a autora

Quadro 8-Análise das teorias, metodologias e resultados das pesquisas que utilizaram o uso de software como como apoio pedagógico.

Autor/ Ano	Referencial Teórico	Metodologia	Resultados
Fábio Rodrigues de Siqueira 2012	APÓS de Ed Dubinsky	Design experimental	Os participantes da pesquisa tiveram melhorias em seu aprendizado, pois além de desenvolver um programa de computador para se determinar os zeros da função do 2º grau, passaram a elaborar outras funções.
Gercílio da Rocha Melo 2013	Não tem um referencial	Pesquisa ação	A intervenção pedagógica realizada pelo pós-teste evidenciou que o uso do softwer kmplot favoreceu a visualização dos gráficos, bem como a compreensão

	teórico específico		de conceitos como domínio, imagem, raízes das funções e crescimento.
Clóvis José Dazzi Maria Madalena Dullius 2013	Não tem um referencial teórico específico	Análise qualitativa	Mostrou uma possibilidade dinâmica e interativa aos alunos para o estudo de funções polinomiais de grau maior que dois.
Hercules Nascimento Silva 2017	Régine Douady (1984)	Engenharia didática	Verificou que as atividades permitiram que os alunos construíssem o conceito de função, em especial, o de função definida por sentenças e intervalos reais.

Fonte: a autora

Dazzi e Dullius (2013), iniciaram a pesquisa realizando um estudo bibliográfico sobre a relevância do uso de recursos computacionais no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Considerando as dificuldades que muitos alunos apresentam na resolução de exercícios envolvendo gráficos, esta pesquisa teve por objetivo investigar e propor uma abordagem alternativa para esse conteúdo, utilizando o software Graphmatica. A intervenção pedagógica com 150 alunos de 3º ano de Ensino Médio.

A pesquisa foi de cunho qualitativa, no qual foi aplicado um questionário a professores de Matemática do Ensino Médio dos municípios de Carazinho e Passo Fundo, com o intuito de averiguar como são trabalhadas as funções polinomiais de grau maior que dois, onde os autores procuraram identificar quais as dificuldades enfrentadas por eles e pelos alunos na abordagem do conteúdo, e se utilizam alguma ferramenta tecnológica para o desenvolvimento das aulas.

Os resultados apontaram que após a realização das atividades com o Graphmatica, os alunos demonstraram confiança e entusiasmo em fazer as questões do teste. Para os autores, a otimização do tempo foi um dos excelentes resultados do trabalho com o software, visto que toda a intervenção pedagógica, desde as instruções para o uso do Graphmatica até o questionário aos alunos, ocupou somente oito períodos de aula, caso este trabalho fosse realizado com funções pela forma algébrica, precisaria de um período de aula somente para traçar um gráfico e analisar suas conjeturas.

Melo (2013), investigou acerca da influência do software Kmplot no ensino e na aprendizagem das funções afim e quadráticas. A investigação se deu em uma escola pública de Rondônia com os alunos dos 1º e 2º série do ensino médio. O objetivo geral é ampliar a compreensão dos conceitos abordados em sala de aula respondendo a seguinte questão: quais as contribuições do software Kmplot para as aulas de matemática num grupo de alunos do ensino médio?

A pesquisa é qualitativa caracterizada com um estudo de caso, no qual foram realizadas abordagens qualitativas e quantitativa, utilizando-se de ambas as naturezas, possibilitando uma melhor interpretação dos dados. A abordagem quantitativa ocorreu por meio de questionário inicial, com vistas a buscar informações educacionais dos alunos envolvidos.

> As atividades foram dinamizadas em forma de oficinas e dirigidas para 20 alunos das 1ª e 2ª séries do ensino médio, que formaram um clube de matemática - matclub. Realizou um pré-teste com perguntas semiestruturadas sobre funções. Durante o desenvolvimento da pesquisa, foram realizadas três atividades, sendo a primeira destinada ao estudo de função afim, composta por onze questões, que tiveram como objetivos compreender através da observação dos gráficos as noções básicas, identificando as características e relações entre as funções afim e quadrática tendo como objetivo, relacionar as características e leis de formação; a terceira atividade contemplou o estudo das funções quadráticas com objetivo de identificar suas características e relações e estudar seus sinais, e, por fim, foi respondido um pós-teste (Melo,2012, p.54-55).

A avaliação da intervenção pedagógica realizada pelo pós-teste, evidenciou que o uso do software Kmplot favoreceu a visualização dos gráficos, bem como a compreensão de conceitos como domínio, imagem, raízes das funções, crescimento, intersecção como os eixos e comparações entre funções a partir de suas sobreposições no mesmo plano cartesiano. O software utilizado na pesquisa constitui-se também como uma possibilidade de inserção dos alunos na sociedade tecnológica de forma competente e, acima de tudo, consciente. Os desafios indicam que os alunos necessitam perceber as potencialidades dos computadores no auxílio da construção da sua própria aprendizagem.

Siqueira (2012) apontou em sua pesquisa contribuições na aprendizagem de um objeto num estudo matemático, a partir da proposta de uso de um algoritmo a ser convertido em um programa de computador. Para tanto, formulou a seguinte questão: Como a elaboração de um algoritmo convertido em um programa pode auxiliar alunos do ensino médio na aprendizagem dos zeros da função polinomial do 2ª grau?

A teoria APO de Ed Dubinsky, foi o aporte teórico da pesquisa, no qual o autor apresenta os níveis ação, processo, objeto e esquema, que permitem a verificação da capacidade do indivíduo em desenvolver ações sobre um objeto e raciocinar sobre suas propriedades.

Siqueira (2012), ressalta que essa teoria é baseada na abstração reflexiva introduzida por Piaget e que tem por objetivo a descrição dos mecanismos de desenvolvimento lógico do pensamento intelectual das crianças e Dubinsky potencializou a teoria proposta por Piaget de modo a investigar conceitos matemáticos mais avançados, por exemplo, o conceito de função.

A pesquisa foi desenvolvida com base na metodologia de pesquisa denominada *Design Experiments* ou *Design Research*. Esta metodologia parte da premissa de uma avaliação contínua da prática a ser realizada, o que permite fazer as devidas adaptações e melhorias durante o período em que a mesma é executada.

Os resultados constataram que os participantes da pesquisa tiveram melhorias em seu aprendizado, pois, além de desenvolver um programa de computador para se determinar os zeros da função, passaram a elaborar outras funções já prevendo possíveis soluções, apresentando todos os níveis da teoria APOS.

1.1.6 Sequencias didáticas com metodologia diversificada

Diversos autores têm utilizado sequencias didáticas diversificadas como metodologia de ensino de forma a contribuir no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, como por exemplo: jogos pedagógicos, produção de vídeos pelos estudantes, dentre outros. Selecionamos 4 de 18 trabalhos e fizemos uma análise que se encontra em dois quadros de resumo. O Quadro 9 traz informações sobre os autores, ano, título, objetivos e sujeitos da pesquisa, o Quadro 10 informações sobre referencial teórico, metodologias e resultados de pesquisas.

Quadro 9- Estudos com sequencias didáticas com metodologias diversificadas, tendo como objeto de estudo o conteúdo de funções.

Autor/ Ano	Revista	Título	Objetivo	Amostra
Márcio Urel Rodrigues 2007	Dissertação de mestrado em Educação Matemática- UNESP	Narrativas no ensino de funções por meio de investigações matemáticas.	Investigar e ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no processo de ensinar e aprender Funções	Uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental
Lísie Pippi Reis Strapason; Eleni Bisognin 2013	Revista Bolema	Jogos pedagógicos para o ensino de funções na 1ª série do Ensino Médio	Verificar se a utilização dessa estratégia de ensino facilita a aprendizagem dos alunos, referente a esse tópico.	Uma turma da 1ª série do Ensino Médio
Paulo Roberto Castor Maciel Tereza Fachada Levy Cardoso 2013	Revista Bolema	A história do conceito de função em vídeo: uma proposta para a aprendizagem.	Possibilitar um processo de ensino aprendizagem significativo do conceito de função por meio da história da matemática	24 alunos da 1ª série do Ensino Médio
Anderson Yassuhiro Afuso 2014	Dissertção de mestrado PROFMAT UNESP.	Métodos Numéricos para encontrar zeros de funções: aplicações para o Ensino Médio	Apresentar três métodos numéricos (Métodos da bissecção, de Newton-Raphson e das secantes) para encontrar os zeros de função.	Uma turma da 1ª série do Ensino Médio

Quadro 10 -Análise das teorias, metodologias e resultados das pesquisas que utilizaram nas pesquisas.

Autor/ Ano	**Referencial Teórico**	**Metodologia**	**Resultados**
Márcio Urel Rodrigues 2007	Ponte (2003) e Abrantes et al. (1999)	Qualificamos nossa pesquisa como qualitativa interpretativa que utiliza as narrativas como objeto de estudo, a qual propõe que as narrativas são histórias de aprendizagens dos alunos por meio dos seus processos vividos e de suas experiências.	Na análise realizada, evidenciamos indícios de uma cultura diferenciada, a qual valoriza aspectos argumentativos e comunicativos em sala de aula. Esses aspectos se apresentam como potencialidades didático-pedagógicas das narrativas para o processo de ensinar e aprender Funções.
Lísie Pippi Reis Strapason; Eleni Bisognin 2013	Flemming e Collaço de Mello (2003)	Pesquisa de abordagem qualitativa, em sala de aula. A coleta de dados foi realizada pela professora-pesquisadora, através das observações das estratégias dos alunos durante os jogos, registrada em diário de campo.	Concluiu-se que a utilização dos jogos, como estratégia de ensino e aprendizagem, além de motivar os alunos e despertar seu interesse pelas atividades desenvolvidas, facilitou a compreensão do conteúdo de funções.
Paulo Roberto Castor Maciel Tereza Fachada Levy Cardoso 2013	Não apresentou um autor em específico.	A metodologia consistiu em pesquisa bibliográfica, criação de roteiro, pesquisa iconográfica, produção e edição de quatro vídeos e aplicação em sala de aula.	A aplicação do vídeo demonstrou que os alunos conseguiram compreender o conceito apresentado no vídeo, no entanto, a partir das atividades do material elaborado, que visavam promover um aprofundamento do conteúdo, não conseguiram atingir sua plenitude.
Anderson Yassuhiro Afuso 2014	Não apresentou	Não apresentou	Não apresentou

Fonte; a autora

Maciel e Cardoso (2014), utilizaram a História da Matemática como estratégia de ensino e o vídeo como recurso didático. A metodologia consistiu em pesquisa bibliográfica, criação de roteiro, pesquisa iconográfica, produção e edição de quatro vídeos e aplicação em sala de aula. Também foi construído um caderno de atividades para aprofundar a temática.

A intervenção em sala de aula ocorreu com 24 alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do Rio de Janeiro. As atividades foram ordenadas da seguinte forma: 1) aplicação do pré-teste; 2) exibição do Vídeo; 3) resolução do caderno de atividades; e 4) aplicação do pós-teste.

O vídeo produzido pelos estudantes, demonstrou que os alunos conseguiram compreender o conceito apresentado, no entanto, a partir das atividades do material elaborado, que visavam promover um aprofundamento do conteúdo, esses não conseguiram atingir sua plenitude. Os pesquisadores observaram que o processo de ensino aprendizagem sobre o conceito de função necessita de conhecimentos matemáticos prévios, os quais os alunos demonstraram, por meio de caderno de atividades, não possuírem adequadamente, o que comprometeu a aquisição do novo conteúdo.

Strapason e Bisognin (2013), elaboraram um produto educacional, constituído por quatro jogos abordando o conteúdo de funções, que teve o objetivo de verificar se a utilização dessa estratégia de ensino facilita a aprendizagem dos alunos, referente a esse tópico.

Para atender ao objetivo proposto, foi desenvolvida uma pesquisa de abordagem qualitativa, em sala de aula. A pesquisa foi realizada com 30 estudantes da 1ª série do ensino médio sobre o conceito de funções polinomiais do 1º e do 2º graus. A coleta de dados foi realizada pela professora-pesquisadora, através das observações das estratégias dos alunos durante os jogos, registrada em diário de campo.

O propósito foi criar um ambiente de interesse e de motivação em sala de aula, permitindo ao aluno uma participação no processo de construção do conceito de função e na exploração de suas propriedades. Segundo os autores, os jogos ajudaram a desenvolver o raciocínio, a entender a matéria de uma forma interessante, e ressaltaram, ainda, o caráter lúdico, que é o de aprender de uma maneira diversificada e divertida.

Chegaram à conclusão que a aplicação desse produto educacional, contribuiu para o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de funções, no qual após a aplicação das atividades, observou-se que a maioria dos estudantes tiveram suas dificuldades sanadas em relação ao conteúdo trabalhado, evidenciando que essa prática pedagógica é eficaz e viável de ser implementada em sala de aula.

Rodrigues (2007), desenvolveu sua pesquisa sobre as narrativas no contexto da sala de aula, com o intuito de destacá-las como um meio de viabilizar a comunicação de ideias matemáticas. Sendo assim, propôs como questão da sua investigação: Quais são as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no contexto do ensino de funções?

O objetivo da pesquisa é investigar e ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no processo de ensinar e aprender funções. A pesquisa é caracterizada é de cunho qualitativa interpretativa, e utiliza as narrativas como objeto de estudo, defendendo a ideia das narrativas como histórias de aprendizagens dos alunos, por meio dos seus processos vividos e de suas experiências. A coleta de dados foi realizada junto aos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental do Colégio Adventista de Barra do Bugres/MT.

Para coletar os dados, utilizou-se de gravações em áudio, entrevistas, diários de bordo do pesquisador, narrativas escritas, questionários e observações diretas. Baseou-se como referência metodológica das investigações matemáticas os autores: Ponte (2003) e Abrantes et al. (1999), com as tarefas de natureza exploratório-investigativas envolvendo o tema Funções.

Na análise realizada, evidenciou indícios de uma cultura diferenciada, a qual valoriza aspectos argumentativos e comunicativos em sala de aula. Esses aspectos se apresentam como potencialidades didático-pedagógicas das narrativas para o processo de ensinar e aprender funções.

Os diversos estudos realizados sobre métodos de ensino diferenciados de matemática, especificamente, ensino de funções, apontam os problemas e suas causas que comprometem a compreensão dos conteúdos didáticos de matemática, um deles mencionado é o professor não verificar os conhecimentos prévios dos estudantes, comprometendo assim o novo conteúdo a ser assimilado. Outro ponto são as atividades lúdicas, como jogos, onde o autor não deixa claro se os jogos contribuíram para a construção e desenvolvimento do conteúdo ou para um reforço e consolidação do conteúdo. A seguir será apresentada algumas dessas dificuldades abordadas pelos pesquisadores.

1.2 Dificuldades dos estudantes em relação ao conceito de função

O atual processo de ensino-aprendizagem de função remete a associações superficiais e limitadas do conceito. Vergnaud (1988), enfatiza que é notório que na passagem da Aritmética para a Álgebra, os alunos enfrentam um grande obstáculo epistemológico. As dificuldades apresentadas pelos estudantes, no estudo de funções, são devido à complexidade do conceito e na forma como é abordado, pois desenvolve-se muitos conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto imagem e regra de correspondência. Markovits, Eylon e Bruckheimer (1994, p. 55) apresentam algumas dificuldades na aprendizagem de funções, dentre elas temos:

- dificuldade na compreensão e reconhecimento do domínio, contradomínio e conjunto imagem, seja na representação algébrica, ou na representação gráfica;
- dificuldade em compreender a definição de função a partir de sua representação gráfica no plano cartesiano.
- dificuldade em compreender os passos necessários para a representação gráfica, como: elaborar tabela, executar os cálculos, desenhar o plano cartesiano, representar os pontos no plano e desenhar o gráfico;
- dificuldades em definir função a partir de subconceitos que complementam esse conceito;
- dificuldade em visualizar os diversos tipos de função.

Verificou-se as dificuldades encontradas pelos estudantes em relação ao conceito de função, relatadas por alguns pesquisadores. Maciel e Cardoso (2014, p. 1365), verificaram em sua pesquisa que os resultados demonstram que o rendimento no desempenho dos alunos auferidos pelos instrumentos utilizados na intervenção proposta, não é necessariamente devido a complexidade do conceito de função, os resultados expressam a falta de conhecimentos básicos para o entendimento de um novo conceito.

Os pesquisadores analisaram os cadernos de atividades dos estudantes e averiguaram as possíveis causas, a inabilidade e inaptidão dos alunos com conteúdos não matemáticos e matemáticos. Entre alguns itens para a não realização das atividades mencionadas, foi explícita a dificuldade dos estudantes na compreensão de alguns dos enunciados dos exercícios, na utilização incorreta da linguagem escrita e no desconhecimento do significado de vocábulos que permeiam os conhecimentos gerais, inerentes aos estudantes. Perceberam também, a dificuldade em resgatar conhecimentos matemáticos prévios e necessários para a resolução dos exercícios, dificuldade em realizar generalizações e abstrações.

Braga e Viali (2011) observaram que as dificuldades dos alunos, na construção do conceito de função, concentram-se na não articulação entre duas ou mais representações de um mesmo objeto, restringindo-se, apenas, ao tratamento de um único tipo de registro. Em alguns casos, negligencia-se o fato de que o estudo das funções contempla os diferentes tipos de representação de forma intrínseca, optando por enfatizar apenas o aspecto algébrico.

Neves e Resende (2016), analisaram as dificuldades dos estudantes nas notações $f\,(x)$ e y e ao significado da expressão $y = (x)$. Os autores relatam que os estudantes que participaram da pesquisa por eles desenvolvida, quando lhes foi solicitado escrever a expressão analítica da função, apresentaram dificuldades em manejar e interpretar tais noções.

Melo (2013), relatou que um dos desafios enfrentados ao longo das atividades referiu-se as questões epistemológicas sobre compreensão e interpretação dos conceitos e características das funções. Os primeiros registros feitos pelos alunos mostravam uso de forma efetiva, mas o software utilizado na pesquisa, contribuiu para que parte dos obstáculos fossem vencidos. Ressaltou que não houve compreensão na integra de algumas propriedades das funções quadráticas.

Souza (2010), observou que na construção gráfica utilizando papel, os estudantes encontraram dificuldades em representar o gráfico corretamente e tiveram dificuldades em realizar uma escala correta nos eixos cartesianos, conseguindo somente com a utilização de papel quadriculado. Possuem dificuldades no momento de representar os ângulos pertencentes ao eixo x, quando há variação do período da função e não realizam de forma correta a correspondência dos pares ordenados. Enquanto que Dornelas (2007), aponta como dificuldade a conversão do registro natural para o tabular.

Silva (2011), relata que os alunos não conseguem fazer os cálculos dos elementos da construção, mas na compreensão da representação desses elementos no sistema cartesiano, ou seja, conseguem resolver a equação, mas confundem-se para fazer o gráfico. Eles têm dificuldade na conversão para a linguagem algébrica ou simbólica e representação gráfica, confundindo equação com função, além de determinar o domínio da função, fazer a representação gráfica, fazer a análise dos gráficos e encontrar a lei de correspondência.

Contudo, observa-se as dificuldades em relação as diferentes representações, gráficos, interpretações e notações relacionadas ao conceito de função, enfrentadas pelos estudantes, no qual foram relatadas pelos pesquisadores, nas pesquisas alisadas. Vale salientar também, que o professor deve ter segurança e domínio do conteúdo no qual vai ministrar e realizar escolhas adequadas de metodologias de ensino preparando assim seu material de apoio pedagógico, além de averiguar os conhecimentos prévios dos estudantes antes da introdução do novo conceito a ser aprendido.

1.3 Considerações

Como foi mencionado anteriormente, analisou-se 48 trabalhos distribuídos em artigos, teses e dissertações, com o intuito de averiguar as contribuições para esta pesquisa, buscando estratégias de ensino que visem a aprendizagem significativa de funções. Esta análise foi de suma importância, pois nos proporcionou fazer ajustes no projeto piloto, contribuindo assim para as melhorias da metodologia de ensino trabalhada na pesquisa. Em relação aos principais aspectos referentes ao conceito de função enfatizados, discutidos nas pesquisas analisadas, podemos destacar:

- A importância da elaboração de sequencias didáticas com diversas metodologias com o intuito de averiguar a aprendizagem do conceito de função, porem, percebeu-se que poucos trabalhos analisaram os conhecimentos prévios dos estudantes, não obstante, relataram as dificuldades enfrentadas pelos mesmos e suas possíveis superações;
- Há um bom número de pesquisas que trazem as reflexões referentes as contribuições da teoria dos registros de representação semiótica e da modelagem matemática, ao processo de ensino aprendizagem do conceito de função;
- Contribuições significativas são trazidas pela utilização de jogos e o uso de softwares como recursos didáticos-pedagógicos no ensino de função, vale salientar que jogos ou outros recursos tecnológicos não devem ser utilizados como únicas estratégias metodológicas, mas como suportes para auxiliar a

construção do conhecimento, sendo que no decorrer das atividades é importante que o professor enfatize a construção do conceito de função.

- As estratégias de resolução de problemas podem atuar na zona desenvolvimento proximal, onde pode haver uma interação entre o estudante e a situação problema, no qual deve ser orientada pelo professor considerando um objetivo de ensino vinculando a conteúdos de Matemática, num contexto de aprendizagem, utilizando aasim, métodos, recursos didáticos e técnicas para colocar em prática as estratégias didático-pedagógicas. E a resolução de problemas como metodologia de ensino, onde os pesquisadores enfatizam os pressupostos, no qual deve-se partir dos problemas para posteriormente introduzir o conteúdo a ser ensinado.

No que se refere a esta pesquisa, vale ressaltar sua importância, haja vista o reduzido número de contribuições científicas sobre o ensino de funções com o método da resolução de problemas fundamentado na teoria da aprendizagem significativa. No levantamento realizado, verificou-se que apenas um artigo utilizou-se dessa metodologia de ensino, tendo como aporte teórico, a teoria de aprendizagem significativa de Ausubel. Verificou-se também, que muitos pesquisadores não utilizaram de nenhuma teoria de aprendizagem, sendo que, o processo de ensino aprendizagem deve está fundamentado por teorias de aprendizagem, pois a estrutura cognitiva é um complexo organizado de ideias, logo, é importante saber como o estudante armazena as informações em sua estrutura cognitiva e de que forma o professor deve conduzir este processo.

Destacamos, que a nossa pesquisa tem como diferencial a metodologia da pesquisa, pois é diferente das utilizadas em todos os trabalhos analisados para o ensino de função, pois, esses seguem uma metodologia apenas qualitativa descritiva e poucas utilizaram o estudo de caso como procedimento. No entanto, adotou-se nesta pesquisa, procedimentos que estão classificados como estudo de caso, para o qual foram assimiladas ideias conceituais de função e ao evento quantitativo quase-experimental, que foi dividido em grupo experimental e grupo de controle, e buscou-se fazer uma combinação dos dados qualitativos e quantitativos, com o objetivo de inferir resultados explicativos mais consistentes, com a combinação de técnicas, métodos, abordagens, conceitos ou linguagem de pesquisa quantitativa e qualitativa em um único estudo.

CAPÍTULO 2

TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

CAPÍTULO 2: TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Em uma perspectiva cognitiva, entende-se a aprendizagem como um armazenamento organizado de conhecimento, processo mediante o qual o estudante codifica, organiza, elabora e transforma os conhecimentos que lhes são apresentados. No presente capítulo, será apresentado como base teórica, a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel et al. (1980) e Ausubel (2003), trazendo à tona conceitos, formas de aprendizagem, facilitadores e outros aspectos, considerados importantes no propósito de entendimento da aprendizagem significativa.

2.1 - Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel – Pressupostos e Conceitos Básicos

A teoria da aprendizagem significativa foi desenvolvida por David Paul Ausubel na década de 60. Embasada no cognitivismo, se apropria de seus pressupostos para explicar o processo de aprendizagem, ou seja, como o ser humano compreende, transforma, armazena e usa o conhecimento. Busca explicar o processo de aprendizagem considerando os princípios organizacionais da cognição, valorizando o conhecimento e o entendimento e não meramente o estudo do tipo "decoreba" ou a memorização mecânica (Moreira, 1999).

O pressuposto principal da teoria de Ausubel, é a relação de conteúdos que vão se incorporando de forma hierárquica e mais complexa na estrutura cognitiva do estudante, de forma que haja ligação entre os conhecimentos prévios e os novos conhecimentos, propiciando aprendizagem aos estudantes.

Ressalta-se a contribuição relevante para formulação da teoria proposta por Joseph Novak, da criação de uma estratégia de ensino que propõe o uso de mapas conceituais visando a integração construtiva, positiva, entre pensamentos, sentimentos e ações que conduz ao engrandecimento humano, levando em consideração não só o cognitivo, mas também o emocional do estudante, considerando-o como pessoa. Para ele, quando a aprendizagem é significativa o estudante se predispõe à novas aprendizagens na área.

Em um viés contemporâneo, Moreira (2010) defende a ênfase na aprendizagem significativa crítica e ressalta que o desenvolvimento dentro de uma ótica contemporânea. Do seu ponto de vista, não basta adquirir novos conhecimentos de maneira significativa, é preciso fazê-lo criticamente.

Segundo Moreira (2010, 2011; Moreira e Masoni, 2016), enfatiza os princípios facilitadores de uma aprendizagem significativa crítica são: **Perguntas ao invés de respostas** (estimular o questionamento ao invés de dar respostas prontas), **diversidade de materiais** (abandono do manual único), **aprendizagem pelo erro** (é normal errar; aprende-se corrigindo os erros), **aluno como perceptor representador** (o aluno representa tudo o que percebe), **consciência semântica** (o significado está nas pessoas, não nas palavras), **incerteza do conhecimento** (o conhecimento humano é incerto, evolutivo), **desaprendizagem** (às vezes o conhecimento prévio funciona como obstáculo epistemológico), **conhecimento como linguagem** (tudo o que chamamos de conhecimento é linguagem), **diversidade de estratégias de ensino** (abandono da narrativa).

A ênfase de Ausubel se dá na aquisição, armazenamento e organização das ideias no cérebro do estudante, ou seja, ele adquire um determinado conhecimento, armazena e organiza essas ideias no cérebro, logo, Ausubel entende que esta estrutura é extremamente organizada e hierarquizada, hierarquia no sentido de que várias ideias vão se encadeando e se entrelaçando de acordo com a relação estabelecida entre elas.

A aprendizagem significativa é um processo que permite relacionar um novo conhecimento, de maneira não-arbitrária e substantiva, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo (Moreira, 2006, p. 08), não-arbitrária nos transmite ideias de interações não aleatória sem uma concordância entre os conhecimentos, ou seja, não é com qualquer conhecimento prévio que o novo conhecimento vai interagir, e sim com o mais relevante disponível na estrutura cognitiva no qual servirá de ponte de ancoradouro com os novos conhecimentos a serem apresentados ao estudante.

Substantividade significa que o mesmo conceito ou a mesma proposição podem ser expressos de diferentes maneiras, através de distintos signos ou grupos de signos, equivalentes em termos de significados (Moreira, 1997 p.19). Portanto, a teoria de Ausubel tem como interesse a estruturação do conhecimento tendo por base as organizações conceituais já existentes que funcionam como estruturas de ancoradouro e acolhimento de novas ideias, conforme o idealizador descreve:

> O conhecimento é significativo por definição. É o produto significativo de um processo psicológico cognitivo (“saber”) que envolve a interação entre ideias “logicamente” (culturalmente) significativas, ideias anteriores (“ancoradas”) relevantes da estrutura cognitiva particular do aprendiz (ou estrutura dos conhecimentos deste) e o “mecanismo” mental do mesmo para aprender de forma significativa ou para adquirir e reter conhecimentos (Ausubel. 2003, p. 4).

Neste aspecto, enfatiza-se a importância de averiguar o conhecimento prévio do estudante para que possa haver uma interação entre o que o estudante tem de conhecimento específico mais relevante, disposto na sua estrutura cognitiva e o novo conhecimento a ser-lhe apresentado, a qual Ausubel chama de subsunçor existente na estrutura cognitiva, estes subsunçores são os conhecimentos prévios especificamente relevantes. Essa interação entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio é que permite ao estudante atribuir significado ao novo conhecimento.

Por conseguinte, uma condição para que ocorra a aprendizagem significativa é a apresentação do material potencialmente significativo ao estudante, buscando sua incorporação de forma não-arbitrária e substantiva na sua estrutura cognitiva, desse modo ele dará significado ao material que lhe será apresentado, sendo que este material deve ser apresentado de forma organizada com significado lógico, porém não é necessário somente que seja potencialmente significativo, também deve haver uma disposição do estudante em aprender. Para que ocorra aprendizagem significativa, o estudante transforma o significado lógico em psicológico dos materiais instrucionais, como observa o autor da teoria.

> É a possibilidade de um indivíduo incorporar à sua estrutura cognitiva proposições logicamente significativas através de relações não arbitrárias e substantivas, tornando-as potencialmente significativas para ele, e, portanto, criando possibilidade de transformar o significado lógico em psicológico no curso da aprendizagem significativa. (Ausubel 1980, p.41-42).

Dessa forma, o material apresentado ao aluno é apenas potencialmente significativo, se o mesmo não tem disponibilidade de conteúdos prévios relevantes na sua estrutura cognitiva, ele vai aprender apenas mecanicamente. “Independentemente de quão potencialmente significativo possa ser o material a ser aprendido, se a intenção do aprendiz for simplesmente de memorizá-lo de forma arbitrária, literalmente o processo de aprendizagem será mecânico”. (Moreira 2006, p 20).

A aprendizagem mecânica ocorre de forma arbitrária e isolada, sendo que, segundo Ausubel et al. (1980), a mente humana não é programada para o armazenamento literal, o período daquilo que é aprendido mecanicamente é relativamente breve, é aquela no qual o estudante só decora para fazer uma prova, como em matemática, por exemplo, onde se observa a simples memorização de fórmulas e conceitos aprendidos automaticamente pelos estudantes, de forma isolada e sem significado. Contudo, é necessário dizer que essas formas de aprendizagem não são antagônicas entre si, mas sim que são extremos de um mesmo contínuo, conforme apresentado na Figura 1. Nessa perspectiva tornam-se relevantes as palavras de Masini; Moreira, (2008, p. 23) que:

> A aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica não constituem uma dicotomia. A aprendizagem não é significativa ou mecânica. Há um contínuo entre elas. Muitas

aprendizagens acontecem na zona cinza desse contínuo (...). Quer dizer, as aprendizagens podem ser parcialmente significativas, parcialmente mecânicas, mais significativas ou mais mecânicas (Masini; Moreira, 2008, p. 23).

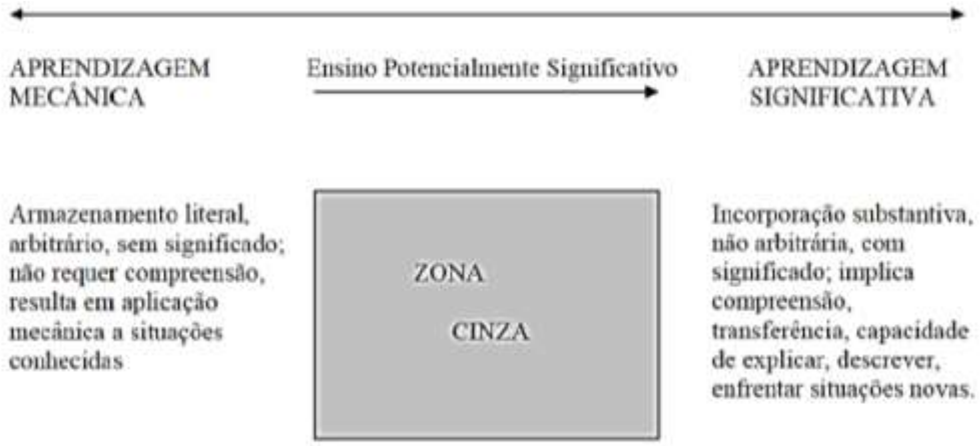


Figura 1 - O contínuo da aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica.
Fonte: Moreira (2012, p.12)

Há uma zona cinza intermediária neste contínuo, onde o professor é um facilitador da aprendizagem na caminhada do estudante nessa zona. A passagem da aprendizagem mecânica para a aprendizagem significativa depende da existência de subsunçores adequados, da predisposição do estudante para aprender, de materiais potencialmente significativos e da mediação do professor.

Contudo, é necessária a disposição do estudante em aprender e obter uma estrutura cognitiva que o conduza a aprendizagem significativa, pois se a interação não ocorre adequadamente, ou seja, não há uma ancoragem entre os conhecimentos, os novos conhecimentos podem ser armazenados de maneira arbitrária e literal, caracterizando-se em aprendizagem mecânica.

2.1.1 Os Tipos e Formas de Aprendizagem Significativa

De acordo com a teoria de Ausubel pode-se dizer que há três tipos de aprendizagem significativa: *representacional*, de *conceitos* e *proposicional*.

A aprendizagem representacional ocorre quando o aluno atribui os significados de símbolos particulares (palavras), especificamente às que representam. Isto é, a identificação do significado de símbolos com seus referentes específicos (objetos, eventos, conceitos). (Moreira. 2011, p 165). Por exemplo, se para uma criança a palavra mesa (um símbolo linguístico) significa apenas a mesa de sua casa, ela não tem ainda o conceito de mesa, apenas uma representação. Ainda que a aprendizagem representacional seja próxima à aprendizagem mecânica, ela é significativa porque o símbolo significa um referente concreto. Na aprendizagem mecânica a relação símbolo − objeto/evento é apenas associativa, sem significado (Moreira. 2012, p 16).

A aprendizagem conceitual pode ser considerada, inicialmente, uma aprendizagem representacional, já que conceitos podem ser representados por símbolos. Ausubel (1978, p. 89) define conceitos como" objetos, eventos, situações ou propriedades que possuem atributos criteriais comuns e são designados, em uma dada cultura, por algum signo ou símbolo aceito". Os conceitos podem ser adquiridos através da formação de conceitos que ocorre principalmente nas crianças em fase pré-escolar, onde são adquiridos pela experiência direta e formulação de hipóteses, e pela assimilação de conceitos que ocorre nas crianças em idade escolar e nos adultos.

No caso do ensino de função, o conceito prévio que o estudante deve ter é o conceito de relação. Para Santarosa (2016), "o aluno pode entender, a partir do conceito de relação, que uma função pode ser identificada por uma relação de dependência de uma variável em relação a outra, através da simbologia $y = f(x)$, esta será uma aprendizagem representacional". A autora afirma que para a aprendizagem seja conceitual, é necessário o estudante identificar a relação de dependência entre as variáveis:

> O estudante pode identificar relação de dependência linear entre o preço da corrida e o número de quilômetros rodados, quando estiver pagando uma "corrida de táxi". Também pode identificar uma relação de dependência quadrática, entre a posição e o tempo, quando estiver interessado na posição de um objeto que se desloca em movimento retilíneo uniformemente variado (Santarosa 2016, p. 63).

A aprendizagem proposicional refere-se ao significado de ideias em forma de proposição. "A tarefa não é aprender o significado dos conceitos e sim, o significado das ideias expressas verbalmente, por meio desses conceitos, sob forma de proposição" (Moreira, 2006 p.27). Ou seja, a tarefa é aprender o significado que está além da soma dos significados das palavras ou conceitos que compõem a proposição, no caso do estudo de função, apresenta-se os conceitos relacionados na forma de proposição, Lima et. al, define o conceito de função em forma de proposição da seguinte forma:

> Dados os conjuntos X, Y, uma função f:X→Y (lê-se "uma função de X em Y) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in$ X um elemento $y = f(x) \in$ Y. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in$ X, o elemento $f(x) \in$ Y chama-se imagem de x pela função f, ou o valor

> assumido pela função *f* no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \rightarrow f(x)$ para indicar que *f* transforma (ou leva) *x* em *f*(*x*) (Lima et al., 2013, p. 40).

Outra forma de classificação de aprendizagem é destacada por Ausubel et al. (1980), essa leva em conta a organização hierárquica de ideias, significados e conceitos, desse modo as formas de aprendizagem podem ser: *subordinada*, *superordenada* e *combinatória*.

A aprendizagem subordinada, também denominada de aprendizagem de subsunção, ocorre quando uma nova informação interage de forma significativa com ideias específicas da estrutura cognitiva. Essa nova informação se subordina a subsunçores relevantes existentes na estrutura cognitiva. Como esta estrutura cognitiva tende a uma organização hierárquica em relação a abstração e generalidade de ideias e conceitos, a emergência de novos significados conceitos ou proposições reflete, uma subordinação do novo conhecimento à estrutura cognitiva existente. Este tipo de aprendizagem pode denominar-se derivativa, aquela onde o material de aprendizagem é tido como exemplo específico, mais inclusivo de uma ideia existente na estrutura cognitiva. Já a aprendizagem subordinada correlativa é uma extensão, elaboração ou modificação de proposições ou conceitos anteriormente aprendidos. É incorporado por interação com subsunçores mais inclusivos, contudo, seu significado não está implícito e não pode ser adequadamente representado por esses subsunçores (Moreira, 2006, p.33).

Quando as ideias estabelecidas, mais estáveis e menos inclusivas, se vinculam e reconhecem-se como exemplos mais específicos de novas ideias, mais inclusivas temos a *aprendizagem superordenada*. Esse processo se dá quando um conceito ou proposição potencialmente significativo, mais geral e inclusivo do que ideias ou conceitos já estabelecidos na estrutura cognitiva, é adquirido a partir destes e passa a assimilá-los. Logo, é necessária uma organização hierárquica conceitual na estrutura cognitiva do aluno, de forma que os subsunçores possam interagir formando ideias mais gerais.

Por sua vez, a *aprendizagem significativa combinatória,* ocorre quando as novas proposições que não geram uma relação subordinada, nem superordenada, apresentam ideias relevantes particulares na estrutura cognitiva (Ausubel, 2003, p 95). Onde as ideias são relacionadas de forma não arbitrária, relevante de maneira geral à estrutura cognitiva do aluno como um todo. Tendo em vista a disponibilidade de conteúdo relevante apenas de um modo geral, nesse tipo de aprendizagem novas proposições são, provavelmente, menos relacionáveis e menos capazes de se ancorar no conhecimento já existente e, portanto, pelo menos no início, mais difíceis de aprender e reter do que proposições subordinadas ou superordenadas (Ausubel 1978, p. 59).

2.1.2 Teoria da Assimilação

Nesta teoria, Ausubel explica como se relacionam as novas ideias potencialmente significativas existentes no material a ser aprendido, às ideias relevantes já ancoradas na estrutura cognitiva do aprendiz. Segundo ele, a interação destas ideias e seu posterior armazenamento fazem parte de um processo de assimilação que ultrapassa a fase de aprendizagem até a fase de retenção e esquecimento (Ausubel, 2003, p. 08).

No princípio da assimilação, novos significados são elaborados mediante o resultado da interação entre os novos conhecimentos e os já existentes na estrutura cognitiva. O produto desse processo interacional dá significados ao novo conhecimento e pode modificar e diferenciar os subsunçores que com eles interagem.

Segundo esse princípio, quando uma ideia, conceito ou preposição ***a*** potencialmente significativa é assimilado sob uma ideia, conceito ou preposição já estabelecida ***A***, ou seja, um subsunçor, a nova informação ***a*** e o subsunçor ***A*** são modificados pela interação, onde ambos produtos dessa interação ***a'*** e ***A'*** permanecem relacionados tornando-se o produto interativo ***a'A'***. Desta forma, o produto interacional característico do processo de assimilação na aprendizagem significativa não é apenas o novo significado ***a'***, mas, inclui também, a modificação de subsunçor, ou seja, um significado ***a'A'***. Durante a fase de retenção esse produto é dissociável em ***a'*** e ***A',*** porém, à medida que o processo de assimilação continua e entra na fase obliteradora, ***a' A'*** reduz-se simplesmente a ***A',*** ocorrendo o esquecimento de ***a'.*** No entanto, é especificamente um resíduo, uma vez que o novo conhecimento **a,** que passou a ser ***A',*** de alguma forma está "dentro" de ***A'.*** Em função disso a reaprendizagem do que foi obliterado é possível e relativamente rápida, a Figura 2 demonstra o processo de assimilação.

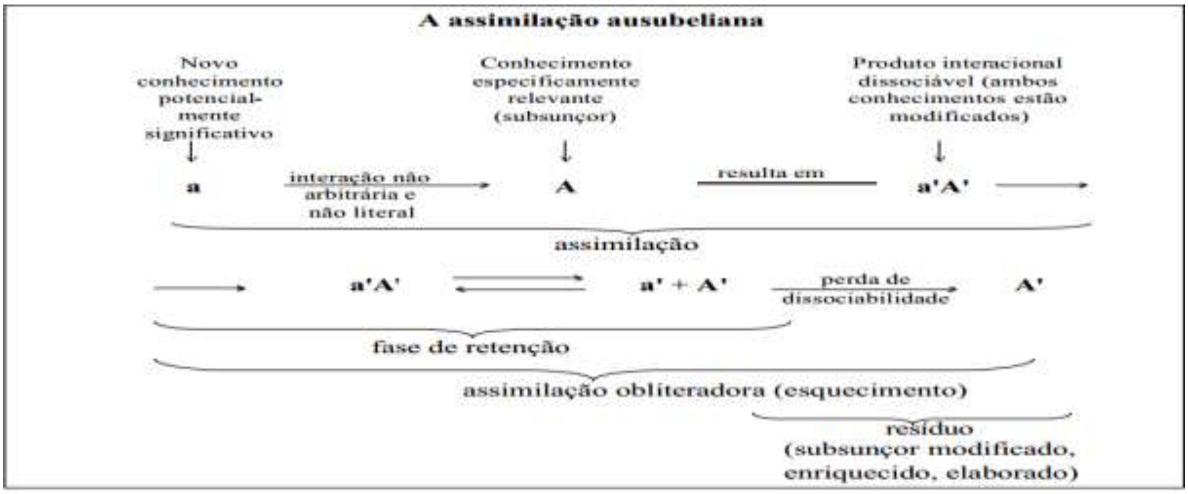


Figura 2-Teoria da assimilação.
Fonte: Moreira (1999)

Por conseguinte, o processo de assimilação na fase da aprendizagem significativa inclui:

> Ancoragem seletiva do material de aprendizagem às ideias relevantes existentes na estrutura cognitiva; (2) interação entre as ideias acabadas de introduzir e as ideias relevantes existentes (ancoradas), sendo que o significado das primeiras surge como o produto desta interação; e (3) a ligação dos novos significados emergentes com as ideias ancoradas correspondentes no intervalo de memória (retenção). (Moreira 1999)

Os conceitos mais amplos, bem estabelecidos e diferenciados, servem de ancoradouro às novas ideias e possibilitam sua retenção. Entretanto, o significado das novas ideias tende, ao longo do tempo, a ser assimilado ou reduzido pelos significados mais estáveis das ideias estabelecidas. Como é natural, estes novos significados desempenham um papel no aumento de estabilidade, bem como no aumento da força de dissociabilidade associada, que resulta da ligação dos mesmos às ideias ancoradas mais estáveis que lhes correspondem.

Para Ausubel, na aprendizagem significativa, na fase da retenção, a nova informação aprendida permanece dissociável do seu subsunçor por um período variável de tempo, podendo ser reproduzida individualmente (Moreira, 2006, p 30).

A capacidade de dissociação do produto ***a'A'*** diminui durante a fase de retenção a ponto de, conforme progride a assimilação, as informações ***a'*** e ***A'*** não serem mais separadas restando apenas o subsunçor modificado ***A'***, assim:

> Na assimilação obliterante as ideias acabadas de aprender começam a tornar-se, progressivamente, menos dissociáveis (recuperáveis) das respectivas ideias ancoradas, como entidades por direito, até deixarem de estar disponíveis e se afirmar estarem esquecidas. Quando a força de dissociabilidade de a' desce abaixo de um determinado nível crítico, já não é todo recuperável. Acaba por se chegar a um ponto nulo de dissociabilidade de A'a' sofre mais reduções até A' ou até ao próprio A ideia ancorada original. (Ausubel, 2003, p.108).

Ou seja, segundo Ausubel (2003), as ideias aprendidas inicialmente tornam-se menos dissociáveis das ideias ancoradas, até deixarem de estar disponíveis e se afirmar estarem esquecidas. Ainda segundo Ausubel et al.(1980), quando uma ideia **a** é aprendida significativamente e relacionada à ideia relevante **A,** tanto as ideias são modificadas como **a** é assimilada pela ideia estabelecia **A**, exemplo de aprendizagem subordinativa, onde **A** e a nova ideia **a** sofrem modificações, formando o produto da interação **A`a`,** conforme esquema no Quadro 11.

Quadro 11 -Processo de assimilação de uma ideia subordinada

PROCESSO DE ASSIMILAÇÃO DE UMA IDEIA SUBORDINADA	
IDEIA ESTABELECIDA: **A** (mais inclusiva e mais estável)	
IDEIAS NOVAS: $a_1, a_2, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n$ (menos inclusiva e menos estável)	
ETAPAS	**PROCESSO DE ASSIMILAÇÃO**
AQUISIÇÃO DO SIGNIFICADO DE $a_1', a_2', \ldots, a_i'$.	Introdução do objeto de estudo e formação do produto interativo a partir de uma diferenciação progressiva. $A_1'a_1'$ $A_1'a_1'a_2'$ $\vdots$ $A_1'a_1'a_2' \ldots a_i'$
PÓS-APRENDIZAGEM RETENÇÃO INICIAL DE $a_1', a_2', \ldots, a_n'$.	São introduzidas sequencias de ideias $a_{i+1}, \ldots, a_n$ para a retenção e aperfeiçoamento dos significados $a_1', a_2', \ldots, a_i', a_{i+1}', \ldots, a_n'$ são dissociáveis de $A'a_1'a_2' \ldots a_i'a_{i+1}' \ldots a_n'$ $A_1'a_1'a_2' \ldots a_m' \leftrightarrow A_1' + a_1' + a_2' + \ldots + a_m'$ (Elevada força de dissociabilidade)
RETENÇÃO POSTERIOR DE $a_1'a_2' \ldots a_n'$	Começa uma perda gradual da dissociabilidade $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ em relação $A_1'a_1'a_2' \ldots a_n'$ $A_1'a_1'a_2' \ldots a_n' \leftrightarrow A' + a_1' + a_2' + \ldots + a_n'$ (Baixa força de dissociabilidade)
ESQUECIMENTO DE $a_1'a_2' \ldots a_n'$.	$a_1'a_2' \ldots a_n'$ deixa de dissociar-se eficazmente de $A_1'a_1'a_2' \ldots a_n'$ A dissociabilidade de $a_1'a_2' \ldots a_n'$ se encontra sob o limiar de disponibilidade $a_1'a_2' \ldots a_n'$ se reduz a A'

Fonte: Assunção 2015, adaptado de Mendoza (2012) e Ausubel et al. (1980).

No caso da aprendizagem subordinada, o processo de assimilação obliteradora, considerando-se um fenômeno de redução, parece bastante direto: o significado menos instável (e mais específico) de uma ideia subordinada é gradualmente incorporado ou reduzido ao significado mais estável (e mais inclusivo) da ideia especificamente relevante na estrutura cognitiva que o assimila.

A aprendizagem de conceitos e a aprendizagem proposicional refletem essa relação de subordinação, pois envolvem a subsunção de conceitos e proposições potencialmente significativos sob ideias mais gerais e inclusivas já existentes na estrutura cognitiva. Desse processo sequencial de novos significados e formação do produto interativo resulta a diferenciação progressiva dos conceitos ou proposições com o conseguinte refinamento dos significados e um aumento potencial para a criação de uma base para a posterior aprendizagem significativa.

Na aprendizagem superordenada, as ideias estabelecidas **a1’ a2’ e a3’**, são consideradas com exemplos mais específicos da nova ideia **A** e passam a associar-se a **A.**

Segundo Ausubel et al. (1980), neste novo produto interacional, **A’ a’, a’** não perdem completamente sua identidade, uma vez que o equilíbrio da dissociação **A’ a’** ↔ **A’ + a’** é estabelecido de tal forma que **a’**, dependendo das condições dominantes, tem um determinado grau de dissociação enquanto uma entidade identificável. A ideia superordenada **A** é definida por um novo conjunto de atributos essenciais que abrange as ideias agora subordinadas. Ao final, deve começar a assimilação obliteradora da ideia menos inclusiva como sugere o Quadro 12.

Quadro 12- Processo de assimilação de uma ideia superordenada

PROCESSO DE ASSIMILAÇÃO DE UMA ATIVIDADE SUPERORDENADA	
IDEIAS ESTABELECIDAS: $a_1, a_2, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_m a_{m+1}, \ldots, a_p a_{p+1} \ldots a_n$ (menos inclusiva e mais estável)	
IDEIA NOVA: A (mais inclusiva e menos estável)	
ETAPAS	**PROCESSO DE ASSIMILAÇÃO**
AQUISIÇÃO DO SIGNIFICADO DE A'.	Introdução do objeto de estudo e formação do produto interativo a partir de uma diferenciação progressiva $a_1' A'$ $a_1' a_2' A'$ $\vdots$ $a_1' a_2' \ldots a_i' A'$
RETENÇÃO INICIAL DE A'.	São introduzida uma sequencias de ideias $a_{i+1}, \ldots, a_m$ para a retenção e aperfeiçoamentos dos significados. O novo significado de A' é dissociável de $a_1' \ldots a_i' a_{i+1}' \ldots a_m' A'$ $a_1' \ldots a_i' a_{i+1}' \ldots a_m' A' \leftrightarrow a_1' + \ldots + a_i' + a_{i+1}' + \ldots + a_m' + A'$ (Elevada força de dissociabilidade)
ESQUECIMENTO DE A'.	A' deixa de ser dissociável eficazmente de $a_1' \ldots a_i' a_{i+1}' \ldots a_m' A'$ A' se reduz a $a_1' + \ldots + a_i' + a_{i+1}' + \ldots + a_m' + A$
DIFERENCIAÇÃO ADICIONAL DE A'.	A partir da *diferenciação progressiva* de ideias $a_{m+1}', a_{m+2}', \ldots, a_p'$ devem ser resolvidos os significados conflitosos através do processo de *reconciliação integradora*. $a_1' \ldots a_{m+1}' a_{m+2}' \ldots a_p'$ são incluídas na ideia estabelecida de A', agora mais estável, formando o produto $A' a_1' \ldots a_m' a_{m+1}' \ldots a_p'$

RETENÇÃO POSTERIOR DE $a'_{m+1}, a'_{m+2}, \ldots, a'_n$.	Para aperfeiçoar e aumentar a retenção dos os novos significados são introduzidas as ideias $a'_{p+1}, a'_{p+2}, \ldots, a'_n$ $a'_{m+1}, a'_{m+2}, \ldots, a'_p a'_{p+1} \ldots a'_n$ é dissociável de $A' a'_{m+1} a'_{m+2} \ldots a'_p a'_{p+1} \ldots a'_n$ $A' a'_{m+1} a'_{m+2} \ldots a'_p a'_{p+1} \ldots a'_n \leftrightarrow A' + a'_{m+1} + a'_{m+2} + \ldots a'_p + a'_{p+1} + \ldots + a'_n$ (Elevada força de dissociabilidade) Posteriormente começa uma perda gradual da dissociabilidade de $a'_{m+1}, a'_{m+2}, \ldots, a'_p a'_{p+1} \ldots a'_n$ em relação $A' a'_{m+1} a'_{m+2} \ldots a'_p a'_{p+1} \ldots a'_n$ $A' a'_{m+1} a'_{m+2} \ldots a'_p a'_{p+1} \ldots a'_n \leftrightarrow A' + a'_{m+1} + a'_{m+2} + \ldots a'_p + a'_{p+1} + \ldots + a'_n$ (Baixa força de dissociabilidade)
ESQUECIMENTO DE $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$.	$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ deixa de ser dissociável eficazmente de $A' a'_1 a'_2 \ldots a'_n$, ou seja, se encontra por debaixo do limiar de disponibilidade $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ se reduz a A'

Fonte: Assunção 2015, adaptado de Mendoza (2012), e Ausubel et al. (1980)

O centro desta teoria está na interação dos novos conhecimentos com conhecimentos específicos e relevantes contidos na estrutura cognitiva, porém Moreira (2006, p.32) nos chama a tenção para dois aspectos:

> 1- Que na aprendizagem significativa o novo material original a poderá nunca ser lembrado precisamente da mesma forma em que foi recebido, pois o próprio processo de assimilação de a o altera para a’ e, portanto, práticas de avaliação que requerem a repetição exata das informações aprendidas desencorajam a aprendizagem significativa;
> 2- Ausubel não emprega o termo assimilação no mesmo sentido usado por Piaget e, segundo Novak (1977), a assimilação no sentido ausubeliano difere do conceito piagetiano de assimilação de duas maneiras: a) na concepção de Ausubel, o novo conhecimento interage com conceitos ou proposições relevantes específicas existentes na estrutura cognitiva, e não com ela, como um todo (embora, de alguma forma, toda ela esteja envolvida porque, afinal, esses conceitos ou proposições específicos fazem parte da estrutura cognitiva); b) conforme Ausubel, a assimilação é um processo contínuo e modificações relevantes na aprendizagem significativa ocorrem, não como resultado de períodos gerais de desenvolvimento cognitivo, mas de uma crescente diferenciação e integração de conceitos específicos relevantes na estrutura cognitiva. Tanto Ausubel quanto Piaget, no entanto, concordam que o desenvolvimento cognitivo é um processo dinâmico e que a estrutura cognitiva está sendo constantemente modificada pela experiência.

Para Ausubel (2003), a estrutura cognitiva instável, ambígua, tem tendência de impossibilitar a aprendizagem significativa. Desta forma, é necessário o fortalecimento de aspectos relevantes da estrutura cognitiva, onde se possa facilitar a nova aprendizagem e a retenção.

2.1.3 Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora como Facilitadoras na Organização do Ensino

A diferenciação progressiva é uma característica presente na aprendizagem subordinada, no qual ocorre a assimilação sequencial de novos significados por um processo de interação e ancoragem de um conceito ou proposição que se modifica adquirindo novos significados. Ao programar o conteúdo de ensino utilizando o princípio da diferenciação progressiva, faz-se necessário apresentar primeiramente os conceitos mais gerais e mais inclusivos, para posteriormente serem diferenciados de forma específica.

> É menos difícil para os seres humanos aprenderem os aspectos diferenciados de um todo, anteriormente aprendido e mais inclusivo, do que formular o todo inclusivo a partir das partes diferenciadas anteriormente aprendida. A organização que o indivíduo faz do conteúdo de uma determinada disciplina no próprio intelecto consiste numa estrutura hierárquica [...] (Ausubel, 2003 p.166)

Sendo assim, necessita-se de uma organização das disciplinas no qual os conceitos estariam organizados hierarquicamente, partindo dos mais gerais e inclusivos. Do ponto de vista ausubeliano, o desenvolvimento de conceitos ocorre da melhor forma quando os elementos mais gerais e inclusivos são introduzidos em primeiro lugar e, então, o conceito é progressivamente diferenciado, em termos de detalhes e especificidade (Moreira, 2006, p. 27).

Portanto, é necessário que estejam disponíveis na estrutura cognitiva do aluno ideias mais inclusivas e relevantes que possam servir de ponte para as novas informações, tornando assim a aprendizagem mais eficaz. Faz-se necessário uma organização dos conteúdos a serem ensinados de forma hierárquica, para que o aluno possa assimilar de forma significativa e não mecânica.

É muito raro esses procedimentos de organização de estrutura de conteúdos de forma hierárquica, diante disto podemos observar em Matemática a exposição de conteúdos sem a preocupação de ordená-los e a prática que ocorre em muitas escolas em separar a Álgebra da Geometria, segregando assim os conteúdos apenas na base de tópicos sem levar em consideração o grau de generalidade e inclusão dos mesmos.

A reconciliação integradora ocorre quando o novo conhecimento ao se relacionar de forma substancial e não arbitrária com os conhecimentos prévios relevantes, os desestruturam provocando uma reorganização dos conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz (Moreira, 2006, p. 27).

Novak e Gowin (1988) consideram que para se atingir a reconciliação integradora de forma mais eficaz, deve-se organizar o ensino descendo e subindo nas estruturas conceituais hierárquicas, à medida que as novas informações são apresentadas, ou seja, deve partir do geral para chegar ao particular, como pode-se observar na Figura 3, as linhas em negrito é a direção recomendada para a diferenciação progressiva e as outras linhas mais fracas sugerem a reconciliação integradora.

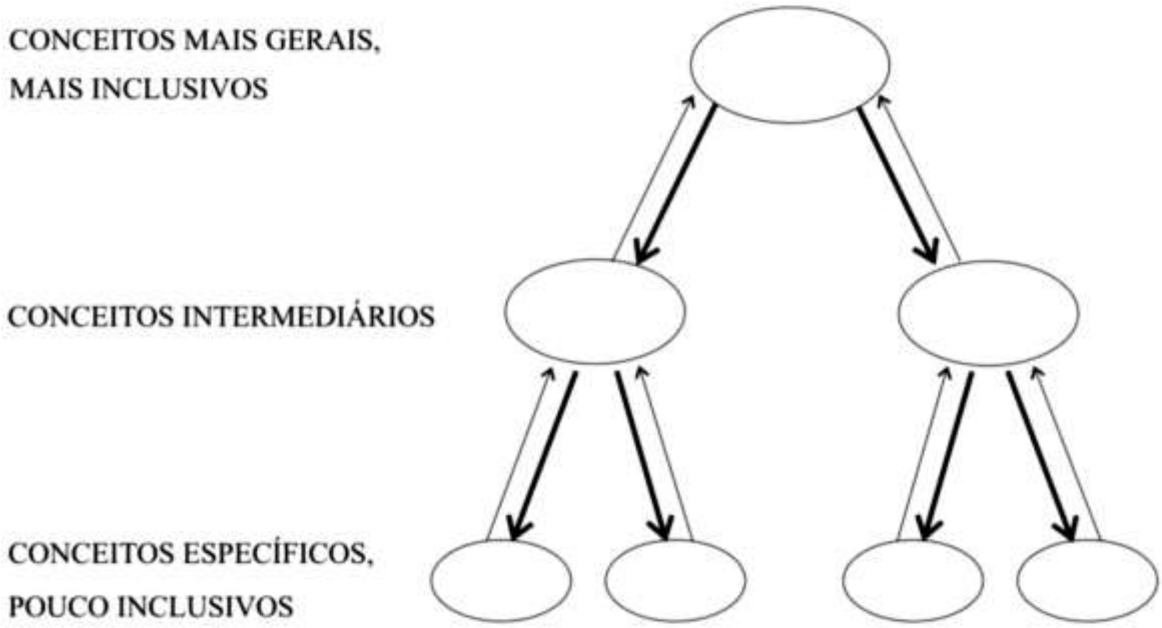


Figura 3- Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora
Fonte: Moreira e Masini (2006, p.47)

Ausubel também enfatiza a consolidação onde há necessidade da reiteração e da realização de tarefas em contextos e momentos diferentes para que se produza a generalização e a interiorização efetiva e significativa do que foi aprendido. Na consolidação, novos materiais devem ser introduzidos, assegurando-se contínua prontidão na matéria de ensino e sucesso na aprendizagem sequencialmente organizada (Moreira, 1999, p.53).

2.2 Estratégia de Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino.

Tem se discutido muito sobre a resolução de problemas para a aprendizagem da Matemática. Para Vergnaud, um problema não é um problema para o indivíduo a menos que ele tenha os conceitos que o tornam capaz de considerá-lo um problema para si mesmo (1994, p. 42). Já Lester (1983), define que problema é uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para o qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve a solução. Lucchesi (1989) define problema como uma situação onde ocorre um desequilíbrio, ou seja, aquilo que exige uma solução não imediata para qual se disponha de meios intelectuais para a solução. Logo, podemos dizer que só haverá problema se o aluno perceber uma dificuldade a ser superada, e o que é problema num estágio pode não mais se caracterizar dessa maneira em outro.

Na concepção de Smole & Diniz (2001), a resolução de problemas é vista como “perspectiva metodológica”, incluindo uma postura frente ao que é ensinar e, consequentemente, do que significa aprender. Esta perspectiva visa ampliar o conceito de problema considerando “que a resolução de problemas trata de situações que não possuem soluções evidentes e que exigem que o aluno combine seus conhecimentos e decida pela maneira de usá-los em busca da solução”.

Ao longo dos últimos anos, a resolução de problema é vista como um caminho para o ensino da Matemática. Segundo Onuchic (1999), a importância dada à resolução de problema constitui uma metodologia de trabalho que a comunidade da educação matemática em todo o mundo tem dedicado atenção particular. Para Nicholas Branca (1997), a resolução de problema está descrita dentro de três concepções: Como meta, processo ou habilidade básica. A primeira concepção enfoca que aprender a resolver problema é a principal razão para estudar matemática.

Este ponto de vista influencia a natureza de todo currículo matemático e tem implicações importantes para prática em sala de aula. A segunda concepção centra-se em ensinar a resolver problemas, e como consequência resultaria em aprender matemática. Considera-se importante nesta concepção os métodos, os procedimentos, os tipos de estratégias e esquemas de passos a serem seguidos para melhor resolver problemas. A última concepção, mas de forma alguma a menos importante interpretação é habilidade básica para que o homem possa inserir-se no mundo do conhecimento e do trabalho.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1999, p. 43) enfatizam a aplicação de Resolução de Problemas como um caminho para o ensino da Matemática, defendendo uma proposta resumida nos seguintes princípios:

- o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégias para resolvê-las.
- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;

- aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;
- o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Para muitos docentes, ensinar a resolver problemas ainda significa apresentar situações-problema padrão, e talvez, incluir um exemplo como uma solução técnica específica. Para Onuchic (1999), a tendência é mudar a visão desse trabalho, considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade.

Um dos autores pioneiros na pesquisa nessa área é o matemático George Polya. Em sua obra mais famosa *How to Solve It*, traduzida para o português como *A arte de resolver problemas* (Polya, 1995), Polya se propõe a estudar os inúmeros métodos de resolução de problemas, estudo também conhecido como *heurística*, e suas implicações para o ensino-aprendizagem de Matemática. Com o objetivo de sistematizar o complexo processo que envolve a resolução de um problema matemático, o autor propõe um esquema no qual o mesmo pode ser resumido em quatro etapas: 1) Compreensão do problema, 2) Estabelecimento de um plano, 3) Execução do plano e 4) Retrospecto.

Contudo, para Mendoza (2009, p.70), a resolução de problemas conforme foi proposta por Polya, não utiliza a formação das atividades de um determinado conteúdo com os respectivos elementos que caracterizam a ação. E ainda Talizina (1988, p. 202) critica os trabalhos de Polya, pois estes trabalhos supõem tacitamente que os alunos são capazes de realizar a atividade indispensável, se considera o pensamento como certa função abstrata já existente e que a tarefa consiste só em fazê-lo trabalhar na direção necessária.

Mendoza (2009), a partir de Polya, adaptou dos princípios gerais para resolver problemas, criando um esboço dos passos que conduz à solução de problemas fornecendo possibilidades que poderão ser úteis na resolução. Em sua observância Mendoza destacou que os princípios sequenciais de Polya ao passar de um estágio para o outro, que caracteriza cada estágio como ação, envolve um conjunto de operações que estão diretamente ligadas com a realização desta ação (Mendoza, 2009, p.77).

A partir dos pressupostos existentes no método dos princípios de Polya, Mendoza construiu a Atividade de Situações Problema (ASP) formada por um sistema de ações, que será utilizado na intervenção desta pesquisa, para desenvolver a capacidade dos estudantes de resolver problemas no conteúdo de função, utilizando como direcionamento a teoria da aprendizagem significativa, promovendo também a formação das ideias conceituais de função.

Em cada um dos procedimentos sequenciais, existe um conjunto de perguntas e indagações (operações) que conduzem o estudante a direção para encontrar a solução do problema. Estes princípios são tão-somente o senso comum tornado explícito na perspectiva de Mendoza, descritas para melhor entendimento de sua aplicação. O quadro 13 traz as ações e operações da ASP.

Quadro 13 Atividade de Situações Problema

Ações	Operações
1ª Ação: Compreender o problema	Ler o problema e extrair todos os elementos desconhecidos; estudar os dados e suas condições e determinar o(s) objetivo(s) do problema.
2ª Ação: Construir o modelo matemático	Determinar as variáveis e incógnitas; nominar as variáveis e incógnitas com suas unidades de medidas; construir o modelo matemático a partir das variáveis, incógnitas e condições e por último realizar a análise das unidades de medidas do modelo matemático.
3ª Ação: Solucionar o modelo matemático	Selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo.
4ª ação: Interpretar a solução	Interpretar o resultado; extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema; dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema; realizar uma reflexão baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema existindo a possibilidade de reformular o problema e assim construir novamente o modelo matemático, solucioná-lo e interpretar sua solução.

Fonte: (Mendoza 2009)

Primeira ação: compreender o problema. As operações propostas nesta ação são formadas com a intuição de assegurar que o estudante busque elementos que facilitem a compreensão do problema, destacando inicialmente uma leitura que permita extrair elementos conhecidos e desconhecidos; destacar para estudar e compreender os elementos desconhecidos; determinar os dados essenciais e as condições; e para finalizar a ação determinar o(s) objetivo(s) do problema. Através desta análise, destaca-se também a observação quanto à notação matemática apropriada ou a realização de um diagrama se for o caso.

Segunda Ação: construir o modelo matemático. Neste estágio acontece à relação ou associação dos elementos dados no problema com o objetivo para solucionar, por isso torna-se importante determinar as variáveis e incógnitas certificando-se das medidas e itens relacionados; nomear as variáveis e incógnitas com suas unidades de medida, atribuindo símbolos frequentemente utilizados tais como a, x, y, z ou atribuir iniciais como símbolos sugestivos volume (*v*), tempo (*t*), massa (*m*); construir o modelo matemático a partir das variáveis, incógnitas e condições do problema, é uma operação entendida como fator essencial desta ação, pois requer do estudante o reconhecimento de padrões que ocorrem no contexto do problema, que pode ser geométrico, numérico ou algébrico, após a identificação do padrão o estudante pode determinar o modelo matemático ou conjecturar se for o caso; a operação realizar a análise das unidades de medida do modelo matemático visa relacionar a existência de conhecimento estável do estudante ou relacionar ideias que podem ser úteis na resolução do modelo.

Terceira Ação: solucionar o modelo matemático. São as operações de aporte para a execução de encontrar a solução do problema a partir do modelo esboçado, então, selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático, é uma operação psíquica e motora; a operação selecionar o sistema de computação algébrica que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático (quando for necessário), geralmente é aplicada quando o problema é mais complexo ou se desejar demonstrar aspectos detalhados de um problema simples; e a última operação desta ação é solucionar o modelo matemático, que requer essencialmente a organização psíquica dos procedimentos que serão aplicados.

Quarta Ação: interpretar a solução. As operações desta ação são essenciais para se observar o nível de compreensão do estudante, possibilitado através do esboço descritivo revelar a forma aderida de interpretação do resultado obtido da solução do modelo matemático; a operação de extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema, tornar possível uma análise qualitativa da compreensão do processo; dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema, significa que o estudante realizou uma relação bem estabelecida dos dados para encontrar a resposta correta; realizar um informe baseado no(s) objetivo(s) do problema, é descrever as informações essenciais relacionadas ao objetivo do problema; e a última operação do processo é analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta com o(s) objetivo(s) do problema(s), a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.

Como argumenta Gómez-Granell (1997), os problemas escolares são muito diferentes dos dilemas reais presentes na vida cotidiana. Isso não significa que o ensino de matemática deva se reduzir à matemática cotidiana e intuitiva, mas é preciso encontrar um equilíbrio entre conhecimento cotidiano e o formal, de tal sorte que os alunos tenham acesso ao conhecimento matemático formal com significado.

Sendo assim, a resolução de um problema deve construir um momento especial de interação e diálogo entre o educando e a descoberta que este está fazendo. O professor como articulador, deve acolher as respostas, formular novas perguntas e ainda estimular a partilha das diversas estratégias apresentadas para a obtenção de um resultado.

2.2.1 A Resolução de Problemas como Estratégia Metodológica de Ensino, Fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa.

Ausubel et al. (1980), descreve que a resolução de problemas representa uma forma de atividade ou pensamento dirigido, na qual tanto a representação cognitiva da experiência prévia como os componentes da situação-problema são reorganizados, transformados ou recombinados para assegurar um determinado objetivo, envolvendo a geração de estratégias de solução de problemas que transcendem à simples aplicação de princípios a exemplos auto evidentes.

Para Ausubel, tanto a resolução de problemas como a criatividade são formas de aprendizagem por descoberta. Pela descoberta orientada por hipóteses, exigindo a transformação e reintegração do conhecimento existente, porém é receptiva, na compreensão do problema e a assimilação da solução do mesmo (Ausubel et, al. 1980, p. 471). Entretanto, é necessário que o aluno tenha disponível, na sua estrutura cognitiva, conceitos e princípios relevantes para o problema a ser resolvido e que apresente uma pré-disposição, uma intencionalidade em aprender.

A criatividade é a realização de solução de problemas que envolve a aplicação do conhecimento a problemas novos, singulares ou remotamente relacionados em termos da própria história de vida do indivíduo ou à geração de estratégias correspondentes de solução de problemas, onde segundo Ausubel et al. (ibid.), é a expressão mais elevada, envolvendo novas ideias e a gênese de novos princípios integrativos e explicativos.

A estrutura cognitiva preexistente desempenha papel preponderante na resolução de problemas, ainda mais se levado em conta que a busca de solução de qualquer problema envolve uma readaptação do resíduo da experiência prévia frente às demandas da nova situação-problema. Resolver um problema pode ser encarado como um meio para promover tal aprendizagem. Por exemplo, o surgimento do *insight*, conforme a concepção de Ausubel (2003), resulta de um processo de clarificação progressiva sobre relações de meio-e-fim fundamentadas na formulação, verificação e rejeição de hipóteses alternativas. Esta tarefa requer incorporação da nova informação na estrutura cognitiva do sujeito que a realiza.

Segundo Ausubel, há dois tipos de solução de problemas, a abordagem por ensaio-e-erro e a abordagem do discernimento. A abordagem por ensaio e erro baseia-se em uma relação de respostas sistemáticas, sem nenhum padrão significativo de relações, é característica de problemas de labirintos e quebra-cabeças.

Já a solução de problemas por discernimento implica uma disposição orientada para a descoberta de uma relação significativa, na qual as condições do problema e os objetivos desejados não são arbitrariamente e substantivamente relacionados com a estrutura cognitiva existente (Ausubel et al.,1980 p. 474). O discernimento pode ser pensado como processo ou produto. Como produto, quando se refere à certas características distintivas do resultado final da solução de problemas significativa, como processo, refere-se a um método distinto utilizado pelo aluno para chegar à solução.

> O discernimento como produto possui as seguintes características: 1) subjetiva: um sentimento agradável de uma descoberta apropriada, "de ver a luz" ou "Eureca"; 2) objetiva: reprodutibilidade imediata e possibilidade de transposição. No primeiro caso, estamos lidando com uma reação em grande parte afetiva ao produto da aprendizagem; no segundo, estamos especificando o que podemos fazer com o discernimento, uma vez que ele foi alcançado (Ausubel et al., 1980 p. 474).

Portanto, o discernimento emerge, como processo de solução de problemas distintos da solução cega ou por ensaio e erro; é necessário uma disposição orientada, para a geração e comprovação de hipóteses com o objetivo de compreender as relações significativas meios-fim de um problema particular, ou seja, que o professor seja mediador deste processo, auxiliando na geração e comprovação de hipóteses com o objetivo de compreender as relações significativas de um problema particular.

Para Ausubel (2003), o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas requer uma longa experiência de lidar com problemas. Existem boas razões para acreditar que tanto a orientação sob a forma de pistas facilita a solução de problema como é pedagogicamente eficaz para desenvolver habilidades de resolver problemas. Todos as metodologias destinadas a melhorar a capacidade de resolver problemas dos alunos ou se apoiam em certas pistas gerais sobre técnicas eficazes de resolver problemas ou oferecem uma retroalimentação crítica sobre as estratégias empregadas.

Não se pode deixar de salientar a importância da linguagem na resolução de problemas, pois está desempenha um papel importante na verbalização de conceitos ou proposições que resultam das operações de transformação envolvidas no pensamento. Ausubel et al. (1980, 2003) aponta que os tipos mais simples de raciocínio dependem apenas de operações relativamente concretas, perceptuais e imaginativas e, podem ser mais evidentes na ação antes da emergência do pensamento verbal, enquanto que a capacidade para pensar em termos abstratos obviamente requer o uso de conceitos e símbolos abstratos. Somente os tipos mais primitivos de solução de problemas são possíveis sem a linguagem.

De acordo com Dante (2008), a resolução de problemas como metodologia de ensino auxilia o estudante na apreensão de significados, estimulando-o no desenvolvimento do raciocínio lógico, a saber enfrentar novas situações, preparando o cidadão para vida.

Para Costa (2008), a resolução de problemas em sala de aula é uma habilidade pela qual o indivíduo externaliza o processo construtivo de aprender, de converter em ações, conceitos, proposições e exemplos adquiridos através da interação com professores, pares e materiais instrucionais.

> A Resolução de Problemas refere-se a qualquer atividade na qual tanto a representação cognitiva de experiência prévia e os componentes de uma situação problemática apresentada são reorganizados a fim de atingir um determinado objetivo (Ausubel, 1968 *apud* Costa, 2008, p. 194).

A resolução de problemas como estratégia metodológica de ensino contribui para a aprendizagem significativa, onde a busca da solução de qualquer problema envolve uma readaptação do resíduo da experiência prévia frente às novas situações a serem enfrentadas, na medida em que propicia reorganizar a informação ou o conhecimento armazenado na estrutura cognitiva do aluno. Costa (2008) reitera que, “o surgimento do “insight”, conforme a concepção de Ausubel, resulta de um processo de clarificação progressiva sobre relações de meio-e-fim fundamentada na formulação, verificação e rejeição de hipóteses alternativas”

Novak e Krajick (2006), consideram que a resolução de problemas além de proporcionar o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos, possibilita-os aplicar seus conhecimentos em novas situações. Sendo assim, essa metodologia pode ser utilizada pelo professor para verificar a aprendizagem de seus alunos, por requerer dos mesmos a aplicação dos conhecimentos em situações não familiares a eles, sendo esse um dos pressupostos da teoria da aprendizagem significativa.

Dewey (1910), aponta uma descrição formal das sucessivas etapas temporais envolvidas no pensamento. É geralmente consistente com a sequência de operações e as inter-relações sequenciais entre a aprendizagem receptiva e por descoberta, que foram delineadas como características das fases sucessivas da solução de problemas (Ausubel et al. 1980, p.478). São descritas em cinco etapas:

> 1º- um estado de dúvida, perplexidade cognitiva, frustação ou consciência da dificuldade;
> 2º- uma tentativa para identificar o problema, incluindo uma designação um tanto não específica dos fins procurados, das lacunas a serem preenchidas, ou alvo a ser alcançado, como definido pela situação que propõe o problema;
> 3º- relacionar estas proposições de colocação do problema à estrutura cognitiva, desta forma ativando ideias de fundo relevante e soluções de problemas previamente alcançadas; o que por sua vez é reorganizado sob a forma de proposições de solução de problemas ou hipóteses;
> 4º- comprovação sucessiva das hipóteses e reformulação do problema, se necessário;
> 5º- incorporação da solução bem-sucedida na estrutura cognitiva (compreendê-la) e sua posterior aplicação ao problema à mão e a outros tipos do mesmo problema.

A partir das características citadas por Ausubel et al. (1980) e Mendoza (2009), desenvolveu-se uma estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa, no qual utilizamos as etapas temporais do pensamento destacadas por Ausubel e as ações e operações da atividade de situações problema de Mendoza, o Quadro 14 descreve as ações e operações da resolução de problemas envolvendo as etapas temporal do pensamento.

Quadro 14 Ações e operações da resolução de problemas envolvendo as etapas temporal do pensamento.

Ações da ASP	Etapas temporal do pensamento	Operações
Compreender o problema	Um estado de dúvida; Identificar o problema	Ler o problema e extrair todos os elementos desconhecidos; estudar os dados e suas condições e determinar o(s) objetivo(s) do problema.
Construir o modelo matemático	Formular os dados e condições do problema, construir o modelo a partir das variáveis, incógnitas e condições	Determinar as variáveis e incógnitas; nominar as variáveis e incógnitas com suas unidades de medidas; construir o modelo matemático a partir das variáveis, incógnitas e condições e por último realizar a análise das unidades de medidas do modelo matemático.
Solucionar o modelo matemático	Comprovação sucessiva das hipóteses e reformulação do problema, se necessário	Selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo.
Interpretar a Solução	Incorporação da solução bem-sucedida na estrutura cognitiva (compreendê-la) e sua posterior aplicação ao problema à mão e a outros tipos do mesmo problema.	Interpretar o resultado; extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema; dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema; realizar uma

		reflexão baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema existindo a possibilidade de reformular o problema e assim construir novamente o modelo matemático, solucioná-lo e interpretar sua solução.

Fonte: a autora

A 1ª ação, "*compreender o problema*". Esta categoria está formada pelos parâmetros: ler o problema e extrair todos os elementos desconhecidos; estudar os dados e suas condições e determinar o(s) objetivo(s) do problema. Um estado de dúvida, perplexidade cognitiva, frustação ou consciência da dificuldade (está relacionada em Ler o problema e extrair os elementos desconhecidos); Uma tentativa para identificar o problema (está relacionado a determinar os dados e as condições), incluindo uma designação um tanto não específica dos fins procurados, das lacunas a serem preenchidas, ou alvo a ser alcançado (está relacionado em determinar os objetivos do problema). Portanto a 1ª e 2ª etapa descritas por Ausubel estão relacionadas a ação compreender o problema.

A 2ª ação é "*construir o modelo matemático*". *Nesta etapa* envolve estabelecer um plano para se chegar ao resultado, ou seja, o aluno terá que encontrar uma relação entre as informações fornecidas e a incógnita desse problema, no qual é necessário relacionar as proposições, variáveis e incógnitas, formular os dados e condições do problema, construir o modelo a partir das variáveis, incógnitas e condições. Relacionar estas proposições de colocação do problema à estrutura cognitiva, desta forma ativando ideias de fundo relevante [...] (relaciona-se aos parâmetros relacionar as proposições, variáveis e incógnitas, formular os dados e condições do problema, construir o modelo a partir das variáveis, incógnitas e condições). Portanto a 3ª etapa descrita por Ausubel está relacionada a ação construir o modelo matemático.

A 3ª ação, *"Solucionar o modelo matemático"*, está formada pelos parâmetros: selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo. [...] soluções de problemas previamente alcançadas; o que por sua vez é reorganizado (transformado) sob a forma de proposições de solução de problemas ou hipóteses; (parte da 3ª etapa relaciona-se ao parâmetro solucionar o modelo e a ação solucionar o modelo matemático).

A 4ª ação é "*interpretar a solução*", ela está formada pelos parâmetros: Interpretar o resultado obtido na solução do modelo; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com os objetivos do problema, a possibilidade de reformular o problema e solucionar se necessário; aplicar o problema em outras situações-problema. Comprovação sucessiva das hipóteses e reformulação do problema, se necessário; (está relacionada com o parâmetro interpretar o resultado obtido na solução do modelo, analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta [...]), incorporação da solução bem sucedida na estrutura cognitiva (compreendê-la) e sua posterior aplicação ao problema à mão e a outros tipos do mesmo problema. Está relacionada com o parâmetro aplicar o problema em outras situações-problema, ambos estão relacionados a ação interpretar a solução.

Em nossa proposta, o ponto de partida do ensino-aprendizagem de um conteúdo não é a definição, mas o problema, de forma que este expresse aspectos-chave desse conteúdo, levando o aluno a ultrapassar o problema em si e a refletir sobre conceitos generalizados a que ele possa conduzi-lo. Ausubel et al. (1980) enfatiza que o enunciado do problema deve ser claro e significativo ao aluno e, para que se compreenda o problema, é preciso ser capaz de perceber o significado que suas proposições comunicam.

Conforme argumenta Pozo (1998), a solução de problemas começa com a ativação dos conhecimentos prévios dos alunos, porém, ressaltasse que o problema deve ser significativo para o aluno. As proposições relativas ao problema consistem em aspectos relevantes do conhecimento prévio, as quais têm relação com o problema em questão, se os conhecimentos prévios existentes na estrutura cognitiva são claros, estáveis e diferenciáveis, facilitam na resolução de problemas, logo, deve-se averiguar os conhecimentos prévios dos estudantes.

Os conceitos aqui, serão abordados mediante a exploração de problemas, pois, o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Segundo Greca e Moreira (2003), o comportamento dos estudantes na resolução de problemas é guiado por hipóteses, analogias, metáforas, que dependem da conceitualização.

Para Vergnaud (1990, apud Greca e Moreira 2003), o conhecimento encontra-se organizado em campos conceituais de que o sujeito se apropria ao longo do tempo e que podem ser definidos como grandes conjuntos, informais e heterogêneos, de situações e problemas cuja análise e tratamento requerem diversas classes de conceitos, procedimentos e representações simbólicas inter-relacionados. A Figura 4 é o mapa conceitual da estratégia de resolução de problemas fundamentado na TAS.

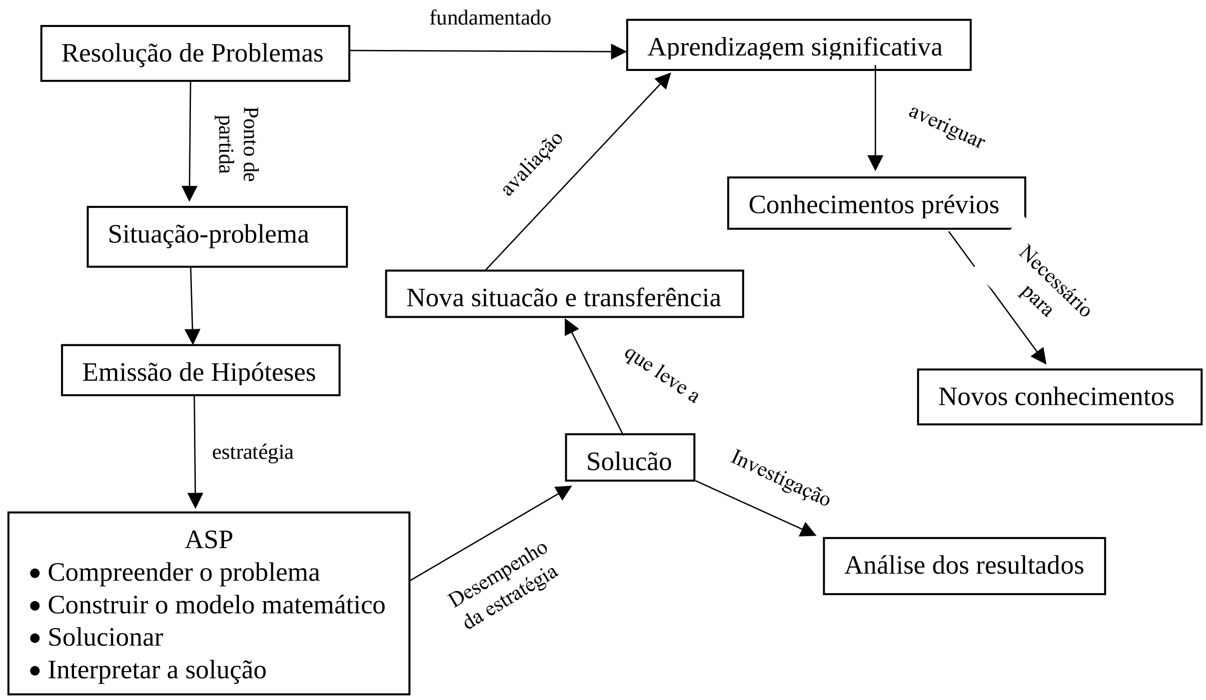


Figura 4- A estratégia de resolução de problemas, fundamentada na TAS.
Fonte: Elaborado pelo autor

Sendo assim, a estratégia de resolução de problemas reflete a influência do tipo de problema envolvido e as condições nas quais a resolução de problema ocorre, assim como aspectos do funcionamento cognitivo do indivíduo.

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

CAPÍTULO 3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, abordam-se os aspectos metodológicos da pesquisa, menciona-se o contexto e as características principais que facilitam a compreensão dos eventos. O primeiro tópico refere-se ao contexto da realização da pesquisa escolhida, como também se apresenta um breve histórico da instituição de ensino.

O segundo tópico deste capítulo aborda a caracterização geral da pesquisa no âmbito da utilização da estratégia de resolução de problemas (ERP) como metodologia de ensino, por meio das categorias e parâmetros criados para aplicar ao conteúdo de função e função afim. Explicita também, sobre a base fundamentadora do estudo, que se apoia na teoria da aprendizagem significativa, sujeitos participantes da pesquisa, enfatizando a seleção e outras informações que permite caracterizar o perfil dos discentes. Nos demais tópicos, foram descritos os procedimentos utilizados na coleta de dados, métodos de análises do objeto e a validade da pesquisa.

3.1 Contexto da Pesquisa

O Colégio Militar Estadual Cel PM Derly Luiz Vieira Borges (CME-PMRR), nasceu do desejo e reivindicações da comunidade roraimense, em especial da categoria de profissionais da Polícia Militar e do Corpo de Bombeiros, entidades vinculadas ao Governo do Estado de Roraima, no intuito de oferecer com legitimidade, qualidade e compromisso formação em nível de Educação Básica e Militar aos dependentes dos militares estaduais e a comunidade civil.

O Colégio Militar Estadual está localizado na Av. Getúlio Vargas nº4193, Canarinho, CEP: 69.306-530, na capital do estado de Roraima, Boa Vista. Foi criado pela Lei Complementar nº192, de 30 de dezembro de 2011, publicada no Diário Oficial do Estado nº1700 de 02 de janeiro de 2012, e Decreto de Criação nº13567-E (cita aqui referência legislação). A Instituição está autorizada a funcionar como estabelecimento de Educação Básica, sendo vinculada ao Sistema Estadual de Educação de Roraima e mantida pelo Governo Estadual de Roraima, mediante Termo de Cooperação Técnica com a Secretaria de Estado da Educação, Cultura e Desportos – SECD, e Secretaria de Estado da Segurança Pública – SESP. Desde 2012, mantém a modalidade de ensino fundamental regular, atendendo do 6º ao 9º ano, e atualmente o Ensino Médio.

Com relação ao espaço físico, o CME-PMRR ocupa os blocos D e E da Academia de Polícia Integrada – API. É toda murada, com um notável espaço interior e acomodações necessárias para o desenvolvimento das práticas didáticas educacionais. Sendo o espaço estrutural formado por 13 salas de aulas; biblioteca, sala de reforço, sala de leituras, sala do clube de Matemática, copa, cantina, refeitório, quadra de esportes, campo de futebol, 05 salas administrativas, gestão, coordenação pedagógica, sala de orientação educacional, secretaria, sala dos professores; 04 banheiros coletivos (02 masculinos e 02 femininos) e 01 almoxarifado.

O Colégio Militar tem como missão ministrar o ensino básico nos níveis: Fundamental II e Ensino Médio, na construção da cidadania responsável, através de uma prática educacional voltada para a compreensão da realidade social, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, aliada a uma disciplina transparente e consciente, que possa formar cidadãos críticos, reflexivos, solidários, capazes de compreender, analisar e intervir na realidade, visando ao bem estar do homem nos planos pessoais e coletivos.

3.2 Sujeitos da Pesquisa

O universo da pesquisa corresponde a 84 estudantes da 1ª série do Ensino Médio do CMEPM-RR, sendo estes distribuídos em 4 turmas, no turno vespertino. Com idades entre 15 e 16 anos, do sexo masculino e feminino, esses alunos são, na sua maioria dependentes de policiais militares e bombeiros da cidade de Boa Vista. Essas turmas de alunos foram escolhidas para desenvolver os conteúdos de função e função Afim, a escolha deu-se pelo fato destes conteúdos estarem previsto na grade curricular do ano de 2017, na disciplina de Matemática, com duração de 40h bimestrais, ao longo de dois bimestres totalizando assim 80h, no qual possibilitou o desenvolvimento da investigação.

3.3 Caracterização da Pesquisa

O ponto central da pesquisa consistiu na verificação da ocorrência de evidencias de aprendizagem significativa no conteúdo de funções, utilizando a ERP como metodologia de ensino, mediante a investigação de indícios desse tipo de aprendizagem, pois a metodologia precisa estar associada a uma teoria e desta forma ser concebida como um processo que organiza cientificamente a pesquisa (Ghedin & Franco, 2011).

No entanto, propõe-se estudar o efeito da prática teórica e metodológica sobre a aprendizagem dos estudantes, consideradas relevantes para assimilar o conceito de função, as quais puderam ser desenvolvidas e analisadas por suas características específicas. Em síntese, a pesquisa obteve duas dimensões para observação: a estratégia de ensino com foco na resolução de problemas e a análise da aprendizagem dos estudantes segundo os pressupostos da teoria de Ausubel.

Os objetivos da pesquisa serão evidenciados de forma explicativa, descrevendo as respostas dos fatos e acontecimentos das aulas teóricas, práticas e avaliação, que se dará por meio da coleta de informações por meio dos instrumentos escolhidos, mostrando, se e como, a estratégia metodológica utilizada, nos dá evidencias de aprendizagem significativa do conteúdo de funções.

Esta pesquisa buscou fazer uma combinação dos dados qualitativos e quantitativos, com o objetivo de inferir resultados explicativos mais consistentes. Conforme descreve Yin apud Bezerra (2014), tem crescido a atenção por parte dos pesquisadores às investigações dos métodos mistos, na qual o pesquisador mistura ou combina técnicas, métodos, abordagens, conceitos ou linguagem de pesquisa quantitativa e qualitativa em um único estudo (Bezerra, 2014).

Os procedimentos estão classificados como estudo de caso, relacionados com a assimilação das ideias conceituais de função e ao evento quantitativo em quase experimental, dividido em grupo experimental e grupo de controle. O grupo experimental tem um universo de 43 estudantes, no qual será trabalhado a ERP fundamentada na teoria de aprendizagem significativa e o grupo controle tem um universo de 41 estudantes que será trabalhado a metodologia tradicional, com aulas expositivas, em que os conteúdos encontram-se em sua forma acabada, com memorização de fórmulas e resolução de exercícios. De maneira geral, o desenvolvimento do estudo foi subdividido em quatro momentos - etapa experimental e controle, destacados para uma melhor visualização dos parâmetros de análise dos eventos.

3.3.1 1º Momento: Identificar a situação problema da didática de ensino do CME-PMRR.

Primeiramente, buscou-se identificar a situação problema enfrentada pelo professor ao ensinar o conteúdo analisado. Com frequência, a situação didática é apenas reconhecida como determinada pelo estudante e/ou a carência de recursos didáticos na escola, o que faz com que o professor não se sinta responsável pela solução e, por conseguinte, espera que a direção da escola ou as famílias dos estudantes tratem de resolver o problema. No entanto, é tarefa do professor como profissional da educação compreender em sua plenitude a situação e as condições em que o problema se apresenta, incluindo os elementos desconhecidos. O que não significa que deva atuar sozinho.

De acordo com o projeto político pedagógico (PPP) do CME-PMRR, a Matemática tem um papel formativo, contribuindo para o desenvolvimento de processos do pensamento e a aquisição de atitudes cuja utilidade e alcance transcendam o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas, gerando hábitos de investigação, proporcionando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. É importante lembrar que na escola existe uma biblioteca com livros de matemática, aos quais os alunos tem acesso para fazer consultas sobre os conteúdos ministrados pelos professores da disciplina, além disso, a escola não disponibiliza de laboratórios de informática, Física, Química, Biologia e Matemática, porém disponibiliza de uma sala de vídeo sendo este um espaço importante para subsidiar o trabalho docente. Essas informações fizeram-se necessárias porque o objetivo do problema didático se encontra sempre relacionado à aprendizagem, o que leva o professor a buscar outros meios para planejar suas aulas.

Identificou que a professor de Matemática das turmas da 1ª série do Ensino médio, atua há mais de vinte e cinco anos na docência e segundo sua afirmativa, ele utiliza a resolução de problemas apenas como exercício do livro didático, no final de cada conteúdo ministrado, desconhecendo as teorias de aprendizagem que possam dar suporte a sua prática de ensino. As atividades trabalhadas de situações problemas, buscaram assimilar os conceitos de função, a partir da resolução previamente elaboradas e com intenção de construir um significado mais próximo da realidade dos conceitos estudados.

3.3.2 2º Momento: Diagnosticar os Conhecimento Prévios dos Estudantes.

De acordo com Ausubel et al. (1980), devemos analisar os conhecimentos prévios dos alunos, averiguando aquilo que o aluno já sabe. Diante disso, realizou-se um diagnóstico (pré-teste), no qual foi aplicado uma prova de lápis e papel contendo três problemas, com objetivo de averiguar os conhecimentos e as dificuldades dos alunos relacionados ao conteúdo de função e posteriormente função afim. Buscou-se ainda, através destes problemas, analisar se os estudantes identificavam os objetivos dos problemas, mesmo que de forma implícita e, se utilizavam procedimentos próprios e/ou estratégias de resolução de problemas. O qual o diagnóstico foi utilizado como ponto de partida para o planejamento do professor.

3.3.3 3º Momento: Preparar o Plano de Ensino Considerando as Etapas do Processo de Assimilação.

Após a análise dos resultados do teste diagnóstico, o planejamento foi desenvolvido visando a organização sequencial do conteúdo segundo a TAS, enfatizando a importância da estrutura hierárquica conceitual do conteúdo de função e função afim, em consonância com o que defende Ausubel, sobre a melhor maneira para o desenvolvimento de conceitos, quando os elementos mais gerais, mais inclusos de um conceito são introduzidos em primeiro lugar e, então, o conceito é progressivamente diferenciado em termos de especificidades e detalhes. Esse estudo e planejamento ocorreu no primeiro semestre de 2017.

Entretanto, o planejamento foi elaborado observando as etapas da assimilação subordinada, com a colaboração da identificação dos conhecimentos prévios, incluindo os aspectos da ERP para resolver problemas, paralelamente, foram elaborados os instrumentos de observação. A coleta de dados realizou-se por meio dos instrumentos elaborados para serem analisados, estes são as provas, guias de observação e mapa conceitual. Por fim, analisamos os dados coletados para preparação do relatório final da pesquisa, que evidenciará os resultados alcançados com a aprendizagem, a partir da sequência didática.

3.3.4 4º Momento: Analisar e Elaborar o Relatório da Pesquisa

A análise discursiva, iniciará com os dados obtidos no teste diagnóstico de características descritiva e exploratória, formando uma correlação com os conhecimentos prévios e as novas ideias do conteúdo de função. Na fase mediadora, observará a elaboração explicativa do efeito da ERP com base nas análises dos problemas realizados durante o período selecionado, de acordo com as características essenciais e a definição dos conceitos, verificando assim se houve indícios de aprendizagem significativa. O teste final proporcionará a análise da transferência do conteúdo estudado em outros contextos, verificando os conceitos assimilados pelos alunos nas aulas, dispostos nos problemas selecionados.

3.4 Procedimentos de Análise

Os procedimentos de análises foram desenvolvidos em duas perspectivas, quantitativa e qualitativa. Por um lado, a análise quantitativa utilizou-se da estatística descritiva, com o intuído de analisar a efetividade da ERP como metodologia de ensino, fundamentada na TAS. E por outro lado, os procedimentos da prática de cunho qualitativo da descrição do processo da prática metodológica e o processo das ações executadas pelos estudantes. Portanto, através do enfoque misto demonstra-se uma relação das análises qualitativas das ações como resultados de desempenho por indicadores quantitativo das ações.

3.4.1 Enfoque Misto

Para (Sampieri, 2006), os métodos mistos representam um conjunto de processos sistemáticos críticos de pesquisa e implicam a coleta ou análise de dados quantitativos e qualitativos, assim como sua integração e discussão conjunta, para realizar inferências como produto de toda a informação coletada (meta-inferências) e conseguir um maior entendimento do fenômeno em estudo.

A opção por análise mista se deve a possibilidade de estabelecer a relação entre dois ou mais conceitos, métodos, teorias, categorias ou variáveis inseridas no contexto estudado. A partir de então, foi possível a formulação das hipóteses descritiva e explicativa expressas na pesquisa:

Hipótese 1: A estratégia de resolução de problemas a partir dos pressupostos da teoria de Ausubel produz aprendizagem significativa das ideias conceituais de funções.

Hipótese 2: A aplicação de sistema de ações da ERP em funções mostrará indícios de aprendizagem significativa dos estudantes.

Nesta pesquisa foram feitas análises do desempenho dos estudantes, com relação aos problemas propostos nas atividades e nos testes, buscando explicações fundamentadas na teoria da aprendizagem significativa no processo de assimilação do conceito de função, no qual será utilizada como estratégia de ensino a ERP visando englobar os conteúdos envolvidos para o ensino e aprendizagem de função.

Por meio da análise qualitativa das ações dos problemas solucionados pelos estudantes e de acordo com o desempenho alcançado, será verificado os resultados dos estudantes (sujeito da pesquisa), de maneira detalhada, demonstrando assim, a transparência das ações realizadas.

Inicialmente, a hipótese analisada foi a de característica descritiva, usada para averiguar os conhecimentos prévios dos estudantes, utilizando como recurso o pré-teste. Posteriormente, durante a investigação, nos detivemos na hipótese explicativa com objetivo de conhecer o efeito da ERP no desenvolvimento da aprendizagem dos conceitos de função assimilada pelos estudantes. Assim sendo, com base nas análises dos dados coletados do pré-teste, exposição oral e descritiva de trabalhos e pós-testes obteve-se os resultados.

Assim, também foram valorizadas as anotações do diário de pesquisa, da observação direta realizada no contexto da sala de aula, com relação a explanação das aulas práticas por meio dos problemas solucionados baseados em definições e conceitos do conteúdo de função. Ainda, transcreveu-se as atividades e as provas realizadas pelos estudantes, obedecendo a seguinte ordem, primeiramente, de forma qualitativa e posteriormente quantitativa, seguindo ambas para a fase inferencial das discussões independentes. Logo, os resultados foram apresentados pela explicação comparativa dos dois enfoques. A organização da problemática da pesquisa se desenvolveu no âmbito qualitativo triangulando com o quantitativo, possibilitando a compreensão da aprendizagem dos estudantes no conteúdo de função, de modo a examinar a efetividade da aprendizagem amparada nestes enfoques, conforme a Figura 5.

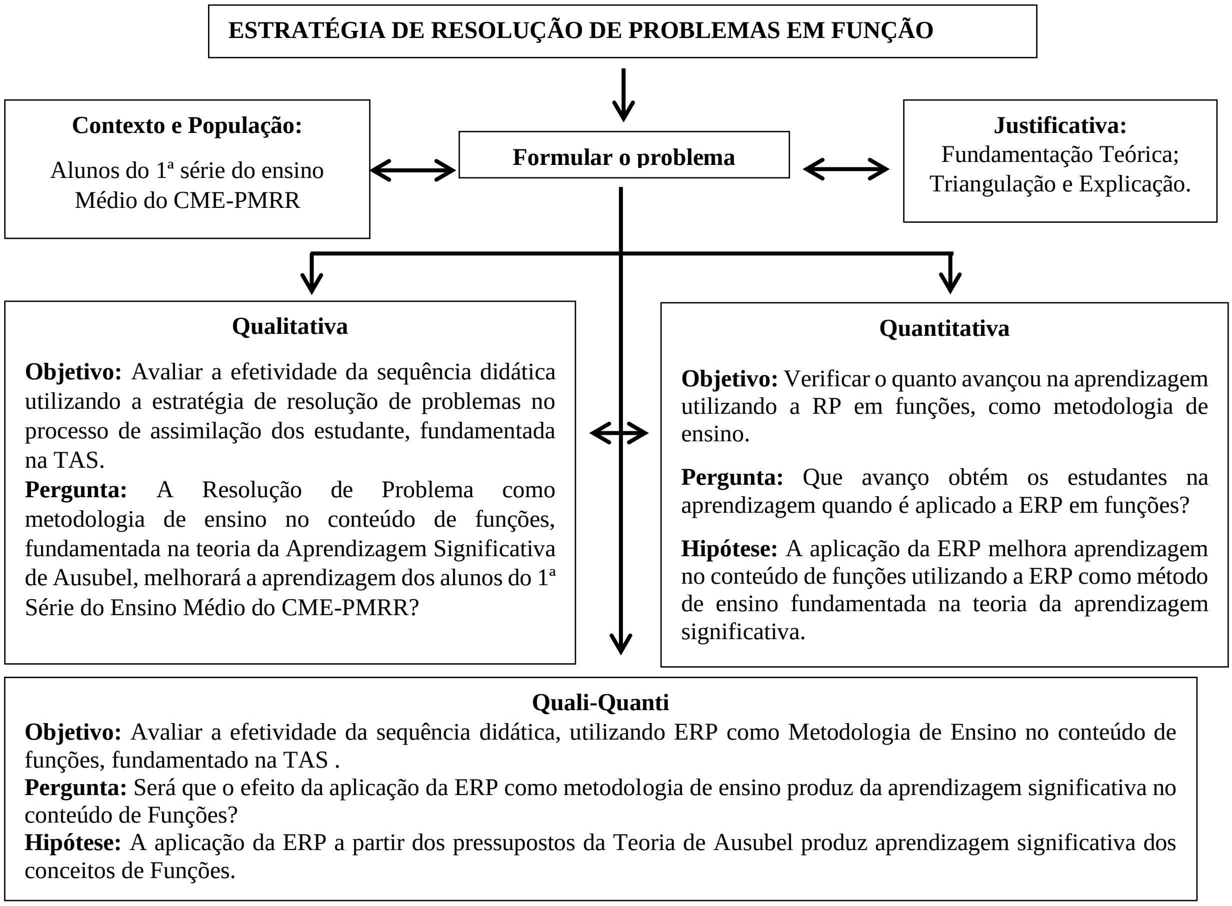


Figura 5- Esquema usado na análise da problemática da pesquisa.
Fonte: Sampieri, (2006), adaptação.

A ideia de realizar uma triangulação dos dados entre os métodos, teoria e resultados foi de forma imprescindível, para proporcionar a esta pesquisa maior veracidade dos resultados. Portanto, do enfoque qualitativo da pesquisa, realizar-se-á a análise do processo envolvido, para conhecer as características da assimilação dos alunos nas ideias conceituais por meio da ERP, com objetivo de identificar indícios de aprendizagem significativa destes conceitos.

3.4.2 Enfoque quantitativo

A pesquisa quantitativa procura estudar os fenômenos de interesse da pesquisa em educação, geralmente através de estudos experimentais ou correlacionais, caracterizados primordialmente, por medições objetivas e análises quantitativas (Moreira 2011, p.18).

O objetivo desta pesquisa é analisar a efetividade da estratégia de resolução de problemas (ERP) como metodologia de ensino fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. Para isso, 84 estudantes da 1º série do Ensino Médio do Colégio Militar CME-PMRR, distribuídos em quatro turmas, no turno vespertino, com idades entre 15 e 16 anos, foram submetidos a essa metodologia (grupo experimental) e a metodologia tradicional (grupo controle) para desenvolver os conteúdos de função e função afim. Do total da amostra, 43 estudantes (turmas B e D) fizeram parte do grupo experimental e o restante (n=41) congregaram o grupo de controle (turmas A e C).

Aos dois grupos do estudo (experimental e controle) foram aplicadas quatro provas de lápis e papel: i) duas provas antes do início da formação do conteúdo (_PRE) para avaliar o conhecimento prévio dos estudantes, sendo um pré-teste antes do início do conteúdo de funções e um pré-teste antes do início do conteúdo de funções afim; e ii) duas provas no final da formação do conteúdo para cada uma das metodologias (_POS) para avaliar a efetividade da metodologia ERP *vis-a-vis* a metodologia tradicional. Cada uma dessas duas provas refere-se ao conteúdo abordado: funções e funções afim; e apresentava três problemas que foram avaliados em quatro dimensões: 1) Compreender o problema; 2) Construir o modelo matemático; 3) Solucionar o modelo matemático; e 4) Interpretar a solução. Cada uma dessas dimensões foram avaliadas com escores de 1 a 5, conforme instruções que constam na tabela 1.

Tabela 1- Avaliação qualitativa dos problemas das provas de lápis e papel sobre o conteúdo de função e funções afim**.**

Variável Independente "X" orientação do sistema de ações da Resolução de Problemas	
Variável Dependente "Y" Desempenho na Resolução de Problemas	
Definição Conceitual: É a capacidade dos alunos de resolver problemas e fazer transferências para situações problema novas	
Definição Operacional: É a diferença de desempenho comparando um ponto inicial com outro, a fim de resolver problemas e estabelecer transferências para situações problema novas.	
Dimensão	Descrição
Y_1	Desempenho de compreender o problema
Y_2	Desempenho de construir o modelo
Y_3	Desempenho de solucionar o modelo
Y_4	Desempenho de interpretar a solução
Medição: Para designar o resultado quantitativo a cada dimensão (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) será utilizado uma escala de 1 até 5 pontos com o critério: • Se todos os indicadores estão incorretos obterá a qualificação de um (1). • Se o indicador essencial está incorreto ou parcialmente correto e/ou existe pelo menos outro indicador parcialmente correto obterá a qualificação de dois (2). • Se o aluno tem somente correto o indicador essencial obterá a qualificação de três (3). • Se o indicador essencial está correto, mas existe pelo menos outro indicador parcialmente correto obterá a qualificação de quatro (4). • Se todos os indicadores estão corretos obterá a qualificação de cinco (5).	
Dimensão	Indicador
Y_1	a) O aluno extrai os dados do problema? b) O aluno determina as condições do problema? c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema?
Y_2	a) Determinar as variáveis e incógnitas. b) Nominar as variáveis com suas características. c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e condições. d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático e critério de aprovação.

Y_3	a) Selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático. b) Solucionar o modelo matemático.
Y_4	a) Interpretar o resultado. b) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema. c) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema. d) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; Analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.

Nesse sentido, conforme podemos visualizar na Tabela 1, existem quatro variáveis de interesse (dependentes), podendo ser criada uma quinta, que mensura o desempenho geral do aluno no problema ($Y_5 = Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$). O desempenho do aluno em cada prova é mensurado pelo desempenho que ele obteve nos três problemas. Assim, podemos ter uma avaliação de desempenho (Y_n), mensurada quantitativamente, antes (_PRE) e após (_POS) a formação do conteúdo, para cada um dos conteúdos lecionados (funções e funções afim) e no geral (funções + funções afim), segregada para cada um dos grupos do estudo (experimental *versus* controle) e no total. Dessa forma, as variáveis da pesquisa se resumem como proposto na Tabela 2.

Tabela 2- Codificação das variáveis da Pesquisa

Código	Descrição
TURMA	Turma do aluno (A, B, C ou D)
GRUPO	Grupo experimental ou controle
CONTEUDO	Função e função afim
Y1_PRE	Compreender o problema (Pré-teste)
Y2_PRE	Construir o modelo matemático (Pré-teste)
Y3_PRE	Solucionar o modelo matemático (Pré-teste)
Y4_PRE	Interpretar a solução (Pré-teste)
Y1_POS	Compreender o problema (Pós-teste)
Y2_POS	Construir o modelo matemático (Pós-teste)
Y3_POS	Solucionar o modelo matemático (Pós-teste)
Y4_POS	Interpretar a solução (Pós-teste)
Y5_PRE	Escore geral (Pré-teste)
Y5_POS	Escore geral (Pós-teste)

3.4.2.1 Metodologia

Inicialmente, analisou-se a fidedignidade do instrumento de medida (Y_n). Segundo (Pasquali, 2010), a fidedignidade se refere a quanto os escores de um sujeito se mantêm idênticos em ocasiões diferentes. Essa ocorrência evidentemente supõe que o traço que o teste mede se mantenha constante sobre diferentes ocasiões. “Assim, o conceito de fidedignidade, na verdade, se refere ao quanto o escore obtido no teste se aproxima do escore verdadeiro do sujeito em um traço qualquer” (Pasquali, p. 194, 2010). Em termos estatísticos a precisão da fidedignidade é verificada pelo menos de três formas:

- *Teste-reteste:* consiste em calcular a correlação entre as distribuições de escores obtidos em um mesmo teste pelos mesmos sujeitos em duas ocasiões diferentes de tempo;
- *Formas paralelas:* os sujeitos respondem a duas formas paralelas (alternativas) do mesmo teste e correlação entre esses testes é obtida para verificar a precisão da fidedignidade;
- *Consistência interna (confiabilidade):* é procedida através de medidas estatísticas, tal como o Alfa de Cronbach, que visam verificar a homogeneidade da amostra de itens do teste.

Na presente pesquisa, como tem-se o teste diagnóstico antes (_PRE) e após (_POS) a formação do conteúdo é possível calcular a precisão *Teste-reteste* para cada um dos conteúdos, assim como, a partir do conjunto de itens (problemas em cada uma das dimensões) dos testes, computar a *Consistência interna* (Alfa de Cronbach) do instrumento em cada um dos conteúdos. Nesse último caso basta o cálculo do Alfa de Cronbach para o teste de diagnóstico antes (_PRE) da formação do conteúdo[1].

Num segundo momento, começou-se por fazer uma análise descritiva, essencialmente, pela visualização dos escores das variáveis Y_n através de gráficos de barras agrupados pelos testes diagnósticos antes/depois e os grupos controle/experimental. Assim, em termos preliminares, ter-se-ia uma discussão da distribuição dos escores entre os grupos e testes diagnósticos e alguns indícios sobre a direção da média dos escores (maior/menor).

Antes da visualização gráfica, para os escores serem comparáveis entre os conteúdos, transformou-os para a base 100 tendo como limite inferior o valor zero[2], ou seja, cada escore (Y_n) passou a ser um “coeficiente de rendimento”. Por exemplo, um escore de 75 indica que o aluno obteve 75% dos “pontos” distribuídos no teste (pré ou pós), no conteúdo (funções,

---

1 Como veremos adiante, os pré-testes serviram como variável controle (X) nas regressões lineares executadas e os pós-testes (Y_n) foram as variáveis dependentes. Se houver erros de medidas na variável dependente não teremos muitos problemas (perca de eficiência), no entanto, caso haja erros de medidas nos X’s pode-se-ia incorrer em vieses. Por isso, um cuidado maior com a mensuração das variáveis independentes.

2 De cada escore subtrai-se o mínimo possível de obter no conteúdo/teste/dimensão e divide-se o valor pelo máximo de se obter menos o mínimo, e depois, multiplica 100: {[(Escore – $Mín_{Escore}$) / ($Máx_{Escore}$ – $Mín_{Escore}$)] x 100}. Por exemplo, em qualquer dimensão, por teste e conteúdo, o máximo que o aluno pode tirar é um escore de 15 (5 x 3 problemas) e o mínimo um escore de 3 (1 x 3 problemas), assim, se o aluno tirou um escore de 12 ele obteve um aproveitamento de 75% = {[(12 – 3) / (15 – 3)] x 100}.

funções afim, ou todo conteúdo) ou na dimensão (Y_n). Esses escores padronizados na base 100 permaneceram nas análises seguintes[3].

Finalmente, em termos inferenciais, no mínimo três abordagens poderiam ser adotadas: 1) computar as diferenças entre os escores dos testes após e antes a formação do conteúdo (Y_n_POS – Y_n_PRE) e aplicar testes de médias entre os dois grupos (controle e experimental) para cada um dos conteúdos e/ou todo o conteúdo; 2) considerar os três conteúdos simultaneamente como amostra repetida de um mesmo indivíduo e rodar cinco modelos linear generalizado misto – GLMM – (um para cada dimensão Y_n) com efeitos aleatórios (nas turmas, por exemplo) tendo a diferença dos escores (Y_n_POS – Y_n_PRE) como variável dependente e conteúdo e grupo como fatores fixos[4]; ou 3) cinco regressões lineares múltiplas, uma para cada Y_n_POS como variável dependente, em cada um dos conteúdos ou todo conteúdo, com a variável grupo como fator (variável binária com 0 para o grupo controle e 1 para o grupo experimental) e a Y_n_PRE como covariável.

Optou-se pela última abordagem em detrimento da abordagem mais simples do teste de médias, pois quando se executam pré e pós-testes deseja-se controlar ou remover o efeito do pré-teste para poder perceber possíveis alterações devido a intervenção feita. A utilização de diferenças de escores não permite isso, uma vez que o pré-teste está geralmente correlacionado ao resultado (diferença) e assim a variação nos valores do pré-teste não é removida (Dancey & Reidy, p.435, 2013). Em geral, a ANCOVA[5] tende a fornecer um teste mais poderoso de hipóteses do que a diferença de escores. Optou-se pela última abordagem em detrimento da segunda abordagem (GLMM), pois nessa abordagem mais complexa ter-se-ia os resultados agregados e na ANCOVA a possibilidade de detalhar os resultados por conteúdo[6].

Assim, os k modelos estimados foram:

$$Y_n\_POS_{ik} = \alpha_k + \beta_{1k}GRUPO_{ik} + \beta_{2k}Y_n\_PRE_{ik} + u_{ik}$$

Onde, Y_n_POS representa o escore padronizado na base 100 no pós-teste do aluno i no conteúdo k (funções, funções afim ou todo conteúdo); GRUPO é variável *dummy* que capta o efeito diferencial do grupo experimental (GRUPO = 0 se controle e GRUPO = 1 se

3 Como a transformação é linear os resultados estatísticos não mudariam caso optasse pelos escores originais. A padronização é apenas uma questão de conveniência e interpretação.
4 Ou Y_n_POS como variável dependente e conteúdo e grupo como fatores fixos e a variável Y_n_PRE como covariável.
5 A abordagem três também é conhecida na literatura como ANCOVA (Análise de Covariância).
6 Na verdade, executamos as três abordagens e os resultados foram os mesmos. Isso será fácil de constatar adiante, pois as significâncias (rejeição das hipóteses de igualdade entre os grupos) foram altas o suficiente ao ponto de não mudar dependendo da abordagem utilizada.

experimental); Y_n_PRE é a variável que busca controlar os efeitos diferenciais individuais entre os grupos (controle *versus* experimental) através dos escores padronizados na base 100 do pré-teste; α é a constante/intercepto de cada modelo k; β_1 e β_2 são os coeficientes/parâmetros estimados no modelo k para os efeitos marginais do grupo experimental e uma unidade adicional no escore do pré-teste, respectivamente; u_{ik} representa os resíduos, para cada aluno i, nas regressões k, onde não se assume homogeneidade nem normalidade, pois os erros-padrão (IC = 95%) dos parâmetros da regressão foram estimados por *bootstrap* (n=1.000), com variâncias estratificadas pela variável TURMA e corrigidos para viés (Bca)[7].

3.4.3 Enfoque Qualitativo

A pesquisa qualitativa segundo Bogdan e Biklen (1994), tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. Este deve estar em contato direto com o ambiente e a situação a ser investigada, uma vez que, as situações onde os fenômenos ocorrem são muito influenciadas pelo contexto (Redling, 2011 p. 86).

Tomando como base o enfoque qualitativo, procurou-se obter informações dos estudantes no desenvolvimento do processo de aprendizagem, de modo geral foram conceituados os termos teóricos como explicação dos resultados da assimilação dos conceitos de função, que auxiliaram no entendimento das situações, eventos e contextos da pesquisa, fundamentados na aprendizagem significativa.

Por conseguinte, as características do sistema de ações por meio da ERP são aportes para a análise do desempenho da aprendizagem significativa de funções na dimensão das etapas do processo de assimilação. Com isso, objetivou-se constituir um conjunto de *constructos* (conceitos), definições e proposições inter-relacionados, que apresentam uma visão sistemática da direção do ensino, especificando relações entre variáveis com o propósito de explicar e questionar os fenômenos (Sampieri, 2006, p. 71).

As ferramentas de compreensão a serem analisadas na aprendizagem de funções serão apresentadas em três níveis, cada nível possui critérios particulares de operações e ações, que se convertem em categorias de análises, direcionadas no contexto da pesquisa na assimilação das ideias do conteúdo de funções e suas aplicações, conforme a descrição das categorias a seguir apresentadas:

- Nível I: operações adaptadas a partir do método de Mendoza (2009);

---

7 Independentemente se assumíssemos a hipótese de normalidade e homogeneidade dos resíduos os resultados seriam os mesmos, uma vez que o teste de Levene não rejeitou a homogeneidade em todos os modelos e, apesar de não se verificar normalidade na maioria dos modelos, pelo teste Shapiro-Wilk, ela não foi exacerbada ao ponto de colocar em cheque os testes de hipóteses. Mais uma vez, os altos valores das significâncias (estatística t dos parâmetros dos modelos estimados) corroboram esse argumento.

- Nível II: elementos do método de Polya;
- Nível III: Assimilação do conceito de função fundamentado na teoria da aprendizagem significativa.

Todas as categorias direcionam-se para o contexto da investigação da assimilação do conceito de função, conforme o quadro 15.

Quadro 15- Níveis de Categorias Qualitativas

Nível I **Definição Operacional (quali)**	**Nível II** **Ações**	**Nível III** **Assimilação do conceito de função**
a) Ler o problema e extrair os elementos desconhecidos; b) Determinar as condições do problema c) Definir o(s) objetivo(s) do problema d) Estudar e compreender os elementos desconhecidos	Compreender o problema	Aprendizagem de funções por meio da ERP, fundamentado na teoria de aprendizagem significativa.
a) Relacionar as proposições, variáveis e incógnitas; b) Formular os dados e condições do problema; c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.	Construir o modelo matemático	
a) Solucionar o modelo matemático.	Solucionar o modelo matemático	
a) Interpretar o resultado obtido na solução do modelo; b) Analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com os objetivos do problema, a possibilidade de reformular o problema e solucionar se necessário. c) Aplicar o problema em outras situações problema.	Interpretar a solução	

Os dados da categoria do Nível I enfatizarão a definição operacional dos estudantes quanto a compreensão do problema e os conceitos envolvidos. No Nível II subsidiaram as ações da estratégia de resolução de problemas. No nível III o processo de assimilação subordinada compôs-se em cinco etapas, onde o professor conduz as atividades por meio da diferenciação progressiva e reconciliação integradora em cada uma dessas etapas, averiguando através das ações e operações da ERP, como está o desenvolvimento do estudante durante todo o processo. Verificando durante o processo em que as etapas estão sendo trabalhadas, a formação do conceito de função e suas propriedades essenciais, partindo do geral para o particular e do particular para o geral, averiguando se os alunos apropriam-se das propriedades essenciais do conceito e fazem a correspondência obedecendo a hierarquia conceitual.

3.4.4 Estudo de Caso

Hernandez et al apud Mendoza (2006), define o estudo de caso como pesquisa que utilizam processos de investigação quantitativa, qualitativa ou mista, analisando profundamente uma unidade para responder o problema da pesquisa, provar hipóteses e desenvolver alguma teoria. Nesta investigação, 84 estudantes constituíram um estudo de caso múltiplo ou coletivo, com o fim de esclarecer quais são as variáveis que mais influenciam na aprendizagem significativa, quando se utiliza a ERP como metodologia de ensino. Moreira (2011), ressalta sobre o estudo de caso interpretativo, sendo este uma metodologia ideal para fundamentar uma teoria, a partir de dados descritivos muito ricos.

> Estudo de caso interpretativo contêm descrições ricas e densas; porém, os dados descritos são utilizados para desenvolver categorias conceituais ou para ilustrar, defender ou desafiar pressupostos teóricos difundidos antes do estudo. O pesquisador deve reunir tanta informação sobre o objeto de estudo quanto seja possível, com a pretensão de interpretar ou teorizar sobre o fenômeno (Moreira, 2011, p.88).

Portanto, esta pesquisa apresenta resultados qualitativos e quantitativos da aprendizagem de funções, no qual foram aplicados instrumentos contendo elementos qualitativos e posteriormente, elabora-se as variáveis quantitativas. Desse modo, a investigação contou com a estratégia de coleta de dados (testes e relatórios) para o estudo do caso principal, recorrem aos levantamentos descritivos e às técnicas quantitativas para analisar os dados sobre as unidades integradas.

3.5 Instrumentos e coleta de dados

Definimos como instrumento de coleta de dados, os mecanismos usados para recolher informações quanto à aprendizagem dos estudantes, nesta pesquisa, a coleta e a análise de dados para responder às questões ou problema da pesquisa e testar a hipótese estabelecida previamente, se dará por meio da observação direta e participativa, provas de lápis e papel e mapa conceitual, com o objetivo principal de buscar evidencias de aprendizagem significativa quando se utiliza a estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino fundamentada na teoria de Ausubel. Esta estratégia foi aplicada durante o processo de ensino do conteúdo de função e posteriormente de função afim, logo os instrumentos e coleta de dados foram realizados durante a ministração dos dois conteúdos.

De acordo com a TAS, é necessário averiguar os conhecimentos prévios dos estudantes antes da introdução do conteúdo, com isso foi realizado uma avaliação diagnóstica (nas quatro turmas), no conteúdo de funções mediante associação de palavras, onde a palavra função estará escrita no centro da folha e os estudantes irão escrever tudo que eles compreendem do significado de função em matemática. Posteriormente, os estudantes das quatro turmas foram submetidos a uma prova de lápis e papel que contém três problemas, sendo que por meio deste pré-teste (um pré-teste para o conteúdo de função e outro no conteúdo de função afim), foi averiguado os conhecimentos prévios dos estudantes e o desempenho na resolução de problemas.

Na fase formativa será avaliado todo o processo da sequência didática por meio da observação direta e participativa realizada nas quatro turmas, no qual as duas turmas experimentais foram submetidas a estratégia de ensino fundamentada na teoria de aprendizagem significativa e as duas turmas de controle foram submetidas ao método tradicional, com exposição de conteúdos em sua forma acabada e a resolução de problemas no final do conteúdo ministrado. Durante o desenvolvimento das atividades, onde ocorre a mediação do professor e pesquisador, em alguns momentos, é necessário que o aluno manipule e organize informações, construa tabelas, elabore relatórios e faça outros tipos de anotações além da apresentação das soluções dos problemas que tenham sido produzidos durante a atividade. Essas produções dos estudantes durante as atividades foram recolhidas e fizeram parte das análises.

O pós-teste (um pós-teste no final do conteúdo de função e outro no final do conteúdo de função afim) foi realizado com as quatro turmas com o intuito de averiguar a assimilação do conteúdo de função e funções afim e se o estudante transfere este conhecimento adquirido em outros contextos. No final do conteúdo de função, os estudantes fizeram um mapa conceitual, cujo objetivo era analisar os conceitos e as relações conceituais após a aprendizagem do conteúdo de função. Esses instrumentos foram aplicados de acordo com as etapas de assimilação subordinada por meio das avaliações diagnósticas, formativa e final, conforme a quadro 16.

Quadro 16- Instrumentos de Coleta de Dados

INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS APLICADOS AS ETAPAS DE APRENDIZAGEM				
Avaliação Diagnóstica	**Avaliação Formativa**			**Avaliação Final**
conhecimentos prévios.	Etapa 1 Aquisição do conceito de Função	Etapa 2 Retenção Inicial do conceito de Função	Etapa 3 Retenção Posterior do conceito de Função	Etapa 4 Assimilação Obliteradora
Prova de lápis e papel (Diagnóstico)	Intervenção Atividades e Observação	Intervenção Atividades e Observação	Intervenção Atividades e Observação elaboração do mapa conceitual	Prova de lápis e papel (Pós-teste)
Objetivo: obter informação sobre o conhecimento prévio do estudante	Objetivo: analisar o processo de ensino aprendizagem dos alunos no conteúdo de função e função afim, a partir da estratégia de resolução de problemas e dos pressupostos teóricos da aprendizagem significativa.			Objetivo: analisar a efetividade da ERP, buscando evidência de aprendizagem significativa

A observação direta tem sido considerada essencial para pesquisa proposta, a qual tem como intuito a obtenção de dados descritivos do contexto da pesquisa nas turmas, fazendo uso de relatórios das aulas com a finalidade de compreender os processos e as relações diretas e indiretas observadas na aplicação do método e da fundamentação teórica, como também, a identificação de possíveis problemas que permitiram gerar hipóteses para apoiar o desenvolvimento do processo. As provas de lápis e papel, foram utilizadas nesta pesquisa para permitir conhecer o processo de aprendizagem minuciosamente descrita e identificar o desempenho alcançado pelos estudantes na aprendizagem do conceito de função e função afim, por meio da resolução de problemas matemáticos. A Figura 6, nos ilustra como acontecerá a coleta de dados durante a investigação.

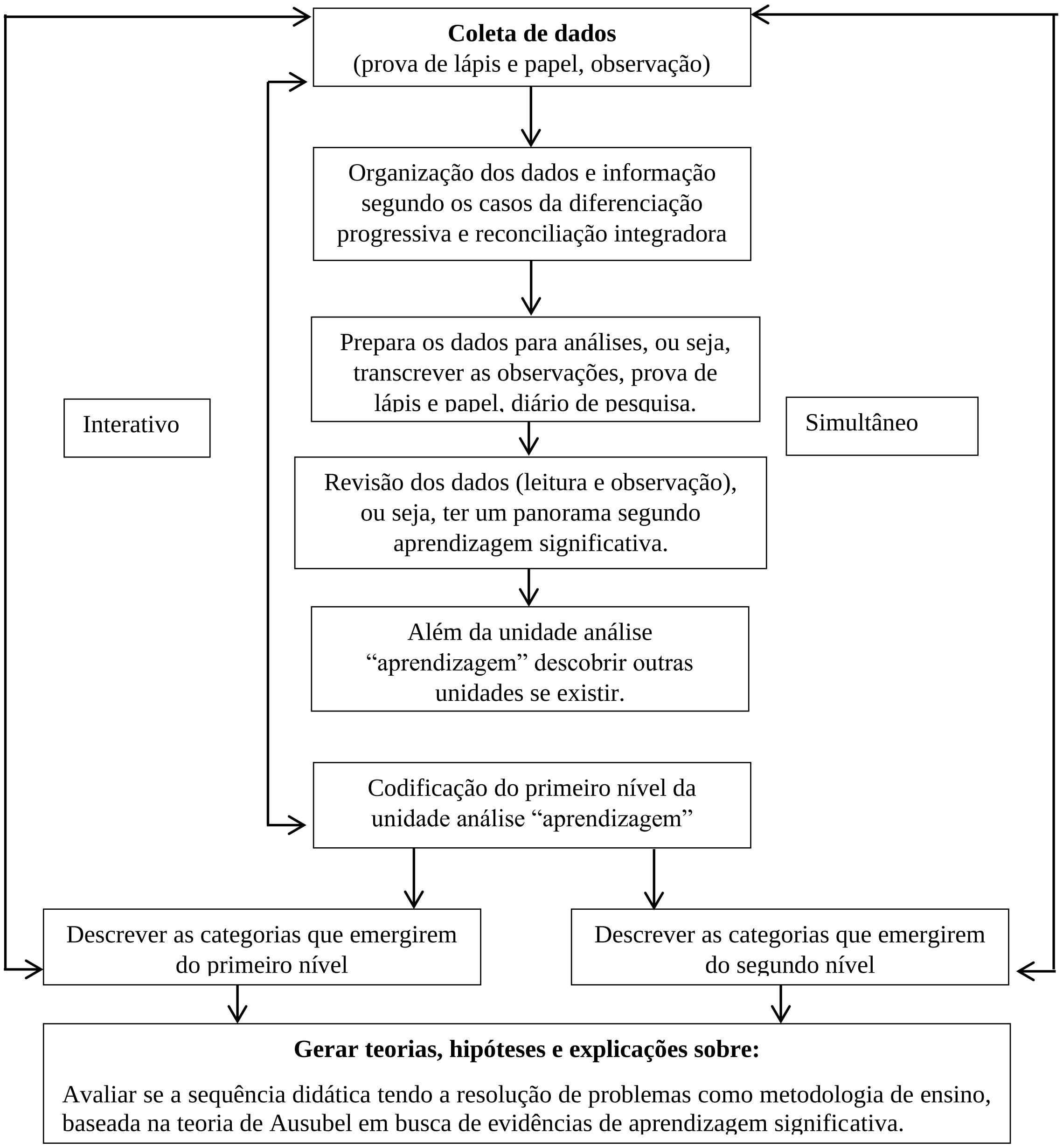


Figura 6- Coleta de dados. Fonte: Sampiere (2006), adaptação.

Após a revisão, os dados serão apresentados no aspecto consolidado da execução das ações, transcritos para um formulário de análise descritiva.

3.5.1- Observação

Durante o desenvolvimento da pesquisa os estudantes foram observados através do acompanhamento presencial da professora e pesquisadora durante a realização das atividades dos estudantes em classe.

Os registros e dados coletados no formulário de observação foram transformados em relatos sistematizados e relacionado com as aulas práticas, investigando, gradativamente, onde os resultados observados são descritos qualitativamente. Utilizou-se provas de lápis e papel, mapas conceituais, que favoreceram a produção de informações do processo de aprendizagem dos estudantes, de forma rigorosa e minuciosa. Por outro lado, foi elaborado guias de observação de forma que possa averiguar as etapas do processo de assimilação, buscando indícios de aprendizagem significativa e as estratégias de resolução de problemas utilizado pelos estudantes.

A intenção fundamental com a observação, tem sido obter dos sujeitos seus significados no processo de aprendizagem, sendo a observação um elemento fundamental para avaliar a efetividade da sequência didática durante todo o processo.

3.5.2 Prova de Lápis e Papel

A prova de lápis e papel é uma técnica avaliativa, sendo que na avaliação diagnóstica, teve como objetivo verificar os conhecimentos prévios dos estudantes na resolução de problemas, para posteriormente iniciar o conteúdo de funções.

A avalição a ser realizada principalmente por meio das provas de lápis e papel, terá caráter qualitativo e quantitativo que englobam as dimensões da ERP em Matemática e o processo de assimilação da teoria de aprendizagem significativa de Ausubel. Na pesquisa foram analisadas quatro provas de lápis e papel: duas diagnóstica (uma antes de introduzir o conteúdo de função, e outra antes de introduzir o conteúdo de função afim) e duas final (uma no final do conteúdo de função e outra no final do conteúdo de função afim), em que buscou-se informações da aprendizagem dos estudantes durante a investigação.

A análise da prova de lápis e papel foi realizada a partir dos parâmetros e categorias da ERP. Primeiramente, faz-se uma análise qualitativa descritiva e, posteriormente uma avaliação quantitativa através dos pontos atribuídos a variável Y (aprendizagem) de 1 a 5, da percepção dos fatores que influenciaram a aprendizagem e para determinar o valor quantitativo dos indicadores alcançados.

Para indicar o resultado quantitativo foi utilizado a cada dimensão (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) demonstrado na tabela 2, para os indicadores de cada ação realizada pelo estudante, uma escala de 1 até 5 pontos com o critério:

- Se todos os indicadores da ação estão incorretos obterá a qualificação de um (1);
- Se o indicador essencial da ação está incorreto ou parcialmente correto ou existe pelo menos outro indicador parcialmente correto obterá a qualificação de dois (2);
- Se o estudante tem somente correto o indicador essencial da ação, obterá a qualificação de três (3);
- Se o indicador essencial da ação está correto, mas existe pelo menos outro indicador parcialmente correto obterá a qualificação de quatro (4);
- Se todos os indicadores da ação estão corretos obterá a qualificação de cinco (5).

Portanto, análise do desempenho dos estudantes, destacam-se conforme o parâmetro do indicador essencial e demais indicadores não essenciais, os quais determinam os valores alcançados no desempenho das ações, correspondente as operações realizadas na resolução dos problemas. A composição do quadro 17, representa os elementos das ações e as análises foram realizadas com base nas características das ações realizadas.

Quadro 17-Instrumento de Análise da Solução dos Problemas

<table>
<tr><td rowspan="12"></td><td colspan="2">Categoria: Compreender o problema</td><td rowspan="2">Indicador Essencial</td><td rowspan="2">Valor alcançado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a) Ler o problema extrair todos os elementos desconhecido</td><td>Caraterísticas</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">c)</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>b) O aluno determina as condições do problema</td></tr>
<tr><td>c) O aluno define o(s) objetivo(s) do problema.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Categoria: Construir o Modelo Matemático</td><td rowspan="2">Indicador Essencial</td><td rowspan="2">Valor alcançado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a) Determinar as variáveis e incógnitas.</td><td>Características</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">d)</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>b) Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas.</td></tr>
<tr><td>c) Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições.</td></tr>
</table>

	d) Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático			
	Categoria: Solucionar o Modelo Matemático		*Indicador Essencial*	*Valor alcançado*
		Caraterísticas		
	a) Encontrar método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		b)	
	b) Solucionar o modelo matemático.			
	Categoria: Interpretar a Solução		*Indicador Essencial*	*Valor alcançado*
	a) Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema.	**Caraterísticas**		
	b) Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema.		**b)**	
	c) Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.			

Fonte: Mendoza, 2012 (adaptação).

Os dados obtidos no Instrumento de Análise (quadro 17) permite a descrição dos resultados dos problemas por aluno, após essas análises são condensadas no (quadro 18), considerando a ação essencial e os indicadores quantitativos, composta pelo desempenho qualitativo do estudante de acordo com execução das ações da ERP e os conceitos envolvidos.

Quadro 18- Desempenho na Resolução de Problemas

P	**1ª A**	**2ª A**	**3ª A**	**4ª A**	**Contexto do problema**
nº 1	!?	!?	**?**	?	Descrição da ação essencial com base nas definições e conceitos envolvidos.
	Caraterísticas Gerais • Descrição das características dos Problemas. • Descrição dos conceitos relacionados.				
	Legenda: (P) problema; (1ªA) ação compreender o problema; (2ªA) construir o modelo matemático; (3ªA) solucionar o modelo matemático; (4ªA) ação interpretar a solução; (!) Informação dada no problema; (?) questionamento sobre a ação; (!?) informações dadas, mas também há questionamentos sobre a ação.				

Fonte: Mendoza, 2013 (adaptação).

Com base no (Quadro 18), cada problema proposto, possui uma característica específica a ser analisada como ação essencial, observa-se o exemplo do problema 1 da avaliação diagnóstica e a descrição da análise no quadro (Quadro 19):

Problema 1. Márcia ligou seu computador à rede internacional de computadores, internet. Para fazer uso dessa rede, ela paga uma mensalidade fixa de R$ 30,00 mais 15 centavos por cada minuto de uso. Quanto gastará Márcia se, durante o mês, utilizar a internet por 10h? O valor a ser pago por Márcia no final do mês depende de quê?

Quadro 19 Descrição para análise do problema 1.

Categoria	**Operações e Parâmetros para Análise qualitativa do Problema 1**	**Análise quantitativa**
Compreender o problema	Ler e extrair os elementos desconhecidos: a) determinar que 15 centavos igual a R$ 0,15 b) Observar que deve converter 10h em minutos e c) Observar que R$ 30,00 é uma taxa fixa.	?
Construir o modelo matemático	Determinar e nominar as variáveis e incógnitas: y= 30 + 0,15x, sendo que "**x**" é equivalente ao tempo de uso e "**y**" o valor a ser pago**.**	?
Solucionar o modelo	Solucionar o modelo: converter 10h em minutos = 600min e substituir no modelo y= 30 + 0,15 . 600 = 120.	?
Interpretar a solução	Resposta ao objetivo do problema: O valor a ser pago por 10h de uso é de R$ 120,00. O valor a ser pago depende do tempo de uso, e mesmo sem ser utilizado há uma taxa fixa de R$ 30,00.	?

3.5.3 Os Mapas conceituais

Segundo Luz (2010), os mapas conceituais já estão consolidados na literatura pela sua capacidade de representar como se organizam os conhecimentos na estrutura cognitiva de quem o elabora (Novak; Gowin, 1996). Dessa forma eles se tornaram um instrumento importante desta investigação, por entendermos, que os mapas são capazes de nos ajudar em um diagnóstico de indícios da ocorrência da aprendizagem significativa e da elaboração de significado pelo estudante. Durante a intervenção foi elaborado pelos estudantes de forma individual um mapa conceitual no final do conteúdo de função, no qual este é mais uma ferramenta que nos dará suporte para verificarmos indícios de aprendizagem significativa.

Quanto à forma de analisar os mapas, utilizaremos os princípios da aprendizagem significativa explicitados por Novak (Novak; Gowin, 1996). Esses princípios são amplamente considerados em nossas análises na mesma proporção em que nos atemos em buscar nos mapas, as relações entre conceitos e as proposições mapeadas pelos estudantes. A avaliação dos mapas pelos princípios da aprendizagem significativa (hierarquia, diferenciação progressiva e reconciliação integradora), estabelece aspectos a serem considerados para cada um desses princípios. Quanto à hierarquia, entre outras coisas, Novak afirma, por exemplo, que o significado que atribuímos a um dado conceito é dependente não só do número de relações relevantes, mas também da hierarquização dessas relações na nossa estrutura conceitual (Novak; Gowin, 1996, p. 114). Dessa forma quando buscamos nos mapas dos alunos a elaboração de significados para os conceitos, no qual consideramos também a hierarquia conceitual, a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. Cada mapa será analisado e descrito suas informações de acordo com o Quadro 20.

Quadro 20- Instrumento para análise dos mapas conceituais

Categoria de análise	Descrição qualitativa do mapa conceitual
1. Conceitos básicos	
Nenhum conceito relevante é identificado	
Conceitos relevantes são identificados, mas não se relacionam necessariamente ao tema do mapa proposto.	
Conceitos são identificados e estão de acordo com o tema do mapa proposto.	
2. Hierarquia	
Não é possível diferenciar entre conceitos mais gerais e específicos.	
É possível identificar os conceitos mais gerais e específicos, o mapa deixa dúvida sobre qual conceito é mais geral e qual o mais específico.	
É possível identificar com clareza os conceitos mais gerais e mais específicos.	
3. Diferenciação Progressiva	
Não apresenta indícios de diferenciação progressiva;	
Apresenta parcialmente a diferenciação progressiva	
Apresenta reconciliação integradora.	
4. Reconciliação Integradora	
Não apresenta indícios de reconciliação integradora;	
Apresenta parcialmente indícios de reconciliação integradora;	
Apresenta reconciliação integradora.	

Fonte: elaborado pelo autor

Contudo, a elaboração do mapa conceitual pelo estudante será de forma individual, sendo um no diagnóstico do conteúdo de função o outro após a aplicação da sequência didática onde utilizou-se a ERP como metodologia de ensino no conteúdo de função, sendo este mais um instrumento no pós-teste. Já no conteúdo de função afim, somente será aplicado no pós-teste. Sendo assim, o mapa conceitual torna-se mais um instrumento que pode nos auxiliar a analisar de que forma o estudante organizou os conceitos em sua estrutura cognitiva, buscando assim indícios da ocorrência de aprendizagem significativa do conceito de Função.

3.6 Validade da pesquisa

Os instrumentos utilizados na coleta de dados, foram organizados de acordo com os objetivos e foram elaborados com base no referencial teórico, o que contribui na utilização de meios confiáveis para obtenção de informações.

Segundo Moreira (2011, p. 67), aumentar a validade externa de um estudo qualitativo implica em aumentar seu grau de comparabilidade e transladação. Ou seja, a necessidade de se descrever com precisão e detalhe tudo que será feito.

A confirmabilidade da investigação qualitativa implica no rastreamento dos dados em sua fonte e a explicação da lógica utilizada para interpretá-los. Estes elementos dispõem sobre a confirmabilidade: permanência prolongada no campo, a triangulação, a verificação com os participantes e a lista de prejuízos, crenças e concepções do investigador.

A fidedignidade na pesquisa quantitativa refere-se ao grau de reprodutibilidade das medidas (ou estudos), enquanto que a validade tem a ver com a acuidade dos resultados, com o grau em que as conclusões efetivamente representem a realidade empírica, com o grau em que os instrumentos realmente irão medir o que se pretende medir (Moreira, 2011, p. 65).

3.6.1 Triangulação

Sampieri apresenta que “o conceito de triangulação se estendeu, mas além da comparação dos métodos e dados quantitativos e qualitativos, classificando assim a triangulação de: i) dados; ii) métodos, iii) investigadores, iv) teorias e v) ciências e/o disciplinas” (p 790, 2006). Na triangulação do método é utilizado o desenho do enfoque principal o predominante, é uma investigação quali-quanti com o enfoque principal qualitativo.

A validação qualitativa será por meio da identificação das categorias da ERP, para assimilar os conceitos de função. Uso de estudos descritivos, buscando estabelecer relação causal pela qual se espera que a ERP, promova condições que levem aos aspectos qualitativos da assimilação do conceito de função, diferenciadas das relações normais do ensino, para definir o domínio para o qual as descobertas do estudo podem ser generalizadas.

Já a validação quantitativa por meio da demonstração de que as operações deste estudo, utiliza procedimentos para coleta de dados que podem ser aplicadas em outros grupos, porém não se preveem os mesmos resultados.

CAPÍTULO 4

FUNÇÕES, HISTÓRIA E CONCEITOS PRELIMINARES: UMA PROPOSTA DE ENSINO BASEADA NA ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CAPÍTULO 4: FUNÇÃO, HISTÓRIA E CONCEITOS PRELIMINARES: UMA PROPOSTA DE ENSINO BASEADA NA ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, apresenta-se a evolução do conceito de função ao longo da história, e os conteúdos de função e função afim. Evidencia-se também, uma proposta de ensino com ênfase na estratégia metodológica de resolução de problemas em função e função afim, associando-a ao processo de assimilação da aprendizagem significativa de Ausubel.

4.1 Um breve histórico da história do conceito de Função.

O conceito de função passou por diversas modificações durante a história da humanidade. Para compreender melhor este conceito, devemos partir do seu desenvolvimento histórico. Segundo Youschkevich (1981, p. 9), a história do conceito de função se divide em três etapas: antiguidade, idade média e idade moderna.

A primeiras representações de função surgiu na antiguidade, com a civilização babilônica. Neste período, a civilização babilônica registrava suas informações em tabletes de argila, sendo que alguns apresentavam tabelas com duas colunas. Como por exemplo, pode-se mencionar as tábuas de multiplicação, em que para cada número apresentado na primeira coluna, havia um número na segunda coluna que representava o resultado da multiplicação do número da primeira coluna por um valor fixo.

Assim, nas tábuas babilônicas já aparecia uma representação de função em forma de tabelas sexagemais de quadrados e raízes quadradas, podendo ser entendidas como "funções tabuladas", isto há 2000 anos a. C. Segundo Youschkevich (1981), as tábuas de funções foram bastante empregadas nos estudos astronômicos dos babilônicos para determinar as efemérides do sol.

Em Alexandria, os astrônomos utilizaram teoremas da geometria e regras de interpolação para confeccionar tábuas de cordas, equivalentes efetivamente as tabelas de senos, que foram colocadas em uso pelos hindus alguns séculos mais tarde (Lima, 2017, p.12). E Ptolomeu, no século II d. C., em uma de suas obras, utiliza métodos numéricos e de interpolação de funções de duas variáveis na construção de tabelas, métodos que para ele eram implícitos e não considerados matemáticos. Youschkevitch (1981, p.14) afirma que não havia nenhuma ideia geral de funcionalidade; não só faltam as palavras equivalentes ao termo função, mas também uma alusão a ideia mais abstrata e mais geral que unifica dependências entre unidades ou número sobre alguma forma (descrição verbal, gráfico e tabela).

No período da Idade Média, a noção de função surge com Nicole Oresme (1323-1382), no qual utilizou as coordenadas para representar a velocidade em função do tempo. Em seu trabalho conhecido como *Latitude das formas*, Oresme conseguiu traçar o gráfico da velocidade em função do tempo, de um corpo que se move com aceleração constante. Para Boyer, quanto ao trabalho de Oresme:

> Tudo o que é mensurável, escreveu Oresme, é imaginável na forma de quantidade contínua; por isso ele traçou um gráfico de velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo da reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente a reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades desses segmentos, ele percebeu, jazem ao longo de uma reta; e se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidade dos segmentos velocidade (que chamamos ordenadas) preencherá um triângulo retângulo (Boyer, 1996, p. 180).

Segundo Lima (2017), a teoria das latitudes das formas, um estudo das funções temporais é um elemento de suma importância, visto que essa teoria alcançou um renome na França, Itália e Espanha nos séculos XV e XVI. E há quem diga que suas ideias provavelmente influenciaram Descartes de forma direta ou indireta.

No período da idade moderna, François Viéte (1540-1603) apresentou uma nova interpretação de funcionalidade, com a criação da álgebra simbólica. Essa criação introduziu a noção de função como relação entre dois conjuntos numéricos, iniciou-se assim, um novo método analítico que introduzia funções por meio de fórmulas e de equações.

Galileu Galilei (1564-1642), trouxe contribuições para evolução da ideia de função, quando introduziu o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas. Enquanto Descartes (1696-1650) introduziu a relação de dependência entre quantidades variáveis, utilizando-se para isto de equações em x e y.

As primeiras contribuições efetivas para a construção do conceito de função surgiram com os trabalhos de Isaac Newton (1642-1727) e GottFried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Newton estabeleceu pela primeira vez um termo específico para funções ao utilizar o nome "fluentes" para representar alguns 1247 relacionamentos entre variáveis, descrevendo suas ideias de função ligadas à noção de curva e a "taxas de mudanças" de quantidades que variavam continuamente. O termo "função" foi usado por Leibniz na década de 1670 para fazer referência a "segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas a curvas".

Depois, esse termo foi utilizado para se referir a quantidades dependentes ou a expressões. A notação de função mais aproximada da que se usa hoje foi “*fx*” e esta foi dada por Jean Bernoulli (1667-1748), onde ele adota a terminologia de Leibniz para função de *x*. “Uma função de um valor variável é uma expressão analítica, que é composta de valor variável e valores constantes”.

Em 1718, Bernoulli faz a distinção entre função e o valor da função, mas não fala da unicidade, sendo esta a primeira definição de função; considerou função como uma expressão formada de uma variável e algumas constantes. Bernoulli experimentou várias notações para uma função, das quais “*fx*” é a que mais se aproxima da atualmente utilizada (Boyer, 1996). Euller (1707-1783) apresentou uma interessante definição de função, além disto, destacou-se por organizar o Cálculo Diferencial e ampliar as ideias de Newton para a Análise Matemática.

Talvez o mais influente da nova geração de matemáticos ativos em 1820 em Paris fosse Joseph Fourier (1768-1830). A contribuição principal de Fourier foi a ideia, percebida por Daniel Bernoulli, de qualquer função y = $f(x)$ pode ser representada por uma série da forma conhecida na atualidade como série de Fourier. Tal representação fornece uma generalidade muito maior que a série 1249 de Taylor, quanto ao tipo de funções que podem ser estudadas. Mesmo que existam muitos pontos em que a derivada não exista ou em que a função não é contínua a função pode ter expansão em série de Fourier (Boyer, 1996). O quadro 21 sintetiza o desenvolvimento do conceito de função ao longo de toda a história.

Quadro 21- Conceito de função ao longo da história

ANO	AUTOR	CONCEPÇÃO
2000 a. C.	Babilônios	Matemáticos babilônios usavam tabelas sexagesimais, de quadrados e de raízes quadráticas, de cubos e raízes cúbicas, e outras tabelas para cálculos. Revelando assim “um instinto de funcionalidade”
Por volta de 400 a. C.	Pitagóricos	Encontram-se formas de aparecimento de conceito de função determinando leis quantitativas de diversas quantidades físicas.
Escola de Alexandria	Ptolomeu	Construção de tabelas correspondentes às tabelas de seno. Tabelas construídas por métodos numéricos e de interpolação
Século XIV	Oresme	Teoria das latitudes e longitudes das formas, percussora da representação gráfica. Teoria prestigiada no século XV e XVI
Século XVII	Fermat e Descartes	Concepção de função como relação entre dois conjuntos de números. Introduz função por meio de fórmulas e equações, pelo método analítico.
1637	Descartes	Equação em x e y que mostra dependência
Final do século XVII	Newton e Leibniz	Primeira vez que a palavra função aparece em um manuscrito.
1670	Newton	Quantidades relacionadas; fluentes expressos analiticamente.
1673	Leibniz	Relação, quantidades geométricas que dependem de um ponto de curva
1748	Euler	Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo que seja, desta mesma quantidade e números ou quantidades constantes. Expressão analítica.
1755	Euler	Dependência Arbitrária
1778	Condorcet	Dependência Arbitrária

1797	Lacroix	Dependência Arbitrária
1797	Lagrange	Expressão de cálculo, expressão analítica
1821	Cauchy	Resultados de operações feitas sobre uma ou várias quantidades constantes e variáveis.
1822	Fourier	Série trigonométrica; sequência de valores; ordenadas não sujeitas a uma lei comum.
1834	Lobatchevsky	Expressão analítica; condição para testar números, dependência arbitrária
1837	Dirichlet e Lobatchevsky	Se uma variável y é assim relacionada a uma variável x, que sempre um valor numérico é marcado com x, há uma regra de acordo com a qual o único valor de y é determinado, então y é considerado uma função da variável independente x.
1837	Dirichlet	Correspondência: para cada valor de x (abscissas), um único valor de y (ordenada); função definida por partes.
1870	Hankel	Diz-se que y é uma função de x se cada valor de x de um certo intervalo corresponde um valor bem definido de y sem que isto exija entretanto que y seja definido sobre todo intervalo pela mesma lei em função de, que y seja definido sobre todo intervalo pela mesma lei em função de, nem mesmo que y seja definido por uma expressão matemática explicita de x.
1888	Dedekind	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo uma determinada lei.
Início do século XX.	Cantor	Subconjunto de um produto cartesiano, obedecendo duas condições.

Fonte: Lima, 2017

Portanto, é perceptível que o conceito de função foi evoluindo com o decorrer do tempo e para isto vários matemáticos contribuíram neste processo até chegar ao conceito que conhecemos atualmente.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) trazem a contextualização sociocultural como uma grande competência, como uma forma de aproximar o aluno de sua realidade, fazendo-o vivenciar e reconhecer a diversidade que o cerca, sendo capaz de interpretar e atuar nessa realidade.

O estudo de funções, de acordo com as propostas do PCN, faz-se necessário para auxiliar o aluno na interpretação da sociedade e sua atuação nela.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (BRASIL, 1999, p. 118).

Ainda de acordo com os PCN, “o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente” (BRASIL, 1999, p.

118). Sendo assim, é preciso apropriar-se dos significados dos conceitos e procedimentos matemáticos para saber aplicá-los em situações novas. Assim, é fundamental que tais conceitos e procedimentos sejam trabalhados com total compreensão de todos os significados associados a eles.

4.2 O conceito de Função

A seguir, resumiremos algumas ideais essenciais sobre o conceito de função, tomadas de (Lima, 2013 p. 40). Se define uma função f: $X \to Y$ (lê-se "uma função f de X em Y"), onde X e Y são dois conjuntos, como uma regra (conjunto de instruções) que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$ (lê-se y igual a f de x). O conjunto X denomina-se o domínio e se denota por Dom(f). O conjunto Y, é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ é dito a imagem de x pela função f, ou, o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. É importante destacar que uma função f: $X \to Y$ está constituída por três componentes: domínio, contradomínio e a correspondência $x \; \alpha \; f(x)$.

Outros textos, formalizam o conceito de função a partir do conceito de relação binária entre os elementos de dois conjuntos. Se X e Y são dois conjuntos quaisquer, uma relação binária, ou simplesmente uma relação entre os elementos de X e os elementos de Y, é qualquer subconjunto do produto cartesiano X x $Y = \{(x, y) \,/\, x \in X$ e $y \in Y\}$. Se $R \subset X$ x Y e (x, y) $\in R$, diz-se que x está na relação R com y e também pode denotar-se $x \, R \, y$.

Uma função f de X em Y é uma relação f de X em Y tal que todo elemento do conjunto X tem um único correspondente no conjunto Y. Simbolicamente, cumpre-se que:

1. Para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in R$.
2. Se $(x, y_1) \in R$ e $(x, y_2) \in R$, então $y_1 = y_2$.

Dada uma função f: $X \to Y$, $y = f(x)$, a variável x é denominada variável independente e a y, variável dependente. Se X e Y são conjuntos numéricos, o conjunto dos pontos do plano $(x, y) \in \mathbb{R}$ x $\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, tais que $y = f(x)$, é chamado gráfico da função f.

Desde o ponto de vista didático é mais conveniente apresentar aos alunos o conceito de função como uma correspondência, do que mediante a formalização por relações e pares ordenados, que resulta de difícil compreensão.

4.2.1 Gráfico de uma Função

A representação gráfica de uma função, descreve seu comportamento e facilita a sua compreensão. Segundo (Paiva, 2005) a linguagem gráfica é cada vez mais utilizada como meio de comunicação, pois proporciona uma síntese de informações e uma rápida leitura. O gráfico de uma função no plano cartesiano, é dado pelo conjunto de todos os pontos (x, y), tais que $y = f(x)$. O gráfico de algumas funções recebem nomes especiais, como é o caso do gráfico de uma função afim, denominado reta e do gráfico de uma função quadrática, denominado parábola. Porém, nem toda curva no plano cartesiano representa uma função. Teremos uma função quando qualquer reta paralela ao eixo *Y* intersectar a curva em um único ponto. Ou seja, se uma reta paralela ao eixo *Y* intersectar a curva em mais de um ponto, essa curva não representa gráfico de função. Dessa forma, para analisar se uma curva representa gráfico de uma função, basta traçar retas paralelas ao eixo Y, e analisar se essas retas cortam o gráfico em um ou em mais pontos.

O gráfico de uma função $f: X \rightarrow Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$.

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\} = \{(x, f(x);\ x \in X\}$$

A fim de que um subconjunto $G \subset X \times Y$ seja o gráfico de alguma função $f: X \rightarrow Y$ é necessário e suficiente que G cumpra as seguinte condições:

- Para todo $x \in X$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$ cuja a mesma primeira coordenada é x.
- Se $p = (x, y)$ e $p' = (x, y')$ são pares pertencentes a G com mesma primeira coordenada x então $y = y'$ (isto é, $p = p'$).

Poderíamos resumir estas condições numa só, dizendo que para cada $x \in X$ existe um, e somente um, $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$.

Exemplo 1. A correspondência f de A em $\mathbb{R}$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$, representado na Figura 7, é função, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissa $x \in A$ encontra sempre o gráfico de f num só ponto.

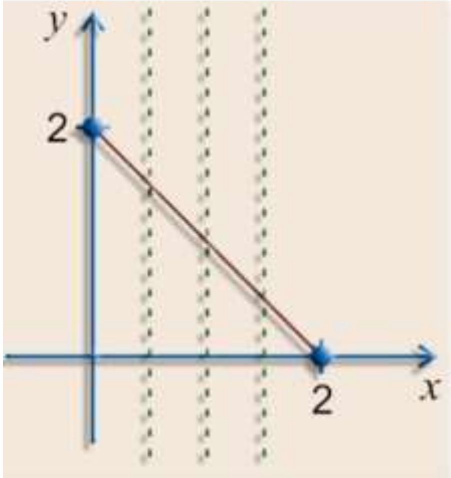


Figura 7- O gráfico representa uma função

Exemplo 2. A correspondência f de A em ℝ, em que A = {x ∈ ℝ | 0 ≤ x ≤ −2}, representado na Figura 8, não é função, pois há retas verticais que encontram o gráfico de f em dois pontos.

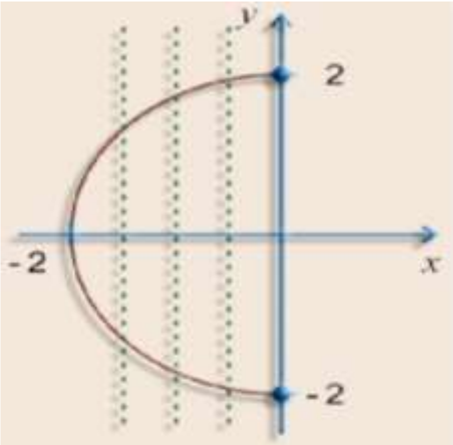


Figura 8- O gráfico não representa uma função

4.2.2 Domínio, Contradomínio e Imagem de uma função

Dada uma função *f* de A em B, definimos:

1) Domínio: é o conjunto denotado por D(*f*), formado pelos elementos *x* pertencentes ao conjunto A, para os quais existe um único elemento y pertencente a B tal que *f*(*x*)= y. Portanto D(*f*) = A.

2) Contradomínio: é o conjunto denominado CD(*f*) e abrange todos os elementos do conjunto B. Portanto, CD(*f*)= B.

3) Imagem: é o conjunto Im(f), formado pelos elementos y pertencentes a B para os quais existe um elemento x pertencente ao conjunto A tal que $f(x)$= y. A imagem de uma função é um subconjunto do contradomínio.

4.2.3 Restrição do domínio da função.

Seja f: D $\rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por y = $f(x)$ com domínio D. Se A é um subconjunto de D, a função g com domínio A e com mesma regra de f, y = $f(x)$, é uma restrição da função f ao conjunto A.

Exemplos:

1)f(x)= 2x+3, com D(f) = $\mathbb{R}$ e g(x)= 2x+3, com D(g) = [−2, 2] são funções diferentes pois apresentam domínios diferentes.

2) f(x) = $x^2 - 25$, com D(f) = [−5, 5] e g(x) = $x^2 - 25$, com D(g) = [−2, 8] são funções diferentes pois apresentam domínios diferentes.

3) $f(x) = 2x$, com D(f) = [−4, 0] e $g(x) = 2x$, com D(g) = [0, 2] são funções diferentes pois apresentam domínios diferentes.

Muitas vezes, apresentamos uma função dizendo apenas sua lei de formação e nesse caso, o domínio não está explícito. Dessa forma, consideramos que o domínio D(f) é o conjunto formado por todos os números reais que podem ser colocados no lugar de x tal que a função $f(x)$ represente um número real. No plano cartesiano o domínio é representado no eixo X, o contradomínio pelo eixo Y e a imagem pela ordenada y tal que $f(x)$= y, conforme a Figura 9.

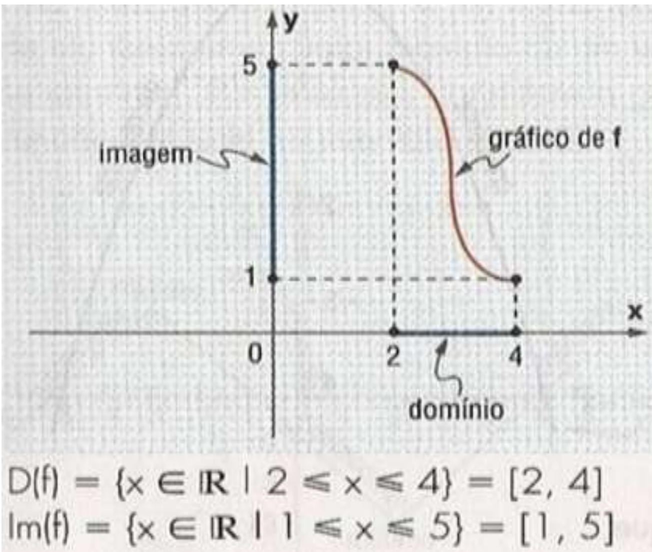


Figura 9- Domínio e imagem da função no plano cartesiano

4.2.4 Função injetora, sobrejetora e bijetora

Uma função *f* de A em B é injetora quando todos os elementos distintos do domínio possuem imagens distintas no contradomínio. Ou seja, se para todo y ∈ Im(*f*), existe um único *x* ∈ A tal que y = *f*(x). Observe a Figura 10 que corresponde ao gráfico $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

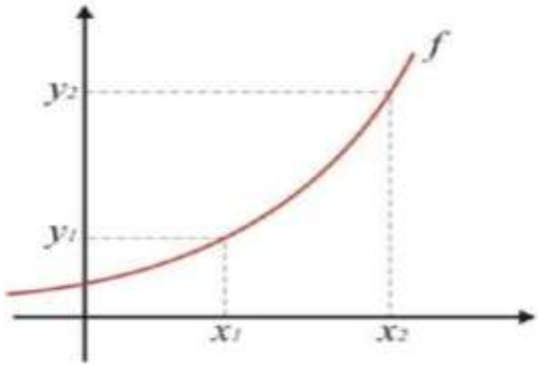


Figura 10- Função Injetiva

Note que para valores diferentes de *x* estão correspondendo a valores diferentes de y = $f\,(x)$, ou seja, se $x_1 \neq x_2$ então $f\,(x_1) \neq f\,(x_2)$. Note que o mesmo não ocorre na figura 11.

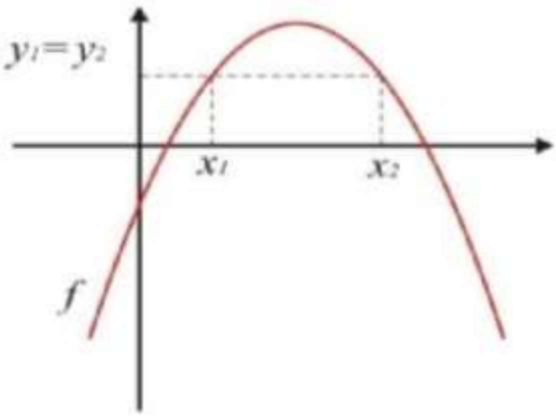


Figura 11- Função não injetiva

Existem valores diferentes de *x* que possuem a mesma imagem, ou seja, existe $x_1 \neq x_2$, tal que $f\,(x_1) \neq f\,(x_2)$. Se uma função é so crescente ou só decrescente, valores diferentes de *x* possuem imagens diferentes. Quando isso ocorre dizemos que a função é injetora.

Em lugar de dizermos "*f* é uma função injetora de X em Y", podemos dizer "*f* é uma injeção de X em Y". Assim, uma função é dita injetora se:

Para todo $x_1 \neq x_2$, com $x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ou ainda, se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Exemplo: A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$ não é injetora, pois;

• Para $x = 1$ corresponde $f(1) = 0$.

• Para $x = -1$ corresponde $f(-1) = 0$.

Observe que temos dois valores diferentes de x associados a um mesmo valor para a função, ou seja, $f(1) = f(-1) = 0$.

Exemplo: A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ é injetora, pois faz corresponder a cada número real a seu dobro e não existem dois números reais diferentes que tenham o mesmo dobro.

Em algumas funções pode ocorrer a igualdade entre o conjunto imagem e o contradomínio. Esse fato motiva a seguinte definição: Uma função $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetora se, e somente se, o conjunto imagem é igual ao contradomínio Y.

Em lugar de dizermos "f é uma função sobrejetora de X em Y", podemos dizer "f é uma sobrejeção de X em Y". Assim, Se a função $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetora, então dado $y \in Y$, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$. A figura 12 é um exemplo de função sobrejetora.

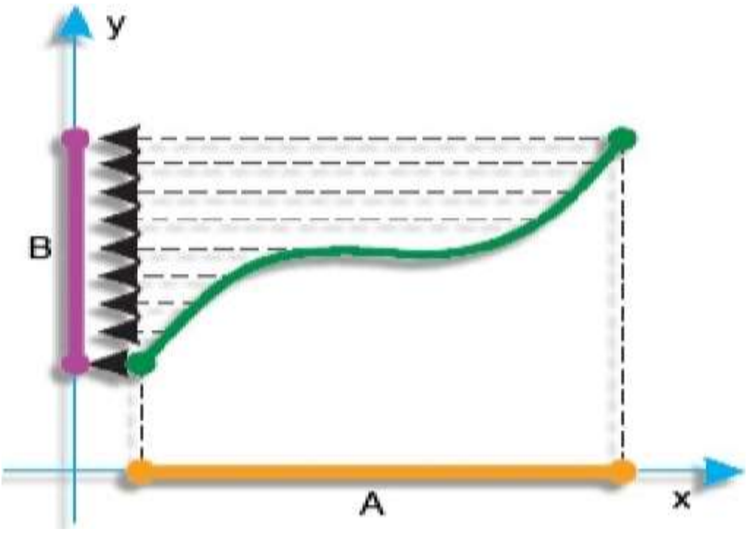


Figura 12- A função f é sobrejetora (imagem igual ao contradomínio)

Exemplo: A função f de $X=\{-1,0,1,2\}$ em $Y=\{0,1,4\}$ definida pela lei de correspondência $f(x) = x^2$ é sobrejetora, pois, para todo elemento $y \in Y$, existe o elemento $x \in X$ tal que $y = x^2$.

Existem funções que são, simultaneamente, injetora e sobrejetora. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é bijetora se, e somente se, f for injetora e sobrejetora. Logo, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$f(x) = 3x$ é bijetora, pois ela é simultaneamente injetora e sobrejetora; para cada número real do contradomínio ℝ existe um, e somente um, correspondente do domínio ℝ.

Exemplo: A função f: ℝ→ ℝ definida por $f(x) = x^2$, não é bijetora, pois, embora seja sobrejetora, ela não é injetora. Note que para $x = 3$ e $x = -3$, por exemplo, temos $f(3) = f(-3) = 9$, ou seja, para valores distintos do domínio temos o mesmo correspondente associado no contradomínio.

4.2.5 Função Crescente e Decrescente

Um função f é decrescente no intervalo I, se f é definida em I e $f(x_1) > f(x_2)$, quando x_1 e x_2 são dois pontos de I, com $x_1 < x_2$, isto é, se $x_1 < x_2$, então $f(x1) > f(x_2)$.

Um função f é crescente no intervalo I se f é definida em I e $f(x_1) < f(x_2)$, quando x_1 e x_2 são dois pontos de I, com $x_1 < x_2$, isto é, se $x1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$

Nos gráficos de funções crescentes e decrescentes na figura 13, podemos notar que:

- A função f_1 está definida ∀ $x \in$ ℝ, e que, aumentando o valor de x do domínio, o valor da imagem $y = f_1$ (x) também aumenta; logo, a função é crescente.

- A função f_2 também está definida ∀ $x \in$ ℝ, e que, aumentando o valor de x do domínio, o valor da imagem $y = f_2(x)$ diminui, isto é, a função é decrescente.

- A função f_3 também está definida, ∀ $x \in$ ℝ. Mas para $x \leq 0$, à medida que nos aproximamos de zero, o valor da imagem diminui; enquanto para $x \geq 0$, aumentando o valor de x, o valor de y aumenta. Logo, a função é decrescente para $x \leq 0$ e crescente para $x \geq 0$.

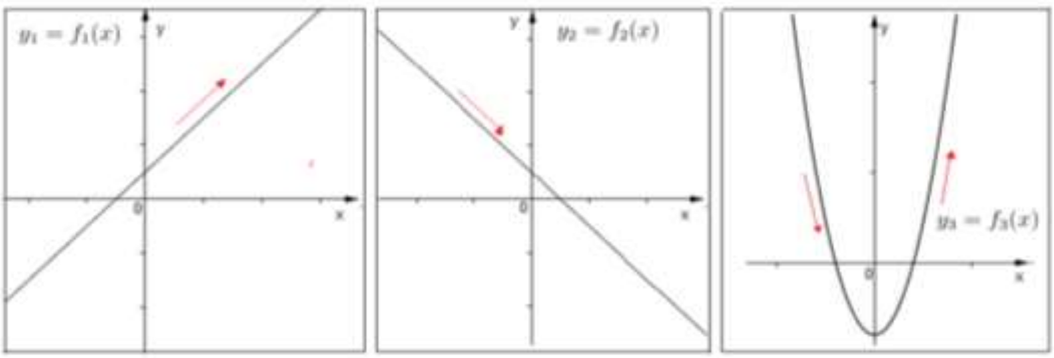


Figura 13- Crescimento e decrescimento da função.

4.2.5 Valor Máximo e Mínimo de uma Função

Os extremos de uma função, que são conhecidos como pontos de máximo e mínimo de uma função, são pontos do domínio onde a imagem pode ser maior ou menor em relação a outros pontos da função.

Analisando o gráfico de uma função, podemos observar propriedades e valores importantes dela, como: para quais valores ela é positiva ($f(x) > 0$), para quais valores ela é negativa ($f(x) < 0$), para quais valores ela se anula ($f(x) = 0$) e em quais valores assume um valor máximo ou um valor mínimo. Os valores de x para os quais $f(x) = 0$ são chamados zeros da função f. Para Bianchini e Paccola (2003, p.64):

- O valor máximo de uma função é o maior valor que uma função assume em todo seu domínio. O ponto do gráfico em que ocorre o valor máximo é chamado de ponto de máximo da função.
- O valor mínimo de uma função é o menor valor que a função assume em seu domínio. O ponto do gráfico em que ocorre o valor mínimo é chamado de ponto mínimo da função.

Segundo Iezzi et al. (2010, p. 65), seja A um subconjunto do domínio de uma função f, se para todo x pertencente a A, temos $f(x) \leq f(x_0)$, então x_0 e $f(x_0)$, são respectivamente, o ponto de máximo e o valor máximo de f em A. Caso $f(x) \geq f(x_0)$, então x_0 e $f(x_0)$, são respectivamente, o ponto de mínimo e o valor mínimo de f em A. Tais valores são também chamados de máximos e mínimos relativos, ou locais, de f (relativos a alguma região A do domínio). Quando A é igual ao domínio de f, estes valores são chamados de máximos e mínimos absolutos. A Figura 14 ilustra máximos e mínimos relativos e também alguns zeros de uma função.

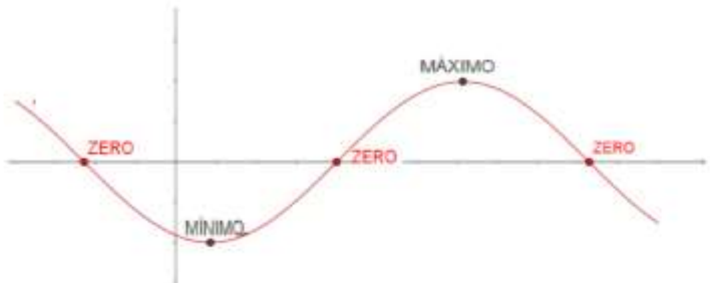


Figura 14- Máximos, mínimos e zeros de uma função

4.3 Função Afim

Denomina-se função afim, toda função polinomial do 1º grau *f*: ℝ → ℝ, a qual dados os números reais *a* e *b*, com a ≠ 0 temos que *f* (*x*) = a*x* + b. O coeficiente *a* que acompanha *x*, é chamado de coeficiente angular ou taxa de variação e o coeficiente *b*, que é o termo independente, é chamado de coeficiente linear.

4.3.1 Determinação de uma função afim

Para demonstrar tal situação, iremos considerar *f*: ℝ → ℝ tal que *f*(*x*) = a*x* + b com x ∈ ℝ em que $f\,(x_1) = y_1$ e $f\,(x_2) = y_2$. Dessa forma, temos: $f\,(x_1) = \mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}$ e $f\,(x_2) = \mathrm{a}x_2 + \mathrm{b}$. Fazendo $f\,(x_2) - f\,(x_1)$ temos:

$y_2 - y_1 = \mathrm{a}x_2 + \mathrm{b} - (\mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}) = \mathrm{a}x_2 + \mathrm{b} - \mathrm{a}x_1 - \mathrm{b} = \mathrm{a}(x_2 - x_1) \Rightarrow y_2 - y_1 = \mathrm{a}(x_2 - x_1) \Rightarrow$
$\mathrm{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Portanto, $\mathrm{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Proposição: Para obter os coeficientes *a* e *b* de *f* (*x*)= a*x* + b, basta conhecer os valores da função em dois pontos distintos, ou seja, saber os valores de $f\,(x_1)$ e $f\,(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$.

Para demonstrar tal situação, iremos considerar *f*: ℝ → ℝ tal que *f*(*x*) = a*x* + b com *x* ∈ ℝ em que $f\,(x_1) = y_1$ e $f\,(x_2) = y_2$. Dessa forma, temos: $f\,(x_1) = \mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}$ e $f\,(x_2) = \mathrm{a}x_2 + \mathrm{b}$.
Fazendo $f\,(x_2) - f\,(x_1)$ temos:

$y_2 - y_1 = \mathrm{a}x_2 + \mathrm{b} - (\mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}) = \mathrm{a}x_2 + \mathrm{b} - \mathrm{a}x_1 - \mathrm{b} = \mathrm{a}(x_2 - x_1) \Rightarrow y_2 - y_1 = \mathrm{a}(x_2 - x_1) \Rightarrow$
$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Portanto,

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Com isso, o coeficiente *a* é chamado de taxa de variação ou taxa de crescimento da função afim.

Para encontrar o valor do coeficiente *b*, substituímos em uma das igualdades o valor de a. Nesse caso, iremos substituir na primeira igualdade:

$f(x_1) = \mathrm{a}x_1 + \mathrm{b} \Rightarrow y_1 = \mathrm{a}x_1 + \mathrm{b} \Rightarrow y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x_1 + \mathrm{b} \Rightarrow y_1 \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1}\right) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x_1 + \mathrm{b} \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1}\right) \Rightarrow y_1\,(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)\,x_1 + \mathrm{b}\,(x_2 - x_1) \Rightarrow y_1x_2 - y_1x_1 = y_2x_1 - y_1x_1 + \mathrm{b}x_2 - \mathrm{b}x_1$

$\Rightarrow y_1x_2 = y_2x_1 + \mathrm{b}\,(x_2 - x_1) \Rightarrow \mathrm{b} = \left(\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}\right)$.

Portanto, $\mathrm{b} = \left(\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}\right)$.

Desta forma, em algumas aplicações o coeficiente b é denotado valor inicial. Em geral, b é denotado coeficiente linear.

4.3.2 Gráfico de uma função afim

Paiva (2013, p. 151) diz que se numa função $y = f(x)$ as variações de x e y são diretamente proporcionais, então o gráfico de f é uma reta não vertical, consequentemente, f é uma função afim. Esse gráfico pode ser obtido considerando dois pontos distintos da função e traçando a reta que passa sobre eles, como na Figura 15.

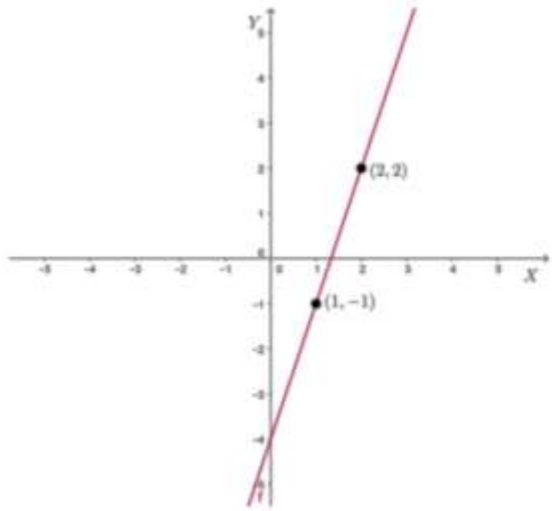


Figura 15- Gráfico da função afim f (x) = 3x – 4

4.3.3 Crescimento e decrescimento da função afim

Definição: Sejam x_1 e x_2 números distintos.

(I) Uma função f:A→B é dita crescente quando para quaisquer x_1 e x_2, pertencentes ao domínio A da função, tais que se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

(II) Uma função f:A→B é dita decrescente quando para quaisquer x_1 e x_2 , pertencentes ao domínio A da função, tais que se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

Proposição:

(I) A função afim $f(x)$= ax + b é crescente se, e somente se, o coeficiente angular a for positivo.

(II) A função afim $f(x)$= ax + b é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular a for negativo.

Demonstração:

(I) Considerando f crescente, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Assim para $x_1 - x_2 < 0$, $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Pela equação $a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$. Como o numerador e o denominador da fração são números negativos, resulta em um número positivo. Logo, o coeficiente a é positivo.

Considerando $a > 0$ e que $a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, se $x_1 < x_2$, então $x_1 - x_2 < 0$. Como o coeficiente a é positivo, $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Logo, $f(x_1) < f(x_2)$. Portanto, se o coeficiente a é positivo a função afim é crescente.

(II) Considerando f crescente, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$. Assim para $x_1 - x_2 < 0$, $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Pela equação $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$. Como o numerador é negativo e o denominador da fração é um número positivo, resulta em um número negativo. Logo, o coeficiente a é negativo.

Considerando $a < 0$ e que $a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, se $x_1 < x_2$, então $x_1 - x_2 < 0$. Como o coeficiente a é negativo, $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Logo, $f(x_1) > f(x_2)$. Portanto, se o coeficiente a é negativo a função afim é decrescente.

4.3.4 Taxa de variação

Podemos ver a taxa de variação como uma medida da “velocidade” de crescimento de uma função. Em geral, essa taxa de variação depende de x, mas para funções afins ela é constante. A taxa de variação de uma função afim indica a inclinação do gráfico da função em relação a posição horizontal e é dada pela razão entre a variação de valores de y e a correspondente variação de valores de x.

Na geometria analítica, a equação reduzida de uma reta não vertical é dada por $y = mx + q$, com m chamado de coeficiente angular e q coeficiente linear da reta. Portanto, do ponto de vista geométrico, $b = q$ é a ordenada do ponto no qual a reta, que é o gráfico da função $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo y e $a = m$ é responsável pela inclinação da reta, ou seja, o coeficiente angular da reta é exatamente a taxa de variação da função afim, sendo que m é a tangente do ângulo formado entre o eixo x e a reta $y = mx + q$. Portanto, quanto maior o valor absoluto de a mais a reta se afasta da posição horizontal, conforme a Figura 16.

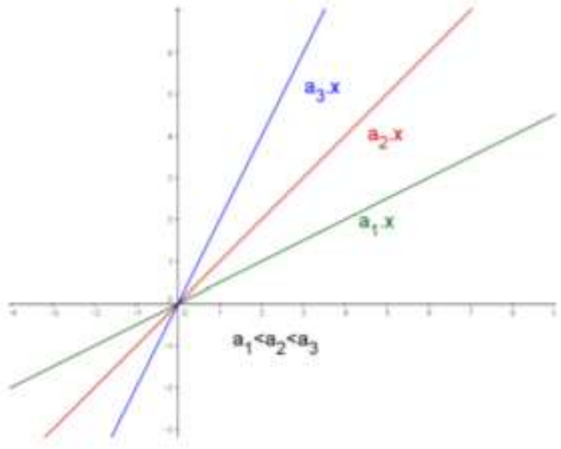


Figura 16- Gráfico da função $f(x) = ax + 0$ e o valor absoluto de a

Quando $a > 0$, ou seja, quando a abscissa cresce, a ordenada respectiva y = $f(x)$ cresce, caracterizando assim uma função crescente, conforme a definição. No entanto, quando $a < 0$, a abscissa cresce e a ordenada respectiva y = $f(x)$ decresce, isto significa que a função é decrescente, conforme a figura 17.

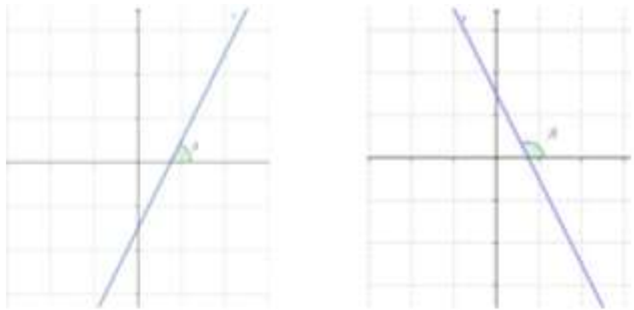


Figura 17- Gráfico da função crescente e decrescente

4.3.5 Zero ou raiz de uma função afim

Chamamos de zero ou raiz de uma função afim, o número x tal que $f(x) = 0$. Como a função afim é da forma $f(x) = ax + b$, para determinar o zero de uma função afim, devemos resolver a equação $ax + b = 0 \Rightarrow ax = - b \Rightarrow x = -$ -b/a. Geometricamente, o zero de uma função afim é o ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo x.

Exemplo: Encontrar o zero da função $f(x) = x - 4$. Dada a função afim $f(x) = x - 4$, o zero dessa função é dado por: $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$. Logo, o zero dessa função é $x = 4$.

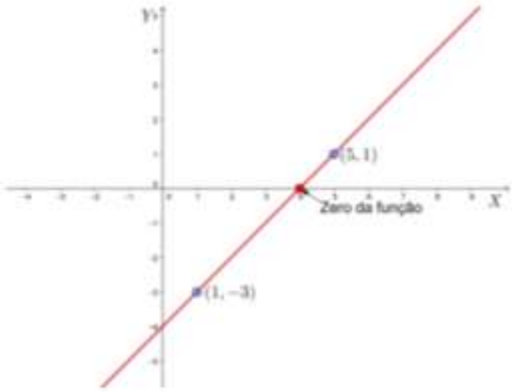


Figura 18- Gráfico da função f(x) = x - 4

4.3.6 Estudo do sinal de uma função afim

O estudo do sinal de uma função afim, consiste em verificar em quais intervalos a função *f*(*x*) = 0 (nula), *f*(*x*) > 0 (positiva) e *f*(*x*) < 0 (negativa). Para fazer o estudo do sinal de uma função afim, devemos considerar dois casos: a função ser crescente ou decrescente. Quando o coeficiente a de uma função é positivo, a função é crescente e o seu gráfico é da seguinte forma, conforme a figura 19.

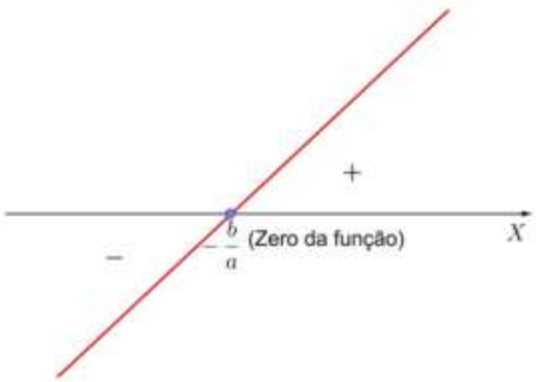


Figura 19- Estudo do sinal de uma função afim crescente.

Nesse caso, temos que:

f(*x*) = 0, para *x* = −b/a;

f(*x*) > 0, para *x* > −b/a;

f(*x*) < 0, para *x* < −b/a;

Já quando o coeficiente *a* é negativo, a função afim é decrescente e seu gráfico pode ser dado conforme a figura 20:

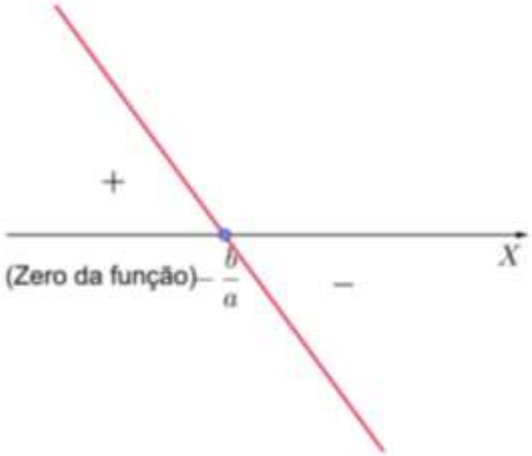


Figura 20- Estudo do sinal de uma função afim decrescente.

Agora temos:

$f(x) = 0$, para $x = -b/a$;

$f(x) > 0$, para $x < -b/a$;

$f(x) < 0$, para $x > -b/a$.

4.3.7 Função Linear

É a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, se o coeficiente a for igual a 1, temos a função $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, a função passa a ser conhecida como função identidade.

Exemplos:

a) $f(x) = -2x$

b) $f(x) = 4x$

c) $f(x) = 0{,}8x$

d) $f(x) = x$ (função identidade).

Observação: Note que uma função linear é um caso particular da função afim $f(x) = ax+b$, onde $a \neq 0$ e $b = 0$. O gráfico de uma função linear é uma reta, não perpendicular ao eixo x e que passa pela origem do plano cartesiano, apresenta-se assim as Figuras 21 e 22.

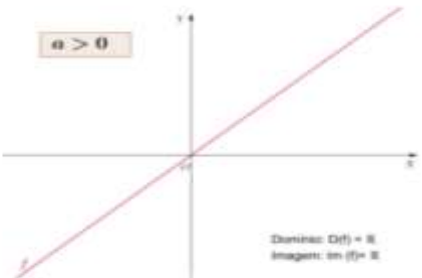


Figura 21-Gráfico de uma função Linear crescente

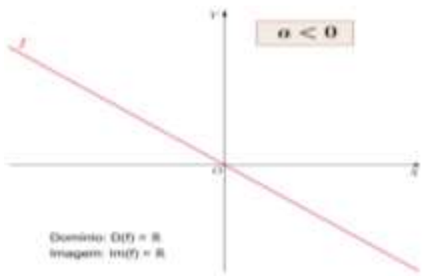


Figura 22-Gráfico de uma função Linear decrescente

4.3.8 Função constante

É a função dada pela regra $f(x) = k$, onde k é um número real qualquer. Ou seja, uma função f de A em B é constante, se cada $x \in A$ associa sempre ao mesmo elemento $k \in B$. Na função constante $f(x)= k$, temos que o domínio de f é $\mathbb{R}$ e o conjunto Imagem é $Im(f)=\{k\}$. O gráfico desse tipo de função é uma reta paralela ao eixo x e passa pelo ponto de coordenadas (0,k).

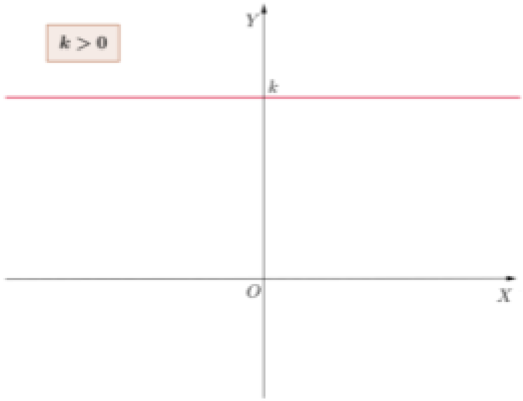


Figura 23- Gráfico de uma função constante com k > 0.

4.4- Didática do Ensino da Matemática

No contexto atual do processo de ensino aprendizagem da Matemática, nos anos finais do Ensino Fundamental, a maioria das práticas docentes tem se efetivado a partir de atividades pedagógicas voltadas, em grande parte, para o treino excessivo de algoritmos e memorização de técnicas e fórmulas como forma de fazer com que os alunos aprendam os conhecimentos matemáticos.

Essa postura quando assumida pelo professor faz com que grande parte dos alunos tenham aversão à Matemática, pois passa a encará-la como uma disciplina difícil, desinteressante e sem conexão com a realidade, consequentemente isso faz com que não entendam a importância e a necessidade dos conhecimentos básicos desta ciência para a resolução de diversas situações-problemas presentes no cotidiano.

O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos.

Enfatiza-se também, a importância de levar em conta o conhecimento prévio dos alunos na construção de significados, isso é geralmente desconsiderado na prática docente. Na maioria das vezes, subestimam-se os conceitos desenvolvidos no decorrer das vivências práticas dos alunos, de suas interações sociais imediatas, em favor de um tratamento escolar, de forma esquemática, privando os alunos da riqueza de conteúdos proveniente da experiência pessoal.

A sala de aula deve ser um espaço onde os estudantes possam expor opiniões, tanto o educador quanto os educandos devem assumir o papel de participantes na aprendizagem, sendo a preparação para o exercício da cidadania o foco principal. “A matemática, por sua vez, deve ser trabalhada como um instrumento de análise das características críticas de relevância social” (Jacobini; Wodewotzki, 2006).

A relação entre professores e alunos precisa ser dialógica, sendo o aluno convidado a ser um cidadão crítico. A importância do diálogo é destacada por Freire (1970), que ressalta uma pedagogia emancipadora que defende a prática do diálogo entre professor e aluno, garantindo, assim, uma troca de saberes e, portanto, um aprendizado mútuo. Então, os dois lados podem tanto ensinar como aprender, uma vez que o processo de interação garante que ambos os lados se beneficiem por serem seres com uma bagagem de conhecimento própria. Dessa forma, por meio da aprendizagem, professor e aluno podem desenvolver diferentes posturas, atuando diretamente no crescimento intelectual dos dois lados.

O papel do educador é possibilitar aos estudantes a crítica e o questionamento, e isso só vai ser despertado se o aluno participar da construção de seu conhecimento. O professor deve assumir o papel de auxiliador, e não de transmissor de conteúdo, visto que, enquanto escuta e permite que o aluno contribua com suas colocações, também aprende. Tudo deve acontecer de forma recíproca, conforme citou Paulo Freire, o “professor-dos-estudantes” e os “estudantes-do-professor”, nessa troca de experiências, crescem cada vez mais.

4.4.1 Proposta de uma sequência didática baseada na teoria da aprendizagem significativa.

Segundo Moreira & Masini (2016), o problema principal da aprendizagem consiste na aquisição de um corpo organizado de conhecimentos e na estabilização de ideias inter-relacionadas que constituem a estrutura desse conhecimento. Um dos maiores trabalho do professor consiste, então, em auxiliar o aluno a assimilar a estrutura da matéria de ensino e a reorganizar sua própria estrutura cognitiva, mediante a aquisição de novos significados que podem gerar conceitos e princípios (Moreira & Masini, 2016, p. 47). No entanto, podemos destacar como variáveis importantes na facilitação da aprendizagem significativa, na qual os autores, ressaltam que a manipulação deliberada de atributos relevantes da estrutura cognitiva para fins pedagógicos é levada a efeito de duas formas:

> *1.Substantivamente*, com propósitos organizacionais e integrativos, usando os conceitos e proposições unificadores do conteúdo da disciplina, que têm maior poder explanatório, inclusividade, generalidade e viabilidade no assunto. É importante selecionar as ideias básicas, para não sobrecarregar o aluno de informações desnecessárias, dificultando a construção de uma estrutura cognitiva adequada. A coordenação e integração do assunto em diferentes níveis também é importante. 2. Programaticamente, empregando princípios programáticos adequados a ordenação da sequência do assunto, partindo do estabelecimento de sua organização e lógica interna e, sucessivamente, planejando a montagem de exercícios práticos (Moreira e Masini, 2016 p. 47-48).

Sendo assim, é necessário que o professor, ao planejar a sua instrução, faça uma análise conceitual do conteúdo para identificar as propriedades essenciais do conceito e como eles estão estruturados, buscando a melhor maneira de relacioná-los aos conhecimentos prévios específicos e relevantes da estrutura cognitiva do estudante, utilizando os princípios da diferenciação progressiva (partindo dos conceitos mais gerais e inclusivos do conteúdo e diferenciando em termos de detalhe) e a reconciliação integradora explorando relações entre ideias apontando similaridades e diferenças importantes. A Figura 24 propõe um modelo de instrução de ensino, levando em consideração a hierarquia conceitual do conteúdo a ser ensinado.

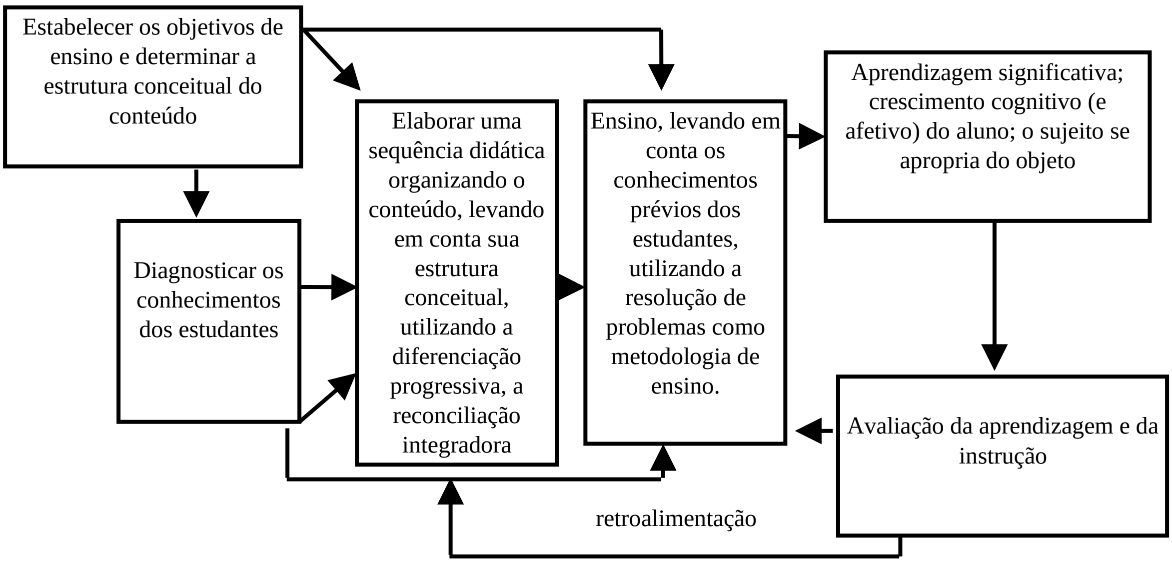


Figura 24- Um modelo para planejar a instrução de ensino consistente com a teoria de Ausubel. Adaptado de (Moreira, 2016, p. 49)

Deste modo, as aulas serão direcionadas de modo a colaborar para que o aluno obtenha na primeira etapa da aplicação da sequência didática a compreensão do conteúdo de função, por meio dos problemas aplicados no teste diagnóstico, de forma que o estudante expresse verbalmente as ideias conceituais de função, e generalize o conceito por meio da aplicação em outras situações propostas no teste final. A estratégia de resolução de problemas (ERP) em função é constituída por cinco momentos e o processo de assimilação será dirigido por quatro etapas, que serão explicadas a seguir:

O primeiro momento é definir o *objetivo de ensino* relacionado com atividade cognoscitiva que se deseja formar ou elevar seu nível. Ao definir o objetivo de ensino, deseja-se que o objeto a ser assimilado pelo estudante passe de um estado inferior a outro superior, ou seja, ficar no mesmo estado significa que não existiu uma aprendizagem efetiva (Mendonza e Tintore 2016).

O segundo momento é *a programação do conteúdo*. O professor deve organizar o conteúdo de ensino observando a hierárquica conceitual, no qual Ausubel argumenta que para o uso na aprendizagem significativa verbal e na retenção, pode ser maximizada ao tirar-se partido das dependências sequenciais naturais existentes na disciplina e do fato de que a compreensão de um tópico pressupõe, frequentemente, o entendimento prévio de algum tópico relacionado (Moreira, 2016, p. 48).

Do ponto de vista de Ausubel et al. (1980), o desenvolvimento de conceitos ocorre da melhor maneira quando os elementos mais gerais, mais inclusos, de um conceito são introduzidos em primeiro lugar e, então, o conceito é progressivamente diferenciado em termos de especificidades e detalhes, sendo assim, a partir da definição de função é necessário que se estabeleça as propriedades essenciais do conceito de função, organizando o conteúdo de ensino de forma hierárquica.

O terceiro momento é *averiguar os conhecimentos prévios* dos estudantes, relacionando com o objetivo de ensino. De acordo com a teoria da aprendizagem significativa, onde devemos partir do que o aluno sabe, e se necessário utilizar-se dos organizadores prévios como uma estratégia elaborada pelo educador, no qual o conteúdo é apresentado com o objetivo de formar subsunçores na estrutura cognitiva do estudante, para que sirva de ponte para o novo conceito a ser aprendido. Sendo assim, o professor deve organizar, criar situações que leve o estudante a externalizar seu conhecimento prévio, no qual a partir da análise desse conhecimento, o professor irá elaborar os materiais potencialmente significativos e fará o planejamento da sequência didática buscando estratégias de ensino.

O quarto momento é *direcionar o estudante no processo de assimilação*, o professor deve realizar o planejamento considerando os subsunçores dos estudantes, nesta pesquisa optou-se pelo processo de assimilação subordinada.

A primeira etapa do processo de assimilação é a *aquisição do significado,* onde será apresentado o conceito de função e suas propriedades essenciais. Nesta etapa, o professor prepara uma atividade a partir de situações-problema, de forma que haja a interação do conhecimento prévio, com a ideia nova (no caso conceito de função), produzindo assim um novo significado. Posteriormente o professor verifica se o estudante compreendeu o que lhe foi ensinado (retroalimentação) e faz as correções necessárias para iniciar a etapa seguinte.

Na segunda etapa, *retenção inicial,* o professor aplica o princípio da diferenciação progressiva dando ênfase às ideias mais gerais para as mais particulares. O professor elabora e escolhe situações-problema que permitam ao estudante ampliar seus conhecimentos sobre o assunto estudado, estimula-os a desenvolverem estratégias para a solução dos problemas. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador, acompanhando a evolução dos estudantes no uso da linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias.

A terceira etapa é a *retenção posterior,* nesta etapa, a linguagem é importante como um facilitador da aprendizagem significativa, aumentando a manipulação dos conceitos e proposições tornando mais precisos e transferíveis. Como citado anteriormente, Ausubel et al.(1980), enfatiza que não se pode deixar de salientar a importância da linguagem na resolução de problemas, pois esta desempenha um papel importante na verbalização de conceitos ou proposições que resultam das operações de transformação envolvidas no pensamento, é o momento em que o estudante começa a explicar os conceitos envolvidos apropriando-se da linguagem matemática.

Nesta fase há uma perda gradual da dissociabilidade das ideias novas já modificadas pelo processo de interação. O estudante começa a esboçar alguma inferência e relacionar informações. A assimilação e retenção dos novos significados são obtidas a partir da diferenciação progressiva e reconciliação integradora, onde devem ser incluídos casos típicos para obter a generalização das ações. Com isso, é importante que o professor trabalhe em um nível de complexidade maior, como enfatiza Moreira:

> Retomar os aspectos mais gerais, estruturantes (i.e., aquilo que efetivamente se pretende ensinar), do conteúdo da unidade de ensino, em nova apresentação, porém em nível mais alto de complexidade em relação à primeira apresentação; as situações-problema devem ser propostas em níveis crescentes de complexidade; dar novos exemplos, destacar

> semelhanças e diferenças relativamente às situações e exemplos já trabalhados, ou seja, promover a reconciliação integradora; após esta segunda apresentação, propor alguma outra atividade colaborativa que leve os alunos a interagir socialmente, negociando significados, tendo o professor como mediador (Moreira, 2016, p.144-145).

Na quarta etapa, *assimilação obliteradora*, as ações começam a reduzir-se e automatizar-se rapidamente. As ideias novas e as estabelecidas deixam de ser dissociável e a menos estável se reduz a mais estável. Aqui nesta fase acontece a assimilação obliteradora, o estudante é capaz de compreender e expressar a ideia mais geral do conceito de função, o conhecimento se estabiliza e se automatiza. Os problemas se tornam mais abstratos e mais complexos, transferindo-os para outros contextos.

O quinto momento é *a retroalimentação e correção,* no qual o professor faz a observação direta e descrição do evento, reflexão sobre o método das aulas práticas e a execução das atividades na resolução dos problemas, deve-se enfatizar a necessidade de controle individual em cada operação e nunca apenas o produto final. A *correção,* identificação das falhas por meio das operações da ERP, retomadas dos pontos críticos da assimilação com ênfase nos objetivos das aulas práticas e vinculação sequencial das aulas.

Segundo Ausubel (2003), a correção deve-se à retroalimentação que é procedente dos exames que identificam as áreas que requerem mais explicações, atenção, revisões e esclarecimentos, sendo muito útil para diagnosticar dificuldades de aprendizagem. O quadro 22 apresenta o planejamento de cada etapa do processo de assimilação do conteúdo de função.

Quadro 22-Etapas do processo de avaliação do conteúdo de função

PROCESSO DE ASSIMILAÇÃO AUSUBELIANA DO CONTEÚDO DE FUNÇÃO		
Avaliação Diagnóstica		Na avaliação diagnóstica foi solicitado que os estudantes escrevessem a palavra FUNÇÃO (Matemática) no centro da folha. Em seguida, escrevessem tudo que compreendiam sobre o que é uma função em Matemática. Posteriormente os estudantes realizaram uma atividade com três problemas. O objetivo nesta etapa é diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes.
Aquisição do significado	**Nova ideia potencialmente significativa**	É importante lembrar que o "processo de assimilação de conceitos ocorre quando lhes são apresentados os atributos essenciais de um novo conceito. (AUSUBEL, 1978, p.106). A nova ideia potencialmente significativa foi proporcionado por uma aula expositiva, a partir de problemas, onde o professor ao longo de cada atividade foi desenvolvendo o conceito (Conceito de função, a noção de função via conjuntos, domínio, contradomínio e imagem).
	Produto interacional	Os estudantes responderam novamente a questão: O que é função em matemática? Com o objetivo de A interação do conhecimento já existente na estrutura cognitiva com a ideia nova produz um novo significado neste processo
Retenção Inicial		Nesta etapa foram realizadas aula expositiva onde o professor aplica o princípio da diferenciação progressiva dando ênfase às ideias mais gerais para as mais particulares. Também utiliza a reconciliação integradora enfatizando as diferenças e semelhanças entre os exemplos. Nesta etapa

	foram desenvolvidas atividades a partir de situações-problema, nos seguintes conteúdos: ✓ Estudo do domínio de uma função real; ✓ Gráfico de uma função; ✓ Função par e função ímpar; ✓ Função crescente e função decrescente; ✓ Função injetora, sobrejetora e bijetora. ✓ Função composta e inversa
Retenção Posterior	Nesta etapa o professor continua trabalhando a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora elaborando e escolhendo situações problemas que permitam o estudante ampliar seus conhecimentos sobre o assunto estudado. Então, se vai gradativamente apresentando problemas diferentes e aumentando o grau de complexidade
Assimilação Obliteradora	Nesta fase foi realizado um pós-teste, com três problemas, no qual o objetivo é verificar a transferência em outros contextos. Posteriormente os estudantes elaboraram um mapa conceitual.

Fonte: elaborado pelo autor

4.4.2 Sequência didática da Estratégia de Resolução de Problemas em Função

A metodologia adotada baseia-se na teoria da aprendizagem significativa e na estratégia de resolução de problemas (ERP) no conteúdo de função e função afim, para os estudantes da 1ª série do ensino médio. O grupo experimental foi submetido a esta sequência metodológica, o grupo controle sobre o modelo de ensino tradicional, com aulas expositivas e resolução de exercícios no final do conteúdo. As atividades são baseadas na exposição participativa, visto que, serão lançadas contradições que exercem a função de incentivar os estudantes na busca de resultados, abrindo espaço para discussões e exposições de suas ideias. Como mencionado anteriormente, a resolução de problema pode ser estudada de três formas: em que se ensina sobre resolução de problema, a resolver problema e matemática por meio da resolução de problema. Quando o professor ensinar através da resolução de problema está torna-se uma metodologia na aprendizagem.

Segundo os PCN’S a resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática tem como princípio que a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição, sendo assim, nesta pesquisa utilizou-se os problemas como ponto de partida aos conteúdos ministrados. O planejamento do Quadro 23 foi criado levando em consideração os seguintes elementos conteúdos, objetivos, tipo de aula e caracterização das etapas.

Quadro 23- Resumo do Plano de Ensino para o Desenvolvimento do conteúdo de Função

PLANO DE ENSINO- 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO		
DISCIPLINA	Matemática	
ASSUNTO	Função	
OBJETIVO GERAL	Compreender o conceito de função, associando a representações gráfica e/ou algébrica e transferindo para diversos contextos.	
Conteúdo	**Objetivo**	**Etapa Mental**

➢ Explorando intuitivamente a noção de função. ➢ Noção de função via conjunto	Os estudantes devem ser capazes de: ✓ Compreender e formalizar o conceito de função; ✓ Identificar relações entre duas grandezas; ✓ Verificar a noção de função por meio de exemplos práticos e resolução de problemas; ✓ Determinar a lei de formação de uma função; ✓ Reconhecer uma função em situações cotidianas	✓ Análise dos conhecimentos prévios; ✓ Introdução do conceito de função, mais inclusivo e menos estável, e formação do produto iterativo. ✓ Orientação do sistema de ações da ERP a partir de problemas de funções. ✓ A ação compreender o problema, solucionar o modelo e interpretar a solução estão vinculadas com o objetivo do problema.
➢ Domínio, contradomínio e imagem ➢ Estudo do domínio de uma função ℝ.	✓ Determinar a imagem e o domínio de uma função; ✓ Determinar a imagem de um elemento através do diagrama, através da lei $y = f(x)$.	✓ São introduzidas uma sequencias de ideias a_{i+1}, a_{i+2}, ... para a retenção e aperfeiçoamento dos significados, a partir da diferenciação progressiva. ✓ O estudante deve praticar (etapa mental) o sistema de ações tomando como base os problemas propostos. ✓ O professor deve exercer o controle do sistema de ações e corrigir se for necessário.
➢ Gráfico de uma função ➢ Função par e função Ímpar ➢ Função Crescente e decrescente	✓ Compreender o sinal de uma função a partir do seu gráfico, conhecidas as abscissas dos pontos de intersecção com o eixo x. Determinar os intervalos em que uma função é crescente, decrescente ou constante	✓ A partir da diferenciação progressiva de ideias a_{m+1}, a_{m+2}, ... devem ser resolvidos conflitos através do processo de reconciliação integradora. ✓ O professor deve exercer o controle do sistema de ações e corrigir se for necessário.
➢ Função composta ➢ Função inversa	✓ Definir e exemplificar a inversão de funções;	✓ Aplicar as funções na resolução de problema em novos contextos (transferências)

Fonte: a autora

4.4.2.1- 1ª Etapa: diagnóstico inicial

Objetivos:

- ✓ Identificar e analisar os conhecimentos prévios dos estudantes;
- ✓ Verificar a noção de função por meio da resolução de problemas;
- ✓ Orientar o estudante na resolução de problemas explicando as ações e operações da ERP que devem ser seguidas para resolver o problema;
- ✓ Avaliar o desempenho dos estudantes na resolução de problemas

DIAGNÓSTICO INICIAL

Escreva a palavra FUNÇÃO (Matemática) no centro da folha. Em seguida, escreva tudo que você compreende sobre o que é uma Função em Matemática. Escreva o que você entende, pode citar exemplos ou até mesmo desenhos.

FUNÇÃO

Avaliação diagnóstica pré-teste

Problema 1. Márcia ligou seu computador à rede internacional de computadores, internet. Para fazer uso dessa rede, ela paga uma mensalidade fixa de R$ 30,00 mais 15 centavos por cada minuto de uso. Quanto gastará Márcia se, durante o mês, utilizar a internet por 10h? O valor a ser pago por Márcia no final do mês depende de quê?

Quadro 24- Parâmetros do Problema 1-Pré-teste de função

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 1
Compreender o problema	Ler e extrair os elementos desconhecidos: a) determinar que 15 centavos igual a R$ 0,15 b) Observar que deve converter 10h em minutos e c) Observar que R$ 30,00 é uma taxa fixa.
Construir o modelo matemático	Determinar e nominar as variáveis e incógnitas: y= 30 + 0,15x, sendo que “**x**” é equivalente ao tempo de uso e **“y”** o valor a ser pago**.**
Solucionar o modelo	Solucionar o modelo: converter 10h em minutos = 600min e substituir no modelo y= 30 + 0,15 . 600 = 120.
Interpretar a solução	Resposta ao objetivo do problema: O valor a ser pago por 10h de uso é de R$ 120,00. O valor a ser pago depende do tempo de uso, e mesmo sem ser utilizado há uma taxa fixa de R$ 30,00.

Problema 2. Camila precisa ir ao CME para o aulão de Matemática, para não chegar atrasada decidiu ir de taxi. A corrida de taxi custa R$ 4,80 a bandeirada, mais R$ 0,40 por quilômetro rodado. A distância percorrida da casa de Camila até o CME foi de 15km, quanto ela vai pagar pela corrida? Este problema representa uma função? Justifique sua resposta.

Quadro 25- Parâmetros do Problema 2- Pré-teste de função

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 2
Compreender o problema	Compreender as variáveis dependentes e independentes. Entender que R$ é uma taxa fixa.
Construir o modelo matemático	y= 0,40x + 4,80
Solucionar o modelo	y= 0,40 . 15 + 4,80 = R$ 10,80

Interpretar a solução	Ela vai pagar pela corrida R$ 10,80. Sim é uma função, pois, a cada quilômetro percorrido existe um único valor.

Problema 3. Em Física, chamamos de movimento uniforme aquele em que a velocidade de um móvel é constante. Consequentemente, o espaço percorrido em intervalos de tempos iguais é sempre o mesmo. A função horária desse movimento é dada pela lei $s(t) = s_0 + v.t$, na qual **s** é a posição (em metros) do móvel no instante t (em segundos), s_0, a posição inicial, quando t = 0, e **v**, a velocidade constante (em m/s).

Considerando o texto acima e que a equação horária de certo móvel em movimento uniforme seja dada por s(t) = 15 + 5t, responda:

a) Qual é a variável dependente e independente?
b) Após quantos segundos o móvel estará a 48 m da posição inicial?
c) Após 2,5 minutos, em que posição se encontrará o móvel?

Quadro 26- Parâmetros do Problema 3- Pré-teste de função

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 3	
Compreender o problema	Elaborar os dados do problema. Compreender que a vaiável dependente é a posição do móvel (s). Compreender que a variável independente é o tempo (t)	
Construir o modelo matemático	48 = 15 + 5t	
Solucionar o modelo	c) 48 = 15 + 5t 48 – 15 = 5t 33 = 5t t = 6,6 s	c) 2,5 . 60 = 150s S(150) = 15 + 5 . 150 S(150) = 15 + 750 S(150) = 765m

Questões exploratórias

Após os alunos terem resolvido as questões a professora vai questionando a respeito da atividade.

a) Que conceitos da matemática estão envolvidos no problema?
b) Existem informações adicionais?
c) Quais são as condições e limitações do problema?
d) Quais operações matemáticas são necessárias para resolver as questões?
e) Qual a maior dificuldade nessa questão?
f) Há uma expressão que possa representar a questão 1?

Avaliação do resultado

Como foi o desenvolvimento discente?

O estudante participou das discussões em sala?

Fez questionamentos? Contribuiu com ideias?

4.4.2.2 2ª Etapa: Estratégia da Resolução de Problemas em função- Fase Formativa

É importante lembrar que o "processo de assimilação de conceitos ocorre quando lhes são apresentados os atributos essenciais de um novo conceito. (Ausubel, 1978, p.106). A nova ideia potencialmente significativa foi proporcionada por uma aula expositiva, a partir de problemas, onde o professor ao longo de cada atividade foi desenvolvendo o conceito de função. Nesta etapa, aplicou-se o princípio da diferenciação progressiva dando ênfase às ideias mais gerais para as mais particulares. Também utiliza a reconciliação integradora enfatizando as diferenças e semelhanças entre os exemplos. As atividades foram desenvolvidas a partir de situações-problema, nos seguintes conteúdos:

- ✓ Estudo do domínio de uma função real;
- ✓ Gráfico de uma função;
- ✓ Função crescente e função decrescente;
- ✓ Função par e função ímpar;
- ✓ Função injetora, sobrejetora e bijetora;
- ✓ Função inversa e função composta.

Objetivo: Que os estudantes sejam capazes de:

- ✓ Compreender o conceito de função e suas propriedades essenciais;
- ✓ Identificar relações entre duas grandezas;
- ✓ Verificar a noção de função por meio de exemplos práticos e resolução de problemas;
- ✓ Determinar a lei de formação de uma função;
- ✓ Determinar a imagem e o domínio de uma função;
- ✓ Realizar análises dos gráficos de uma função.

Procedimentos: A aula iniciará com a leitura da entrevista em quadrinhos (no qual os alunos vão conhecer os significados da palavra função), será discutido em sala de aula com o intuito de contextualizar e formalizar o conceito de função, logo após os alunos assistirão a um vídeo sobre noções de função (Novo Telecurso https://www.youtube.com/watch?v=rvxipLzboxw), finalmente, pedir aos alunos que explique/escrevam, o que compreenderam sobre função, após assistirem ao vídeo. Após as respostas dos alunos a professora realiza uma aula expositiva, enfatizando o conceito de função e suas propriedades essenciais sanando as dúvidas e dificuldades dos alunos, a Figura 27, é uma atividade que foi analisada com os estudantes, cujo o nome dessa atividade é a entrevista.

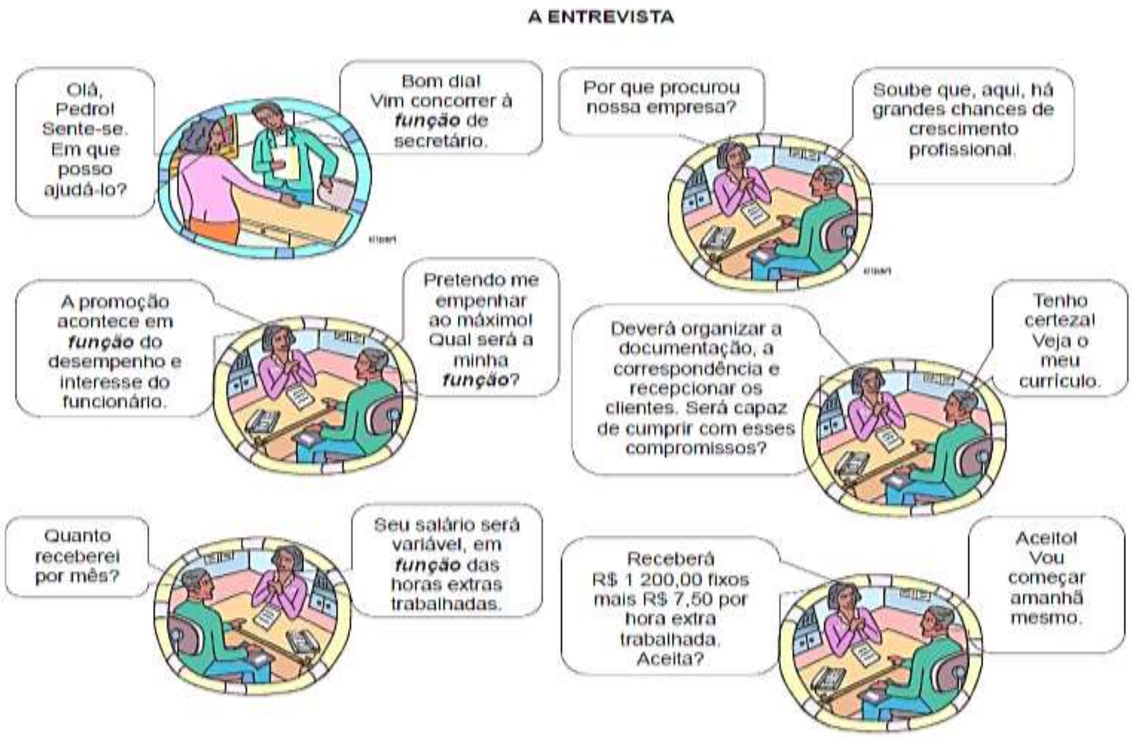


Figura 25- A entrevista

Discussão sobre o texto:

a) Você observou que a palavra função foi usada algumas vezes nesse quadrinho com significados diferente, cite quais significados voce observou no texto?
b) Analisando o texto, qual o significado de função em Matemática?
c) Como se explica o valor depende de outros valores, e o salario citado no texto?

Discussão do video:

a) Atraves do video assistido, o que é uma função? Qual o conceito de função em Matemática?
b) Função é um conceito importante na Matemática e outras ciencias? Qual seu ponto de vista?
c) Cite exemplos onde voce estabelece alguma relação com função no seu dia a dia ?

Após a discussão do vídeo a professora introduz o conteúdo de função a partir de situações problemas e posteriormente segue formalizando o conceito e suas propriedades essenciais através de aulas expositivas dialogada, seguindo da resolução de exercícios para que possa haver a consolidação. O quadro 27 nos traz algumas atividades proposta.

Quadro 27- Sequência de atividades proposta.

<table>
<tr><th>Enunciado</th><th>Objetivo: Que o aluno seja capaz de:</th></tr>
<tr><td>1) A professora Rocicléa resolve fazer uma pesquisa com seus alunos, colocando no quadro três paisagens: praia, fazenda e montanha. Em seguida, pediu para que cada um dos 30 alunos escolhesse sua paisagem preferida. Seja A o conjunto formado pelos alunos e B o conjunto formado pelas três paisagens, determine, em cada situação abaixo, se a relação f: A →B é uma função, justifique sua resposta.

a) todos os alunos escolheram praia.
b) dez alunos escolheram praia, dez alunos escolheram montanha e dez alunos escolheram fazenda.
c) todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de Joãozinho que disse não gostar de nenhuma.
d) todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de Joãozinho que disse gostar das três de maneira igual.</td><td>Analisar se os alunos se apropriaram do conceito de função, fazendo uma relação entre os alunos e a escolha da paisagem, construir o diagrama e a partir dele se identifica se é ou não uma função, justificando cada item</td></tr>
<tr><td>2) Para responder às questões propostas, considere A o conjunto formado por todas as escolas do Ensino Médio de sua cidade e B o conjunto formado pela quantidade de professores de sua escola.
a) Podemos dizer que existe uma função de A e B? Justifique.
b) Podemos dizer que existe uma função de B em A? Justifique.</td><td>Reconhecer uma função.</td></tr>
<tr><td>3) A tabela abaixo é o cronograma de atividades em uma academia durante a sexta-feira nos turnos da manhã e da tarde. A academia fica fechada para o almoço de10 horas até as 14 horas.

<table><tr><th>Horário</th><th>Atividade</th></tr><tr><td>06:00 às 07:00</td><td>JUMP</td></tr><tr><td>07:00 às 08:00</td><td>CROSSFIT</td></tr><tr><td>09:00 às 10:00</td><td>ZUMBA (ADULTO)</td></tr><tr><td>14:00 às 15:00</td><td>ZUMBA (KIDS)</td></tr><tr><td>15:00 às 16:00</td><td>CAPOEIRA</td></tr><tr><td>16:00 às 17:00</td><td>JUMP</td></tr><tr><td>17:00 às 18:00</td><td>CROSSFIT</td></tr></table>
Considerando o conjunto A, formado pelos horários de atividades, e o conjunto B, formado pelas atividades oferecidas pela academia na sexta-feira. Podemos afirmar que a situação dada representa uma função do conjunto A para o conjunto B? Justifique sua resposta:</td><td>Perceber a relação de dependência entre os conjuntos representados em uma tabela e identificar essa relação como sendo uma função ou não.</td></tr>
<tr><td>4) Dados os conjuntos A={ -3, -2, 0} e B= {-5, -1, 2, 4} e a função f: A→ B, definida po $f(x) = x^2 - 5$, responda:
a) Represente essa função por meio de diagrama.
b) Qual o domínio da função? E o contradomínio?
c) Qual o conjunto imagem da função?</td><td>Identificar o domínio, contradomínio e imagem de uma função.</td></tr>
<tr><td>5) Considerando que o gráfico a seguir representa uma função, responda aos itens:</td><td>Identificar o domínio e imagem de uma função representação por um gráfico no plano cartesiano. Além disso, perceber se após aplicação das atividades os estudantes identificam as variáveis contínuas.</td></tr>
</table>

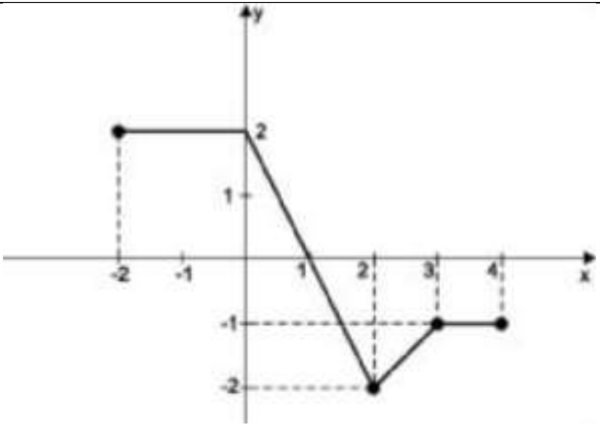
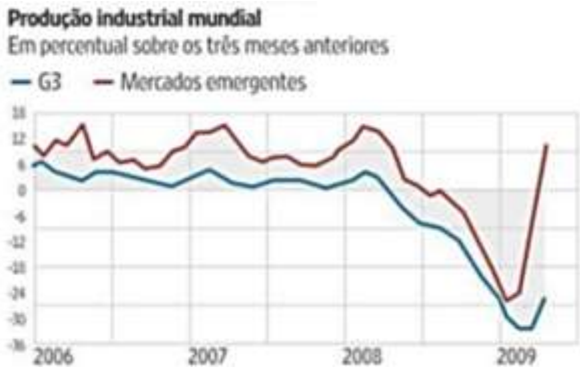
 Qual a imagem da função? Qual o domínio da função?	

Gráfico de uma função

Dando sequência as atividades, a professora projetou um gráfico na parede juntamente com as respectivas informações apresentadas:

Acompanhe a representação gráfica na situação a seguir:

O gráfico mostra a evolução da produção industrial, em porcentagem sobre os três meses anteriores, comparando os mercados emergentes com o G3 (EUA, zona do euro, Japão) no período de 2006 a 2009.



Fonte: Folha de S. Paulo, 5 de Julho de 2009

No gráfico, notamos que a produção industrial dos países emergentes e a do G3 apresentam um comportamento de crescimento e de quedas semelhantes. Nos dois grupos, a crise de 2008 provocou acentuada diminuição da produção. No início de 2009 vemos sinais de recuperação com crescimento maior nos emergentes.

O gráfico é analisado juntamente com os alunos onde o professor enfatiza que assim como foi verificado o comportamento desse gráfico, podemos verificar o comportamento das variáveis de uma função, por meio da análise da representação gráfica da função, ou seja, analisar o crescimento e decrescimento da função para os valores do domínio. O objetivo da atividade foi instigar os conhecimentos prévios dos estudantes acerca do tema, para que se pudesse posteriormente ancorar as definições formais de função crescente e função decrescente. Logo, a partir das questões levantadas e discussões propostas, pode-se estabelecer as definições de função crescente e função decrescente.

Podemos expressar que uma função f: X → ℝ, com X ⊂ ℝ, chama-se:

- Crescente quando $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

Quanto maior o valor de x maior será o valor correspondente y = *f*(x).

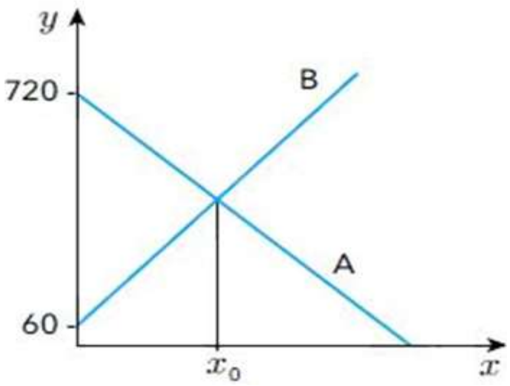
- ✓ Graficamente significa que se um ponto (x,y) sobre a função se move para a direita sua ordenada y se move para cima.

- Decrescente quando $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Quanto maior o valor de x menor será o valor correspondente y = *f*(x).

- ✓ Graficamente significa que se um ponto (x,y) sobre a função se move para a direita sua ordenada y se move para baixo.

Problema proposto: O reservatório **A** perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório **B** ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x. Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico. Identifique qual é função crescente e decrescente e justifique.



Quadro 28 -Parâmetros do problema proposto.

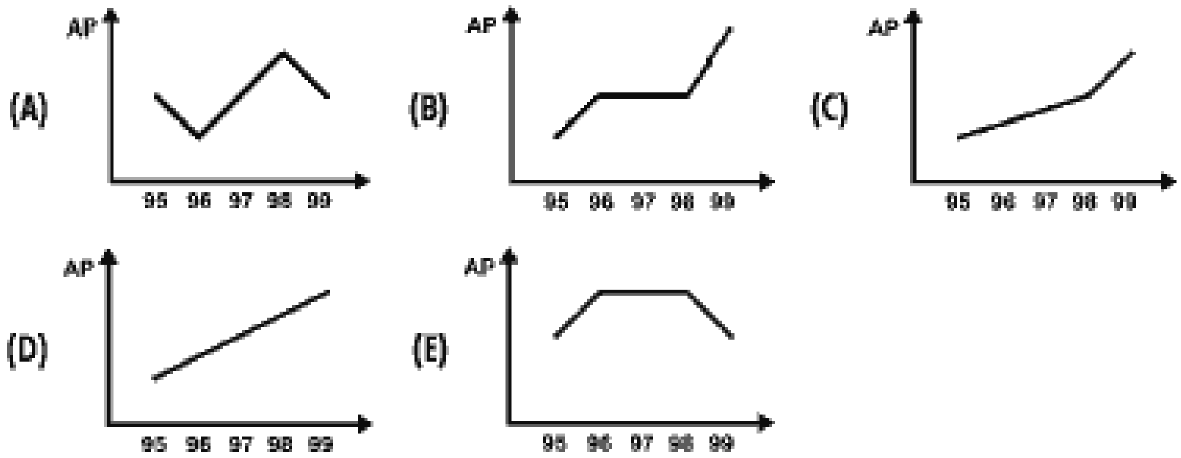
Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema
Compreender o problema	Compreender que no reservatório A, é uma função decrescente e no B uma função crescente. Interpretar o gráfico, observar que em x_0 é o momento que os dois reservatórios estão com o mesmo volume.
Construir o modelo matemático	VA(x_0) = VB(x_0) - 10x_0 + 720 = 12x_0 + 60z
Solucionar o modelo	-10x_0 + 720 = 12x_0 + 60 22x_0 = 660 x_0 = 30 horas.

Interpretar a solução	Observar que em 30h é o momento em que os dois reservatórios estão com o mesmo volume, onde o ponto x_0 é exatamente o ponto de equilibrio dos dois reservatorios, pois ele intercepta exatamente o ponto de interseção das duas retas. Justificar que no reservatório A como perde água então a < 0, logo é uma função decrescente, no B como ganha então a > 0, sendo uma função crescente.

Problema proposto (ENEM 2008): O quadro apresenta a produção de algodão de uma cooperativa de agricultores entre 1995 e 1999.

	Safra				
	1995	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
Produção (em mil toneladas)	30	40	50	60	80
Produtividade em Kg/hectare	1.500	2.500	2.500	2.500	4.000

O gráfico que melhor representa a área plantada (AP) no período considerado é:



No primeiro momento, os estudantes leram o problema com o intuito de identificar os dados que são informados na tabela: produção (em mil toneladas) e produtividade (em kg/hectare). Depois o professor questionou sobre o que se pede no problema: O gráfico que melhor representa a área plantada ao longo dos cinco anos considerados. Os estudantes devem observar as informações da tabela para calcular a área plantada, observando as unidades das grandezas. De acordo com a estratégia, podemos pensar na relação produtividade = produção/área plantada e, portanto, área plantada = produção/produtividade. Assim os estudantes devem criar uma nova tabela.

1995	1996	1997	1998	1999
30.000 /1.500 = 20 hectares	40.000 / 2.500 = 16 hectares	50.000 / 2.500 = 20 hectares	60.000 / 2.500 = 24 hectares	80.000 / 4.000 = 20 hectares

Analisando os valores da área plantada, percebemos que de 1995 a 1996 ela é decrescente, de 1996 a 1998 ela é crescente, e de 1998 a 1999 é novamente decrescente. Alternativa ***a*** é a resposta correta.

Ampliando o problema.

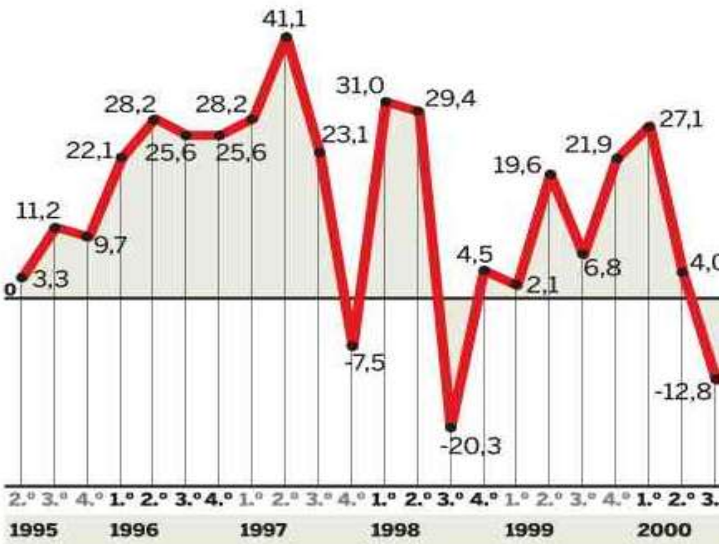
a) Qual seria a área plantada em 1998 se a produtividade fosse 3000 kg/hectare, 4000 kg/hectare e 5000 kg/hectare, respectivamente.

b) Aproveitando os resultados da alternativa **a**, analise o que ocorre com a área plantada de uma plantação quando se aumenta a produtividade mantendo-se a mesma produção.

c) Se aumentarmos a produtividade mantendo a mesma área plantada, o que ocorrerá com a produção?

Problema proposto: O gráfico abaixo relaciona o fluxo líquido de investimentos por trimestre (em bilhões de dólares) nos países emergentes entre 1995 e 2000.

Figura: Investimentos nos países emergentes



Fonte: O Estado de SP, 21 de Agosto de 2006

Observando o gráfico identifique:

a) Os intervalos nos quais o fluxo de investimentos foi crescente;

b) Os intervalos nos quais o fluxo de investimentos foi decrescente;

c) Os intervalos nos quais o fluxo de investimento foi positivo;

d) os intervalos nos quais o fluxo de investimento foi negativo;

e) os fluxos de investimentos máximo e mínimo.

Atividade proposta: Em cada caso, construa o gráfico de uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que:

a) seja positiva em todo seu domínio;

b) seja negativa em todo seu domínio;

c) a função f tenha um valor máximo no 1º quadrante;

d) a função f seja crescente em $]-\infty, 0]$;

e) a função f seja decrescente em $[2, 4]$.

f) Para quais valores de x a função $f(x) = 2x + 1$ é nula? Explique sua resposta.

g) Para quais valores de x a função h(x) tem $y = 0$? Explique sua resposta.

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

As funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas, foram introduzidas a partir de problemas, para que assim pudéssemos chegar ao seu conceito.

Exemplo 1: A altura de uma criança depende de sua idade. Quanto maior a idade, maior a altura, sendo que essa altura tende a se estabilizar, ou seja, a ficar constante a partir de uma certa idade. A experiência mostra que crianças saudáveis crescem alguns centímetros por ano e que esse crescimento se estabiliza com o tempo, determinando a altura final do adulto. Se a idade for medida em anos e a altura em centímetros, e o intervalo de tempo for, por exemplo, de 0 a 10 anos, podemos construir uma tabela de alturas para a criança em questão:

Idade (anos)	**Altura (cm)**
0	48
1	73
2	86
3	95
4	102
5	108
6	113
7	119
8	125
9	131
10	139

Como idades diferentes correspondem a alturas diferentes, a função *f*, dada pela tabela acima, que associa a cada idade a altura de nossa criança, é injetiva.

Exemplo 2. A pressão atmosférica varia com a altitude, sendo que, quanto maior é a altitude, menor é a pressão atmosférica. A seguir, exibimos uma tabela com a relação entre algumas altitudes e suas respectivas pressões atmosféricas.

Altitude (em cm)	Pressão (mmHg)
0	760
1000	674
2000	596
3000	526
4000	462
9000	231

Vemos que a altitudes diferentes correspondem pressões atmosféricas diferentes. Logo, a função que fornece a pressão atmosférica para cada altura também é injetiva. Dizemos que uma função f: A → B é injetiva, ou injetora, se elementos diferentes do domínio estão associados a elementos diferentes do contradomínio.

Nesses dois exemplos, podemos nos perguntar: o que acontece nos intervalos entre os números que estão na tabela? De outro modo: se uma criança tem 86 cm de altura aos 2 anos e 95 cm de altura aos 3 anos, que altura ela terá aos dois anos e meio? E como varia a altura da criança de um dia para o dia seguinte? Neste período de 1 ano em que a criança cresceu de 86 cm para 95 cm, houve um instante em que ela teve altura exatamente igual a 30π? Esses questionamentos são levantados, discutidos e resolvidos com a mediação do professor e a participação dos estudantes.

Exemplo 3 (O carteiro). Seja A um conjunto de cartas e seja B um conjunto de casas. Podemos pensar no conjunto A como a bolsa de um carteiro e B como o conjunto de casas dentre as quais estão aquelas que serão visitadas pelo carteiro. Se cada casa de B receber pelo menos uma carta, então a função f: A → B é sobrejetiva. Se alguma casa do conjunto B não receber cartas, então a função f: A → B não é sobrejetiva. Dizemos que uma função é sobrejetiva, ou sobrejetora, se a sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, se cada elemento do contradomínio é imagem de algum elemento do domínio. Dizemos que uma função é bijetiva, se ela for injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

A partir dos exemplos o professor vai formalizando o conceito dessas funções, trazendo outros exemplos a partir de gráficos conjuntos e problemas, para que assim haja a consolidação do conteúdo, no quadro 29 segue as atividades que foram realizadas pelos estudantes.

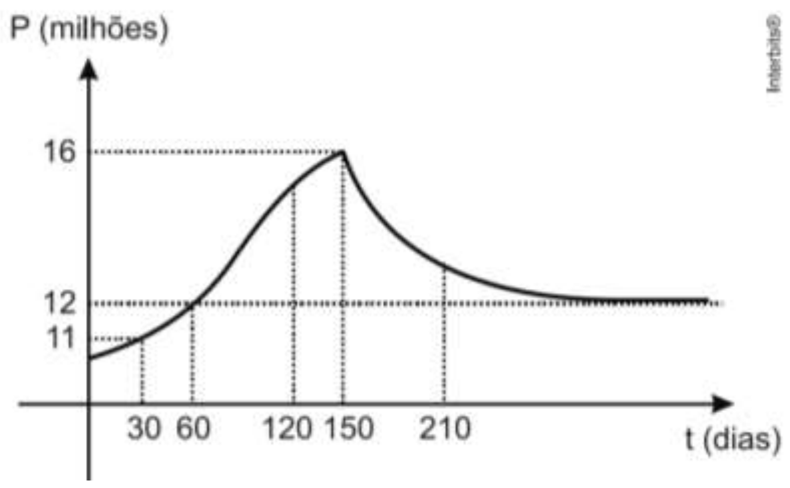
Quadro 29 - Sequência de atividades proposta.

Enunciado	Objetivo: Que o aluno seja capaz de:
1) Patrícia é nova em sua escola e acabou de conhecer três meninas: Alexandra, cujo signo de Aries; Beatriz, cujo signo é Virgem; e Cíntia, cujo signo é Leão. Considerando o conjunto A formado pelas novas colegas de Patrícia e o conjunto B dos 12 signos do zodíaco, classifique em verdadeiros ou falso justificando sua resposta: a) A → B é injetiva. b) A → B é sobrejetiva. c) A → B é bijetiva.	Identintificar e por meio da linguagem, justificando quando uma função é injetiva, sobrejetiva e bijetiva.
2) Em uma biblioteca, todos os livros são catalogados pelo título, além de outros identificadores, e há títulos com mais de um exemplar. A função f cujo domínio e o conjunto de todos os livros catalogados e o contradomínio e o conjunto dos títulos dos livros catalogados dessa biblioteca é injetiva? Justifique	Compreender o que é uma função bijetiva.
3) Construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva. a) $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow f(x) = 3x - 4.$ b) $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-1, 2, 5, 8\}$ $x \rightarrow f(x) = 3x - 4.$ c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow f(x) = 3x - 4$	Construir o gráfico das funções dadas, classificando-as.

4.4.2.3 Pós-teste

Nesta fase foi realizado um pós-teste, com três problemas, no qual o objetivo é verificar a transferência em outros contextos. Posteriormente os estudantes elaboraram um mapa conceitual.

Problema 1: (UFPB-2012) O gráfico a seguir representa a evolução da população P de uma espécie de peixes, em milhares de indivíduos, em um lago, após t dias do início das observações. No 150º dia, devido a um acidente com uma embarcação, houve um derramamento de óleo no lago, diminuindo parte significativa dos alimentos e do oxigênio e ocasionando uma mortandade que só foi controlada dias após o acidente.



Com base no gráfico e nas informações apresentadas, julgue os itens a seguir, justificando sua resposta.

a) A população P de peixes é crescente até o instante do derramamento de óleo no lago;

b) A população P de peixes está representada por uma função injetiva no intervalo [150, 210]?

c) A população P de peixes atinge um valor máximo em t =150?

d) A população P de peixes, no intervalo [120,210], atinge um valor mínimo em t =120?

e) A população de peixes tende a desaparecer, após o derramamento de óleo no lago?

f) Expresse sua compreensão do problema analisando o enunciado e o gráfico.

Quadro 30- Parâmetros do Problema 1- Pós-teste, função

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 1
Compreender o problema	Interpretar o gráfico, compreender que cada elemento da imagem está associado a um único elemento do domínio.
Construir o modelo matemático	
Solucionar o modelo	a) Analisando o gráfico, observa-se que a linha cresce de 11 até 16 milhões. b) Não, pois para valor de *t* temos um valor *P*, logo a função neste intervalo é bijetora. c) Sim, no instante em que p = 16. d) Não, pois o valor de p (210) < p (120). A linha pontilhada que passa por 120 é maior que a linha que passa por 210. e) Não, veja que a população fica constante em p = 12, portanto, não podemos afirmar que a população vai acabar.
Interpretar a solução	A interpretação das situações é pessoal de acordo com a respostas da letra f.

Problema 2: Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, f (t) = a · 2^{-bt}, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes. Se a população inicial (t = 0) e 1024 e após 10 anos seja a metade da inicial, determine:

a) os valores de a e b.

b) o tempo mínimo para que a população se reduza a 1/8 da população inicial.

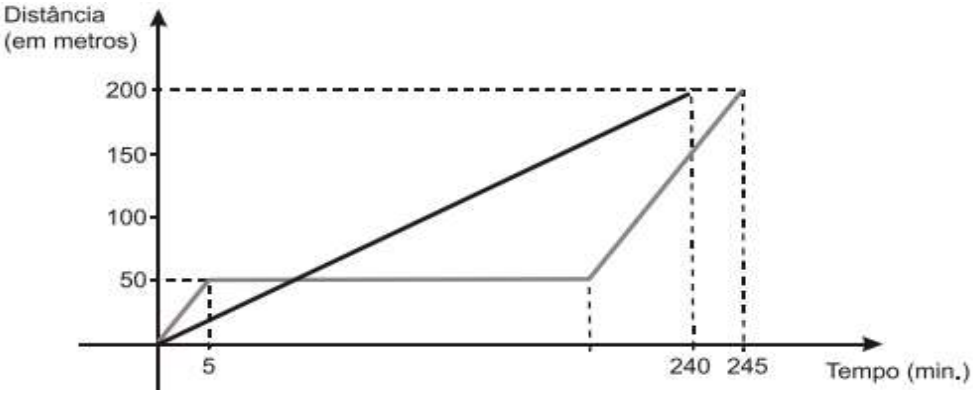
c) se essa função e injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

Quadro 31- Parâmetros do Problema 2

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 2
Compreender o problema	Relacionar os dados do problema, distinguir as funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva.
Construir o modelo matemático	a) a · $2^{-b.0}$ = 1024 b) 1024 · 2^{-t} = 128
Solucionar o modelo	a) a · $2^{-b.0}$ = 1024, donde temos a = 1024. Depois de 10 anos, ficamos com 1024 · 2^{-10b} = 512, que simplificando, chegamos a b = 1/10. b) 1024 · 2^{-t} = 128, donde temos t = 7 anos.

Interpretar a solução	c) Como a população é decrescente, mas nunca negativa, iniciando em 1024, a função não pode ser sobrejetiva, pois CD ≠ Im. Agora, se tomarmos $f(t_1) = f(t_2)$, temos que $1024 \cdot 2^{-t_1/10} = 1024 \cdot 2^{-t_2/10}$, o que implica em $t_1 = t_2$, ou seja, a função f é injetiva.

Problema 7: A fábula A lebre e a tartaruga, do escritor grego Esopo, foi recontada utilizando-se o gráfico abaixo para descrever os deslocamentos dos animais.



Suponha que na fábula A lebre e a tartaruga apostam uma corrida em uma pista de 200 metros de comprimento. As duas partem do mesmo local no mesmo instante. A tartaruga anda sempre com velocidade constante. A lebre corre por 5 minutos, para, deita e dorme por certo tempo.

Quando desperta, volta a correr com a mesma velocidade constante de antes, mas, quando completa o percurso, percebe que chegou 5 minutos depois da tartaruga. Considerando essas informações,

a) Determine a velocidade média da tartaruga durante esse percurso, em metros por hora.
b) Determine após quanto tempo da largada a tartaruga alcançou a lebre.
c) Determine por quanto tempo a lebre ficou dormindo.
d) Escreva a função que determina o tempo percorrido em função da velocidade da lebre e o da tartaruga.

Quadro 32 -Parâmetros do Problema 3- Pós-teste, função.

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 3
Compreender o problema	Compreender o problema fazendo a análise do gráfico, observando o tempo que a lebre parou, observando que o tempo gasto está em função da velocidade.
Construir o modelo matemático	Y = 50x para a tartaruga Y = 10x para a lebre
Solucionar o modelo	a) Observe que a tartaruga completou os 200 metros em 240 minutos, ou seja, em 4 horas. Portanto, sua velocidade média foi de 200/4 = 50 metros por hora.

	c) A equação que determina a quantidade de metros percorrida pela tartaruga em função do tempo é $f(t) = 200/240 \Rightarrow f(t) = 5/6\,t$. Pelo gráfico a tartaruga alcança a lebre quando atinge 50m do seu percurso. Se $f(t) = 50 \Rightarrow 5/6t = 50 \Rightarrow t = 60min = 1h$. c) A lebre percorreu 50m em 10min, logo sua velocidade média foi de 10 metros por minuto. Para percorrer 200, ela deveria gastar 20 min, como gastou 245, então ela dormiu 245 - 20 = 225 min. d) y = 50x tartaruga y = 10x lebre
Interpretar a solução	Compreender o problema fazendo a análise do gráfico, observando o tempo que a lebre parou, observando que o tempo gasto está em função da velocidade.

4.4.3 Sequência Didática da Estratégia de Resolução de Problemas em Função Afim

A função afim nos favorece uma interessante gama de aplicações que motiva o estudante a mostrar, através de exemplos, como um conceito matemático pode ser usado para resolver problemas variados no nosso dia-a-dia. Sendo assim, apresentamos uma sequência didática baseada na resolução de problemas, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa, com o objetivo de desenvolver a aprendizagem dos conceitos relacionados a este conteúdo. Essa sequência didática foi desenvolvida com os estudantes do grupo experimental, os estudantes do grupo controle foram submetidos a metodologia tradicional seguindo o livro didático e resolvendo os exercícios do final do capítulo.

Os problemas foram proposto aos estudantes (lembrando que o início do conteúdo é sempre a partir de um problema), no qual os mesmos faziam a leitura individual do problema e depois a leitura em coletivo, durante a aula o professor desenvolvia um diálogo instigando e incentivando os alunos. Eles registraram as soluções na lousa, defenderam as conclusões obtidas, e discutiram até o consenso sobre os resultados corretos. O professor apresenta a formalização do conteúdo estruturada em linguagem matemática, e propõe novos problemas para avaliar e ampliar a construção dos conceitos.

4.4.3.1 Avaliação Diagnóstica: Pré-teste

Como já foi mencionado, Ausubel et al. (1980, 2003) enfatiza que a variável mais importante é analisar os conhecimentos prévios dos estudantes, logo realizamos um teste diagnósticos com as quatro turmas, no qual este teste é uma prova de lápis e papel que contém três problemas, que tem como objetivo:

- ✓ Averiguar os conhecimentos prévios dos estudantes;
- ✓ Verificar a noção de função afim por meio da resolução de problemas;
- ✓ Avaliar o desempenho dos estudantes na resolução de problemas

Problema 1: Uma empresa de telefonia móvel oferece um plano no qual o cliente paga um valor fixo de RS 50,00 por um pacote de 75 minutos mensais, mais R$ 0,75 para cada minuto adicional. Considerando a situação descrita, determine o que se pede:

a) O valor que um usuário vai pagar, sabendo que ele consumiu 120 minutos num mês.
b) Se o valor da conta de um cliente desse plano for R$ 106,25, qual o tempo, em minutos, consumido por ele?
c) Escreva a lei de formação que expressa o preço da conta telefônica em função do tempo, em minutos, que excede o pacote.

Quadro 33- Parâmetros do Problema 1, função afim

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema
Compreender o problema	Elaborar os dados do problema, observar as unidades de medidas. Verificar a relação entre as grandezas envolvidas.
Construir o modelo matemático	c)f(x) = 50 + 0,75x, em que *x* representa os minutos adicionais do mês. Para o caso de consumos menores ou iguais a 75 minutos, a pessoa vai pagar somente a taxa mínima do plano.
Solucionar o modelo	a- 120 – 75 = 45 minutos adicionais. Logo, 45 . 0,75 = R$ 33,75. Portanto, o valor a pagar será 50 + 33,75 = R$ 83,75. b- 106,25 – 50,00 = 56,25. Logo, 56,25: 0,75 = 75 minutos adicionais. Portanto, o consumo foi de 150 minutos.

Problema 2: Um representante comercial recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 1.500 e uma variável, que corresponde a uma comissão de 6% sobre o total das vendas efetuadas durante o mês.

a) Qual o salário mensal desse representante em função de total de vendas?
b) Quanto receberá no mês que vender R$ 5.000?
c) Quanto deverá vender por mês para ter um salário de R$ 3.000?
d) Quanto receberá caso não consiga vender nada?
e) Escreva a lei de formação da função do salário mensal desse representante?

Quadro 34 -Parâmetros do Problema 2, função afim

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema
Compreender o problema	Compreender que parte fixa do salário (independente das vendas) R$ 1.500,00 valor de *b*. O percentual sobre as vendas é 6% (0,06) valor de *a*. Variável do problema; valor de venda efetuada durante o mês (*x*).
Construir o modelo matemático	Lei de formação do salário mensal: f(x) = 0,06x + 1500
Solucionar o modelo	a) Y = 0,06 . 5000 + 1.500 = R$ 1.800, portanto ele receberá R$ 1.800 no mês que vender R$ 5.000 b) 3.000 = 0,06 x + 1.500 ⇒ x = 25.000, logo ele terá que vender RS 25.000 para ter um salário de R$ 3.000 c) Parte fixa do salário independente das vendas, no caso R$ 1.500 d) f(x) = 0,06x + 1500

Problema 3: Em um parque de diversões, cada bilhete dá direito a utilizar apenas um brinquedo, uma única vez. São duas opções de pagamento;

Opção 1: R$ 5,00 por bilhete

Opção 2: valor fixo de R$ 40,00 por dia, acrescido de R$ 2,00 por bilhete.

a) Escreva as funções para as duas opções de pagamento.
b) Se uma pessoa tem R$ 50,00 para gastar no parque, qual das opções lhe permite comprar a maior quantidade de bilhetes?
c) Em que condições a opção 2 é a mais vantajosa?

Quadro 35-Parâmetros do Problema 3, função afim

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema
Compreender o problema	Elaborar os dados do problema, extraindo os elementos conhecidos e desconhecidos, compreendendo a lei de formação que envolve as duas funções. ⇒
Construir o modelo matemático	Opção 1: f (x) = 5x Opção 2: f (x) = 40 + 2x
Solucionar o modelo	B) Opção 1: f (x) = 5x ⇒ 50 = 5x ⇒ x = 10 Opção 2: f (x) = 40 + 2x ⇒ 50 = 40 + 2x ⇒ x = 5. A opção 1 é mais vantajosa para quem quer gastar apenas 50 reais. C) 5x > 40 + 2x ⇒ 3x > 40 ⇒ x > 13,3333... Logo, a partir de 14 bilhetes, a opção 2 é mais vantajosa

4.4.3.2 Introdução à função afim-fase formativa.

As situações-problema exigem a transferência da linguagem de uma situação real para a simbólica, no qual o professor elabora e escolhe situações-problema que permitam ao estudante ampliar seus conhecimentos sobre o assunto estudado, estimula-os a desenvolverem estratégias para a solução. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como mediador, acompanhando a evolução dos estudantes no uso da linguagem matemática, conceitos relacionados e técnicas operatórias.

Nesta etapa, aplicou-se o princípio da diferenciação progressiva dando ênfase às ideias mais gerais para as mais particulares. Também utiliza a reconciliação integradora enfatizando as diferenças e semelhanças entre os exemplos. As atividades foram desenvolvidas a partir de situações-problema, nos seguintes conteúdos:

- ✓ Definição de função afim;
- ✓ Casos particulares importantes na função afim $f(x) = ax + b$;
- ✓ Caracterização de uma função afim;
- ✓ Gráfico de uma função afim;

- ✓ Função afim crescente e decrescente;
- ✓ Zero ou raiz da função afim;
- ✓ Estudo do sinal da função afim.

Objetivos: Associar situações do teste diagnóstico, introduzindo assim o conceito de função afim e seus casos particulares.

Conteúdos a serem abordados: função afim, caracterização da função afim, gráfico da função afim, função linear, função constante, função identidade.

Orientações ao professor: Através de diálogos e aulas expositivas, o professor utiliza as respostas dos alunos para reforçar o conceito de função, introduzir a função afim, linear, constante, identidade. O professor inicia um diálogo com os alunos a partir da atividade diagnóstica, de modo que os alunos observem as funções envolvidas no problema. A partir do diálogo, o professor de forma expositiva formaliza o conceito de função e os casos particulares.

O professor introduz o conteúdo com um problema simples, porém nesta etapa o professor é mediador, instigando e indagando os estudantes com perguntas com o intuito de formalizar o conceito de função e analisar de forma mais detalhada a situação problema.

Situação 1: José Roberto toma um táxi comum que cobra R$ 4,80 pela bandeirada e R$ 2,30 por quilômetro rodado. Ele quer ir à casa de um amigo que fica a 10Km dali. Quanto José Roberto vai gastar de táxi?

A resolução do exercício é simples, mas encontrar somente o resultado não levaria os estudantes a questionarem e, muito menos, a perceberem que o exercício é uma atividade de função afim. Então, antes de deixá-los buscar a resposta do problema, deve-se fazer junto com eles algumas perguntas, tais como:

a) Todos sabem o que é uma bandeirada?

b) O que se quer resolver no problema?

c) Quanto mais quilômetros andar, o que acontecerá com o valor da corrida?

d) Quanto ele vai gastar a mais para percorrer do terceiro ao quinto quilômetro? E do quarto ao sexto?

e) A partir do primeiro quilômetro, ao andar distâncias iguais, o valor pago será sempre igual?

f) Existe alguma quilometragem que possua dois preços diferentes?

g) Se ele andasse o dobro do percurso, ele iria pagar o dobro pela corrida?

Após a resolução do problema e das perguntas feitas pelo professor, os estudantes irão construir uma tabela para que eles percebam o padrão de variação de preço da corrida de acordo com a quilometragem (Tabela 3). Veja:

Tabela 3: Relação do valor pago com os quilômetros rodados

Quilômetros rodados(x)	Valor pago(y)	(x, y)
1	4,80 + 1 . 2,30	(1;7,1)
2	4,80 +2. 2,30	(2;9,4)
3	4,80 +3. 2,30	(3;11,7)
4	4,80 +4. 2,30	(4;14)
5	4,80 +5. 2,30	(5;16,3)
6	4,80 +6. 2,30	(6;18,6)
Q	4,80 +x. 2,30	(x; 4,80 + x. 2,30)

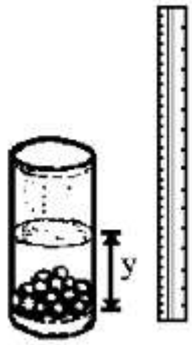
O uso da tabela ajudará também na generalização da função afim, o professor enfatiza aos estudantes que o valor a ser pago está em função da quantidade de quilômetros rodados mais um valor fixo, ou seja, a bandeirada $f(x) = 4{,}80 + x.\ 2{,}30$. Neste momento o professor formaliza o conceito de função afim: uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se função afim quando existem números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. No caso do problema, tem-se $f(x)$ é o preço a pagar, b é a bandeirada e a é a taxa por quilômetro rodado. A tabela facilitará na observação dos padrões nesse contexto e na construção de gráficos.

As perguntas servem para nortear o trabalho feito pelo docente e para estimular o discente. Como mencionado anteriormente, Ausubel et al. (1980) enfatiza que não se pode deixar de salientar a importância da linguagem na resolução de problemas, pois esta desempenha um papel importante na verbalização de conceitos ou proposições que resultam das operações de transformação envolvidas no pensamento, é o momento em que o estudante começa a explicar os conceitos envolvidos apropriando-se da linguagem matemática.

Caracterização da Função Afim

Geralmente uma das perguntas que costumamos ouvir quando se está estudando é:
Como saber se determinada situação problema é uma função afim? Para iniciar este conteúdo, o professor propõe duas situações problema, onde faz a leitura com os estudantes e vão surgindo os questionamento de forma que os estudantes venham interagir durante todo o processo, posteriormente o professor formaliza o conteúdo. Vale à pena analisar um caso extraído da prova do Enem (2010).

Situação 2 (ENEM 2010). Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Números de bolas (x)	**Nível de água (y)**
5	6, 35 cm
10	6, 70 cm
15	7, 05 cm

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água em função do número de bolas?

O que o aluno deve perceber para resolver essa questão, é que quantidades de bolas de vidro iguais farão com que o nível da água suba uma quantidade (y) em centímetros também igual. Dizendo de outra maneira, a medida que a água vai subir quando se aumentarem os números de bolinhas de 20 para 23 será a mesma quantidade que o nível vai subir quando se aumentarem os números de bolinhas de 27 para 30, isto é, sabendo-se que é um caso de função afim, pois para cada *x* bolinhas colocadas no cilindro, o nível de água subirá o mesmo nível. Não se pode deixar de citar que as bolinhas de vidro têm formato esférico e mesmo volume. Além disso, o formato do copo de vidro é um cilindro. Assim, como todas as bolinhas de vidro têm o mesmo volume, o nível de água subirá exatamente a mesma quantidade para cada bolinha.

Logo, precisa-se apenas de dois pontos para determinar a função afim na forma $f(x) = ax + b$. Sabe-se, pela tabela, que, quando há cinco bolas de vidro na jarra, a medida será 6,35 e que, quando há dez bolas de vidro na jarra, a medida da jarra será 6,75cm, isto é, x_1= 5 teremos $f(x_1)$= 6,35cm e, quando se tiver x_2= 10 teremos $f(x_2)$= 6,75cm. Usando a fórmula para o coeficiente *a*:

Para *f*(5), tem-se: $f(5) = 6{,}35 = a \,.\, 5 + b$

Para *f*(10), tem-se: $f(10) = 6{,}75 = a \,.\, 10 + b$

Destacam-se essas duas relações de igualdade:

$6{,}75 = a \,.\, 10 + b$

$6{,}\ 35 = a \,.\, 5 + b$

Se subtrair uma igualdade da outra, obtém-se o seguinte resultado: a é igual a 0,05. Descobre-se assim, o valor de um dos coeficientes. Para encontrar o outro, basta substituir o resultado em uma das igualdades. Aqui, será utilizada a segunda:

Como $a = 0{,}07$, tem-se $6{,}35 = 0{,}35 + b$. Assim, obtém-se $b = 6$.

Como $f(x) = ax + b$ e $a = 0{,}07$ e $b = 6$, essa função, para $f(5) = 6{,}35$ e $f(10) = 6{,}75$, será a seguinte: $f(x) = 0{,}07x + 6$.

A lei de formação desta função, dará a altura em centímetro em função da quantidade de bolas de vidro depositadas no recipiente, ou seja, o nível que a agua irá subir depende apenas da quantidade de bolas que serão colocadas no cilindro, isto é, para cada bola colocada no cilindro, a variação do nível da água será sempre igual (nessa questão, o professor introduz o conceito de taxa de variação da função afim). Conforme se pode ver na Figura 28.

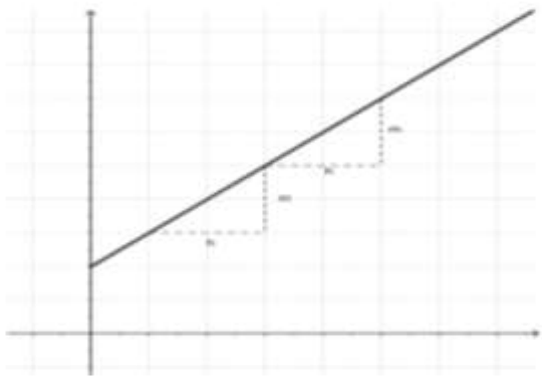


Figura 26- Relação entre a altura da água(m) e a quantidade de bola(h).

Situação 3: Numa sapataria um vendedor determinava o número do sapato de seus clientes medindo o seu pé com uma escala na qual, em vez de centímetros, estavam marcados os números ... 36, 37, 38... Sabendo que esses números estão igualmente espaçados e que um pé de 20 cm corresponde ao tamanho 32 na escala da sapataria e 28 cm a 42. Qual a lei que relaciona o comprimento em cm do pé com o número do sapato? (LIMA, 2013).

O fato mais importante que os estudantes devem perceber nesta questão é que esses números estavam igualmente espaçados, isto é, a distância entre cada um deles era constante. Isto quer dizer que acréscimos iguais no tamanho do pé correspondem a acréscimos iguais no número do sapato. Dito de outro modo: se um certo pé crescer h centímetros para passar do tamanho 33 ao 34, precisará crescer os mesmos h centímetros para passar do 38 ao 39.

A afirmação de que os números da escala estão igualmente espaçados, nos diz que acréscimos sofridos na escala são proporcionais aos acréscimos dado no pé do cliente. Assim, pela caracterização da função afim, temos que *f*(*x*) = *ax* + *b*, onde *x* é o valor em cm do pé do cliente e *f*(*x*) o número do sapato. Como x_1 = 20, implica *f*(x_1) = 32 e x_2 = 28 a *f*(x_2) = 42, obtém-se:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2) - (x_1)}$$

$$a = \frac{42 - 32}{28 - 20} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{4}$$

Assim, $f(x) = \frac{5}{4}x + b$.

Substituindo *x* = 20 e *f*(*x*) = 32, obtemos *b* = 7. Consequentemente, a expressão que relaciona o tamanho do sapato *f*(*x*) ao tamanho do pé *x* é dado por $f(x) = \frac{5}{4}x + 7$.

A caracterização da função afim Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de *h*, mas não de *x*, então *f* é uma função afim.

Observação: A hipótese de que $f(x+h) - f(x)$ não depende de *x* as vezes se exprime dizendo que "a acréscimos iguais em *x* correspondem a acréscimos iguais em *f*(*x*)." Outra maneira de se exprimir esta hipótese consiste em dizer que os acréscimos sofridos por *f*(*x*) são proporcionais aos acréscimos dados a *x*.

O professor segue a partir do problema apresentado a aula expositiva formalizando o conteúdo, posteriormente os alunos irão resolver em dupla a atividade do quadro 36 para que haja a consolidação.

Quadro 36- Atividades proposta

Enunciado	Objetivo: Que o aluno seja capaz de:
1) Em certa cidade o valor cobrado por uma corrida de taxi é de quinze reais fixos mais oitenta centavos por cada quilômetro rodado. a) Expresse a função, definida nos reais positivos, que relaciona o preço P a ser cobrado por uma corrida de acordo com o número x de quilômetros rodados. b) Percorrendo 17 km nesse taxi, quanto deveremos pagar pela corrida? c) Qual será o valor máximo de quilômetros que poderemos percorrer nesse taxi tendo R$ 50,00 para pagar?	Assimilar o conceito de função afim associando a situações do cotidiano.
2) Em certa cidade, a assinatura residencial de uma linha telefônica custava R$ 34,50 e dava direito à utilização de 100 minutos. Caso o consumidor excedesse os 100 minutos, ele pagaria R$ 0,08 por minuto excedente. a) Quanto o consumidor pagaria por sua conta se utilizasse 82 minutos em um mês? E se utilizasse 300 minutos? b) Um consumidor pagou R$ 52,90 por sua conta telefônica. Quantos minutos esse consumudor usou? c) Qual a lei de formação da função que representa essa situação.	Assimilar o conceito de função afim associando a situações do cotidiano.

Se, em uma residência dessa cidade, havia três linhas telefônicas, qual era o valor mínimo gasto com telefone em um mês?	

construção do gráfico da função afim

Nesta etapa o estudante a partir de problemas irá esboçar gráficos e analisá-los. Compreender quando a função é crescente e decrescente, intersecção nos eixos *x* e *y*, zero da função e taxa de variação.

Objetivo: Aplicar diferentes valores de x na função, localizar os pares ordenados no plano cartesiano e reconhecer que o gráfico de uma função afim é uma reta.

Conteúdos abordados: gráfico da função afim, zero da função, função crescente e decrescente.

Orientações ao Professor: A partir dos problemas que foram discutidos em sala de aula, o professor faz levantamento de questões e hipóteses para que posteriormente ocorresse as definições dos conteúdos a serem abordados.

Questão 1. O ano de 2015 está sendo atribulado para todos os setores da economia brasileira, isto não é novidade. Especialistas afirmam que a tormenta deve permanecer durante o resto deste ano e começar a amansar no ano de 2016. Enquanto isto, muitas empresas do comércio não estão aguentando trabalhar no vermelho e, sem enxergar saída, fechando as portas. Com isso, montar um negócio nos tempos de hoje não é simplesmente ter dinheiro em caixa e pronto.

Independente do tipo de negócio que você deseja montar é muito importante fazer um planejamento. Portanto, a primeira coisa a ser feita é pesquisar que tipo de negócio seria interessante para a sua região e que você tenha afinidade e aptidão para trabalhar. A partir daí é possível começar a tomar as outras providências para montar a empresa.

Marcos possui uma pequena fábrica de fogão. Ele percebeu que tem uma despesa fixa (aluguel da fábrica, salários etc.) de R$ 6.000,00 por mês. O custo para a fabricação de um fogão é de R$ 450,00 e o preço de venda é de R$ 1.050,00.

a) Escreva o custo mensal (C), a receita (R) e o lucro (L) em função do número *x* de fogões vendidos.
b) Determine o ponto de equilíbrio, ou seja, o número de fogões que devem ser vendidas para que o custo e a receita se equilibrem, isto é, o valor de *x* para que L = 0. Qual será o lucro da fábrica se produzir e vender 25 fogões por mês?

c) Suponha que a fábrica reduza o preço do fogão para R$ 950,00. Quantas fogões a fábrica terá que produzir e vender por mês para ter lucro?

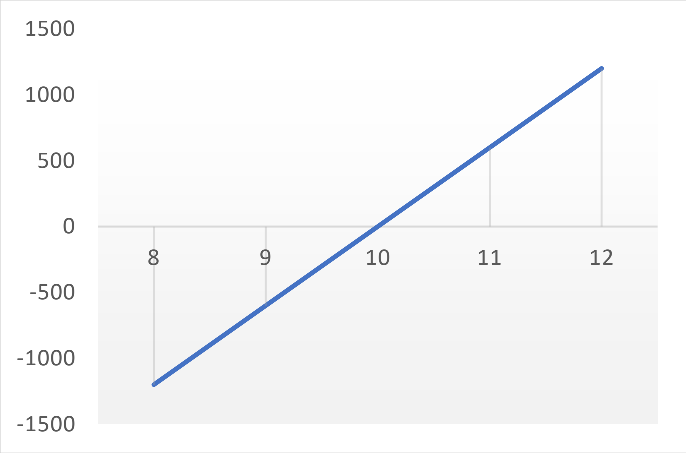
O professor faz a leitura do problema juntamente com os estudantes e faz algumas perguntas: O que vocês entendem por custo? O que é receita? O que é lucro? O professor aguarda um tempo para que os alunos respondam e analisa as respostas juntamente com os estudantes enfatizando que na economia as funções afins aparecem em várias aplicações, o professor segue explicando o que é custo, receita e lucro.

A função custo total, ou simplesmente função custo $C(x)$ de um certo produto, é aquela que descreve uma relação entre o custo total, custos fixo c_f e custo variável c_v (x), ou seja, a função custo é $C(x) = c_f + c_v(x)$. Entende-se por custo fixo c_f, aquele que não depende da quantidade produzida tais como aluguel, seguros, manutenção do prédio entre outros. O custo fixo c_f , pode ser entendido como uma função constante e desta forma seu gráfico é dado por uma semirreta paralela ao eixo horizontal. A parcela correspondente ao custo variável, é a que depende dos custos de produção propriamente ditos tais como aquisição de matéria-prima, pagamento de mão de obra, energia gasta etc.

O custo variável c_v (x), é assim chamado pelo fato de ser uma função da quantidade produzida. Seu gráfico começa na origem, pois não se tem gastos com a produção quando nada é produzido. Verifica-se também que para x variando dentro de um certo intervalo, o custo variável c_v (x), é em geral igual a uma constante k que recebe a denominação de custo variável por unidade multiplicada por x e que pode ser escrita por $c_v(x) = k \, . \, x$

Já a função receita, o valor recebido pela venda de x unidades de um certo produto ao perco p, pode ser dado pela função receita expressa por $R(x) = p \, . \, x$. Entretanto, a função lucro é dada pela diferença entre a função receita e a função custo. $L(x) = R(x) - C(x)$.

A partir da resposta do item b, o professor irá propor valores aos estudantes para que eles encontrem outros resultados, e se ele vender 8 fogões, 9, 11 e 12. Esboce o gráfico com as respostas encontradas e façamos uma análise.



Analisando o gráfico, observe que:

R(x) > c_t (x) ⇒ teremos lucro positivo

R(x) < c_t(x) ⇒ teremos lucro negativo

R(x) = c_t (x) ⇒ teremos lucro nulo

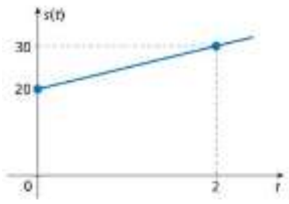
Denomina-se ponto crítico ou ponto de nivelamento ao ponto em que R(x) se iguala a C(x).

Neste momento o professor introduz o conteúdo. Observe a situação e analise que o zero da função afim $f(x) = ax + b$ é o valor de x que anula a função e é dado por $\frac{-b}{a}$. No gráfico da função, o par ordenado do ponto em que a reta intersecta o eixo x é sempre $(\frac{-b}{a}, 0)$. De acordo com o problema, o zero da função é o ponto (10,0), onde encontra-se o ponto de equilíbrio, ou seja, o número de fogões que devem ser vendidas para que o custo e a receita se equilibrem, isto é, o valor de x para que L = 0, em outras palavras, vendendo 10 fogões ele não terá nem lucro, nem prejuízo, sendo assim, se vender mais de dez terá lucro, se vender menos de dez terá prejuízo. O professor segue o assunto iniciando o estudo de sinal da função afim, pondo de intersecção dos eixos x e y, segue revisando quando a função é crescente e decrescente.

Posteriormente os alunos resolvem em duplas a atividade proposta para que consolidem o conhecimento. Quadro 37 ilustra as atividades proposta aos estudantes.

Quadro 37- Atividades proposta

Enunciado	Objetivo: Que o aluno seja capaz de:
1) Movimento uniforme é caracterizado pelo fato de a velocidade do móvel ser constante e diferente de zero. Por esse motivo, o espaço percorrido em intervalos de tempos iguais é sempre o mesmo. Assim, a função horária desse movimento é dada pela lei s(t) = s_0 + v . t, em que s(t) é a posição (em metros) do móvel no instante t (em segundos); s_0 é o espaço inicial quando t = 0 s; e v a velocidade constante (em m/s).	✓ Relacionar o conteúdo com a física ✓ Encontrar a lei de formação da função ✓ Identificar o domínio e imagagem da função; ✓ Analisar e interpretar o gráfico.

 a) Qual é a função horária do movimento correspondente ao gráfico? b) Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função? c) Qual será a posição do móvel após 10 segundos? d) Após quanto tempo o móvel estará na posição 120 metros?	
2) Quando uma loja vende um determinado produto po R$ 50,00, consegue vender em média 80 unidades por semana. Entretanto, se o preço de venda for R$ 60,00, vende em média 75 unidades semanais. a) A função é crescente ou decrescente? b) Calcule a taxa de decrescimento do número semanal de unidades vendidas para o aumento de R$ 1,00 no preço de venda. c) Escreva a lei de formação dessa função.	✓Identificar e reconhecer a partir do gráfico, quando uma função é crescente ou decrescente. ✓Compreender a taxa de variação de uma função.
3) Imagine que, uma colônia de bactérias, o crescimento é linear e que o número y de bactérias passa de 16 para 24 em um intervalo de tempo x de 2 horas. Qual a taxa de crescimento dessa colônia por hora.	✓Compreender a taxa de variação de uma função.
4) O lucro de uma empresa, em determinado mês, foi representado pela função L(d) = 12d – 204, em milhares de reais, em que **d** é o dia (do 1º ao 30º dia). Considerando o último dia do mês anterior como sendo d = 0. a) Calcule o lucro dessa empresa quando: I. d = 0 II. d = 12 III. d = 25 IV. d = 30 b) Represente o gráfico dessa função no plano cartesiano. c) Determine o dia em que o lucro é igual a zero e marque a abscissa desse ponto no plano cartesiano.	✓Representar a função no plano ✓Encontrar o zero da função e interpretar sua importancia na questão. ✓Encontrar os pontos de intersecção do eixo x e y.

Observação: A situação problema que será apresentada a seguir, tem o intuído de enfatizar a consolidação do conhecimento, de modo que através desses problemas o professor trabalhe o conteúdo utilizando a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora essas duas situações os estudantes se reuniram em trio para resolvê-las.

Situação-problema 1 (Cunha, 2017)

Um turista estrangeiro, viajou para a cidade do Rio de Janeiro, e necessitou da utilização de um transporte para a locomoção do hotel em que estava hospedado até a praia. Para isso, verificou que a distância entre o hotel e a praia eram 8 quilômetros e, que naquele trajeto os veículos mantinham velocidade constante de 1 quilometro por minuto. Primeiramente, o estrangeiro conversou com um taxista que estava próximo ao hotel e este lhe disse que o preço da corrida seria cobrado a partir da soma de um valor fixo de R$5,00, chamado bandeirada mais R$2,50 por quilometro rodado. Mas, na tentativa de escolher o meio de transporte mais econômico, o estrangeiro resolveu pesquisar o preço que seria cobrado por um Uber e, verificou que o valor a ser pago era dado pela soma de uma tarifa base de R$6,00 com R$0,25 por minuto gasto na viagem mais R$1,20 por quilometro rodado, e além disso era cobrada uma taxa fixa R$0,75 para cobrir custos operacionais. Baseado nas informações do texto acima responda:

a) Qual será o valor pago pelo turista se ele optar pelo taxi?
b) Qual será o valor pago pelo turista se ele optar pelo Uber?
c) Qual dos dois transportes será mais vantajoso para o estrangeiro?
d) Qual é a regra da função que relaciona o preço pago pelo estrangeiro dado por $f(x)$ com a distância em quilômetros (x) a ser percorrida se ele optar pelo táxi?
e) Qual é a regra da função que relaciona o preço pago pelo estrangeiro dado por $g(x)$ com a distância em quilômetros (x) a ser percorrida se ele optar pelo Uber?
f) Construa o gráfico da função $f(x)$.
g) Construa o gráfico da função $g(x)$.
h) Qual valor será pago pelo estrangeiro se ele resolver ir em outra praia que fica 12 quilômetros do hotel se ele optar pelo Uber? E se ele optar pelo taxi?
i) Existe algum momento em que utilizar o táxi e o Uber será o mesmo valor?
j) Verifique em que momento é melhor utilizar o táxi, construindo os gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$ no mesmo plano cartesiano.

Ampliando o conhecimento

A partir das funções encontradas na atividade anterior, foram propostas as seguintes questões:

a) Determine o domínio de $f(x)$.
b) Determine o domínio de $g(x)$.
c) Determine o ponto de intersecção do gráfico de $f(x)$ com o eixo y.
d) Determine o ponto de intersecção do gráfico de $g(x)$ com o eixo y.
e) Para quais valores de x, a função $h(x)$ é positiva? E para quais valores é negativa?
f) Para quais valores de x, a função $i(x)$ é positiva? E para quais valores é negativa?
g) Suponha que o estrangeiro tenha encontrado com outro taxista e que o taxista lhe disse que para ir até a praia que estava a 8 quilômetros o preço cobrado seria R$ 22,00 e, para ir à praia que estava a 12 quilômetros o preço seria R$ 30,00. Nesse caso, qual seria o valor da bandeirada? Qual seria o valor cobrado por quilômetro rodado?

4.4.3.2 Pós-Teste

Problema 1: Para cercar um terreno com arame, Elen obteve dois orçamentos:

1º Taxa de entrega de R$ 140,00 e R$ 12,00 o metro de arame.

2.º Taxa de entrega de R$ 20,00 e R$ 14,00 o metro de arame.

a) Represente o custo de cada opção para **x** metros de arame.

b) Qual das duas opções é mais vantajosa para cercar com três voltas de arame um terreno de 140 metros de perímetro?

c) Para qual medida de arame os dois orçamentos têm o mesmo valor? Que significado tem essa medida se desenharmos os gráficos das duas funções em um mesmo plano cartesiano?

Quadro 38- Parâmetros do Problema 1, função afim- Pós-teste

Categoria	**Operações e Parâmetros para Análise do Problema 1**
Compreender o problema	Compreender as unidades de medidas envolvidas, observar que para que tenha o mesmo valor, as funções terão que ser igualadas.
Construir o modelo matemático	1ª opção: $c_1(x) = 140 + 12x$ 2ª opção: $c_2(x) = 20 + 14x$
Solucionar o modelo	b. $c_1(3 . 140) = 140 + 12 . 3 . 140 = 5180$ $c_2(3. 140) = 20 + 14 . 3.140 = 5900$, logo a opção 1 é mais vantajosa. c. $c_1(x) = c_2(x) \Rightarrow 140 + 12x = 20 + 14x \Rightarrow 2x = 120 \Rightarrow x = 60$
Interpretar a solução	Para 60 metros de arame, os dois orçamentos são iguais. Esse valor é a abscissa do ponto em que as duas retas se intersectam.

Problema 2: O comprimento de um fio metálico varia em função da sua temperatura e, dento de certos limites, essa é uma função afim. No caso de um fio de cobre que tem 25 metros de comprimento a 0° C, o comprimento a uma temperatura t, de 0° C a 100° C, é dado pela função $L(t) = 0{,}0017 + 25$.

a) Qual é a taxa de variação dessa função? Escreva uma frase explicando o que significa essa taxa de variação.

b) Qual será o comprimento desse fio quando aquecido a 40° C.

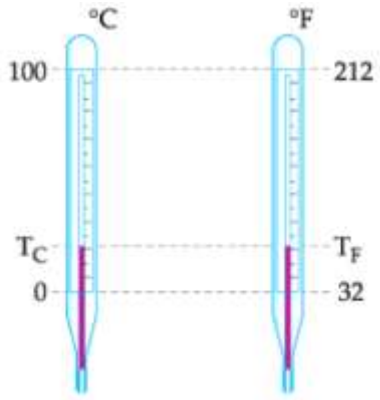
c) Para qual temperatura o aumento no comprimento do fio será de 17 cm?

Quadro 39 - Parâmetros do Problema 5, função afim- Pós-teste.

Categoria	**Operações e Parâmetros para Análise do Problema 5**
Compreender o problema	Compreender o que é a taxa de variação envolvida no problema, observar as transformações da unidade de medida.
Construir o modelo matemático	$L(t) = 0{,}0017t + 25$
Solucionar o modelo	b. A taxa de variação é 0,0017. $L(t) = 0{,}0017t + 25 \Rightarrow L(48) = 0{,}0017 . 48 + 25 \Rightarrow L(48) = 25{,}0816$ cm c. 17 cm = 0,17 m $L(t) = 0{,}0017t + 25$

	25 + 0,17 = 0,0017t + 25 0,17 = 0,0017t T=100 logo, a 100 ºC, o comprimento do fio aumentara 17 cm.
Interpretar a solução	A frase deve fazer referência ao aumento de 0,0017m no comprimento do fio de cobre para cada grau Celsius de aumento na temperatura.

Problema 3: O grau Fahrenheit (símbolo: ºF) é uma escala de temperatura proposta por Daniel Gabriel Fahrenheit em 1724. Nesta escala, o ponto de fusão da água (0ºC) é de 32ºF e o ponto de ebulição da água (100ºC) é de 212ºF. Sabendo que a temperatura na escala Fahrenheit é dada por uma função afim da escala Celsius, determine em qual temperatura na escala Celsius ambas assinalam o mesmo valor numérico.



Quadro 40- Parâmetros do Problema 3, função afim- pós-teste

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 3
Compreender o problema	Compreender o problema fazendo a interpretação das escalas, nomear as variáveis "f (x)" é o grau Fahrenheit associado ao grau Celsius "x", substituindo os valores.
Construir o modelo matemático	Se "f (x)" é o grau Fahrenheit associado ao grau Celsius "x", podemos concluir que f (0) = 32 e f (100) = 212. Substituindo esses valores em f (x) = ax + b teremos: $\begin{cases} 32 = a x.0 + b \\ 212 = a x.100 + b \end{cases}$
Solucionar o modelo	Resolvendo o sistema, obtemos b = 32 e a = 1, 8. Assim f (x) = 1, 8x + 32. Se f (x) = x temos f (x) = 1, 8x + 32 x = 1, 8x + 32 0, 8x = -32 x = -40° C. Ou seja, -40° C = -40°F.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E DISCUSSÕES

CAPÍTULO 5- RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta e discute os resultados das fases da pesquisa. Para tanto, foram considerados como dados os registros dos alunos no desenvolvimento das atividades propostas, teste de associação de palavras, mapa conceitual e as provas de lápis e papel. Desse modo, à medida que ia ocorrendo o processo, buscou-se meios para melhorar e compreender alguns dados, organizando, corrigindo as falhas para que assim, possamos avançar no intuito de que o aluno aprenda de forma significativa.

Os dados foram analisados de forma qualitativa e quantitativa, o primeiro tópico, demonstra as análises dos resultados das três fases da coleta de dados para avaliação, subdividas pelos sub tópicos: conhecimentos prévios (teste diagnóstico); desempenho da assimilação subordinada da fase formativa e mediadora e verificar a assimilação dos conceitos (pós-teste).

A análise dos conhecimentos prévios teve o intuito de averiguar os subsunçores dos estudantes em relação ao conceito de função, que obteve uma explanação com relação aos organizados prévios dos estudantes, os quais implicaram na retroalimentação inicial do conteúdo de função. Em seguida, apresenta-se a análise descritiva dos conhecimentos prévios do grupo controle e do grupo experimental, que resultou na explicação dos dados conforme as características do método de solução de problemas utilizando a ERP.

A análise dos resultados do desempenho da fase formativa e mediadora, foram construídos com base nas características das ações, no desenvolvimento dos estudantes do grupo experimental durante a aplicação da sequência didática das etapas qualitativas.

Os resultados do teste final (pós-teste), foram analisados visualizando a formação dos conceitos gerais estudados durante o período da aplicação do método da ERP no grupo experimental e o método tradicional no grupo controle. Posteriormente, apresenta-se os resultados e análise dos resultados quantitativos dos estudantes no pré e pós-teste, no qual foi utilizado métodos estatísticos fazendo a comparação dos resultados dos dois grupos.

5.1 Avaliação da Fase Diagnóstica no Conteúdo de Função

Foram analisados os conhecimentos prévios de 84 estudantes da 1ª série do ensino médio, em relação às ações e operações da estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino, com o intuito de verificar se os estudantes possuem subsunçores que possam interagir com o conteúdo de função e averiguar o desempenho e a habilidade dos mesmos para resolver problemas.

Inicialmente a professora pediu que os estudantes escrevessem a palavra Função no centro da folha do caderno. Depois, pediu para que escrevessem palavras que expressassem a noção que eles têm de função em matemática. O resultado da análise da ideia de função não foi satisfatório, 26,6% dos estudantes (grupo experimental e controle) escreveram uma parte do conceito de função dizendo que “é a dependência entre duas coisas e algo que tem a ver com gráfico”, os outros 73,4% escreveram palavras como “função é: trabalhar, obrigação, tarefas de casa, cálculo”, onde muitos associam função a obrigações e cálculos matemáticos. As Figuras 27, 28, 29 e 30 mostram o resultado das palavras expressas pelos alunos A-08 e A-13, A 15 e A 02, sobre o conceito de função.

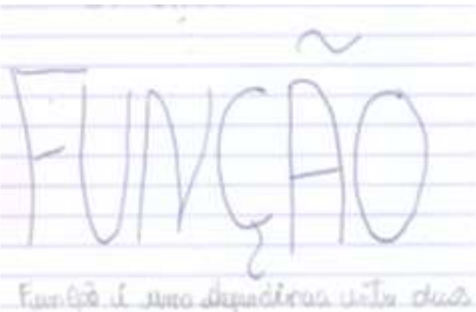


Figura 27 expressão do aluno A-08

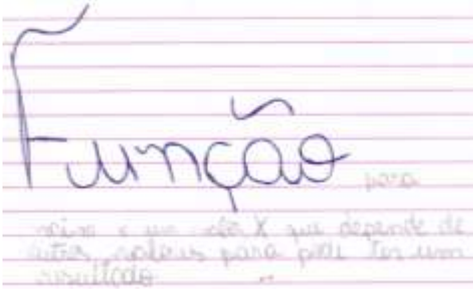


Figura 28 expressão do aluno A-13

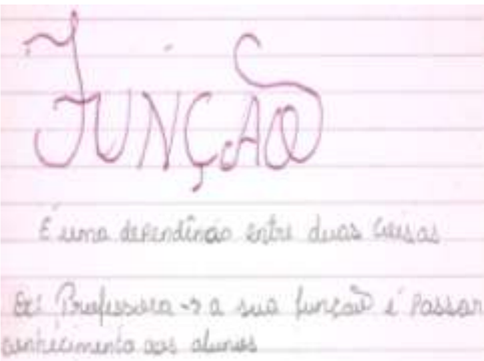


Figura 29 expressão do aluno A-15

Figura 30 expressão do aluno A-02

Portanto, verificou que os estudantes necessitam apropriar-se da linguagem matemática para definir o conceito, alguns tem ideias do que é uma função, pois este conteúdo é ministrado no 9º ano do Ensino Fundamental (mas somente a noção de função), ou seja, um ano anterior ao que eles estavam cursando, porém verificou que os estudantes não utilizam da linguagem para expressar-se ou utilizam parte dela, outros têm a noção de que função é uma dependência entre uma coisa e outra, não se apropriando das propriedades essenciais do conceito de função.

5.1.1 Análise dos Mapas Conceituais de Função na Fase Diagnóstica.

A construção do primeiro mapa mediante o conceito chave Função, teve o objetivo de sondar quais conhecimentos prévios que os estudantes possuíam ou não, com relação a este conteúdo. Para isso, na construção deste mapa não foram fornecidos aos estudantes os conceitos que deveriam ser mapeados e, também, não foi permitida a consulta a cadernos ou livro didático, apenas foi lhes fornecido o conceito chave, Função. Os dois grupos, tanto experimental quanto o controle elaboraram individualmente um mapa conceitual na fase diagnóstica. Para a análise, escolhemos três mapas de estudantes do grupo experimental e três mapas de estudantes do grupo controle.

O mapa conceitual foi mais um instrumento importante para análise da aprendizagem dos estudantes, nosso intuito é a de entendê-los como um mecanismo para a negociação de significados, o que é importante para a observação da ocorrência da aprendizagem significativa e para o compartilhamento de conhecimento entre professor e aprendiz (Moreira, 2006, p. 69).

No entanto, na análise através de mapas conceituais é importante verificar o que o aluno sabe em relação à maneira como seu conhecimento está disposto em sua estrutura cognitiva, ou seja, como ele estrutura, hierarquiza, diferencia, relaciona e integra conceitos de níveis diferentes ou de diferentes áreas do conhecimento (Moreira, 2006, p. 55). Os critérios básicos recortados da teoria da aprendizagem significativa que baseiam a análise dos mapas são três: o princípio da organização hierárquica das estruturas cognitivas do aprendiz, o princípio da diferenciação progressiva dos conceitos na estrutura cognitiva e o princípio da reconciliação integradora entre conceitos de níveis ou grupos de conhecimentos diferentes (Moreira, 2006, p. 55). As Figuras 31, 32 e 33 são os mapas conceitual que foi elaborado pelo estudante do grupo experimental.

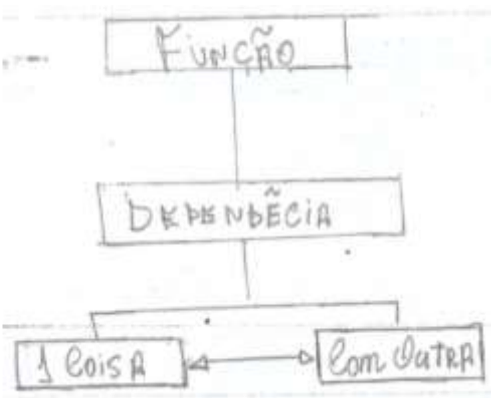


Figura 31 Mapa conceitual do aluno A-08

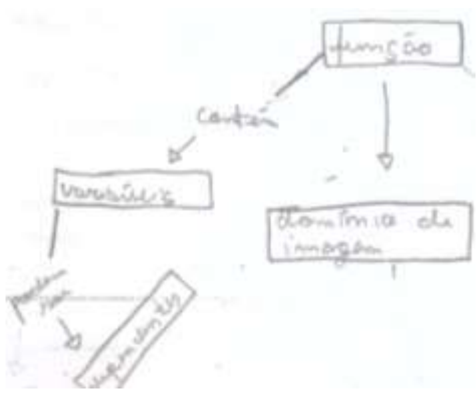


Figura 32 Mapa conceitual do aluno A-13

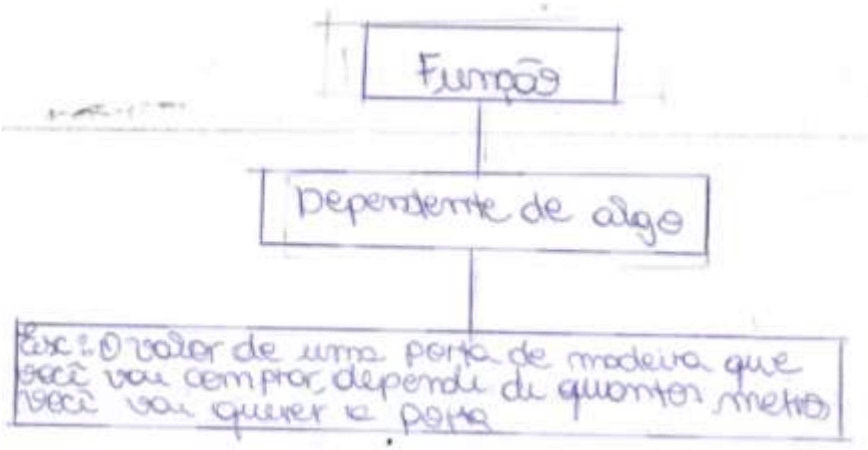


Figura 33 Mapa conceitual do aluno A-01

Observa-se nos mapas que os estudantes não conseguem relacionar o conceitos de função, e tem apenas a noção de que função é quando uma coisa depende de outra. O Quadro 41 apresenta a análise dos mapas elaborados pelos estudantes do grupo controle.

Quadro 41- Análise dos mapas conceituais dos estudantes A01, A08 e A13- Fase diagnóstica

Estudante A 01			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
O mapa do estudante não tem nenhum conceito básico	Não apresenta hierarquia conceitual	Não apresenta indícios de diferenciação progressiva	Não apresenta indícios de reconciliação integradora
Estudante A 08			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
O mapa do estudante não tem nenhum conceito básico	Não apresenta hierarquia conceitual	Não apresenta indícios de diferenciação progressiva	Não apresenta indícios de reconciliação integradora
Estudante A-13			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
No mapa do estudante já aparece a palavra domínio e imagem; variável dependente e independente, porém não se vê relação entre os conceitos	Não apresenta hierarquia conceitual	Não apresenta indícios de diferenciação progressiva	Não apresenta indícios de reconciliação integradora

Fonte: o autor

As figuras 34, 35, 36 são os mapas conceituais elaborados pelos estudantes A02, A07 e A15. Em seguida o Quadro 42 é a análise dos mapas elaborados pelos estudantes do grupo experimental na fase diagnóstica.

Figura 34 Mapa conceitual do aluno A-07

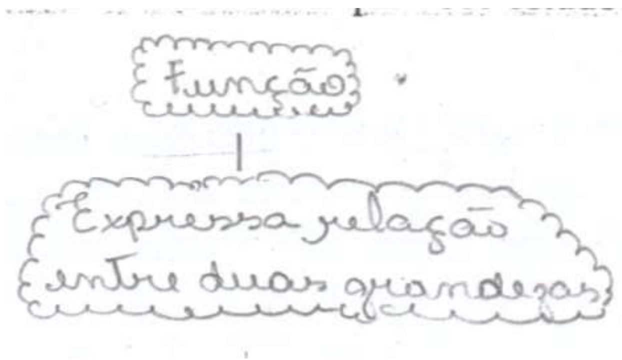


Figura 35 Mapa conceitual do aluno A 02.

Figura 36 Mapa conceitual do aluno A 15

Quadro 42 -Análise dos mapas conceituais dos estudantes A02, A07 e A15- Fase diagnóstica

Estudante A 02			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
O mapa do estudante não tem nenhum conceito básico, o estudante apenas enfatiza que função expressa uma relação entre duas grandezas	Não apresenta hierarquia conceitual	Não apresenta indícios de diferenciação progressiva	Não apresenta indícios de reconciliação integradora
Estudante A 07			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
O estudante expressa parte do conceito de função	Não apresenta hierarquia conceitual	Não apresenta indícios de diferenciação progressiva	Não apresenta indícios de reconciliação integradora
Estudante A-15			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
O estudante escreve parte do comportamento da reta no gráfico de uma	Não apresenta hierarquia conceitual	Não apresenta indícios de diferenciação progressiva	Não apresenta indícios de reconciliação integradora

função; função é crescente quando é maior que zero e decrescente quando é menor que zero.			

Analisando os mapas de ambos os grupos, enfatizando que o restante trouxeram informações parecidas, verificamos que embora esses estudantes já passaram por situações de ensino sobre noções de função no ano anterior, eles não se apropriaram do conceito de função em sua estrutura cognitiva, praticamente 80% dos mapas traziam a informação de que função é quando uma coisa depende de outra, ou aparecia alguma palavra como "tem domínio, "imagem" é crescente ou decrescente. Nenhum dos mapas enfatizou relação entre os conceitos, logo não ocorreu a diferenciação progressiva e nem a reconciliação integradora em nenhum dos mapas analisados. Sendo assim, podemos concluir que os estudantes não têm a formalização como proposição do conceito de função, o significado que há em sua estrutura cognitiva é a relação entre duas grandezas.

O que pode ser constatado em uma análise imediata, é que esses mapas selecionados apresentam proposições que indicam conhecimento superficial dos conceitos mapeados. Como nosso objetivo nesse primeiro mapa foi obter informações sobre os conhecimentos prévios dos estudantes sobre Função, os mapas nos revelaram que esses alunos passaram por situações de ensino desse conteúdo, porém há um conhecimento prévio muito vago.

Posteriormente, os estudantes responderam ao pré-teste que contou com três problemas, denominados P-01, P-02, P-03. As aplicações quanto à metodologia da ERP nos problemas do teste diagnóstico foram analisadas segundo a execução das ações e das características das operações realizadas. As ações desenvolvidas foram analisadas de forma qualitativa e quantitativa, descritas das respostas dos estudantes mediante as ações da ERP.

Problema (P-01- diagnóstico): Márcia ligou seu computador à rede internacional de computadores, internet. Para fazer uso dessa rede, ela paga uma mensalidade fixa de R$ 30,00 mais 15 centavos por cada minuto de uso. Quanto gastará Márcia se, durante o mês, utilizar a internet por 10h? O valor a ser pago por Márcia no final do mês depende de quê?

O problema 1 tem como objetivo: Compreender o problema, convertendo as unidades de medida de tempo, observar a transformação de 15 centavos em R$ 0,15 e interpretar que o valor a ser pago depende do tempo de uso e mesmo não utilizando, paga uma taxa fixa. Reporta-se a descrever o entendimento de noções de função.

Serão observados os aspectos fundamentais sobre a aplicação dos conceitos matemáticos necessários para a introdução do conteúdo de funções, conforme os parâmetros descritos no quadro 43.

Quadro 43- Parâmetros do Problema 01- pré-teste de função.

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 1-Pré-teste
Compreender o problema	Ler e extrair os elementos desconhecidos: a) determinar que 15 centavos igual a R$ 0,15 b) Observar que deve converter 10h em minutos e c) Observar que R$ 30,00 é uma taxa fixa.
Construir o modelo matemático	Determinar e nominar as variáveis e incógnitas: y= 30 + 0,15x, sendo que **“x”** é equivalente ao tempo de uso e **“y”** o valor a ser pago**.**
Solucionar o modelo	Solucionar o modelo: converter 10h em minutos = 600min e substituir no modelo y= 30 + 0,15 . 600 = 120.
Interpretar a solução	Resposta ao objetivo do problema: O valor a ser pago por 10h de uso é de R$ 120,00. O valor a ser pago depende do tempo de uso, e mesmo sem ser utilizado há uma taxa fixa de R$ 30,00.

Os resultados foram descritos na tabela de análise de desempenho, iniciando pela coluna de categorias, onde se determina a sequência das ações, na coluna análises do desempenho qualitativo encontra-se a descrição das ações realizadas pelo aluno, na sequência o desempenho quantitativo determinado pelo indicador essencial da ação qualitativa.

Analisando os resultados, foi observado que os estudantes construíram o modelo por tentativa de ensaio-e-erro, desses, 88% dos estudantes apresentaram um desempenho ótimo, respondendo corretamente a todas as ações do problema 01. Eles converteram 10h em minutos, interpretaram que 15 centavos é igual a R$ 0,15 e realizaram as operações corretamente. Observou também que os mesmos dão resposta ao problema, interpretando que o valor encontrado equivale às horas que Márcia utilizou mais uma taxa fixa, atingindo assim o objetivo do problema. Dentre o desempenho dos alunos analisados, demonstra-se na tabela 3, a análise do A-01 no problema 1.

Tabela 3-Análise de Desempenho do (A-01) no Problema 1. Pré-teste de função

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
Compreender o problema	O aluno compreende o problema, determina que 15 centavos é igual a R$ 0,15, converte 10h em minutos e observa que R$ 30,00 é uma taxa fixa.	5
Construir o modelo matemático	O aluno constrói o modelo por ensaio e erro, multiplicando 0,15 . 600, depois soma com 30.	5
Solucionar o modelo matemático	O aluno soluciona corretamente, convertendo 10h em min = 600min e resolvendo a operação citada acima.	5
Interpretar a solução	O aluno interpreta a solução, dando resposta ao problema, interpretando que R$ 120,00 é o que Márcia iria pagar por 10h de uso e analisando que o valor a ser pago depende do tempo de uso mais uma taxa fixa de R$ 30,00.	5

O aluno A-02 comete alguns erros na 3ª ação (solucionar o modelo), observou que o estudante tinha dúvidas na operação com números decimais e o deslocamento da vírgula. Em seguida na tabela 4, apresenta-se um pequeno recorte da análise da 3ª ação do aluno A-02.

Tabela 4-Análise de Desempenho do A-02 no Problema 1. Pré-teste de função.

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
Solucionar o modelo matemático	O aluno comete pequenos erros na solução, na operação com números decimais. 10h - 600min 600x0,15 = 900 30+9 = 39 600 . 0,15 = 90, o aluno não desloca a vírgula corretamente, o que levou o aluno a interpretar 900 centavos como R$ 9,00	3

Já o estudante A-03 comete um pequeno erro. Ele soluciona o modelo, convertendo 10h em min = 600min, multiplica por 15 encontrando 9000 centavos, porém ele interpreta que 9000 centavos é igual a R$ 9,00 reais, não chegando ao resultado correto.

O A-07 teve um desempenho insuficiente no problema 1, ele não compreende o problema, faz as transformações das unidades de medida de tempo de forma incorreta, logo ele não consegue construir o modelo matemático corretamente e consequentemente não soluciona corretamente. Segue na tabela 5, a análise o aluno A-07.

Tabela 5- Análise de Desempenho do A-07 no Problema 1, pré-teste de função.

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
Compreender o problema	*O aluno compreende parcialmente o problema,* determina que 15 centavos igual a R$ 0,15, porém converte 10h em 599 minutos e não observa que R$ 30,00 é uma taxa fixa.	2
Construir o modelo matemático	*O aluno não constrói o modelo matemático corretamente, ele multiplica* 15 . 599.	1
Solucionar o modelo matemático	*O aluno não soluciona o modelo corretamente*.	1
Interpretar a solução	*O aluno não respondeu*	1

De acordo com a análise dos resultado do P-01 do pré-teste, como já foi mencionado, os alunos construíram o modelo matemático por ensaio e erro, alguns alunos sentiram dificuldade na conversão da unidade de medida de tempo, operações com números decimais, transformar 15 centavos na linguagem matemática R$ 0,15, sendo necessário realizar um trabalho com estes alunos para que os mesmos possam avançar e sanar suas dificuldades em grandezas e medidas.

Segundo os PCN’s, na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano (1998, p.52).

Problema P-02 (pré-teste): Camila precisa ir ao CME para o aulão de Matemática, para não chegar atrasada decidiu ir de taxi. A corrida de taxi custa R$ 4,80 a bandeirada, mais R$ 0,40 por quilômetro rodado. A distância percorrida da casa de Camila até o CME foi de 15km, quanto ela vai pagar pela corrida? Este problema representa uma função? Justifique sua resposta.

As ações empregadas para este problema serão compreender o problema, construir o modelo matemático, solucionar o modelo e interpretar a solução, desempenham o objetivo: Compreender a relação entre as variáveis dependente e independente, e observar que o valor a ser pago pela corrida está em função do quilômetro rodado mais uma taxa fixa. O quadro 44 traz informações dos parâmetros e descritores do P-02.

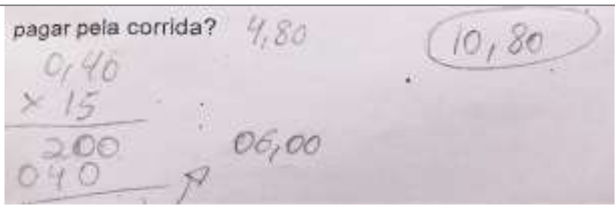
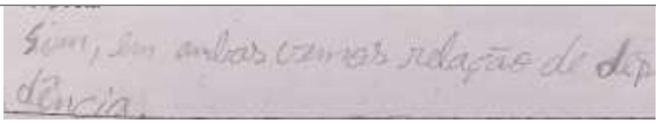
Quadro 44- Parâmetros do Problema 2- pré-teste de função

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 2-Pré-teste
Compreender o problema	Compreender as variáveis dependentes e independentes. Entender que R$ 4,80 é uma taxa fixa.
Construir o modelo matemático	y= 0,40x + 4,80
Solucionar o modelo	y= 0,40 . 15 + 4,80 = R$ 10,80
Interpretar a solução	Ela vai pagar pela corrida R$ 10,80. Sim é uma função, pois, a cada quilômetro percorrido existe um único valor.

Analisando o P-02, onde o resultado foi satisfatório, todos os estudantes apresentaram um bom desempenho resolvendo todas as ações, porém, verificou que alguns alunos ainda cometem erros ao fazer a multiplicação de números decimais ou na ordem da expressão numérica. Alguns alunos construíram o modelo por ensaio e erro, mas resolveram corretamente, chegando ao resultado esperado, dando resposta ao problema. Na tabela 6 segue o desempenho do A-01.

Tabela 6-Análise de Desempenho do A-01 no Problema 2, pré-teste de função.

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
Compreender o problema	O aluno compreende o problema observando que valor a ser pago pela corrida está em função do quilômetro rodado mais uma taxa fixa	5

Construir o modelo matemático	O aluno constrói o modelo matemático por ensaio e erro	5
Solucionar o modelo matemático		5
Interpretar a Solução		5

O aluno A-02, compreendeu todas as informações do problema, construiu o modelo matemático corretamente, inclusive observa-se que ele utiliza o termo *f*(*x*), porém, não solucionou o modelo corretamente, o estudante primeiro fez a soma para depois realizar a multiplicação. O estudante deu resposta ao problema corretamente enfatizando que “sim, é uma função pois há uma relação entre duas grandezas.” Segue na Figura 37 a resposta do aluno A-02

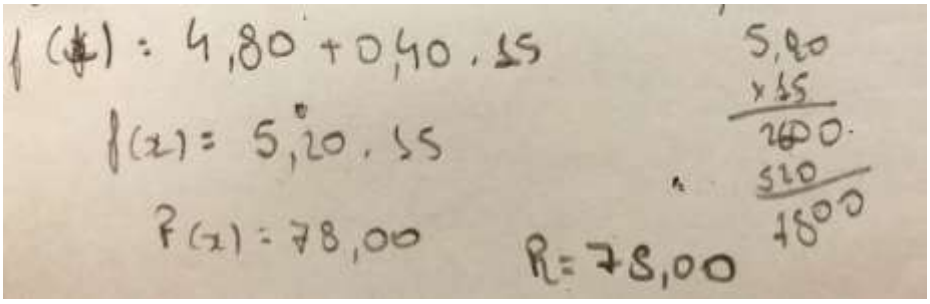


Figura 37- Resposta do aluno A-02

Na figura 38 observou a justificativa do aluno A-07, o estudante perpassou por todas as etapas do problema com êxito, porém não utiliza da linguagem matemática para justificar sua resposta.

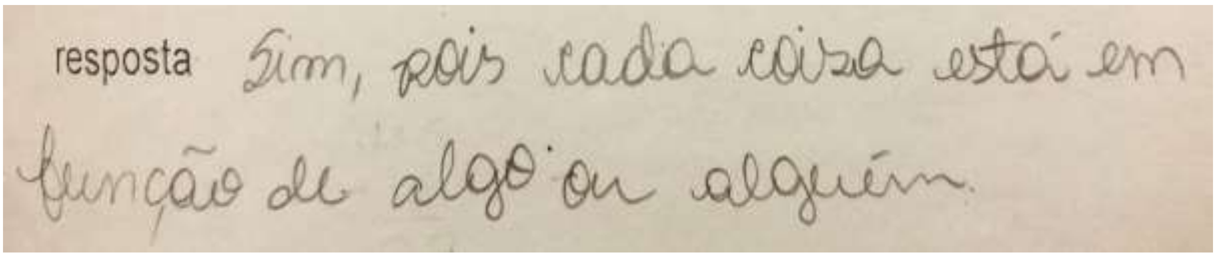


Figura 38- Resposta do aluno A-37

Problema 03(pré-teste): Em Física, chamamos de movimento uniforme aquele em que a velocidade de um móvel é constante. Consequentemente, o espaço percorrido em intervalos de tempos iguais é sempre o mesmo. A função horária desse movimento é dada pela lei s(t) = s_0 + v.t, na qual **s** é a posição (em metros) do móvel no instante t (em segundos), s_0, a posição inicial, quando t = 0, e **v**, a velocidade constante (em m/s).
Considerando o texto acima e que a equação horária de certo móvel em movimento uniforme seja dada por s(t) = 15 + 5t, responda:

d) Qual é a variável dependente e independente?

e) Após quantos segundos o móvel estará a 48 m da posição inicial?

f) Após 2,5 minutos, em que posição se encontrará o móvel?

As ações empregadas para este problema são compreender o problema, construir o modelo matemático e solucionar o modelo, o objetivo do problema é que o estudante compreenda que a vaiável dependente é a posição do móvel (s). Compreender que a variável independente é o tempo (t). As características deste problema estão descritas no quadro 45.

Quadro 45 -Parâmetros do Problema 3, pré-teste de função

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 3	
Compreender o problema	Elaborar os dados do problema. Compreender que a vaiável dependente é a posição do móvel (s). Compreender que a variável independente é o tempo (t)	
Construir o modelo matemático	48 = 15 + 5t	
Solucionar o modelo	b)48 = 15 + 5t 48 – 15 = 5t 33 = 5t t = 6,6 s	c) 2,5 . 60 = 150s S(150) = 15 + 5 . 150 S(150) = 15 + 750 S(150) = 765m

No P-03, 87% dos estudantes tiveram um ótimo desempenho, respondendo todas as ações corretamente, compreenderam a relação de dependência entre as variáveis. Os outros 13%, cometeram pequenos erros na solução. De modo geral, observou que os estudantes resolveram o problema pois tinha um modelo (fórmula) que foi dado no problema, porém a compreensão do contexto do problema em relação a física não ficou claro.

Os resultados foram bem satisfatórios nas ações da estratégia de resolução de problemas, no entanto, o aluno A-07 apresentou uma dificuldade na compreensão do contexto do P-01, pelo fato de não haver compreendido, o estudante não conseguiu chegar à solução.

Pode-se destacar que compreender o objetivo do problema está diretamente relacionado com a elaboração do modelo matemático e consequentemente o modelo matemático identificado, pode solucionar corretamente o problema, porém alguns alunos cometem erros na solução na hora de realizar as quatro operações. Mas, observou ainda que apesar de cometerem pequenos erros, poucos não conseguiram interpretar a solução.

Através dos resultados da avaliação diagnóstica, identificou que alunos alcançaram índice satisfatório nas habilidades para resolver problemas relacionados a noções básicas de função, 20% dos alunos resolveram os problemas sem saber que se tratava de noções de função, logo conclui-se que eles possuem conhecimentos prévios vagos para a introdução do conceito de função.

Outra observação importante, se destaca a habilidade da execução das ações, quando os modelos apresentam-se elaborados, ou seja, deduz-se que os alunos realizarão os cálculos corretamente, mas estão cometendo pequenos erros de cálculo que precisam ser corrigidos. Observou também que poucos estudantes utilizaram a notação $f(x)$, podemos dizer que não houve uma articulação entre a forma que a função foi apresentada (expressões algébricas) e o conceito de função.

Nesta perspectiva, alguns estudantes demonstraram dificuldades para elaborar os modelos matemáticos, pois os mesmos não possuíam o hábito de resolver problemas por não ser trabalhado em sala de aula e nas séries anteriores.

Após a avaliação diagnóstica, a professora corrigiu os problemas na lousa, levantando questionamentos para haver um momento de interação e reflexão com o intuito de observar o desempenho dos alunos no acompanhamento da resolução dos problemas e sanar as dúvidas em relação às questões.

As observações e identificação das dificuldades demonstradas pelos alunos foram observadas através da aula realizada pela professora e pesquisadora, contemplando a retroalimentação da avaliação diagnóstica que se iniciou com a resolução da mesma, destacando os pontos onde os alunos expuseram suas dúvidas e também responderam aos questionamentos feitos pela professora.

Os estudantes foram bem participativos na correção da atividade expondo suas dificuldades e modo como chegaram ao resultado. A professora solucionou as questões utilizando as ações da ERP, onde observou com mais detalhes as dificuldades dos alunos, sanando-as e dando ênfase na elaboração dos modelos matemáticos.

5.1.2 Análise da Estratégia da Resolução de Problemas em função- Fase Formativa

Após o resultado do diagnóstico, foi elaborado uma sequência didática que contemplou como metodologia de ensino a ERP em função, e foi dividida em etapas em concordância com a teoria da aprendizagem significativa, levando em consideração o objetivo de desenvolver nos estudantes a capacidade de ler e interpretar as informações do problema, compreender os dados que serão apresentados e apropriar-se do conceito de função e suas propriedades essenciais.

Na primeira etapa, aquisição do significado, a professora apresentou o vídeo “A Noção de Função”, de modo que a partir da aquisição do significado do conceito de função, o aluno possa ampliar os conhecimentos adquiridos, criando oportunidades para a aplicação desse conhecimento. Após o vídeo foi realizado um diálogo com os estudantes, com o intuito de averiguar o que tinham observado. O quadro 46 nos traz as respostas de cinco estudantes referente a pergunta: *Analisando a situação, o que você entende por função em matemática?*

Quadro 46-Respostas dos estudantes.

Estudante	**Respostas**
A-17	“Função é algo que depende de coisas variáveis”
A-05	“Quando o elemento do domínio possui uma única imagem no contradomínio”
A- 22	“Função é quando cada elemento tem sua imagem, ou seja, seu resultado”
A-08	“Função é uma lei que determina que um elemento do conjunto A possui apenas uma imagem no conjunto B”
A-11	“Função é quando associa cada elemento, a um único elemento

Esta etapa foi desenvolvida através de aulas expositivas, atividades em grupos e individuais, na qual a nova informação (conceito de função e suas propriedades essenciais) foram transmitida aos estudantes, assim como os mesmos receberam orientações baseadas na ERP, para ler o problema, extrair os elementos conhecidos e desconhecidos, estudá-los e compreendê-los como por exemplo, uma frase ou palavra que não conhece o significado, e determinar os objetivos do problema. Durante o processo da primeira etapa, a construção do conceito foi trabalhada em suas especificidades e detalhes para que assim os alunos possam assimilar o conceito de função.

Durante a etapa de aquisição do significado, foram realizadas diversas atividades e exercícios a fim de avaliar se o aluno apropriou do conceito de função e suas propriedades essenciais, pois para Andrade e Saraiva (2012), a apreensão do conceito de função deve visar a coordenação entre as suas diversas formas de representação, ou seja, a gráfica, a tabelar, a algébrica e a verbal. Apresenta-se uma das atividades aplicada em sala de aula durante a etapa.

A professora Rociciéa resolve fazer uma pesquisa com seus alunos, colocando no quadro três paisagens: praia, fazenda e montanha. Em seguida, pediu para que cada um dos 30 alunos escolhesse sua paisagem preferida. Seja A o conjunto formado pelos alunos e B o conjunto formado pelas três paisagens, determine, em cada situação abaixo, se a relação f: A $\rightarrow$B é uma função, justifique sua resposta.

a) todos os alunos escolheram praia.
b) dez alunos escolheram praia, dez alunos escolheram montanha e dez alunos escolheram fazenda.
c) todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de Joãozinho que disse não gostar de nenhuma.
d) todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de Joãozinho que disse gostar das três de maneira igual.

O objetivo desta atividade é analisar se os estudantes se apropriaram do conceito de função, fazendo uma relação entre os alunos e a escolha da paisagem, constrói-se o diagrama e a partir dele identifica se é ou não uma função, justificando cada item como na solução abaixo:

Solução

a) É função, pois cada aluno (elemento do domínio) escolheu uma única paisagem (elemento do contradomínio).
b) É função pelo mesmo motivo do item a. Como o conjunto imagem possui os mesmos elementos do conjunto contradomínio.
c) Como Joãozinho não escolheu paisagem, temos elemento do domínio sem imagem, ou seja, não é função.
d) Como Joãozinho escolheu as três, temos elemento do domínio com mais de uma imagem, ou seja, não é função.

Analisando os resultados, 88% dos estudantes responderam corretamente a questão, representaram cada situação em forma de diagrama, fizeram as correspondências corretamente e justificaram a resposta utilizando todas as propriedades essenciais do conceito de função. 12% dos alunos, responderam a questão representando em forma de diagrama, cita-se como exemplo a resposta do aluno A-09 na Figura 39.

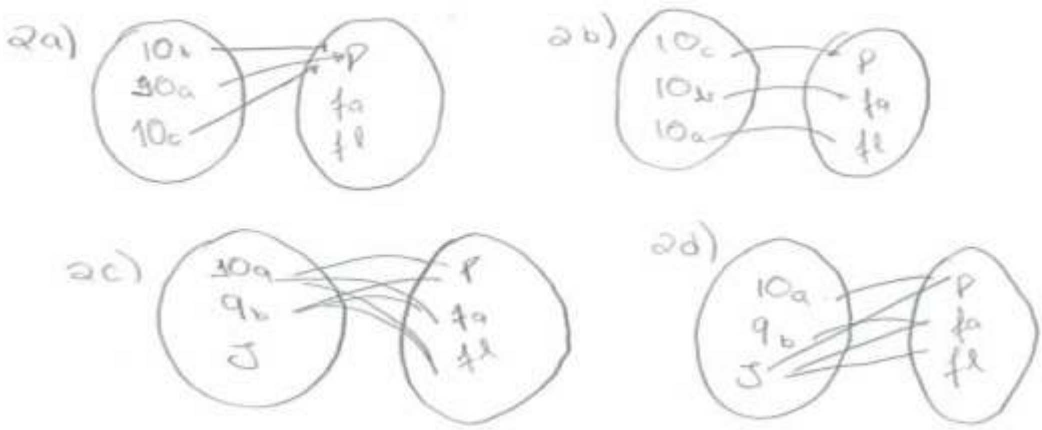


Figura 39- Resposta do estudante A-09

A professora, ao observar, as resposta em forma de diagrama, sem a justificativa, pediu que os alunos comentassem suas respostas para ter mais clareza do entendimento dos alunos, pois os mesmos não especificaram se era função ou não, sendo assim, relata-se aqui a resposta do aluno A-09 que comentou que “dividi a letra a) de 10 em 10 porque não quis escrever 30 elementos do domínio para fazer a correspondência, mas entendi que os 30 alunos escolheram praia, então é uma função, na letra b) professora, também é uma função porque cada grupo de 10 escolheu uma paisagem, ou seja, cada elemento do domínio corresponde a um único elemento da imagem, na letra c) não é função porque sobrou um elemento no domínio e na letra d) não é função porque não pode partir três setas de um mesmo elemento”.

O aluno A-07 representou as respostas em forma de diagramas. Os itens a, b, c e d, ele deixou em branco. O aluno A-04 respondeu os itens a, c, e d corretamente, usando as propriedades essenciais do conceito, porém no item b, sua justificativa foi: “é função porque estabelece uma relação entre dois conjuntos”. O aluno A-05 respondeu os itens b, c e d corretamente, porém no item *a*, o aluno não consegue interpretar a pergunta e responde que “não é função porque não pode partir duas setas do mesmo elemento do conjunto domínio”. Os alunos A-08 e A-11, responderam apenas o item b, e suas respostas estavam corretas. A professora percebeu que aparecia bastante a palavra “relação”, então a professora perguntou aos estudantes: Toda função é uma relação? Justifique. As respostas dos estudantes foram descritas no Quadro 47.

Quadro 47- Resposta dos estudantes. Toda função é uma relação? Justifique

Estudante	**Respostas**
A-07	“Não, pois nem sempre uma relação está nos padrões de uma função.”
A-01	“Não, pois toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função.”
A- 24	“Não, porque quando é puxado uma seta para sua imagem, o mesmo *x* não pode ser usado para ser “setado” em dois *y*”

A-02	"Não, porque no conceito de função explica que um elemento do conjunto A só pode ser associado a um único elemento do conjunto B, na relação essa regra não se aplica, pois um elemento do conjunto A pode ser associado a mais de um do conjunto B."

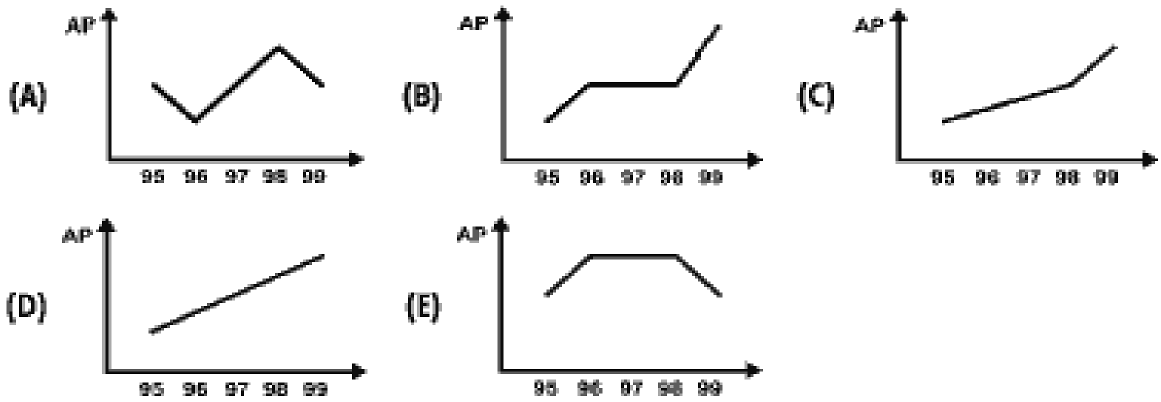
Analisando a resposta dada pelos estudantes, verificamos que eles já diferenciam a função de uma relação, porém alguns estudantes ainda não se apropriaram da linguagem matemática, sentindo dificuldade de expressar verbalmente suas ideias, no qual ao longo da intervenção, a professora vai sanando as dúvidas e dificuldades do estudante. Vergnaud (1993), enfatiza que a formação de um conceito na estrutura cognitiva do estudante depende de uma grande variedade de situações-problemas através das quais o aluno possa perceber regularidades em termos dos atributos criteriais deste conceito.

A fim de analisar o raciocínio e as percepções prévias dos alunos frente a análise e interpretação de gráficos a professora propôs-lhes um problema extraído do Exame Nacional do Ensino Médio.

Problema proposto (ENEM 2008): O quadro apresenta a produção de algodão de uma cooperativa de agricultores entre 1995 e 1999.

	Safra				
	1995	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
Produção (em mil toneladas)	30	40	50	60	80
Produtividade em Kg/hectare	1.500	2.500	2.500	2.500	4.000

O gráfico que melhor representa a área plantada (AP) no período considerado é:



A maioria dos alunos disseram não ter ideia para resolver o problema, exceto por um aluno que afirmou que a resposta correta estava representada no item b, justificando a afirmação pelos valores da segunda linha da tabela, os quais começam com um valor mínimo, permanecem constantes por um período e posteriormente assumem o valor máximo. Porém quando questionados se os valores da segunda linha da tabela representavam a área plantada, os alunos perceberam que esta grandeza não estava explícita na tabela. A professora verificou a dificuldade dos estudantes na compreensão do problema, e começou a mediar a situação, questionando os estudantes para que assim encontrem caminhos para a solução.

Logo o estudante A 02 pergunta: “Professora, se os dados não estão explícitos na tabela, então para encontrar a produtividade eu tenho que fazer a divisão da produção pela área plantada”? A professora respondeu que sim, logo os estudantes começaram a perceber que a produtividade = produção/área plantada, e a área plantada= produção/produtividade. Os estudantes a partir das informações que chegaram através da mediação com o professor, passaram a construir a tabela com novos valores. O quadro 48 apresenta o diálogo entre a professora e os estudantes.

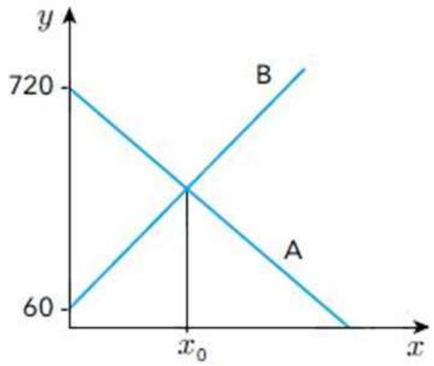
Quadro 48 - Aula Expositiva (Problema proposto 1).

Fase Formativa	Professora: Qual a dificuldade no problema*?*
Perguntas sobre o problema (P-01).	Comentários dos alunos: A-01: Professora está difícil, nem sabemos por onde começar. A-09: *analisando a tabela eu acho que a resposta é a letra b, os valores da tabela começam com um valor mínimo, permanecem constantes por um período e posteriormente assumem o valor máximo* A-03: P*rofessora, coloca qualquer conta aí no quadro que resolvemos, agora quando vêm problemas parece que fica mais difícil*, nossos professores anteriormente trabalhavam muito pouco assim. A-07: Às vezes pensamos em respostas mirabolantes, e por falta de interpretação não conseguimos resolver. Professora: Qual é a relação entre as grandezas apresentadas no problema*?* A-02: Professora, se os dados não estão explícitos na tabela, então para encontrar a produtividade eu tenho que fazer a divisão da produção pela área plantada *Professora: Isso mesmo? E como encontra a área plantada?* A-03: Dividindo a produção pela produtividade *A-01: Então teremos que construir uma nova tabela?* *Professora: isso mesmo.*

Com a mediação da professora, 70% dos estudantes responderam os cálculos corretamente, construindo a nova tabela com novos valores, os outros 30% não chegaram ao valor corretamente, pois não se atentaram na transformação da unidade de medida, não observaram que tinham que escrever valores da produção em quilos, ou seja 1 tonelada = 10^6 quilos. Logo, de acordo com os valores encontrados os estudantes responderam corretamente analisando que de 1995 a 1996 é decrescente, de 1996 a 1998 é crescente, e de 1998 a 1999 é decrescente. Logo a função atinge o valor máximo em 1998 e o valor mínimo em 1996. Neste problema, os estudantes consolidaram função crescente e decrescente, valor máximo e mínimo de uma função, a partir da análise gráfica e a interpretação de tabelas. Percebeu-se que os estudantes ainda têm dificuldades quanto a analisar os dados do problema e observar o que se pede.

O problema apresentado a seguir, também fez parte dessa fase da pesquisa, no qual verificou se aluno aplica o conhecimento adquirido em diversas situações. O problema tem como objetivo verificar se o aluno faz a análise do gráfico, observando que no ponto dado os dois reservatórios estarão com o mesmo volume, logo terão que igualar as funções, averiguar se o aluno identifica qual é a função crescente e decrescente e se ele utiliza os conceitos e linguagem matemática para justificar sua resposta.

Problema da fase formativa. O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x. Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico. Identifique qual é função crescente e decrescente e justifique.



Quadro 49- Parâmetros do Problema 1 da fase formativa.

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema da fase formativa.
Compreender o problema	Compreender que no reservatório A, é uma função decrescente e no B uma função crescente. Interpretar o gráfico, observar que em x_0 é o momento que os dois reservatórios estão com o mesmo volume.
Construir o modelo matemático	VA(x_0) = VB(x_0) - 10x_0 + 720 = 12x_0 + 60
Solucionar o modelo	-10x_0 + 720 = 12x_0 + 60 22x_0 = 660 x_0 = 30 horas.
Interpretar a solução	Observar que em 30h é o momento em que os dois reservatórios estão com o mesmo volume. Justificar que no reservatório A perde água então a < 0, logo é uma função decrescente, no B como ganha então a > 0, sendo uma função crescente.

Ao analisar os resultados, observou-se que 72% dos alunos tiveram um desempenho ótimo, alcançando todos os objetivos do problema, transferindo todo conhecimento adquirido, analisando que em um determinado tempo os reservatórios teriam o mesmo volume de água, igualando as funções, apropriando-se adequadamente da linguagem matemática para justificar suas respostas. A tabela 07, encontra-se o resultado da análise do aluno A-12, cujo o desempenho foi satisfatório.

Tabela 7-Análise de Desempenho do Aluno (A-12) no Problema da fase formativa.

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
Compreender o problema	O aluno compreende o problema, identificando que no reservatório A há uma perda de água, logo ax é <0, e no reservatório B ele ganha, logo ax > 0. Compreende também que no tempo x_0 eles têm o mesmo volume.	5
Construir o modelo matemático	VA = VB - 10x_0 + 720 = 12x_0 + 60	5
Solucionar o modelo matemático	O aluno soluciona o modelo corretamente, encontrando x_0 = 30h	5
Interpretar a solução	O aluno dá resposta ao problema, analisando que 30h é o momento que os dois reservatórios estão com o mesmo volume. O aluno justifica que no reservatório A como perde água então a < 0, logo é uma função decrescente, no B como ganha então a > 0, sendo uma função decrescente.	5

Por outro lado, aluno A-04 resolveu o problema de forma intuitiva, por ensaio-e-erro, não determinando as variáveis. Calcula que 660/22 = 30, chegando ao resultado correto, porém não soube explicar qual o significado daquela resposta. O aluno não identificou se a função é crescente ou decrescente e o porquê. Observa-se aqui a dificuldade do aluno na interpretação do gráfico, na apropriação dos conceitos e linguagem matemática, não conseguindo compreender as informações do problema.

De modo geral, pode-se observar que os alunos demonstram um bom desempenho na resolução de problemas, atendendo aos objetivos de aprendizagem, 72% dos alunos demonstraram habilidades e competências no conteúdo transmitido, o que se confirma durante as aulas, através da participação na linguagem verbal e escrita. Observou também que 16% dos alunos apropriaram-se do conhecimento, mas cometeram erros na solução. Essas dificuldades foram sanadas no momento das correções, quando a professora enfatizava as diferenças e semelhanças entre os exemplos, eliminando as contradições e conflitos. Apenas 12% alunos tiveram dificuldades em assimilar o conteúdo e apropriar-se da linguagem matemática. Estes alunos foram atendidos em horário oposto para que fosse reforçado o conteúdo com o intuito de que os alunos apreendessem e assimilassem o que lhes foi transmitido.

Chegou-se à conclusão de que nesta fase da pesquisa, os alunos avançaram gradativamente conforme as etapas foram sendo trabalhadas, onde se observou que a maioria da turma teve um ótimo desempenho, identificando o que é ou não uma função, apropriando-se de seu conceito e suas propriedades essenciais, esboçando e fazendo interpretações de gráficos e transferindo o conteúdo de funções em diversas situações.

5.1.3 Análise do Resultado da Avaliação Final (pós-teste)

O objetivo do pós-teste foi verificar o desenvolvimento do discente após a sequência didática, ou seja, verificar a contribuição da estratégia de resolução de problemas em função, promovendo a aprendizagem significativa.

O pós teste foi realizado através de três atividades que foram realizados no diagnóstico, com o intuito de verificar que avanço houve na aprendizagem dos estudantes após a intervenção. Logo, o pós teste foi realizado por três instrumentos: o teste de associação de palavras, mapas conceitual e a prova de lápis e papel contendo três problemas. Os problemas realizados pelos alunos no teste final do conteúdo de função (provas de lápis e papel) foram analisados conforme a aplicação do conteúdo em outras situações e averiguar se o aluno apropriou-se da definição conceitual de função e suas propriedades essenciais, pois na fase da assimilação obliteradora, as ideias particulares reduzem-se a uma ideia mais geral, o conceito de função se estabiliza e se automatiza.

5.1.3.1 Teste de Associação de Palavras

O teste de associação de palavras foi realizado novamente com o objetivo de averiguar se os estudantes do grupo experimental e controle obtiveram uma evolução conceitual após a realização das intervenções. Além dos estudantes escreverem os significados em relação ao conceito de função, a professora fez uma pergunta: O que você entende por função? Qual o significado de função em matemática. As figuram 40, 41, 42 e 43 trazem as respostas dos estudantes A 01, A 08, A 13 e A 23, todos do grupo controle.

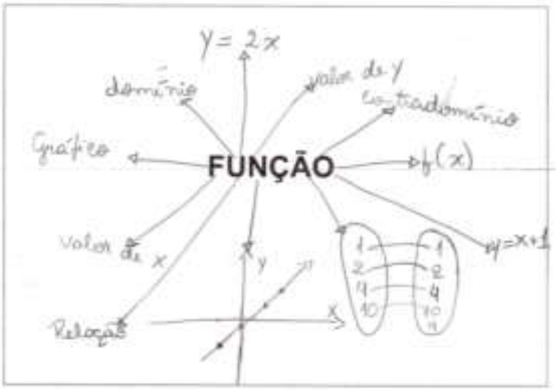


Figura 40- Expressão do aluno A-08

Figura 41- Expressão do aluno A-13

Figura 42 Expressão do aluno A-01

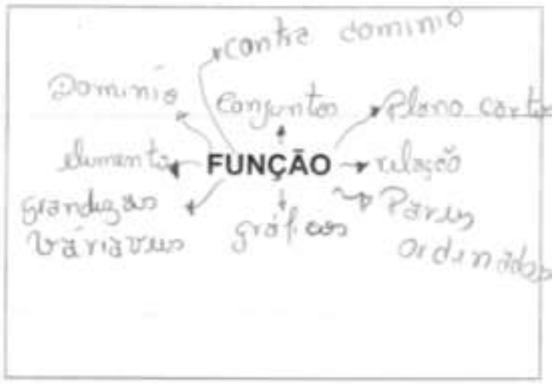
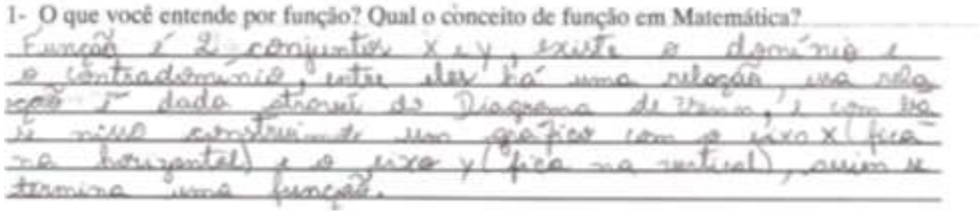


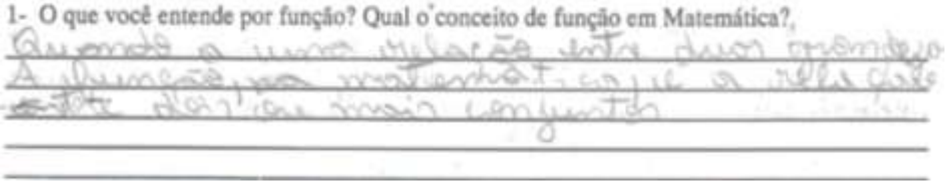
Figura 43 Expressão do aluno A-23

Lembrando que os estudantes do grupo controle foram exposto ao método de ensino tradicional, seguindo a sequencia do conteúdo do livro didático e respondendo os exercicios de final de cada assunto abordado. Analisando a resposta dos estudantes, verifica-se que os estudantes já associam “função em matemática” com palavras ou representações algébricas e gráficas, que fazem parte do conceito de função, tais como: y = ax + b, domínio, imagem, contradomínio, relação entre duas grandezas. Logo, observamos que os estudantes atribuem significados relacionados ao conceito de função. As figuras 44, 45, 46 e 47, trazem as respostas da pergunta: O que voce entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?


1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

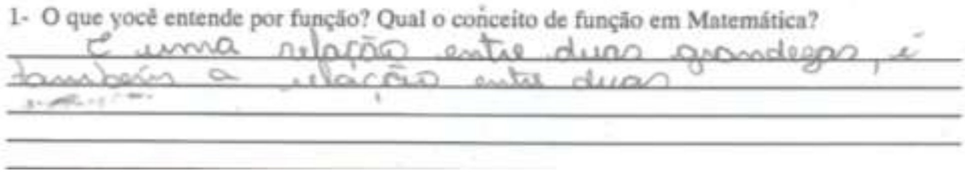
Função é 2 conjuntos x e y, existe o domínio e o contradomínio, entre eles há uma relação, [illegible] é dado através do Diagrama de Venn, e com [illegible] construindo um gráfico com o eixo x (fica na horizontal) e o eixo y (fica na vertical), assim se termina uma função.

Figura 44-Resposta do aluno A-08


1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

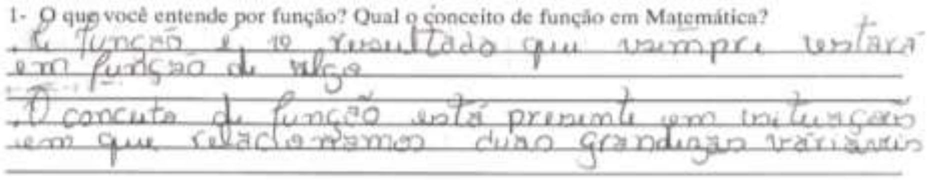
Quando a uma relação entre duas grandezas A função, [illegible] matemática [illegible] [illegible] conjuntos

Figura 45- Resposta do aluno A-13


1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

É uma relação entre duas grandezas, é também a relação entre duas

Figura 46- Resposta do aluno A-01


1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

A função é o resultado que sempre estará em função de algo.
O conceito de função está presente em situações em que relacionamos duas grandezas variáveis

Figura 47- Resposta do aluno A-23

Analisando a resposta dos estudantes do grupo controle, percebe-se que eles não utilizam da linguagem matemática para descrever o conceito de função. Para Andrade e Saraiva (2012), o conceito de função muitas vezes está ligado ao conceito de fórmula, e, as vezes, os alunos associam o conceito de função ao processo gráfico, onde uma fórmula é necessária para desenhá-lo, mas a própria capacidade dos alunos para manipular os símbolos, e operar com eles, não é suficiente para a compreensão estrutural de uma função. Outra dificuldade da aprendizagem do conceito de função é referente a memorização sem compreensão que os alunos fazem, esta dificuldade é relatada em um estudo de Saraiva & Teixeira (2009), referem que:

> A definição de função foi memorizada por alguns alunos, mas a maior parte deles não foi capaz de associar as palavras que escreveram, como "... a um objeto corresponde a uma só imagem" ... com representação gráfica de uma função – escolhendo representação gráfica que não representavam uma função... Assim, é evidenciada a existência de um conflito cognitivo que os alunos têm entre o conceito definição e o conceito de imagem (Andrade & Saraiva 2012, p. 142).

Assim como em outros estudos, podemos averiguar que o ensino de forma tradicional, só com a memorização do conteúdo, não contribui para uma aprendizagem significativa, como enfatizou Saraiva & Teixeira (2009) em relação a memorização do conteúdo, “é evidenciada a existência de um conflito cognitivo que os alunos têm entre o conceito definição e o conceito de imagem”, os estudantes não tem uma compreensão e não conseguem definir uma função. As figura 48, 49, 50 e 51, trazem informações dos estudantes do grupo experimental no teste de associação de palavras.

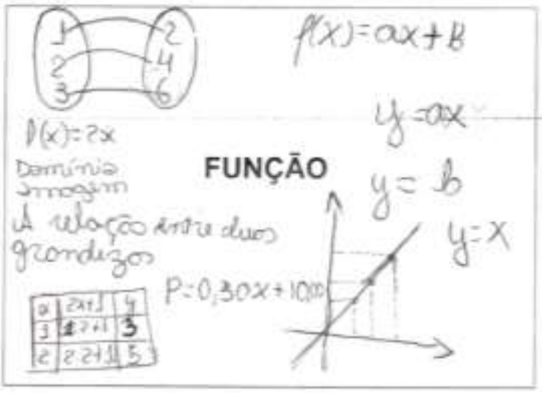


Figura 48- Resposta do aluno A-07

Figura 49- Resposta do aluno A-02

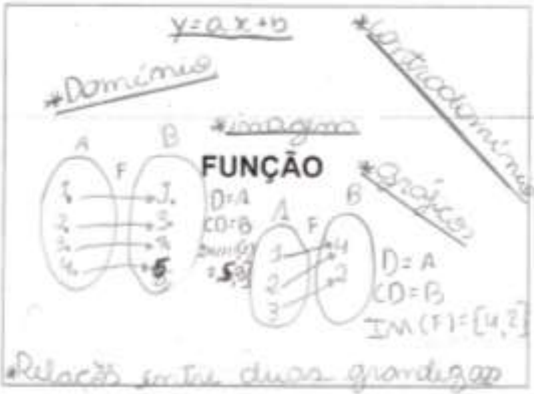


Figura 50- Resposta do aluno A-15

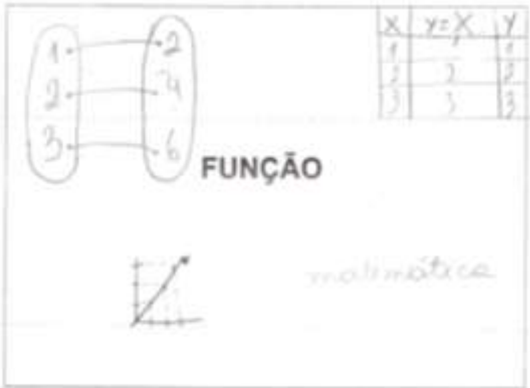
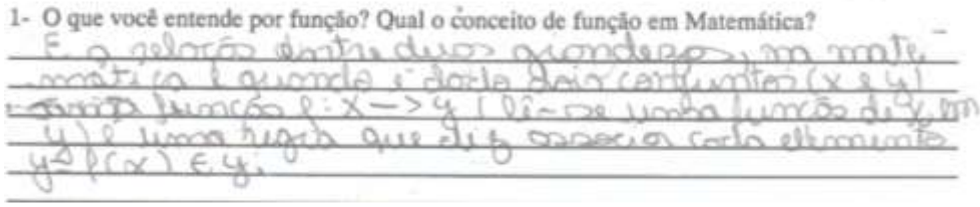


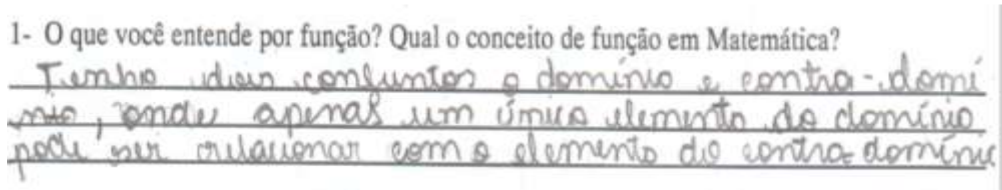
Figura 51- Resposta do aluno A-20

Os estudantes do grupo experimental tiveram como metodologia de ensino a estratégia de resolução de problemas fundamentado na teoria da aprendizagem significativa, no qual os conceitos foram construídos por meio de problemas, no qual os estudantes puderam relacionar as funções de forma contextualizada. Analisando a resposta dos estudantes do grupo experimental no teste de associação de palavras, verifica-se que eles associam “função em matemática” com palavras ou representações algébricas, gráficas e tabelas, que fazem parte do conceito de função, tais como: y = ax + b, domínio, imagem, contradomínio, relação entre duas grandezas, suas respostas são semelhantes as respostas dos estudantes do grupo controle, sendo assim, percebemos a evolução dos dois grupos neste teste, comparando com a resposta do diagnóstico onde os estudantes relacionavam a uma dependencia de uma coisa ou outra, ou a deveres do dia a dia. Segundo Santarosa (2016), para uma aprendizagem significativa do conceito função, nosso objeto matemático em questão, é necessário saber representa-lo por meio de figuras, gráficos, escritas simbólicas, língua natural, etc.... Logo, observamos que os estudantes atribuíram significados relacionados ao conceito de função. As figuras 52, 53, 54 e 55, trazem as respostas da pergunta: O que voce entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?


1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

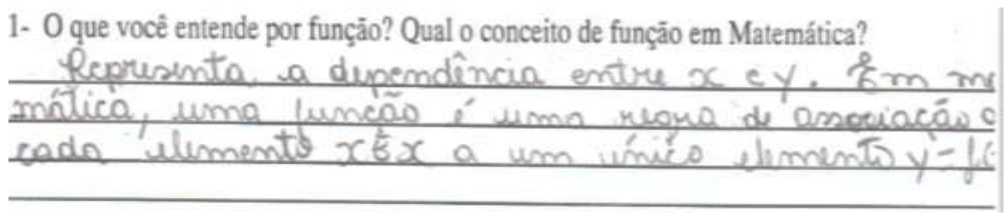
É a relação entre duas grandezas, na matemática é quando é dado dois conjuntos (x e y) como função f: X -> Y (lê-se uma função de X em Y) é uma regra que diz associa cada elemento y=f(x) ∈ Y.

Figura 52- Resposta do aluno A-07- O que é função


1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

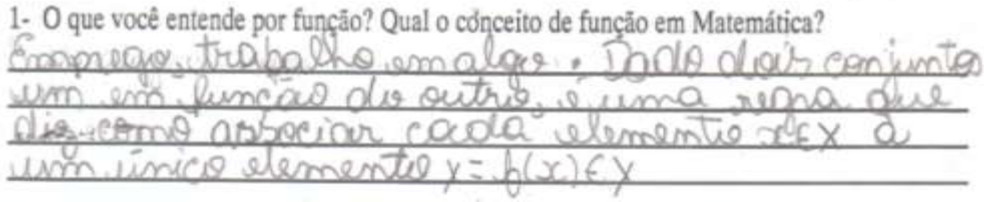
Tendo dois conjuntos o domínio e contra-domínio, onde apenas um único elemento do domínio pode ser relacionar com o elemento do contra-domínio

Figura 53- Resposta do aluno A-02- O que é função


1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Representa a dependência entre x e y. Em matemática, uma função é uma regra de associação cada elemento x∈X a um único elemento y=f(

Figura 54- Resposta do aluno A-15- O que é função


1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Emprego, trabalho em algo. Dado dois conjuntos um em função do outro, é uma regra que diz como associar cada elemento x∈X a um único elemento y=f(x)∈Y

Figura 55- Resposta do aluno A-20- O que é função

Observando as respostas dadas pelos estudantes do grupo experimental, observa que os estudantes utilizaram da linguagem matemática, e escreveram o conceito de função corretamente, ou parte de suas propriedades essenciais. Segundo Vinner, para se adquirir um conceito não basta o conhecimento da definição, pois tal não garante a sua compreensão e, para atingir, é preciso ter um conceito imagem. Logo, observamos que no teste de associação de palavras os estudantes trouxeram representações do conceito de função, e quando a professora fez a pergunta, os estudantes expressaram este conceito e utilizaram a linguagem matemática para se expressar.

5.3.1.2 Análise dos Mapas Conceituais Pós-teste

Nesta fase, o objetivo principal desta atividade estava relacionado à identificação de evolução conceitual no que se refere à assimilação de significados aos conceitos relacionados ao conteúdo de Função. Assim, nosso intuito foi averiguar indícios que possam apontar se o aluno foi capaz de estabelecer relações entre as novas informações, e os seus conhecimentos anteriores, e como estas novas relações se reorganizaram na sua estrutura cognitiva. As figuras 56, 57 e 58 são os mapas conceituais produzido pelos estudantes A 01, A 08 e A 13, são os mesmos estudantes da análise do mapa realizado no teste diagnóstico.

Figura 56 -Mapa conceitual do aluno A-08

Figura 57- Mapa conceitual do aluno A-01

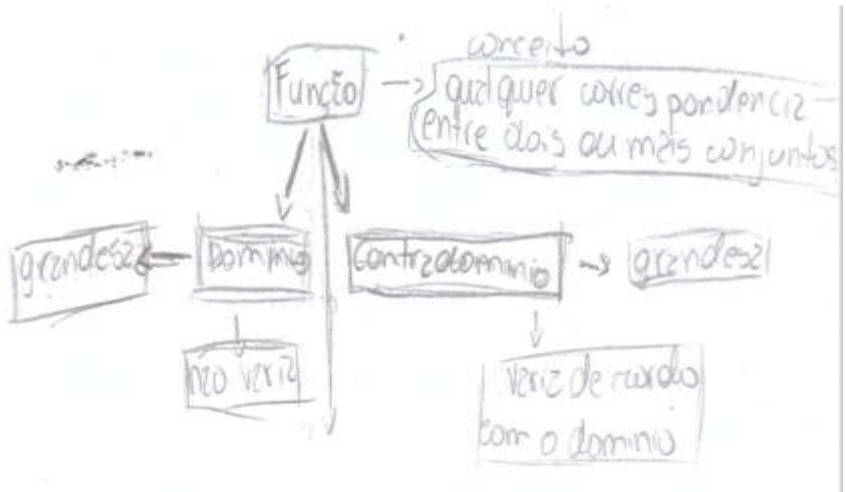


Figura 58- Mapa conceitual do aluno A-13.

Podemos observar que os estudantes do grupo controle tiveram uma pequena evolução em relação ao mapa realizado no teste diagnóstico. No teste diagnóstico, os estudantes apenas relacionavam função como a dependência de alguma coisa, não havia relação entre os conceitos e nem indícios de diferenciação progressiva e reconciliação integradora. Como observamos nos resultados do teste realizado anteriormente, os estudantes do grupo controle não conseguem formalizar o conceito de função e nem suas propriedades essenciais. Nos mapas conceituais realizados no pós-teste, já surgem alguns conceitos, como a classificação das funções em injetiva, sobrejetiva e bijetiva, ou o que é o domínio e o contradomínio. O Quadro 50 apresenta a análise dos mapas elaborados pelos estudantes do grupo controle.

Quadro 50- Análise dos mapas conceituais dos estudantes A01, A08 e A13- Pós-teste

Estudante A 01			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
O estudante não define o conceito de função, não utiliza a linguagem matemática e nem as propriedades essenciais do conceito, faltando alguns elementos, pois os únicos elementos que surgem é função injetiva, sobrejetiva e bijetiva.	Apresenta apenas a classificação das funções.	Não apresenta indícios de diferenciação progressiva	Não apresenta indícios de reconciliação integradora
Estudante A 08			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
O estudante conceitua parcialmente o que é uma função, e apresenta como outros elementos no mapa: domínio e contradomínio.	Não apresenta hierarquia conceitual	Não apresenta indícios de diferenciação progressiva	Não apresenta indícios de reconciliação integradora
Estudante A-13			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
No mapa do estudante o conceito não está correto, e a relação entre as palavras e conceitos não tem sentido.	Não apresenta hierarquia conceitual	Não apresenta indícios de diferenciação progressiva	Não apresenta indícios de reconciliação integradora

Logo, concluímos que os estudantes do grupo controle, não tiveram uma assimilação conceitual de forma significativa. As figuras 59, 60 e 61, são os mapas conceitual produzidos pelos estudantes do grupo experimental.

Figura 59- Mapa conceitual do aluno A-02

Figura 60- Mapa conceitual do aluno A-15

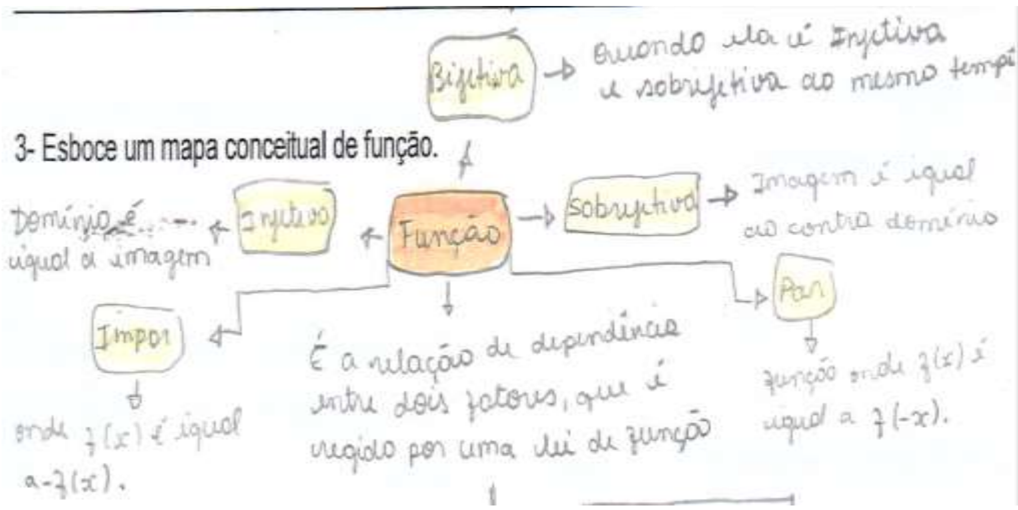


Figura 61- Mapa conceitual do aluno A-07

Em relação ao grupo experimental, tivemos um resultado satisfatório, 40% dos estudante, esboçaram o mapa semelhante ao mapa do estudante A 02, onde surgiu o conceito de função, domínio, contradomínio, imagem, função crescente e decrescente, função par e função ímpar, função injetiva, sobrejetiva e bijetiva, relacionando assim com os conceitos de cada particularidade, utilizando a linguagem matemática para defini-los. O mapa dos estudante A-02, observamos que ele relaciona corretamente os conceitos gerais com os particulares, porém em seu mapa falta algumas informações como função crescente e decrescente, em relação ao mapa inicia no teste diagnóstico, o estudante A02, teve uma grande evolução.

O mapa do estudante A 15, teve uma pequena evolução, traz informações de partes do conceito de função e apenas quando a função é crescente e decrescente, o que deixou a desejar faltando outros conceitos, no qual 20% dos estudantes esboçaram um mapa semelhante ao do estudante A 15, ou seja, com pouca ou quase nenhuma informação. Já o estudante A 07, também teve uma boa evolução em relação ao mapa inicial, em seu mapa, traz conceitos como função injetiva, bijetiva e sobrejetiva, função par e função ímpar, porém faltou alguns conceitos. O estudante comete um pequeno erro quando diz que “função é uma relação de dependência entre dois fatores”, quando na verdade é uma relação entre duas grandezas. O Quadro 51 apresenta a análise dos mapas elaborados pelos estudantes do grupo experimental.

Quadro 51- Análise dos mapas conceituais dos estudantes A02, A07 e A15- Pós-teste

Estudante A 02			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
O estudante faz uso da linguagem matemática, utiliza os conceitos básicos, faltando alguns como domínio, contradomínio e imagem, alguns conceitos relevantes são identificados sendo que o estudante define corretamente o conceito de função.	É possível identificar com clareza os conceitos mais gerais e mais específicos. O estudante apresenta organização hierárquica, com o conceito de função como mais importante. No segundo nível hierárquico, cita os tipos de funções e os elementos que a caracterizam	Apresenta diferenciações entre: função injetiva, bijetiva, sobrejetiva, função par e função ímpar.	Reconcilia quando enfatiza os conceitos dos tipos de cada função, é possível identificar os conceitos mais gerais e os mais específicos, existindo clareza no mapa construído
Estudante A 07			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
O estudante faz uso da linguagem matemática, utiliza os conceitos básicos. Classifica as funções em Injetiva, sobrejetiva e bijetiva, função par e função ímpar.	Apesar do estudante trazer conceitos e as classificações das funções, ele os organiza em apenas um nível de hierarquia.	O estudante diferencia progressivamente quando diz que uma função pode ser: injetiva, sobrejetiva e bijetiva, e conceitua cada uma delas.	Reconcilia quando enfatiza os conceitos dos tipos de cada função ao conceito geral.
Estudante A-15			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
O estudante faz uso da linguagem matemática, utiliza os conceitos básicos, faltando alguns como domínio, contradomínio e imagem, função par e ímpar.	Não apresenta hierarquia conceitual	Não apresenta indícios de diferenciação progressiva	Não apresenta indícios de reconciliação integradora

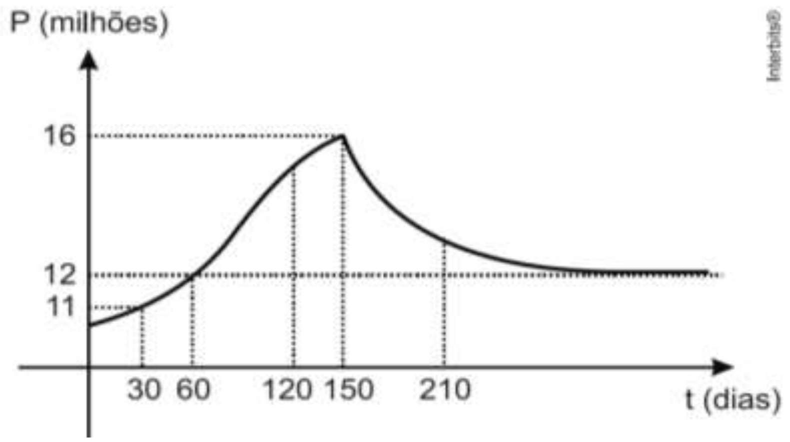
Fonte: o autor

A verificação da aprendizagem significativa não é uma tarefa fácil e muito menos pode ser avaliada por meio de um único mecanismo. No entanto, a evolução conceitual que é parte do processo de assimilação da aprendizagem significativa, quanto ao conceito de função, pode ser evidenciada nos mapas, pois estes refletem todo o processo de atribuição de significado para este conceito.

5.3.1.3 Prova de lápis e papel: pós-teste

O objetivo do problema (P-01) é interpretar o gráfico, compreender que cada elemento da imagem está associado a um único elemento do domínio, neste problema o estudante fará apenas análise e interpretação do gráfico, compreendendo quando uma função é bijetiva, e em que intervalo ela é crescente ou decrescente, as ações para este problema é compreender o problema e interpretar a solução. O quadro 52 esboça a descrição para a análise do problema 1 do pós teste.

Problema 1: (UFPB-2012) O gráfico a seguir representa a evolução da população P de uma espécie de peixes, em milhares de indivíduos, em um lago, após t dias do início das observações. No 150º dia, devido a um acidente com uma embarcação, houve um derramamento de óleo no lago, diminuindo parte significativa dos alimentos e do oxigênio e ocasionando uma mortandade que só foi controlada dias após o acidente.



Com base no gráfico e nas informações apresentadas, julgue os itens a seguir, justificando sua resposta.

a) A população P de peixes é crescente até o instante do derramamento de óleo no lago;

b) A população P de peixes está representada por uma função injetiva no intervalo [150, 210]?

c) A população P de peixes atinge um valor máximo em t =150?

d) A população P de peixes, no intervalo [120,210], atinge um valor mínimo em t =120?

e) A população de peixes tende a desaparecer, após o derramamento de óleo no lago?

f) Expresse sua compreensão do problema analisando o enunciado e o gráfico.

Quadro 52- Categorias de análise do problema 1-pós teste

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 1- pós-teste
Compreender o problema	Interpretar o gráfico, compreender que cada elemento da imagem está associado a um único elemento do domínio.
Interpretar a solução	a) Analisando o gráfico, observa-se que a linha cresce de 11 até 16 milhões. b) Não, pois para valor de *t* temos um valor *P*, logo a função neste intervalo é bijetora. c) Sim, no instante em que $p = 16$. d) Não, pois o valor de $p\ (210) < p\ (120)$. A linha pontilhada que passa por 120 é maior que a linha que passa por 210. e) Não, veja que a população fica constante em p = 12, portanto, não podemos afirmar que a população vai acabar.

Os alunos do grupo experimental tiveram um ótimo desempenho em relação ao problema (P-01) demonstraram compreensão do objetivo do problema, pois a primeira ação está totalmente correta, 84% os alunos executaram as ações utilizando da linguagem matemática na aplicação dos conceitos, alcançando um ótimo desempenho na solução do problema os outros 16% deram a resposta, porém não justificaram.

Do grupo controle, 80% responderam corretamente justificando suas respostas, porém os 20% responderam parcialmente o problema, tendo dificuldades na interpretação do gráfico. O aluno A-04 teve um desempenho regular, o mesmo resolveu as três primeiras ações parcialmente corretas e a última incompleta. No entanto, definiu parcialmente os objetivos para solução. Realizou parcialmente as análises, pois não analisou as duas funções e as deixou sem resposta explicativa. Portanto, extraiu parcialmente os elementos significativos do problema. Logo, as respostas dadas estavam incompletas.

O objetivo do problema 02 do pós-teste é distinguir as funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva, justificando sua resposta. O Quadro 53 traz a descrição para a análise do problema 2 do pós teste.

Problema 2: Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, f (t) = a $\cdot$ 2^{-bt}, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes. Se a população inicial (t = 0) é 1024 e após 10 anos seja a metade da inicial, determine: a) os valores de a e b. b) o tempo mínimo para que a população se reduza a 1/8 da população inicial. c) se essa função e injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

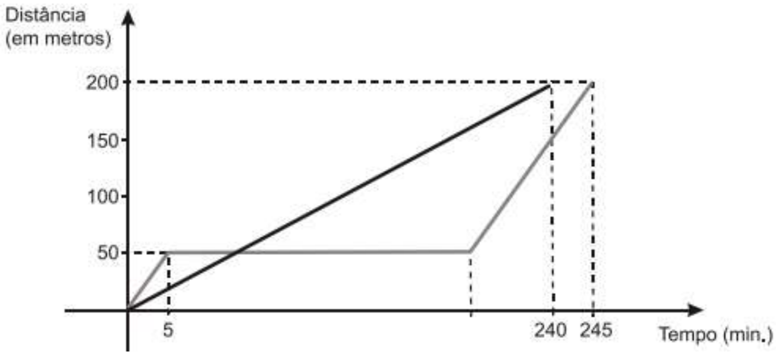
Quadro 53- Parâmetros do Problema 2-pós-teste de função

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema
Compreender o problema	Relacionar os dados do problema, distinguir as funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva.
Construir o modelo matemático	a) a · $2^{-b.0}$ = 1024 b) 1024 · 2^{-t} = 128
Solucionar o modelo	a) a · $2^{-b.0}$ = 1024, donde temos a = 1024. Depois de 10 anos, ficamos com 1024 · 2^{-10b} = 512, que simplificando, chegamos a b = 1/10. b) 1024 · 2^{-t} = 128, donde temos t = 7 anos.
Interpretar a solução	c) Como a população é decrescente, mas nunca negativa, iniciando em 1024, a função não pode ser sobrejetiva, pois CD ≠ Im. Agora, se tomarmos f(t_1) = f(t_2), temos que 1024 · $2^{-t_1/10}$ = 1024 · $2^{-t_2/10}$, o que implica em t_1 = t_2, ou seja, a função f é injetiva.

Neste problema 75% dos estudantes do grupo experimental demonstraram compreensão do objetivo do problema, pois a primeira ação está totalmente correta, o que pode também ser observado na construção dos modelos, solucionaram corretamente, justificaram a resposta parcialmente correta. Os alunos demonstraram que executaram as ações de forma consciente na aplicação dos conceitos, distinguindo as propriedades essenciais para alcançar os resultados da solução do problema. Os 25% dos estudantes, extraíram os elementos das funções, determinaram parcialmente os objetivos das questões, sendo que construíram a lei de formação incorreta, os estudantes sentiram dificuldade nas propriedades da potência, não chegando assim ao resultado. Desse modo, extraíram parcialmente os resultados do problema.

No grupo controle, 60% dos alunos resolveram as questões corretamente, atingindo os objetivos do problema, construindo e solucionando o modelo matemático corretamente e interpretando a solução. Os outros 40% dos estudantes sentiram dificuldades na construção do modelo e na solução, observou que os alunos sentiram dificuldades em resolver a questão, pois a mesma envolvia outros conhecimentos como potenciação por exemplo e muitos não recordavam. A-05 e A-06 resolveram o problema com todas as ações incompletas, não compreenderam o totalmente, não extraindo todos os elementos. Portanto, definiram parcialmente o objetivo, pois não consideraram todos os elementos envolvidos para resolver o problema. Do mesmo modo construíram parcialmente o modelo. Observou de um modo geral, a dificuldade dos estudantes quando o problema envolve mais de um conteúdo que eles não recordam e quando aumenta o grau de complexidade do problema, no caso deste problema, eles sentiram dificuldades na compreensão, na elaboração do modelo e consequente não chegaram a solução.

Problema 03: A fábula A lebre e a tartaruga, do escritor grego Esopo, foi recontada utilizando-se o gráfico abaixo para descrever os deslocamentos dos animais.



Suponha que na fábula A lebre e a tartaruga apostam uma corrida em uma pista de 200 metros de comprimento. As duas partem do mesmo local no mesmo instante. A tartaruga anda sempre com velocidade constante. A lebre corre por 5 minutos, para, deita e dorme por certo tempo.

Quando desperta, volta a correr com a mesma velocidade constante de antes, mas, quando completa o percurso, percebe que chegou 5 minutos depois da tartaruga. Considerando essas informações,

e) Determine a velocidade média da tartaruga durante esse percurso, em metros por hora.
f) Determine após quanto tempo da largada a tartaruga alcançou a lebre.
g) Determine por quanto tempo a lebre ficou dormindo.
h) Escreva a função que determina o tempo percorrido em função da velocidade da lebre e o da tartaruga.

O Quadro 54 traz a descrição para a análise do problema 3 do pós-teste.

Quadro 54- Parâmetros do Problema 3: pós-teste de função

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 3-pós-teste
Compreender o problema	Compreender o problema fazendo a análise do gráfico, observando o tempo que a lebre parou, observando que o tempo gasto está em função da velocidade.
Construir o modelo matemático	Y = 50x para a tartaruga Y = 10x para a lebre
Solucionar o modelo	a) Observe que a tartaruga completou os 200 metros em 240 minutos, ou seja, em 4 horas. Portanto, sua velocidade média foi de 200/4 = 50 metros por hora. c) A equação que determina a quantidade de metros percorrida pela tartaruga em função do tempo é f(t) = 200/ 240 $\Rightarrow$ f(t) = 5/6 t . Pelo gráfico a tartaruga alcança a lebre quando atinge 50m do seu percurso. Se f(t) = 50 $\Rightarrow$ 5/6t = 50 $\Rightarrow$ t = 60min = 1h. c) A lebre percorreu 50 m em 10 min, logo sua velocidade média foi de 10 metros por minuto. Para percorrer 200, ela deveria gastar 20 min, como gastou 245, então ela dormiu 245 - 20 = 225 min. d) y = 50x tartaruga

	y = 10x lebre
Interpretar a solução	Compreender o problema fazendo a análise do gráfico, observando o tempo que a lebre parou, observando que o tempo gasto está em função da velocidade.

Os 85% dos estudantes, realizaram todas as ações completas, interpretaram o gráfico, o contexto do problema, desenvolveram as ações corretamente e justificaram suas respostas, fazendo uso das aplicações matemáticas conforme os modelos de funções, alcançando o valor máximo dos indicadores, a Tabela 8, relata o desempenho do estudante A-10.

Tabela 8- Análise de Desempenho do Aluno (A-10) no Problema (P-03 pós-teste)

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
Compreender o problema	O aluno compreende parcialmente o problema, fazendo a análise do gráfico, observando o tempo que a lebre parou, observando que o tempo gasto está em função da velocidade.	4
Construir o modelo matemático	O aluno construiu o modelo matemático corretamente: Y = 50x x = 200/4 Y = 10x	5
Solucionar o modelo matemático	a) O aluno responde o modelo corretamente: 200/4 = 50 metros por hora. b) Como a tartaruga corre 50m por hora e a lebre dormiu em 50m, y= 50x temos então que a tartaruga alcançou a lebre em 1h c) O aluno não responde corretamente, interpretando que a lebre completaria o percurso em 10 min. A lebre percorreu 50 m em 5 min. Então ela dormiu 245 - 10 = 235 min. d) y = 50x y = 10x	4

Os outros 25% dos alunos responderam as questões parcialmente correta, os alunos A-05 e A-07, não responderam o item d), os alunos A-03, A-10 e A-11 cometeram pequenos erros na interpretação da letra c), encontrando 235 min como resposta. O aluno A-04 não determinou completamente as condições, mas tentou justificar usando implicitamente a ideia da definição de função. Desse modo, suas ideias foram identificadas como razoável nesta solução.

O objetivo do pós-teste, é averiguar se o aluno aprendeu significativamente, se ele assimilou em sua estrutura cognitiva o conteúdo estudado, transferindo o que aprendeu em diferentes contextos.

Em média, 80 % dos estudantes do grupo experimental, durante todas as etapas, tiveram um grande avanço. Realizaram todas as ações completas, interpretaram os gráficos, o contexto do problema, desenvolveram as ações corretamente e justificaram suas respostas, fazendo uso das aplicações matemáticas conforme os modelos de funções, alcançando o valor máximo dos indicadores. Portanto, podemos concluir que estes alunos transferem o conteúdo assimilado em diversas situações, pois demonstraram nas ações realizadas que compreenderam o conceito envolvido no contexto, souberam aplicar corretamente o modelo das funções solicitadas e interpretaram a solução corretamente. Logo, conclui-se que estes alunos assimilaram o conceito de função.

Observa-se que alguns alunos do grupo controle apresentaram rendimento regular em algumas ações, uns na primeira ação compreenderam parcialmente o problema, e consequentemente as outras ações ficaram comprometidas, tiveram dificuldades ao interpretar os dados, pois eles enfatizavam que estes problemas são diferentes dos trabalhados em sala, outros ainda cometem erros em pequenos cálculos por falta de atenção. A Figura 62 traz o gráfico do resultado dos dados estatísticos do escore padronizado da interpretação da solução (Y4) pré e pós-teste entre os grupos.

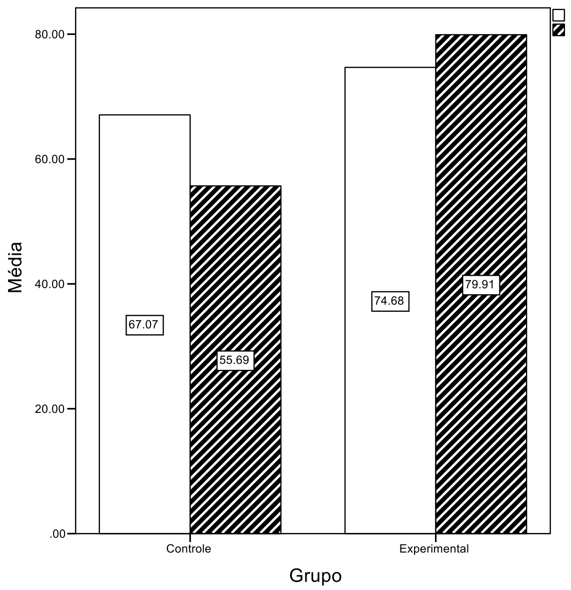


Figura 62- Escore padronizado da interpretação da solução (Y4) pré e pós-teste entre os grupos

Para Silva (2017), há dificuldade dos alunos em escrever e usar a terminologia matemática adequada a cada situação, o que demonstra a falta de hábito dos estudantes em trabalhar com problemas que os façam expressar e escrever raciocínios matemáticos. Muitas vezes as atividades direcionadas aos estudantes visam apenas a reprodução de métodos e algoritmos já ilustrados, buscando uma aprendizagem mecânica. Tal situação reforça que para começar a resolver um problema é necessário primeiramente interpretá-lo e extrair informações necessárias para, posteriormente, iniciar o processo de resolução.

5.2 Análise do Resultado da Estratégia de Resolução de Problemas em Função Afim

A sequência didática teve-se como objetivo iniciar o estudo da função afim e seus casos particulares, através da resolução de problemas, com base nos pressupostos teóricos da aprendizagem significativa de Ausubel. Portanto, espera-se que os estudantes construam o conceito de função afim, estabeleçam relações entre as diferentes formas de expressar uma função e ainda, fazer uso desses conhecimentos para resolver situações problemas. Primeiro foi elaborado uma avaliação diagnóstica através da prova de lápis e papel, para averiguar os conhecimentos prévios dos estudantes do grupo experimental e do grupo controle.

Foram analisados os problemas compostos nos testes e atividades realizadas, escolhidos de acordo com o objetivo observável para assimilar os conceitos de função afim, dispostos em três fases:

- Teste diagnóstico: contendo três problemas envolvendo o conteúdo de funções.
- Atividade Mediadora: destacou-se o problema inicial da aplicação do conceito de função afim na forma intuitiva, problemas envolvendo contexto de aplicação das funções afins e casos particular de funções afim.
- Teste final do conteúdo de função afim: para complementar esta pesquisa, foram escolhidos três problemas do teste final com aplicação do conceito de função afim.

5.2.1 Análise do Resultado da Avaliação Diagnóstica: Pré-teste

As análises explicativas desta fase, abordou os aspectos fundamentais para observar os conhecimentos prévios dos estudantes, com relação ao conteúdo de funções. E de maneira implícita observar também o desempenho e a habilidade dos mesmos para resolver problemas.

As aplicações quanto a metodologia da ERP, nos problemas do teste diagnóstico, foram analisadas segundo a execução das ações por meio das operações realizadas. As ações desenvolvidas se destacaram pelas ações qualitativas descritas com relação a interpretação da solução dos problemas.

Problema 1: Uma empresa de telefonia móvel oferece um plano no qual o cliente paga um valor fixo de R$ 50,00 por um pacote de 75 minutos mensais, mais R$ 0,75 para cada minuto adicional. Considerando a situação descrita, determine o que se pede: a) O valor que um usuário vai pagar, sabendo que ele consumiu 120 minutos num mês. b) Se o valor da conta de um cliente desse plano for R$ 106,25, qual o tempo, em minutos, consumido por ele? c) Escreva a lei de formação que expressa o preço da conta telefônica em função do tempo, em minutos, que excede o pacote.

O problema 1, trata-se de uma função afim, no qual traz uma relação do valor a ser pago pela conta da companhia telefônica em função do tempo de uso, em minutos que excede o pacote. O quadro 55 retrata das operações envolvidas no problema 01.

Quadro 55- Parâmetros do Problema 1- Pré-teste de função afim

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema
Compreender o problema	Elaborar os dados do problema, observar as unidades de medidas. Verificar a relação entre as grandezas envolvidas.
Construir o modelo matemático	c)f(x) = 50 + 0,75x, em que *x* representa os minutos adicionais do mês. Para o caso de consumos menores ou iguais a 75 minutos, a pessoa vai pagar somente a taxa mínima do plano.
Solucionar o modelo	a- 120 – 75 = 45 minutos adicionais. Logo, 45 . 0,75 = R$ 33,75. Portanto, o valor a pagar será 50 + 33,75 = R$ 83,75. b- 106,25 – 50,00 = 56,25. Logo, 56,25: 0,75 = 75 minutos adicionais. Portanto, o consumo foi de 150 minutos.

O resultado do problema1 no grupo experimental, 82% dos estudantes compreenderam o objetivo do problema, observaram a relação entre as unidades de tempo e construíram o modelo matemático corretamente. Porém observa-se que alguns estudantes ainda comentem erros nas quatros operações, alguns estudantes não observaram que os minutos do item *a* do problema, necessitava ser subtraído 120 – 75.

No problema (P-01) o estudante A-02 realizou todas as ações completas, fazendo uso das aplicações matemáticas encontrando a lei de formação da função alcançando o valor máximo dos indicadores. Portanto, obtém-se que os conceitos particulares para execução das ações realizadas pelo aluno (A-02), destaca-se como suficiente para assimilar as aplicações nos problemas, pois demonstrou nas ações realizadas que compreendeu o conceito envolvido no contexto, soube aplicar corretamente o modelo solicitado e interpretou a solução corretamente. Logo, por seus conhecimentos prévios, este aluno está apto para assimilar o novo conhecimento de função afim. A Tabela 9 consta a análise do desempenho quantitativo e qualitativo do aluno A-02:

Tabela 9-Análise do Problema 1, aluno A-02- Pré-teste de função afim

Categoria	Desempenho qualitativo	Desempenho quantitativo
Compreender o problema	O aluno compreendeu o problema, organizou os dados do problema corretamente.	5
Construir o modelo matemático	y = 50 + 0,75x.	5
Solucionar o modelo	a- 50 + 0,75 . 120 = vai pagar 140 reais b-106,25 – 50,00 = 56,25. 56,25: 0,75 = 75. O consumo foi de 150 minutos.	5

De modo geral, os estudantes do grupo controle tiveram um desempenho satisfatório, 75% dos estudantes resolveram todas as ações do problema corretamente e o restante ocorreu a mesma situação do grupo experimental, falta de atenção na leitura do problema, sendo assim não chegaram ao resultado.

No problema 1 o estudante (A-01) desenvolveu a relação entre as variáveis que permitiram compreender o modelo, no entanto, não realizou a interpretação completa da questão. Não respondeu completamente o objetivo principal do problema. A Tabela 10 consta a análise do desempenho quantitativo e qualitativo do aluno A-01:

Tabela 10-Análise do Problema 1, aluno A-01

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
Compreender o problema	O aluno compreendeu parcialmente o problema,	3
Construir o modelo matemático	y = 50 + 0,75x.	5
Solucionar o modelo	120 . 0,75 = R$ 90. O valor a pagar será 50 + 90 = R$ 140,00.	2

Portanto, todos os procedimentos foram desenvolvidos parcialmente corretos, isso implica que, este aluno obteve neste momento um nível de conhecimento consciente, pois aplica corretamente os dados no modelo matemático, porém faltou um pouco mais de atenção na leitura do problema, pois no item *a*, o estudante não observou que R$ 50,00 é uma taxa fixa para o consumo de 75 minutos, logo para 120 minutos ele teria que subtrair.

Problema 2: Um representante comercial recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 1.500 e uma variável, que corresponde a uma comissão de 6% sobre o total das vendas efetuadas durante o mês. a) Qual o salário mensal desse representante em função de total de vendas? b) Quanto receberá no mês que vender R$ 5.000? c) Quanto deverá vender por mês para ter um salário de R$ 3.000? d) Quanto receberá caso não consiga vender nada? e) Qual a lei de formação da função que possibilita calcular o salário mensal desse representante?

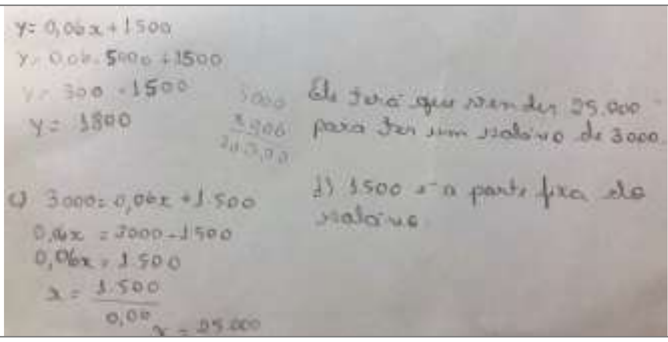
O problema 2, tem como objetivo analisar que o salário mensal do representante comercial é dado em função das vendas efetuadas durante o mês mais uma parte fixa, observar que a comissão é 6% do total de vendas, o quadro 56 traz a descrição das operações do problema 2.

Quadro 56- Parâmetros do Problema 02. Pré-teste de função afim

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema
Compreender o problema	Compreender que parte fixa do salário (independente das vendas) R$ 1.500,00 valor de *b*. O percentual sobre as vendas é 6% (0,06) valor de *a*. Variável do problema; valor de venda efetuada durante o mês (*x*).
Construir o modelo matemático	Lei de formação do salário mensal: f(x) = 0,06x + 1500
Solucionar o modelo	b) Y = 0,06 . 5000 + 1.500 = R$ 1.800, portanto ele receberá R$ 1.800 no mês que vender R$ 5.000 c) 3.000 = 0,06 x + 1.500 ⇒ x = 25.000, logo ele terá que vender RS 25.000 para ter um salário de R$ 3.000 d) Parte fixa do salário independente das vendas, no caso R$ 1.500 e) f(x) = 0,06x + 1500

No problema 2, o estudante A-02 realizou todas as ações, fazendo uso das aplicações matemáticas, extraiu os dados do problema e construiu o modelo matemático corretamente, alcançando o valor máximo dos indicadores. Portanto, obtém-se que os conceitos particulares para execução das ações realizadas pelo aluno (A-02), destaca-se como suficiente para assimilar as aplicações nos problemas, pois demonstrou nas ações realizadas que compreendeu o conceito envolvido no contexto, soube aplicar corretamente o modelo da função e interpretou a solução corretamente. A Tabela 11 consta a análise do desempenho quantitativo e qualitativo do aluno A-02:

Tabela 11-Análise do aluno A-02 no Problema 02-Pré-teste função afim

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
Compreender o problema	O estudante compreendeu que R$ 1.500 é uma taxa fixa e que independente das vendas mensais.	5
Construir o modelo matemático	Y = 0,06x + 1500	5
Solucionar o modelo		5

De modo geral, os estudantes do grupo experimental tiveram um bom desempenho na solução do problema 02, compreenderam o problema, as variáveis do problema, construíram o modelo matemático corretamente, porém, 10% dos estudantes cometeram pequenos erros no cálculo de porcentagem.

No problema 2, o estudante A-01 do grupo controle, realizou todas as ações completas, fazendo uso das aplicações matemáticas, extraiu os dados do problema e construiu o modelo matemático corretamente, alcançando o valor máximo dos indicadores. Já o estudante (A-03), compreendeu o problema, constrói o modelo por ensaio e erro, porém cometeu um erro no deslocamento da vírgula ao fazer o cálculo de porcentagem.

No grupo controle, 70% dos estudantes tiveram um bom desempenho na solução do problema 02, compreenderam o problema, as variáveis do problema, porém, 30% dos estudantes ainda resolvem problemas por ensaio e erro, não fizeram a lei de formação da função, de modo que não organizam os dados e não compreenderam as variáveis envolvidas, também cometeram pequenos erros no cálculo de porcentagem.

O problema 3, tem como objetivo encontrar a lei de formação das funções, verificando qual opção é mais vantajosa. Neste problema, espera-se que os estudantes observem que a lei de formação das função é diferente, que cada bilhete dá direito a utilizar apenas um brinquedo.

Problema 3: Em um parque de diversões, cada bilhete dá direito a utilizar apenas um brinquedo, uma única vez. São duas opções de pagamento;

Opção 1: R$ 5,00 por bilhete

Opção 2: valor fixo de R$ 40,00 por dia, acrescido de R$ 2,00 por bilhete.

a) Escreva as funções para as duas opções de pagamento. b) Se uma pessoa tem R$ 50,00 para gastar no parque, qual das opções lhe permite comprar a maior quantidade de bilhetes? c) Em que condições a opção 2 é a mais vantajosa?

Quadro 57-Parâmetros do Problema 3- Pré-teste de função afim

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema
Compreender o problema	Elaborar os dados do problema, extraindo os elementos conhecidos e desconhecidos, compreendendo a lei de formação que envolve as duas funções. Compreender que cada bilhete dá direito a utilizar apenas um brinquedo, ou seja, cada elemento do domínio tem uma imagem.
Construir o modelo matemático	Opção 1: f (x) = 5x Opção 2: f (x) = 40 + 2x
Solucionar o modelo	B) Opção 1: f (x) = 5x ⇒ 50 = 5x ⇒ x = 10 Opção 2: f (x) = 40 + 2x ⇒ 50 = 40 + 2x ⇒ x = 5. A opção 1 é mais vantajosa para quem quer gastar apenas 50 reais. C) 5x > 40 + 2x ⇒ 3x > 40 ⇒ x > 13,3333... Logo, a partir de 14 bilhetes, a opção 2 é mais vantajosa.

O aluno (A-02) do grupo experimental, no desempenho do problema (P-03), demonstrou conhecimento ao aplicar o conceito relacionado com o modelo das funções dada, realizou os procedimentos indicando os termos matemáticos envolvidos e concluiu o pensamento com uma breve descrição, nota-se no desenvolvimento dos cálculos, que essas ações foram realizadas de maneira consciente, ou seja, o aluno analisou que se tratava de uma função e utilizava da expressão *f*(x).

O desempenho do aluno (A-06) no teste foi razoável, pois resolveu somente os itens *a* e *b*, compreendeu que se tratava de uma função pela lei de formação, porém não compreendeu o contexto de que cada bilhete correspondia a um brinquedo. No item *c*, o aluno não observou a pergunta da questão, e em seu modelo matemático igualou as funções, sendo assim não conseguiu chegar ao resultado. A Tabela 12 consta a análise do desempenho quantitativo e qualitativo do aluno A-02:

Tabela 12- Análise do aluno A-02 no Problema 03-Pré-teste função afim

Categoria	Desempenho qualitativo	Desempenho quantitativo
Compreender o problema	O estudante compreendeu o problema, extraiu os elementos conhecidos e desconhecidos e organizou os dados corretamente.	5
Construir o modelo matemático	Opção 1: f (x) = 5x Opção 2: f (x) = 40 + 2x	5
Solucionar o modelo	B) Opção 1: f (x) = 5x 50 = 5x	5

x = 10 Opção 2: f (x) = 40 + 2x 50 = 40 + 2x x = 5. Resposta: “ a opção 1 é mais vantajosa C) 5x > 40 + 2x 3x > 40 x > 13,3....

De modo geral, os estudantes do grupo experimental tiveram um bom desempenho na solução do problema 03, compreenderam o problema, as variáveis do problema, construíram o modelo matemático corretamente, porém, alguns estudantes no item *c*, não se atentaram ao problema e igualaram as funções.

O aluno (A-01) do grupo controle, no desempenho do problema (P-03), demonstrou conhecimento ao aplicar o conceito relacionado, elaborou o modelo matemático, nota-se no desenvolvimento dos cálculos, que essas ações foram realizadas de maneira consciente, ou seja, o aluno tinha conhecimento de função. Já o aluno (A-05), demonstrou dificuldade para elaborar o modelo ao realizar as ações de forma incompleta, mesmo tendo identificado as variáveis corretamente, não fez a relação adequada com o modelo de função e consequentemente não encontrou a solução correta, ou seja, na elaboração do modelo matemático para verificar qual opção era mais vantajosa.

Analisou-se que os conhecimentos prévios dos estudantes, de modo geral, alcançaram o nível satisfatório de aproveitamento, identificado pela maioria das ações realizadas ao assunto de funções afim. Nesta perspectiva, os alunos do grupo controle, demonstraram dificuldades para elaborar os modelos matemáticos e, consequentemente, para solucioná-los, o que representou uma “queda” na quantidade de respostas corretas desses problemas, apresentando ideias confusas ou incompletas.

Desse modo, temos que a compreensão do objetivo do problema é de todo modo fundamental para a elaboração do modelo, no entanto, insuficiente quando há elementos desconhecidos pelo aluno, logo, essas habilidades permaneceram limitadas para realizar tais procedimentos, embora estivessem identificados os dados das variáveis e das incógnitas envolvidas a maneira de relacionar com o conceito de funções afim foram insuficientes. Sobremodo, a elaboração do modelo depende dos conhecimentos expressivos dos conceitos relacionados com os elementos, sendo que grande parte dos estudantes ainda resolvem por ensaio e erro.

No decorrer da aula foram observados momentos de reflexão, questionamentos para motivar a colaboração verbal dos estudantes, com o intuito de observar o desempenho dos alunos no acompanhamento da resolução dos problemas selecionados para explanação.

Com base nos questionamentos da professora, os estudantes interagiram respondendo corretamente ou parcialmente correta as questões, enquanto que os demais estavam atentos as explicações, mas observando os procedimentos de resolução, talvez tentando relacionar com conceitos já formados as ações para compreensão.

Todos os problemas do teste diagnóstico foram solucionados pela professora utilizando o método da ERP, que esteve ativamente estimulando a participação dos estudantes na construção dos modelos das funções, para encontrar os resultados conforme o objetivo de cada problema.

Tendo portanto, identificado que os alunos demonstraram dificuldades para elaborar os modelos, a professora após todos o procedimento de aplicação, ressaltou ainda na aula, que construir o modelo matemático a partir de situações problema, é uma ação importante, para poder generalizar a ideia e possibilitar a aplicação em outras situações. Na retroalimentação do processo, a professora procedeu com esclarecimentos mais detalhados e fez a abordagem com mais ênfase na elaboração dos modelos matemáticos com relação a aplicação dos conceitos.

5.2.2 Análise do Resultado da Fase Formativa e Mediadora de Função Afim

Na retenção inicial**,** são introduzidas as ideias particulares, neste momento foram apresentadas aos alunos situações problema, nas quais se observa que em cada situação a grandeza *y* varia em função de *x*. Nesta etapa, os alunos estudaram função afim (linear, constante e identidade) suas características, conceitos e gráficos.

Em uma das situações desta etapa, a professora fez uma ficha que contém todas as funções representadas pelos alunos nas atividades. Os alunos formaram duplas e analisaram as diferenças entre as representações. Observaram a forma geral de uma função afim ($y = ax + b$), percebendo que nem sempre *a* e *b* são diferentes de zero, pois há as funções constante, linear e identidade.

Cada dupla criou uma tabela de duas colunas com alguns valores para *x* e os respectivos valores para *y*. Em seguida, usando papel quadriculado, as duplas transferiram os dados da tabela para um plano cartesiano, construindo, assim, o gráfico de cada função.

Analisando os resultados, constatou-se o bom desempenho no qual os alunos construíram no plano cartesiano o gráfico de uma função polinomial afim, reconhecendo-o com $x \in \mathbb{R}$, é sempre uma reta. Determinaram o zero de uma função como o valor para *x*, que anula a função. Nesta etapa, eles se apropriaram dos conceitos, resolveram problemas, analisando o gráfico, identificando que a função dada por $y = ax + b$ (a $\neq 0$) é crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$, identificaram os diferentes tipos de função afim, linear, constante, identidade e seus gráficos. A figura 63 representa o gráfico construído pelo A-02.

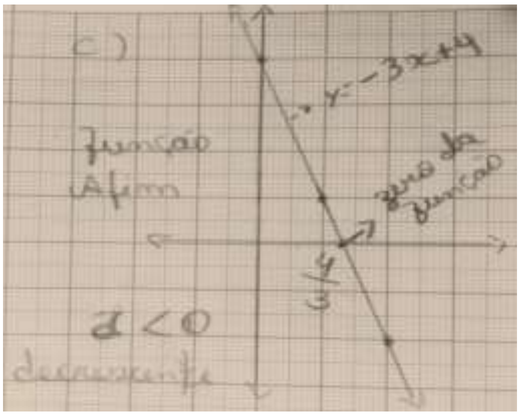


Figura 63 Gráfico do A-02

Ainda em relação aos gráficos, 10% dos estudantes escrevem a função, constroem a tabela para construção do gráfico, porém não fazem as análises e interpretações dos gráficos para identificar uma função a partir do gráfico e marcar os pontos em que a reta intercepta os eixos x e y. Segue o exemplo na figura 64, o gráfico construído pelo aluno A-04.

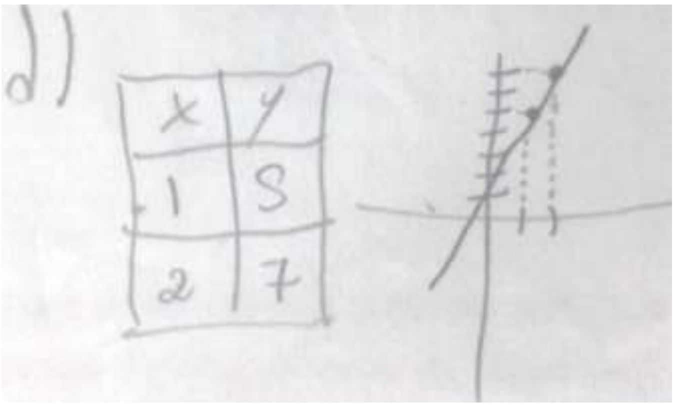


Figura 64- Gráfico do A-04

Durante a construção dos gráficos percebeu-se que alguns alunos não se preoucuparam em utilizar uma régua e nem o cuidado ao projetar perpendicularmente as coordenadas dos pontos. Esperava-se ainda que os alunos apresentassem dúvidas quanto a distribuição dos dados e seus respectivos eixos de representação, sobre o eixo x e sobre o eixo y. É importante salientar que esta primeira representação gráfica, obtida simplesmente pela transcrição dos dados anotados para o plano cartesiano, por si só não permite avançar na construção dos conhecimentos sobre funções. Ainda que durante esta etapa tenha sido possível rever alguns conceitos e técnicas importantes para o esboço de gráficos, fazem-se necessárias reflexões e análises sobre o gráfico durante o processo de construção e elaboração do modelo matemático.

A professora salientou que tinha estabelecido uma relação entre o gráfico da função afim e o valor absoluto do parâmetro a. Posteriormente questionou os alunos sobre como identificar o sinal de a, logo um aluno respondeu que bastava observar se a função era crescente ou decrescente. Os estudantes puderam perceber que a taxa de variação a é sempre constante para cada função afim. Identificando assim uma característica muito importante deste tipo de função. No decorrer da atividade de construção do conceito de taxa de variação e identificação do parâmetro a, pode-se perceber que os alunos sentiram-se parte atuante na construção dos conhecimentos matemáticos envolvidos, visto que, participaram, opinaram e contribuíram com saberes anteriormente construídos.

Na fase da retenção posterior os estudantes já identificam e distinguem os diversos tipos de função, linear da forma $y = ax$, constante $y = b$ e identidade $y = x$. Os alunos retiveram as ideias particulares que foram trabalhadas, o conhecimento ficou mais estável, compreenderam as abstrações, fizeram as generalizações, observou-se que na perda gradual de dissociabilidade os estudantes conseguem integrar as ideias particulares ao conceito geral de função. Verificou-se que os alunos estão executando as ações previamente orientadas e que resolvem o problema de forma independente. Nesta análise, procuramos perceber como o estudante soluciona o problema, se organizam os procedimentos, se utilizou a ERP, compreendeu o problema e assimilou os conceitos de função. A seguir, apresenta-se o problema desenvolvido nesta etapa.

Problema proposto: Uma fábrica de canetas tem um custo diário de produção de R$120,00, mais R$0,40 por caneta. Cada caneta é vendida por R$1,20. Determine:

a) a lei de associação da quantidade x de canetas e do custo diário de produção C(x) dessas x canetas.

b) o custo diário de produção de 80 canetas.

c) a lei de associação do lucro diário L(x).

d) o lucro da empresa com a venda de 200 canetas.

e) Em que momento a empresa começa a ter prejuízo? Justifique.

Este problema tem por objetivo verificar o desempenho dos estudantes na aplicação dos conceitos aprendidos, verificando as variáveis dependentes e independentes, se o aluno escreve corretamente a lei de formação de uma função, interpretando o custo, lucro e prejuízo da fábrica. No item e), o aluno tem que reformular, construindo outro modelo para chegar à solução, observando que basta ele encontrar o zero da função. No quadro 58, encontra-se a descrição das características do problema.

Quadro 58- Parâmetros do Problema proposto-função afim

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema
Compreender o problema	Ler e extrair os elementos desconhecidos, compreender quem são as variáveis dependentes e independentes, encontrar a lei de formação de cada situação.
Construir o modelo matemático	a) C(x) = 120 + 0, 40x. c) L(x) = 1, 20x - (120 + 0, 40x) = 0, 80x - 120. e) x= 120/0.80
Solucionar o modelo	b) C(80) = 120 + 0, 40. 80 = 120 + 12 = R$152, 00. d) L(200) = 0, 80. 200 - 120 = 160 - 120 = R$40, 00. e) x= 120/0.80 = 150
Interpretar a solução	A empresa terá prejuízo se vender uma quantidade $x \leq 150$, onde significa que este é o zero da função.

Analisou-se que os alunos 90% dos estudantes, conforme o detalhamento das ações, desenvolveram as ações do problema, extraíram todos os elementos relativos, fazendo as descrições de aplicação ao modelo. Responderam o objetivo do problema de forma descritiva, fazendo demonstração algébrica e interpretando a ação. Compreenderam o problema, aplicaram e assimilaram o conceito de função durante todo processo. Na tabela 13, segue a análise do aluno A-02.

Tabela 13- Análise de Desempenho do Aluno (A-02) no Problema proposto-função afim.

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
Compreender o problema	O aluno compreende o problema, determina as variáveis dependentes e independentes, tem noção de custo, lucro e prejuízo.	5
Construir o modelo matemático	O aluno constrói o modelo matemático corretamente. a) C(x) = 120 + 0, 40x. c) L(x) = 0, 80x - 120. e) x= 120/0.80	5
Solucionar o modelo matemático	O aluno soluciona corretamente os modelos, dá resposta ao problema, chegando ao resultado esperado.	5
Interpretar a solução	O aluno interpreta a solução, dando resposta a cada situação, b) o custo diário da produção de canetas é R$ 152,00 o lucro pela venda de 200 canetas é R$ 40,00. O aluno justifica que a empresa terá prejuízo se vender uma quantidade menor ou igual a 150 canetas, pois é o zero da função.	5

10% dos estudantes compreenderam o problema, representaram corretamente o modelo dos itens b) e d), porém cometeram erros de cálculo na solução ao multiplicar os números decimais e jogo de sinais, porém, não construíram o modelo do item e) por não terem compreendido e reformulado a questão onde a empresa teria prejuízo se vendesse uma quantidade inferior ou igual a 150 canetas. A tabela 14 a seguir mostra a análise do desempenho do aluno A-07.

Tabela 14- Análise de Desempenho do Aluno (A-07) no problema proposto de função Afim

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
Compreender o problema	O aluno compreende o problema, determina as variáveis dependentes e independentes, tem noção de custo, lucro.	5
Construir o modelo matemático	O aluno constrói o modelo matemático corretamente apenas do item a) e c), a letra e) ele deixa em branco. a) y = 120 + 0, 40x. c) y = 0, 80x - 120.	4
Solucionar o modelo matemático	O aluno soluciona corretamente o modelo do item b), no item d) não consegue chegar à solução, pois comete pequenos erros de cálculo.	3
Interpretar a solução	O aluno não consegue reformular e interpretar a solução do problema no item e).	1

5.2.3 Análise dos Resultados Pós-Teste-Função Afim

O objetivo do pós-teste foi verificar o desenvolvimento do discente após a sequência didática, ou seja, verificar a contribuição da Estratégia de Resolução de Problemas em Função afim, promovendo a aprendizagem significativa. Tal instrumento foi aplicado 15 dias após o fim da fase formativa, pois ao término da fase formativa, os alunos tiveram recesso escolar, e por questões administrativas o pós-teste foi aplicado após o recesso.

Os problemas realizados pelos alunos no teste final do conteúdo de função afim (provas de lápis e papel) foram analisados conforme a aplicação do conteúdo em outras situações e averiguar se o aluno se apropriou da definição conceitual de função e suas propriedades essenciais, pois na fase do esquecimento, as ideias particulares reduzem-se a uma ideia mais geral.

O problema 1 do pós-teste tem como objetivo, observar que os dois orçamentos são iguais, e que este valor é a abscissa do ponto em que os dois gráficos se intersectam. O estudante também terá que ter conhecimento de perímetro para solucionar a questão. No quadro 58, encontra-se a descrição das características do problema.

Problema 1: Para cercar um terreno com arame, Elen obteve dois orçamentos:

1º Taxa de entrega de R$ 140,00 e R$ 12,00 o metro de arame.

2.º Taxa de entrega de R$ 20,00 e R$ 14,00 o metro de arame.

a) Represente o custo de cada opção para **x** metros de arame.

b) Qual das duas opções é mais vantajosa para cercar com três voltas de arame um terreno de 140 metros de perímetro?

c) Para qual medida de arame os dois orçamentos têm o mesmo valor? Que significado tem essa medida se desenharmos os gráficos das duas funções em um mesmo plano cartesiano?

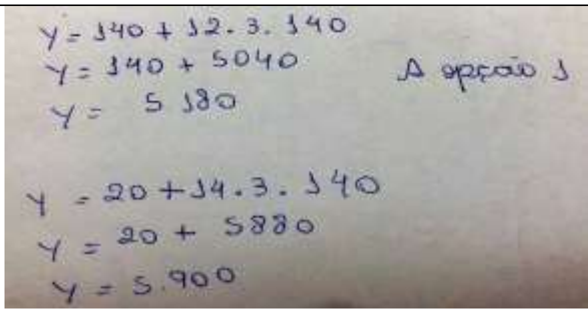
Quadro 59-Parâmetros do Problema 1- Pós-teste de função afim

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 1
Compreender o problema	Compreender as unidades de medidas envolvidas, observar que para que tenha o mesmo valor, as funções terão que ser igualadas.
Construir o modelo matemático	1ª opção: $c_1(x) = 140 + 12x$ 2ª opção: $c_2(x) = 20 + 14x$
Solucionar o modelo	b. $c_1(3 . 140) = 140 + 12 . 3 . 140 = 5180$ $c_2(3. 140) = 20 + 14 . 3.140 = 5900$, logo a opção 1 é mais vantajosa. c. $c_1(x) = c_2(x) \Rightarrow 140 + 12x = 20 + 14x \Rightarrow 2x = 120 \Rightarrow x = 60$
Interpretar a solução	Para 60 metros de arame, os dois orçamentos são iguais. Esse valor é a abscissa do ponto em que as duas retas se intersectam.

Os alunos 90% dos estudantes do grupo experimental, em relação ao problema (P-04) demonstraram compreensão do objetivo do problema, a primeira ação está totalmente correta, o que pode também ser observado na determinação das variáveis, na construção do modelo matemático $c_1(x) = 140 + 12x$ e $c_2(x) = 20 + 14x$. Chegaram à resposta correta da questão calculando o total de arame que seria utilizado em cada opção e chegando a conclusão que a opção 1 é mais vantajosa. Os alunos executaram as ações de forma consciente na aplicação dos conceitos, alcançando um ótimo desempenho na solução do problema.

Já 10% dos estudantes desenvolveram a primeira ação parcialmente correta, apesar de elaborarem o modelo corretamente, no entanto, no momento da aplicação dos dados, não observaram durante a leitura que o problema, que no item *c* eles teriam que igualar as funções e que o valor encontrado é abscissa do ponto onde as retas se encontram, sendo assim não conseguiram chegar à resposta correta. O aluno A-07 compreende o problema, constrói o modelo matemático corretamente, porém comete pequenos erros de cálculo, não chegando a resposta final. A quadro 60 demostra a análise do aluno A-02.

Quadro 60 -Parâmetros do Problema 01. Pós-teste de função afim

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 04
Compreender o problema	O estudante compreendeu as variáveis envolvidas no problema.
Construir o modelo matemático	
Solucionar o modelo	

No problema 1, 75% dos estudantes do grupo controle, tiveram um bom desempenho em todas as ações, eles compreenderam o problema, construíram o modelo matemático corretamente, solucionaram, igualaram as funções e verificaram que o valor encontrado correspondia ao momento em que as retas se intersectam no gráfico.

O aluno A-04 teve um desempenho regular, o mesmo resolveu as três primeiras ações parcialmente corretas e a última incompleta. Determinou as condições ao construir o modelo para solucionar. No entanto, definiu parcialmente os objetivos para solução. Mas, construiu parcialmente correto os modelos matemáticos para a solução do problema. Realizou parcialmente as análises, pois não analisou as duas funções e as deixou sem resposta explicativa. Portanto, extraiu parcialmente os elementos significativos do problema. Logo, a resposta dada apresentou-se incompleta.

No problema (P-04) o estudante A-08 solucionou as ações parcialmente, demonstrando dificuldade na interpretação. O aluno fez corretamente a leitura e extraiu os elementos, mas não compreendeu suficientemente para relacionar corretamente com o objetivo. Determinou parcialmente as variáveis, construiu o modelo, mas não compreendeu o porquê do ponto de intersecção das retas.

O problema 2 do pós-teste, tem como objetivo compreender o que é a taxa de variação envolvida no problema utilizando a linguagem matemática para expor suas ideias, observar as transformações da unidade de medida. No quadro 60, encontra-se a descrição das características do problema.

Problema 2: O comprimento de um fio metálico varia em função da sua temperatura e, dento de certos limites, essa é uma função afim. No caso de um fio de cobre que tem 25 metros de comprimento a 0° C, o comprimento a uma temperatura t, de 0° C a 100° C, é dado pela função L(t) = 0,0017 + 25.   a) Qual é a taxa de variação dessa função? Escreva uma frase explicando o que significa essa taxa de variação.   b) Calcule o comprimento desse fio quando aquecido a 40° C.   c) Para qual temperatura o aumento no comprimento do fio será de 17 cm?

Quadro 61 -Parâmetros do Problema 2 do pós-teste de função afim

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 2
Compreender o problema	Compreender o que é a taxa de variação envolvida no problema, observar as transformações da unidade de medida.
Construir o modelo matemático	L(t) = 0,0017t + 25
Solucionar o modelo	d. A taxa de variação é 0,0017. L(t) = 0,0017t + 25 ⇒ L(48) = 0,0017 . 48 + 25 ⇒ L(48) = 25,0816 cm e. 17 cm = 0,17 m L(t) = 0,0017t + 25 25 + 0,17 = 0,0017t + 25 0,17 = 0,0017t T=100 logo, a 100 ºC, o comprimento do fio aumentara 17 cm.
Interpretar a solução	A frase deve fazer referência ao aumento de 0,0017m no comprimento do fio de cobre para cada grau Celsius de aumento na temperatura.

No problema 2, 82% dos estudantes do grupo experimental, demonstraram compreensão do objetivo do problema, pois a primeira ação está totalmente correta, o que pode também ser observado na construção dos modelos e na identificação da taxa de variação. Encontraram as respostas corretas das questões, compreendendo que quando a variável *y* aumenta, então a variável *x* aumenta, ou seja, há um aumento de 0,0017m no comprimento do fio de cobre para cada grau Celsius de aumento na temperatura. Os alunos demonstraram que executaram as ações de forma consciente na aplicação dos conceitos, distinguindo as propriedades essenciais para alcançar os resultados da solução do problema.

Os 18% restante, extraíram os elementos das funções, determinaram parcialmente os objetivos das questões, calculando corretamente duas funções, na letra c) construíram a lei de formação parcialmente correta, porém, realizaram as operações com números decimais de forma incorreta. O quadro 62 demostra a análise do aluno A-13.

Quadro 62-Parâmetros do Problema 2 do pós-teste de função afim.

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 2
Compreender o problema	Compreender o que é a taxa de variação envolvida no problema, observar as transformações da unidade de medida.
Construir o modelo matemático	L(t) = 0,0017t + 25
Solucionar o modelo	b. A taxa de variação é 0,0017. L(t) = 0,0017t + 25 ⇒ L(48) = 0,0017 . 48 + 25 ⇒ L(48) = 25,0816 cm c. 17 cm = 0,17 m L(t) = 0,0017t + 25 25 + 0,17 = 0,0017t + 25 0,17 = 0,0017t T=100 logo, a 100 ºC, o comprimento do fio aumentara 17 cm.
Interpretar a solução	A frase deve fazer referência ao aumento de 0,0017m no comprimento do fio de cobre para cada grau Celsius de aumento na temperatura.

No P-02, analisou-se que os 78% dos estudantes do grupo controle, conforme o detalhamento das ações, desenvolveram a questão, transferiram o que aprenderam, realizando todas as ações corretamente e respondendo ao objetivo do problema.

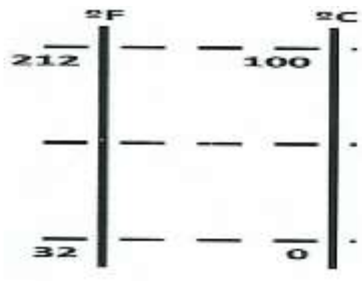
No entanto, 28 % dos estudantes obtiveram um nível satisfatório, sendo que as primeiras ações foram completas, os alunos A-03, A-04, A-05 e A-14 construíram corretamente o modelo, mas não solucionaram o problema corretamente, cometeram pequenos erros de cálculo nas operações com números decimais e na transformação de centímetros para metros, não conseguindo chegar à solução. Muitos estudantes tiveram dificuldades na interpretação da solução, em compreender a taxa de variação. O A-06 desenvolveu parcialmente as ações, no entanto, a ação essencial apresentou-se incompleta, as condições e o objetivo do problema não foram compreendidos totalmente, logo, as demais ações também ficaram incompletas. A tabela 15 obtém as informações da análise do aluno A-10 no P-02.

Tabela 15-Análise do desempenho do A-10 no pós-teste de função afim

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 2
Compreender o problema	Compreender o que é a taxa de variação envolvida no problema, observar as transformações da unidade de medida.
Construir o modelo matemático	L(t) = 0,0017t + 25
Solucionar o modelo	b. A taxa de variação é 0,0017. L(t) = 0,0017t + 25 ⇒ L(48) = 0,0017 . 48 + 25 ⇒ L(48) = 25,0816 cm c. 17 cm = 0,17 m L(t) = 0,0017t + 25 25 + 0,17 = 0,0017t + 25 0,17 = 0,0017t T=100 logo, a 100 ºC, o comprimento do fio aumentara 17 cm.
Interpretar a solução	A frase deve fazer referência ao aumento de 0,0017m no comprimento do fio de cobre para cada grau Celsius de aumento na temperatura.

O objetivo do problema 3 do pós-teste, é identificar se o aluno faz a análise gráfica, observando que a temperatura na escala Fahrenheit é dada por uma função afim da escala Celsius, determinando em que ponto elas têm o mesmo valor. Neste problema, foram analisadas as ações de compreender o problema, construir o modelo matemático e solucionar o modelo. No quadro 63, encontra-se a descrição das características do problema.

Problema 3- O grau Fahrenheit (símbolo: ºF) é uma escala de temperatura proposta por Daniel Gabriel Fahrenheit em 1724. Nesta escala, o ponto de fusão da água (0ºC) é de 32ºF e o ponto de ebulição da água (100ºC) é de 212ºF. Sabendo que a temperatura na escala Fahrenheit é dada por uma função afim da escala Celsius, determine em qual temperatura na escala Celsius ambas assinalam o mesmo valor numérico.



Quadro 63- Parâmetros do Problema 3 do pós-teste de função afim.

Categoria	Operações e Parâmetros para Análise do Problema 3
Compreender o problema	Compreender o problema fazendo a interpretação das escalas, nomear as variáveis "f (x)" é o grau Fahrenheit associado ao grau Celsius "x", substituindo os valores.
Construir o modelo matemático	Se "f (x)" é o grau Fahrenheit associado ao grau Celsius "x", podemos concluir que f (0) = 32 e f (100) = 212. Substituindo esses valores em f (x) = ax + b teremos: $\begin{cases} 32 = a x.0 + b \\ 212 = a x.100 + b \end{cases}$
Solucionar o modelo	Resolvendo o sistema, obtemos b = 32 e a = 1, 8. Assim f (x) = 1, 8x + 32. Se f (x) = x temos f (x) = 1, 8x + 32 x = 1, 8x + 32 0, 8x = -32 x = -40° C. Ou seja, -40° C = -40°F.

No P-03, analisou-se que 85% dos alunos, conforme o detalhamento das ações, desenvolveram a questão, transferiram o que aprenderam, realizando todas as ações corretamente, respondendo aos objetivos do problema.

No entanto, 15% obtiveram um nível satisfatório, sendo que os alunos A-03, A-04, A-05 e A-14 nas primeiras ações foram completas, construíram corretamente o modelo, mas não solucionaram o problema corretamente, cometeram pequenos erros de cálculo nas substituições, não conseguindo chegar à solução. Os alunos A-07 e A-10 construíram o modelo matemático corretamente, e somente resolveram o sistema, não substituíram a resposta do sistema na função afim.

O A-06 desenvolveu parcialmente as ações, no entanto, a ação essencial apresentou-se incompleta, as condições e o objetivo do problema não foram compreendidos totalmente, logo, as demais ações também ficaram incompletas. As compreensões do aluno não foram suficientes para observar a relação funcional que se esperava. A tabela 16 obtém as informações da análise do aluno A-10 no P-03.

Tabela 16- Análise de Desempenho do Aluno (A-10) no Problema (P-03)- pós-teste de função afim.

Categoria	Desempenho Qualitativo	Desempenho Quantitativo
Compreender o problema	O aluno compreende o problema fazendo a interpretação das escalas, nomeando as variáveis e substituindo os valores.	5
Construir o modelo matemático	O aluno constrói o modelo matemático corretamente. f (0) = 32 e f (100) = 212. Substituindo esses valores em f (x) = ax + b, escreve o sistema: $\begin{cases} 32 = a\,x.\,0 + b \\ 212 = a\,x.\,100 + b, \end{cases}$	5
Solucionar o modelo matemático	O aluno soluciona o modelo corretamente, porém não substitui os valores encontrados na função afim, deixando a resposta incompleta.	3

Observou que 78% dos estudantes do grupo controle, tiveram um excelente desempenho durante todo o processo, apropriando-se e assimilando o conceito de função afim, transferindo para diversas situações utilizando a linguagem matemática.

Os alunos A-03, A-10, A-14 obtiveram um avanço expressivo nas soluções dos problemas, porém, ainda comentem erros na solução dos modelos e interpretação.

Os alunos A-05, A-04 e A-07 apresentaram um desempenho razoável. Eles compreendem o problema, constroem o modelo, mas ainda comentem erros, observa-se também a dificuldade ao apropriar-se do conceito de função e da linguagem matemática, cabe ressaltar que nesta fase os problemas foram aumentando gradativamente o nível de complexidade.

Como mencionado anteriormente, o pós-teste foi realizado após os alunos retornarem das férias. O objetivo deste instrumento, de acordo com a teoria, é averiguar se o aluno aprendeu significativamente, se ele assimilou em sua estrutura cognitiva o conteúdo estudado, transferindo o que aprendeu em diferentes contextos.

Os alunos do grupo experimental, durante todas as etapas, tiveram um grande avanço, realizaram todas as ações completas, interpretaram os gráficos, o contexto do problema, desenvolveram as ações corretamente e justificaram suas respostas, fazendo uso das aplicações matemáticas conforme os modelos de funções, alcançando o valor máximo dos indicadores. Portanto, podemos concluir que estes alunos transferem o conteúdo assimilado em diversas situações, pois demonstraram nas ações realizadas que compreenderam o conceito envolvido no contexto, souberam aplicar corretamente o modelo das funções solicitadas e interpretaram a solução corretamente. Logo, conclui-se que estes alunos assimilaram o conceito de Função, reduzindo ao significado mais estável e mais incluso.

Observa-se que alguns alunos apresentaram rendimento regular em algumas ações, uns na primeira ação compreenderam parcialmente o problema, e consequentemente as outras ações ficaram comprometidas, tiveram dificuldades ao interpretar os dados, pois eles enfatizavam que estes problemas são diferentes dos trabalhados em sala, outros ainda cometem erros em pequenos cálculos por falta de atenção. Tal situação reforça que para começar a resolver um problema é necessário primeiramente interpretá-lo e extrair informações necessárias para, posteriormente, iniciar o processo de resolução.

Contudo, foi possível concluir que os alunos conseguiram entender as orientações, o que lhes permitiu executar a atividade de maneira significativa, assimilando o conteúdo. Esses fatores mostraram progresso no desenvolvimento do aluno, por isso infere-se que ocorreu aprendizagem significativa no conteúdo de função.

5.2.4 Análise dos Mapas Conceituais de Função Afim (Pós-teste).

A análise dos mapas conceituais no pós-teste, teve o intuído de averiguar quais conceitos os estudantes organizaram em sua estrutura cognitiva após a intervenção da pesquisa. Para (MOREIRA, 2006, p. 55), “a avaliação aqui não é como um processo de medição de conhecimento para aferição de valor e classificação do aprendiz, mas sim como uma forma de obter informações sobre como se organiza um conjunto de conceitos ou um campo do conhecimento na estrutura cognitiva do aluno”.

Segundo (Luz, 2010) a avaliação, tem caráter qualitativo à medida que o que nos interessa não é a reprodução do que foi ensinado pelo professor ao aluno, mas como, e se, o aluno foi capaz de estabelecer relações entre as novas informações, originadas das atividades de resolução de problemas, e os seus conhecimentos anteriores. Para Moreira (2003), os mapas conceituais como instrumento de avaliação da aprendizagem, pode ser usado para se obter uma visualização da organização conceitual que o aprendiz atribui a um dado conhecimento. Trata-se basicamente de uma técnica não tradicional de avaliação que busca informações sobre os significados e relações significativas entre conceitos-chave da matéria de ensino segundo o ponto de vista do aluno. As figuras 65 é o mapa conceitual elaborado pelo estudante A 01 do grupo controle.

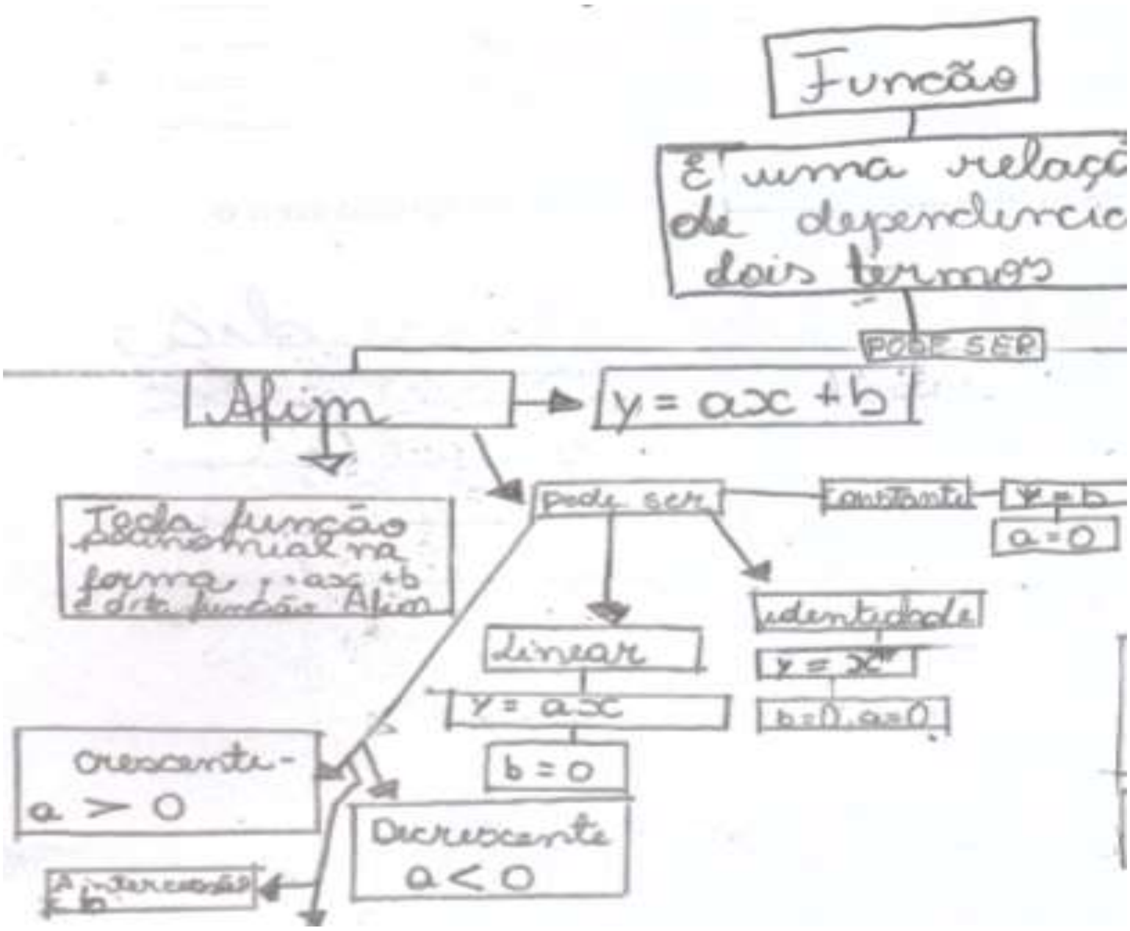


Figura 65- Mapa conceitual de função afim do A01

O Estudante inicia dizendo que “função é uma relação de dependência entre dois termos” o que não é um conceito adequado para função, observa-se que mesmo estudando um dos tipos de função, no caso a afim, o estudante ainda não consegue formalizar o conceito de função ou citar uma de suas propriedades essenciais. O estudante inicia diferenciando progressivamente, observa-se os níveis quando ele relata os tipos de função afim e as caracteriza sendo estes conceitos secundários, reconcilia quando ele relaciona com as características de cada uma. De modo geral, verificamos que o estudante A 01, diferencia e reconcilia os conceitos de função afim e tem hierarquia nos conceitos, logo, 35% dos mapas analisados do grupo controle, tem características semelhantes ao mapa do estudante A01, verificando que estes estudantes organizaram em sua estrutura cognitiva o conteúdo estudado. As figuras 66 é o mapa conceitual elaborado pelo estudante A 08 do grupo controle.

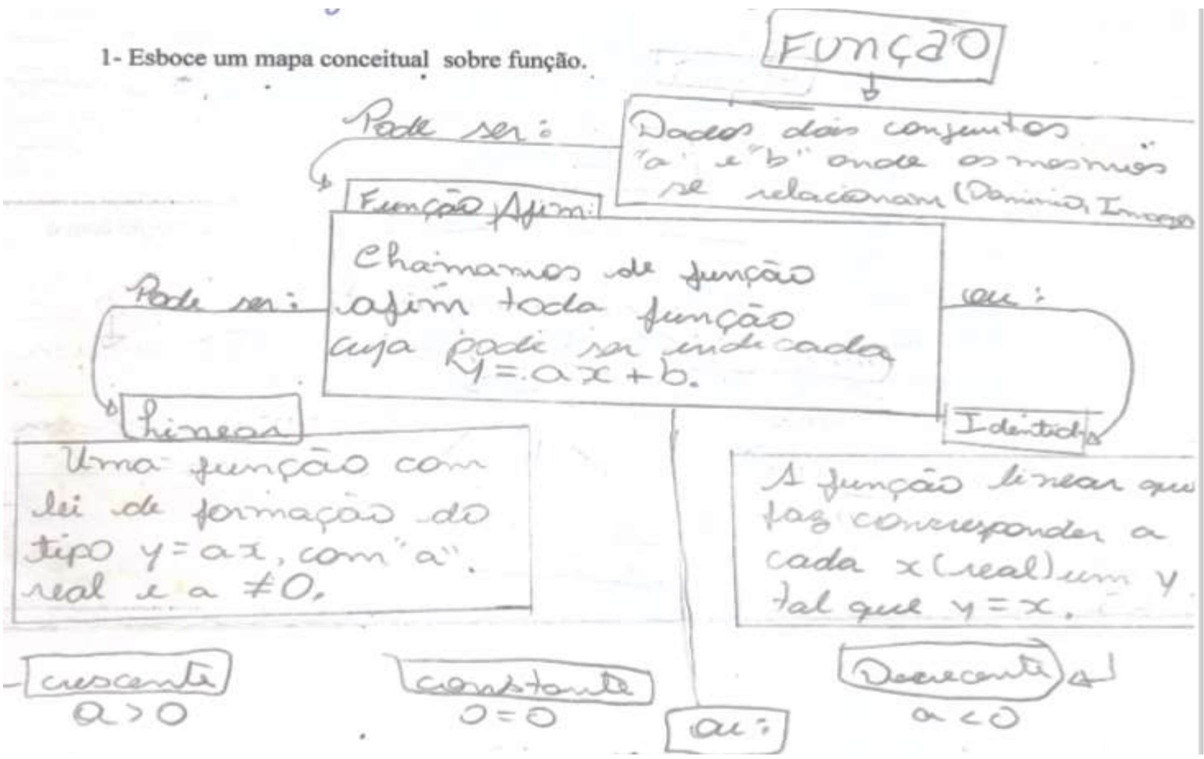


Figura 66- Mapa conceitual de função afim do A 08

O estudante A 08, comete alguns erros conceituais em seu mapa, além de organizá-lo de forma confusa, ele diferencia progressivamente entre os conceitos geral e secundários, porém ele inicia conceituando função de forma inadequada, e posteriormente relata que "a função linear que faz corresponder a cada *x* (real) a um *y* tal que *y* = *x*," na verdade este é o conceito de função identidade, outro erro é quando ele coloca constante 0 = 0. Logo, percebe uma confusão entre os conceitos, ou seja, o estudante não tem um domínio conceitual, o mesmo conflito entre conceitos foi encontrado no mapa de 40% dos estudantes do grupo controle. As figuras 67 é o mapa conceitual elaborado pelo estudante A 13 do grupo controle.

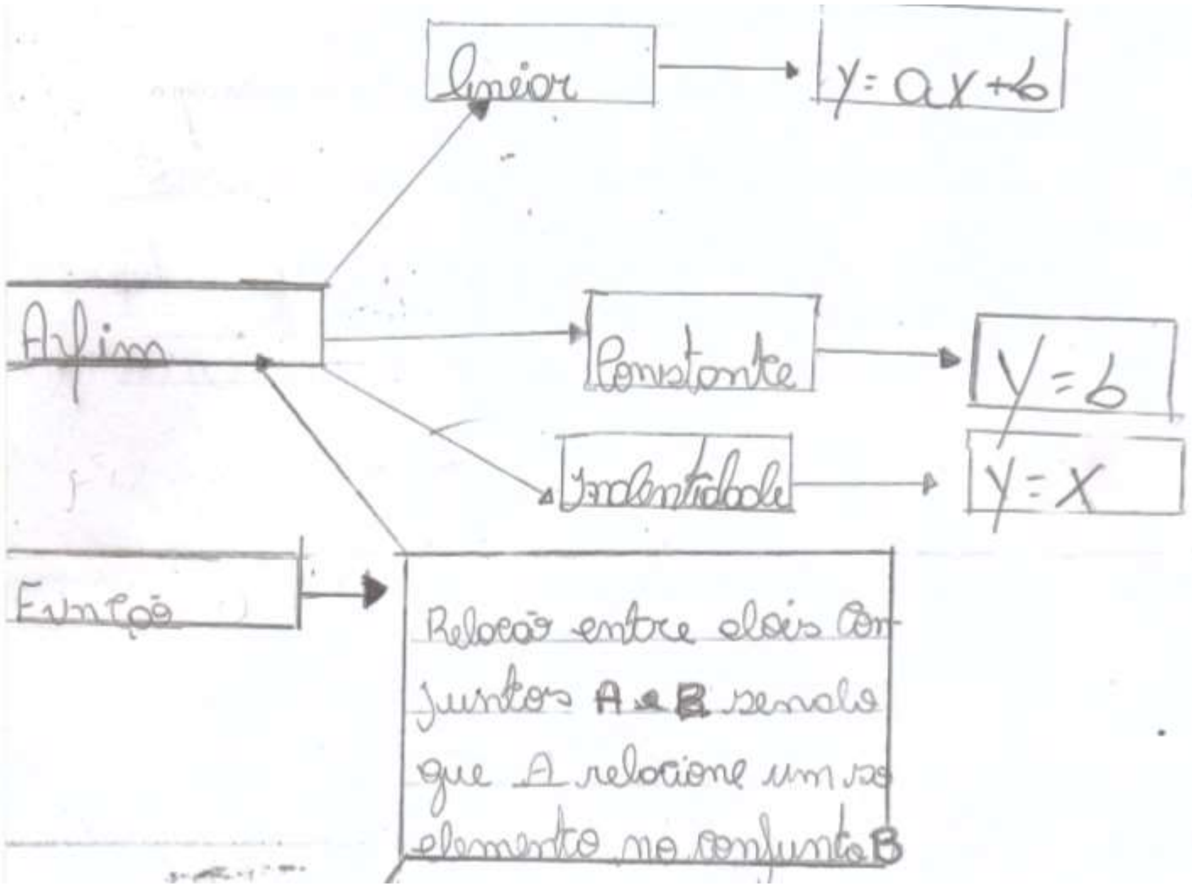


Figura 67- Mapa conceitual de função afim do A 13.

O estudante inicia citando parte da propriedade essencial do conceito de função corretamente, depois classifica as funções afim em constante, linear e identidade, porém comete um pequeno erro em dizer que a função linear é da forma $y = ax + b$. 25% dos estudantes do grupo controle, esboçaram um mapa semelhante ao do estudante A13, com conceitos básicos de função afim, faltando mais informações como gráfico, crescente, decrescente etc. O Quadro 64 traz a análise dos mapas quanto a hierarquia, diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

Quadro 64- Análise dos mapas conceituais dos estudantes A01, A08 e A13- Pós-teste

Estudante A 01			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
Apresenta conceitos básicos como função, função afim, constante, linear e identidade. Crescente e decrescente	Apresenta organização hierárquica, com o conceito de Função como mais importante. No segundo nível hierárquico, cita que a função pode ser afim e cita os tipos de Funções afim e os elementos que a	Consegue diferenciar os tipos de função e as caracteriza cada uma delas corretamente.	O mapa apresenta elementos deste princípio ao estabelecer ligações entre conceitos de níveis diferentes do mapa

	caracterizam. Em outro nível cita que a função pode ser crescente e decrescente		
Estudante A 08			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
Apresenta conceitos básicos como: função afim, linear, constante e identidade	Apresenta um nível de hierarquia meio confuso, e há erros nos conceitos.	Diferencia os tipos de função afim.	Não apresenta indícios de reconciliação integradora
Estudante A-13			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
Apresenta os conceitos de função, função afim, linear, constante e identidade.	Há uma hierarquia quando diz que função pode ser afim, e o segundo nível de hierarquia é quando classifica as funções afim.	Diferencia as funções afim em linear, constante e identidade e posteriormente caracteriza cada uma delas.	Não apresenta indícios de reconciliação integradora

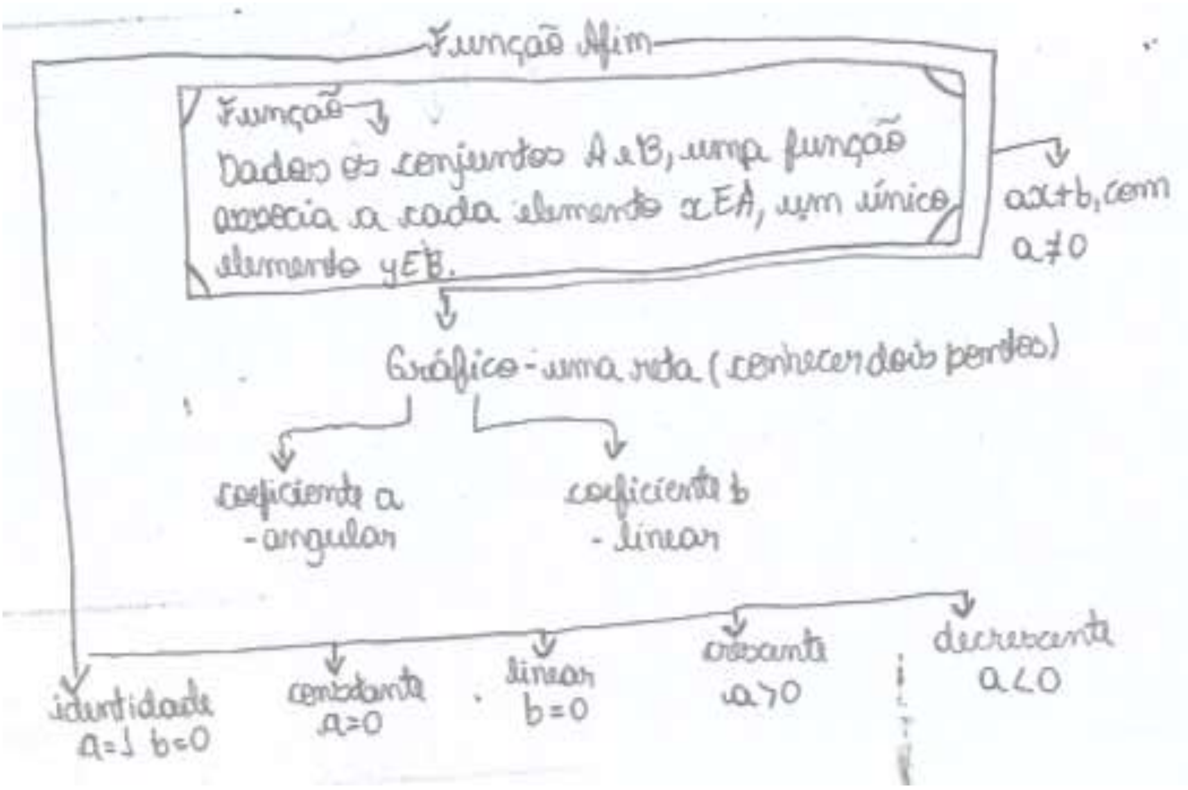


Figura 68- Mapa conceitual de função afim do A15

O estudante apresenta o conceito geral de função e a conceitua corretamente, depois diferencia citando os tipos de função afim caracterizando as e reconcilia quando relata o grafico da função afim é uma reta que *a* é o coeficiente angular e *b* o coeficiente linear. O estudante apresentou conceitos básicos da função afim e os definiu corretamente, sendo o caso de 30% dos estudantes do grupo esperimental, esboçaram mapas semelhantes, enfatizando os conceitos básicos, diferenciando e reconciliando. As figuras 69 é o mapa conceitual elaborado pelo estudante A 07 do experimental.

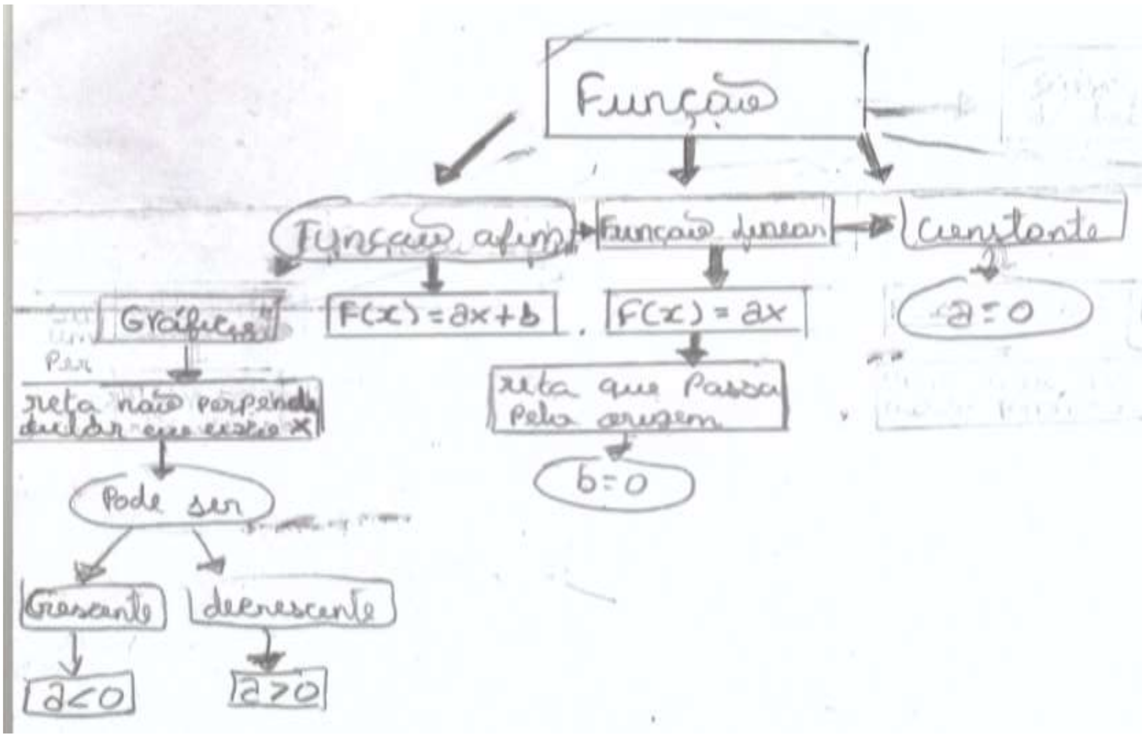


Figura 69- Mapa conceitual de função afim do A 07

Analisando o mapa do estudante A 07 ele trouxe mais informações quanto ao mapa do estudante A15. O estudante A07, inicia como conteúdo geral função, depois diferencia nos conceitos secundários tipos de função afim: linear e constante (faltou a função identidade), observamos que o estudante traz uma hierarquia dos conteúdos, diferenciando e reconciliando quando ele diz que o gráfico de uma função afim é uma reta não perpendicular ao eixo x, que pode ser crescente quando a > 0 e decrescente quando a < 0, este estudante traz mais informações quanto ao gráfico da função, momento em que ele faz a reconciliação, semelhante a este classificam-se 40% dos estudantes que trouxeram mais informações em seus mapas, diferenciando e reconciliando e definindo os conceitos corretamente. As figuras 70 é o mapa conceitual elaborado pelo estudante A 02 do experimental.

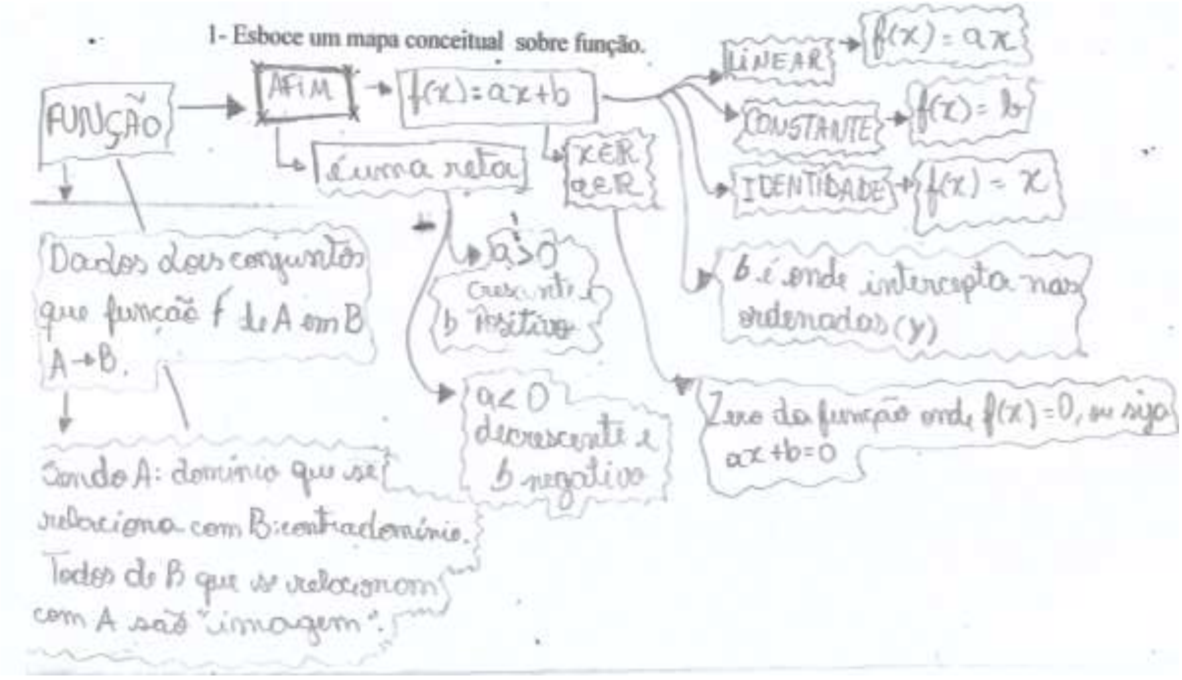


Figura 70 - Mapa conceitual de função afim do A 02

O estudante trouxe o mapa mais completo e com mais informações, ele inicia com o conceito geral de função, posteriormente função afim, cita os tipos de função afim diferenciando-as e caracterizando-as e reconcilia quando diz que as função afim tem como gráfico uma reta onde $a > 0$ é crescente e $a < 0$ é decrescente, e também quando enfatiza que b é onde a reta intercepta o eixo das ordenadas e o zero da função é onde $f(x) = 0$, os conceitos envolvidos, logo observamos que e estudante nos mostra indícios de uma estrutura cognitiva organizada. Quadro 65 encontra-se a análise dos mapas conceituais dos estudantes A02, A07 e A15- Pós-teste de função afim.

Quadro 65-Análise dos mapas conceituais dos estudantes A02, A07 e A15- Pós-teste, função afim.

Estudante A 02			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
Apresenta os conceitos básicos de função, função afim, identidade, linear, constante, gráfico, crescente decrescente e intersecção dos pontos na reta.	Apresenta hierarquia conceitual, apresentando função como conceito geral, depois função afim e posteriormente os conceitos secundários que são os tipos de função afim.	Consegue diferenciar os tipos de função e as caracteriza cada uma delas corretamente.	Faz reintegrações importantes como afirmar que o gráfico da função afim é uma reta que *b* é o ponto de intersecção do eixo y e menciona o zero da função
Estudante A 07			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**

Apresenta conceitos básicos como função, função afim, constante, linear (faltou a identidade). Crescente e decrescente	Apresenta organização hierárquica, com o conceito de Função como mais importante. No segundo nível hierárquico, cita que a função pode ser afim e cita os tipos de Funções afim e os elementos que a caracterizam. Em outro nível cita que a função pode ser crescente e decrescente	Consegue diferenciar os tipos de função e as caracteriza cada uma delas corretamente.	Reintegra quando afirma que o gráfico da função afim é uma reta perpendicular ao eixo x, é crescente quando a > 0 e decrescente quando a < 0, e que a função linear seu gráfico também é uma reta, porém passa pela origem.
Estudante A-15			
Conceitos Básicos	**Hierarquia**	**Diferenciação Progressiva**	**Reconciliação Integradora**
Apresenta conceitos básicos como função, função afim, constante, linear e identidade. Coeficiente angular e coeficiente linear.	Apresenta organização hierárquica, com o conceito de Função como mais importante. No segundo nível hierárquico, cita que a função pode ser afim e cita os tipos de Funções afim e os elementos que a caracterizam. Em outro nível cita que a função pode ser crescente e decrescente	Consegue diferenciar os tipos de função e as caracteriza cada uma delas corretamente.	O mapa apresenta elementos deste princípio ao estabelecer ligações entre conceitos de níveis diferentes do mapa.

Na avaliação segundo a organização hierárquica do grupo controle, 35% dos mapas mapa (14 estudantes) apresentou este princípio, dentre estes, dez mapas evoluíram de nível em relação ao mapa que construíram no conteúdo de função, no mapa de função afim explicitaram uma organização hierárquica e relacionaram mais conceitos básicos, no qual podemos observar no mapa do estudante A01 . Isto nos sugere que, de alguma forma, esses dez alunos reorganizaram, na sua estrutura cognitiva, alguns dos elementos relacionados ao tema estudado. O grupo experimental, de um modo geral trouxeram mais elementos, conceitos básicos e relacionaram os conceitos de forma correta, utilizando se suas características e propriedades essenciais.

Na avaliação segundo o princípio da diferenciação progressiva dos estudantes do grupo controle, 30% dos estudantes não haviam expressado diferenciações coerentes , o que nos fornece alguns indícios de elaboração de uma mudança conceitual quanto às especificidades do conceito de Função afim, além de conceitos que não foram apresentados adequadamente como a função linear é da forma $y = ax + b$, observa-se no grupo controle que os estudantes não se apropriaram da linguagem matemática para expressar-se. Já os estudantes do grupo experimental, tiveram seus mapas mais elaborados quanto a quantidade de conceitos básicos, os níveis de hierarquia e a diferenciação progressiva entre os conceitos, sendo que em seus mapas surgem mais elementos.

A maioria dos estudantes do grupo controle não apresentou o princípio da reconciliação integradora, o que não é surpreendente, porque a elaboração de reintegrações no mapa requer, além da compreensão mais aprofundada sobre o assunto, uma habilidade quanto ao estabelecimento de ligações cruzadas entre diferentes setores do mapa. Foi possível identificar em alguns mapas ligações entre setores diferentes, porém sem palavras de ligação adequadas.

5.3 Resultados dos Dados Quantitativos

De forma geral, buscar-se-á discutir os resultados para a variável Y_5, ficando para o Apêndice o detalhamento de cada um dos conteúdos (função e funções afim) e dimensões (Y_1, Y_2, Y_3 e Y_4). A discussão apresentada adiante permite, tranquilamente, por analogia, estender os resultados apresentados no Apêndice.

A amostragem incluiu 84 alunos, de ambos os sexos, com idades entre 15 e 16 anos, distribuídos em dois grupos: *experimental* com 43 (51,2%) da amostra das turmas B e D, e o restante 41(48,8%) dos estudantes, turmas A e C compuseram a metodologia tradicional (grupo controle).

A intervenção ocorreu a partir de uma metodologia alternativa de ensino de matemática - Resolução de Problemas -, mediada com atividades didáticas e aplicação de testes diagnósticos (pré *versus* pós), baseada na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. Estes testes abrangeram os conteúdos função e função afim, cada um deles compunham três problemas. Considerou-se na análise dos resultados quatro dimensões: Y_1 compreender o problema; Y_2 Construir o modelo matemático; Y_3 Solucionar o modelo matemático; e Y_4 Interpretar a solução. Para avaliação das dimensões adotou-se os escores de 1 a 5.

5.3.1 Fidedignidade do Instrumento

Correlações entre os testes diagnósticos

De forma geral, as correlações entre os testes diagnósticos (pré *versus* pós) apresentaram magnitudes elevadas ($\rho > 0,50$) e foram altamente significativas (p-valor $< 0,000$). Quando se considera todos os conteúdos (Geral) ou as somas dos escores (Y5) os valores dos coeficientes de correlação estimados mostram-se maiores. Esses indícios atestam a fidedignidade do instrumento de avaliação conforme a tabela 17.

Tabela 17- Correlações de Spearman (ρ) entre os pós e pré-teste por conteúdo e geral (n=84)

CONTEUDO	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
Funcões	.563**	.715**	.733**	.528**	.759**
Funções afim	.683**	.816**	.777**	.664**	.785**
Geral	.708**	.825**	.814**	.676**	.826**

** A correlação é significativa no nível 0,01 (bilateral).

5.3.2 Alfa de Cronbach dos Pré-testes

Os resultados dos alfas de Cronbach (α) apresentados na Tabela 18 atestam os achados apresentados na seção anterior, corroborando assim, a fidedignidade do instrumento. Note que a maioria dos valores dos α's foram maiores que 0,70 ou ao redor desse valor[8]. Mais uma vez, a medida para o escore geral (Y5) e todo conteúdo (Geral) foram as mais promissoras (maiores). Na verdade, de um modo geral, o instrumento mostrou-se confiável (fidedigno), com boas medidas de precisão, sendo que todas as dimensões merecem/podem ser avaliadas individualmente.

Tabela 18- Alfa de Cronbach (α) do pré-teste por conteúdo e geral (n=84)

CONTEUDO	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
Funcões	0,686	0,742	0,763	0,675	0,914
Funções afim	0,694	0,785	0,768	0,711	0,899
Geral	0,815	0,841	0,814	0,736	0,942

5.3.3 Análise gráfica entre os escores antes e depois

Os gráficos apresentados nessa seção indicam a média dos escores padronizados antes (pré-teste) e depois (pós-teste) para cada um dos grupos do estudo: controle *versus* experimental. Os escores apresentados nos gráficos abaixo estão considerando todo o conteúdo (função + funções afim) e dimensões (Y5). O detalhamento, por conteúdo e dimensão, encontra-se no Apêndice 5.1. No apêndice seguinte, encontram-se duas tabelas com as principais estatísticas descritivas por testes diagnóstico, grupo e conteúdo.

Como pode-se perceber na Figura 73 o aproveitamento do grupo experimental foi maior depois do que antes (84,5 *vs* 79,8), no caso do grupo de controle, essa lógica foi inversa (70,0 *vs* 73,3). O referido gráfico traz os escores padronizados geral (Y5 de todo conteúdo). Avaliando os outros gráficos, onde dividiu-se as análises por dimensão (todo conteúdo), essa lógica permanece em Y2, Y3 e Y4, ou seja, a média do grupo de controle é menor depois do

[8] A literatura indica que temos que ter um α > 0,70, no entanto, em pesquisas exploratórias aceita-se valores maiores que 0,60 (Pasquali, 2010).

que antes e do grupo experimental é maior depois do que antes, de forma a corroborar, conforme a teoria da aprendizagem significativa, que o grupo de controle não conseguiu transferir o conhecimento de funções (todo conteúdo) para outros contextos. De acordo com a Figura 72, isso aconteceu apenas na compreensão do problema (Y1).

Essas análises podem ser detalhadas por conteúdo a partir das informações que apresentamos no Apêndice A. Entretanto, se de fato essas diferenças são significativas do ponto de vista estatístico, são os modelos colocados na metodologia e estimados na seção seguinte que darão o veredito final. A Figura 71 – Escore padronizado geral (Y5) pré e pós-teste entre os grupos

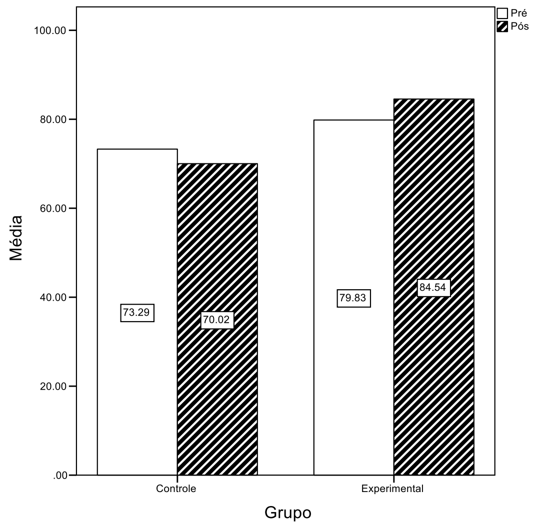


Figura 71- Escore padronizado geral (Y5) pré e pós-teste entre os grupos

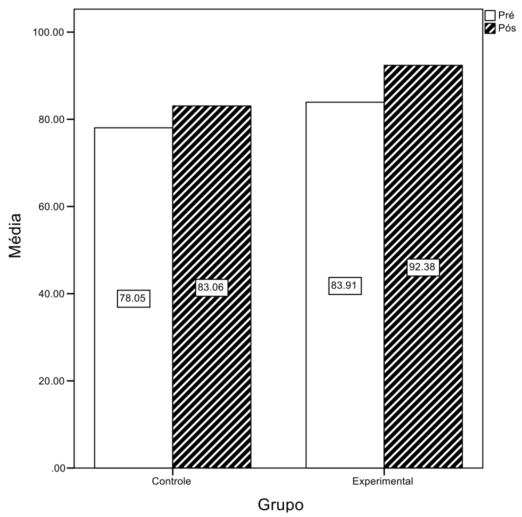


Figura 72 Escore padronizado da compreensão do problema (Y1) pré e pós-teste entre os grupos

Na primeira ação de compreender o problema, podemos averiguar que tanto os estudantes do grupo experimental quando do grupo controle tiveram um avanço em relação ao pré-teste, analisando o gráfico, observamos que a maioria dos estudantes compreenderam o objetivo do problema, extraindo assim os elementos conhecidos e desconhecidos. Para Mendonza (2009), a ação de compreender o problema é fundamental, já que quando o estudante não executa esta primeira ação com qualidade, dificilmente avançará nas próximas ações. A Figura 73 – é o gráfico do escore padronizado da ação construção do modelo (Y2) pré e pós-teste entre os grupos.

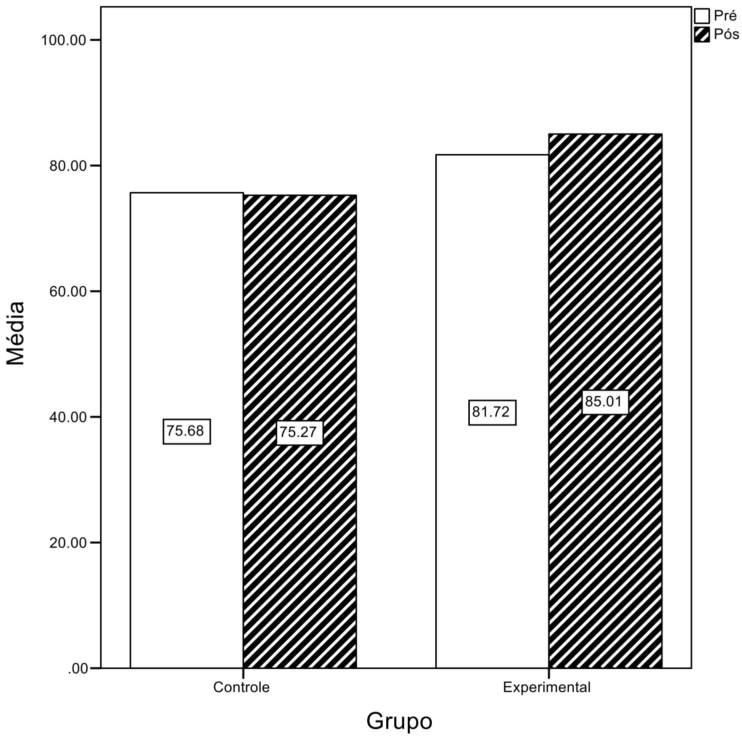


Figura 73- Escore padronizado da construção do modelo (Y2) pré e pós-teste entre os grupos

Na ação de construir o modelo matemático, analisando o gráfico, verificamos que os estudantes do grupo controle permaneceram quase que linear, enquanto que os estudantes do grupo experimental tiveram um avanço. Os estudantes do grupo controle, grande parte construía os modelos por ensaio e erro, alguns não chegavam a solução. A forma de trabalhar mediante ensaio e erro, a aprendizagem transcorre de maneira muito lenta e pouco eficaz, além de ser baixo os níveis de generalização dos conhecimentos dos estudantes. Para Greca & Moreira (2003), se o estudante não construir o modelo para predizer qual é o resultado esperado, serão incapazes de conferir, se o valor a que chegaram é coerente ou não. A Figura 74 – é o gráfico do escore padronizado da ação solução do modelo (Y3) pré e pós-teste entre os grupos.

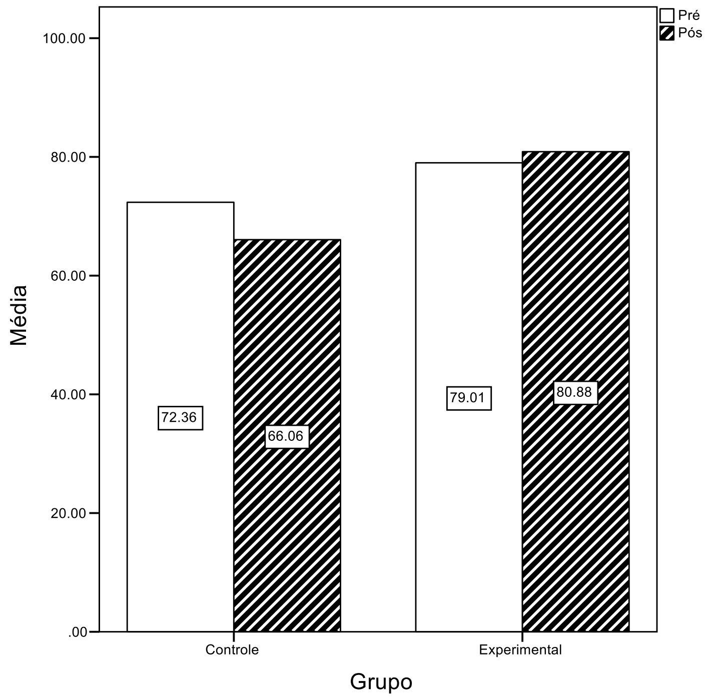


Figura 74 Escore padronizado da solução do modelo (Y3) pré e pós-teste entre os grupos

Na terceira ação é solucionar o modelo matemático, novamente o grupo controle teve um pequeno decréscimo enquanto o grupo experimental um pequeno avanço. Nesta ação de solucionar o modelo, observou constantemente que ocorria erros de cálculo em ambos os grupos, quando os problemas iam aumentando o nível de complexidade no qual havia outros conceitos como potenciação, porcentagem, números decimais etc. alguns estudantes não recordavam e acabavam cometendo erros nas operações.

Um outro motivo foi que alguns estudantes tentaram resolver por tentativa de ensaio e erro, porém não chegaram a solução. Echeverria & Pozo (1994), chegaram à conclusão de que os alunos não realizam as operações adequadas, não porque sejam incapazes - basicamente exige-se somente somar e subtrair - mas porque não entendem o significado da tarefa, por não terem conhecimento de uma representação adequada do tempo histórico (Carretero, Pozo e Asensio, 1989). A Figura 75 – é o gráfico do escore padronizado da ação interpretar a solução (Y4) pré e pós-teste entre os grupos.

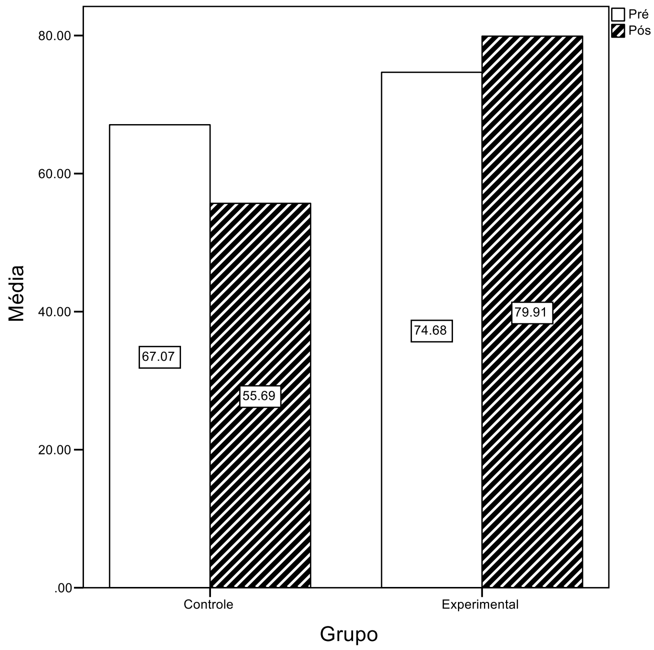


Figura 75- Escore padronizado da interpretação da solução (Y4) pré e pós-teste entre os grupos

A quarta e última ação é a interpretação da solução realizada pelo estudante, é uma ação importante já que os estudantes têm que conciliar as três ações anteriores com esta última ação. Os estudantes do grupo experimental, devido a metodologia no qual houve a zona de desenvolvimento proximal, a mediação do professor, o diálogo e construção dos conceitos, com o intuito que os estudantes expressassem verbalmente e através da escrita, a forma como compreenderam e chegaram a resposta do problema, pois a aprendizagem é significativa quando novos conhecimentos (conceitos, ideias, proposições, modelos, fórmulas) passam a significar algo para o estudante, quando ele é capaz de explicar situações com suas próprias palavras, quando é capaz de resolver problemas novos, enfim, quando compreende.

Para Moreira (2003, p. 10) aprender um conteúdo de maneira significativa é aprender sua linguagem, não só palavras, outros signos, instrumentos e procedimentos, mas principalmente palavras, de maneira substantiva e não-arbitrária. Desta forma, os estudantes do grupo experimental tiveram um bom desempenho na ação de interpretar a solução, no qual chegamos a conclusão que a estratégia de resolução de problemas fundamentada na teoria da aprendizagem significativa, nos deu evidências do desenvolvimento da construção do conceito realizado pelos estudantes, no qual utilizaram a linguagem matemática, expressando-se verbalmente ou por escrito para justificar suas ações quanto a resolução das atividades.

5.3.4 Regressões Múltiplas (ANCOVA)

As tabelas seguintes resumem as principais estatísticas de adequação dos modelos estimados considerando todo o conteúdo para cada uma das dimensões. Esses valores se repetem no Apêndice A, onde se tem também o detalhamento por conteúdo[9]. De uma forma geral, todos os modelos apresentaram excelente ajuste e corroboraram o melhor aproveitamento (maior coeficiente de rendimento) do grupo experimental mesmo depois de controlarmos pelo primeiro teste diagnóstico (pré-teste).

Para exemplificar discutir-se-á os resultados para todo o conteúdo (função + funções afim) e o escore geral (Y5), conforme os resultados para o primeiro modelo (Y5_POS) apresentado nas tabelas abaixo.

5.3.4 Todo o conteúdo (Geral) e escore total (Y5)

Conforme Tabela 19, o ajuste do modelo mostrou-se excelente: i) $R^2 = 0,847$, indicando que 84,7% da variabilidade dos escores pós-teste são explicados pela variabilidade dos escores pré-teste e o fato do aluno pertencer ao grupo de controle ou experimental[10]; e ii) a estatística de Durbin-Watson ao redor de 2 indica que o modelo não incorre em problemas de especificação[11]. A Tabela 20 complementa a análise anterior ao evidenciar um valor muito alto para o teste F, altamente significativo (p-valor < 0,000), de forma a comprovar que, no conjunto, as variáveis Y5_PRE e GRUPO são significativas para explicar a variável Y5_POS.

O coeficiente (B) na Tabela 21 para a variável GRUPO indica que os alunos do grupo experimental (GRUPO=1) obtiveram um aproveitamento 9,374 pontos percentuais maior que os alunos do grupo controle no pós-teste, permanecendo o aproveitamento no pré-teste constante. Essa diferença foi altamente significativa (p-valor < 0,000)[12]. Por exemplo, um aluno que obteve 75% de aproveitamento na primeira prova, se ele é do grupo experimental, sua estimativa de desempenho na segunda prova é 80,772% (= 12,298 + 9,374×1 + 0,788×75). Se o aluno for do grupo de controle sua estimativa de aproveitamento na segunda prova será de 71,398% (= 12,298 + 9,374×0 + 0,788×75).

---

[9] Também avaliamos os *outliers* dos modelos e apesar de um modelo ou outro apresentar um ou dois *outliers* sua exclusão não impactaria os resultados.
[10] R na Tabela 3 indica a correlação de Pearson entre os valores previstos e observados.
[11] Ou seja, parace que realmente a amostra é i.d.d. e não existe correlação entre as observações.
[12] Nesse caso deve-se olhar para os p-valor da Tabela 25, pois é nela que se evidencia os erros-padrão computados via *Bootstrap* (n=1.000), corrigidos e acelerados por viés e estratificado pela variável TURMA. Note que, mesmo assumindo normalidade e/ou homogeneidade, ou seja, considerando os erros-padrão/t estatístico/p-valor da Tabela 24, os resultados não mudariam.

Tabela 19- Sumarização dos modelos considerando todo o conteúdo (Geral)

Modelo	R	R quadrado	R quadrado ajustado	Erro padrão da estimativa	Durbin-Watson
Y5_POS	.920[a]	0,847	0,843	4,70527	1,980
Y1_POS	.803[a]	0,644	0,635	5,69800	2,076
Y2_POS	.876[a]	0,768	0,762	5,17594	1,668
Y3_POS	.900[a]	0,810	0,806	6,06701	1,740
Y4_POS	.874[a]	0,764	0,758	8,33084	1,674

a. Preditores: (Constante), Yn_PRE, GRUPO

b. Variável Dependente: Yn_POS

Tabela 20- ANOVA dos modelos considerando todo o conteúdo (Geral)

Modelo		Soma dos Quadrados	Gl	Quadrado Médio	F	p-valor
Y5_POS	Regressão	9923,948	2	4961,974	224,123	.000[b]
	Resíduo	1793,304	81	22,140		
	Total	11717,252	83			
Y1_POS	Regressão	4760,666	2	2380,333	73,315	.000[b]
	Resíduo	2629,839	81	32,467		
	Total	7390,506	83			
Y2_POS	Regressão	7166,677	2	3583,338	133,755	.000[b]
	Resíduo	2170,019	81	26,790		
	Total	9336,695	83			
Y3_POS	Regressão	12736,008	2	6368,004	173,003	.000[b]
	Resíduo	2981,493	81	36,809		
	Total	15717,501	83			
Y4_POS	Regressão	18228,586	2	9114,293	131,324	.000[b]
	Resíduo	5621,631	81	69,403		
	Total	23850,217	83			

a. Variável Dependente: Yn_POS

b. Preditores: (Constante), Yn_PRE, GRUPO

Tabela 21- Coeficientes dos modelos considerando todo conteúdo (Geral)

Y	X	Coeficientes não padronizados		Coeficientes padronizados			95% Intervalo de Confiança para B	
		B	Erro Padrão	Beta	T	p-valor	Limite inferior	Limite superior
Y5_POS	(Constante)	12,298	3,736		3,292	0,001	4,864	19,733
	GRUPO	9,374	1,078	0,397	8,697	0,000	7,229	11,518
	Y5_PRE	0,788	0,050	0,719	15,756	0,000	0,688	0,887
Y1_POS	(Constante)	32,416	5,397		6,007	0,000	21,678	43,153
	GRUPO	5,508	1,307	0,294	4,216	0,000	2,909	8,108
	Y1_PRE	0,649	0,068	0,662	9,515	0,000	0,513	0,785
Y2_POS	(Constante)	20,706	4,008		5,166	0,000	12,730	28,681

	GRUPO	5,386	1,172	0,255	4,594	0,000	3,053	7,719
	Y2_PRE	0,721	0,052	0,773	13,898	0,000	0,618	0,824
Y3_POS	(Constante)	7,365	4,062		1,813	0,074	-0,718	15,448
	GRUPO	9,430	1,373	0,345	6,867	0,000	6,698	12,162
	Y3_PRE	0,811	0,055	0,746	14,858	0,000	0,703	0,920
Y4_POS	(Constante)	9,532	5,165		1,846	0,069	-0,745	19,809
	GRUPO	18,986	1,905	0,563	9,968	0,000	15,196	22,775
	Y4_PRE	0,688	0,075	0,522	9,234	0,000	0,540	0,836

Tabela 22-Bootstrap para os coeficientes dos modelos considerando todo o conteúdo (Geral)

Y	X	Bootstrap[a]					
						BCa 95% de Intervalo de Confiança	
		B	Viés	Erro Padrão	p-valor	Inferior	Superior
Y5_POS	(Constante)	12,298	-0,090	3,347	0,001	5,334	18,668
	GRUPO	9,374	0,003	1,064	0,001	7,300	11,600
	Y5_PRE	0,788	0,001	0,045	0,001	0,706	0,871
Y1_POS	(Constante)	32,416	0,006	4,847	0,001	22,442	42,206
	GRUPO	5,508	-0,026	1,357	0,001	2,831	8,136
	Y1_PRE	0,649	0,000	0,062	0,001	0,529	0,773
Y2_POS	(Constante)	20,706	0,071	4,233	0,000	12,656	29,502
	GRUPO	5,386	0,010	1,158	0,000	3,111	7,724
	Y2_PRE	0,721	-0,001	0,053	0,000	0,611	0,821
Y3_POS	(Constante)	7,365	0,017	3,874	0,059	-0,953	15,174
	GRUPO	9,430	0,020	1,335	0,001	6,654	11,900
	Y3_PRE	0,811	-0,001	0,053	0,001	0,711	0,905
Y4_POS	(Constante)	9,532	-0,532	4,830	0,042	1,031	17,230
	GRUPO	18,986	-0,098	2,027	0,001	15,305	22,500
	Y4_PRE	0,688	0,008	0,076	0,001	0,532	0,855

a. Os resultados da bootstrap são baseados em 10000 amostras bootstrap estratificadas por TURMA

5.4 Análise e Discussão dos Resultados Estatísticos

A dificuldade para definir de forma precisa o conceito funções é apontada por Meneghetti e Redling (2012) como obstáculo para a compreensão de outros conceitos relacionados, e pode ser superado a partir do desenvolvimento de tarefas de aprendizagem sequenciais mais elaboradas, que permitam enxergar a necessidade dos alunos em dominar o conteúdo, e assim, alcançar êxito na resolução dos problemas e na aprendizagem significativa.

No entanto, Schonardie (2011), constatou que apesar dos estudantes conseguirem montar o gráfico, tiveram dificuldades para explicá-los. Apesar disso, a autora avalia positivamente o uso da modelagem matemática, pois essa metodologia possibilita melhor compreensão de função afim, a partir da contextualização do conteúdo.

Mas, também em outro estudo acerca da temática (Costa, 2010), com alunos do Ensino Médio, os resultados do pré-teste corroboraram baixo desempenho dos alunos na construção dos gráficos, na determinação da expressão algébrica, formulação da lei de uma função partindo de uma situação problema e compreensão do que sejam variáveis dependente e independente, porém, após a intervenção os alunos desenvolveram habilidades para resolver problemas e apropriaram-se de conceitos matemáticos.

Segundo Assis (2015): “a resolução de problema exige certa dose de iniciativa e criatividade, aliada ao conhecimento de algumas estratégias”. Através dos resultados da avaliação diagnóstica, identificou-se que os estudantes alcançaram índice satisfatório nas habilidades para resolver problemas relacionados a noções básicas de função, porém observou-se que resolveram os problemas sem saber que se tratava de noções de função.

Segundo Talízina (1988, p. 47), para se desvendar os mecanismos internos que caracterizam a atividade cognoscitiva não é suficiente verificar a capacidade de resolver determinadas situações-problema, pois a obtenção de uma resposta correta não significa necessariamente raciocínio correto. Isso significa que alguns estudantes conseguem resolver corretamente a situação-problema, porém, não tem consciência do porquê, nem sabem muito bem explicar como.

As dificuldades encontradas pelos alunos, provavelmente, devem ocorrer ao transpor conhecimentos da Aritmética para a Álgebra (Vergnaud, 1988), pois, muitas vezes, no estudo das funções é contemplado apenas o aspecto algébrico (Braga e Viali (2011), desse modo são negligenciados diferentes tipos de representação de forma intrínseca contemplados no estudo de função. Além disso, considera-se também, a falta de conhecimentos básicos para o entendimento de um novo conceito.

Portanto, para a maioria das dimensões analisadas não foi observada aprendizagem significativa no grupo controle, dado que as novas informações não interagiram com a estrutura do conhecimento – os subsunçores, ou seja, informações que os alunos já possuem (Ausubel, et al. 1980). Os alunos do grupo controle apenas memorizaram os conteúdos, conforme Moreira (1999), eles relacionaram o conhecimento de forma arbitrária, e desse modo não adquiriram autonomia para agir na sua realidade. Logo, a intervenção educativa deve voltar-se ao saber fazer, ao aprender a aprender, devendo ser coerente com o nível de desenvolvimento dos alunos, para isso é preciso o diagnóstico dos conceitos prévios dos estudantes (Menegheti; Redling, 2012), pois isso leva a compreensão de quais conceitos formais o professor precisa abordar ao ensinar sobre função. Nesse sentido, tarefas de aprendizagem mais elaboradas, que demande domínio dos conceitos anteriores para transferência de conhecimento de uma situação-problema para outra, contribuem para aprendizagem significativa (Menegheti; Redilig, 2012).

Contudo, junto à resolução de problemas, não se podem ignorar as possibilidades e os recursos disponíveis para compreender funções. Do ponto de vista da tecnologia disponível para os alunos, quando se contempla sua relevância para o ensino, alguns estudiosos destacam melhorias no uso da modalidade Blended Learning no ensino médio, que combina aulas presenciais com recursos digitais (Condie; Livingston, 2007).

Ao se apropriar desta modalidade mista no ensino de função afim Gomes (2014), concluiu efetividade no processo ensino aprendizagem de resolução de problemas deste conteúdo, pois facilita a compreensão de um conceito abstrato como é a definição de função afim, além disso, amplia a participação do aluno, pois o acesso as informações ultrapassa a sala de aula, porém o autor destaca como limitações, pouca infraestrutura voltada a informática na escola, baixa adesão de professores e sobrecarga de trabalho docente.

5.4.1 Efetividade da sequência didática utilizando a estratégia de resolução de problema: Conhecimentos dos estudantes pré *versus* pós do conteúdo de Função.

Quanto a aprendizagem dos conteúdos trabalhados, no que se refere a todas as dimensões: *compreensão do problema (Y1), construção do modelo (Y2), solução do modelo (Y3), interpretação da solução (Y4),* considera-se que a intervenção com uma abordagem diferente da tradicional favoreceu a aprendizagem significativa dos conteúdos trabalhados, o que foi reafirmado de forma evidente nos dados da estatística descritiva, pelas médias e desvios padrão dos escores. As atividades propostas e os testes diagnósticos com resolução de problemas favoreceram aprendizagem satisfatória dos conteúdos, pois os estudantes adquiriam motivação e independência para solucionar os problemas (Boschetto, 2015), corroborando com os resultados do estudo da autora, que abrangeu conceitos sobre função afim, realizado com alunos do primeiro ano do ensino médio.

Para Mendonza (2009), a resolução de um problema atua como organizador do processo de ensino de matemática, portanto, ao ser elaborado precisa ser considerado o estado psicológico, a motivação dos alunos, o que requer prudência na atividade docente. Ausubel et al. (1980) acrescenta o conhecimento prévio como fator primordial para aprendizagem, e da mesma forma, observa o papel do professor no sentido de considerar esse conhecimento nas estratégias metodológicas ao inserir um novo conhecimento.

Com relação a função afim, Boschetto (2015) obteve resultado diferente do apresentado nesta pesquisa, ao associar a resolução de problemas às mídias informatizadas, essa combinação aumentou o rendimento dos alunos, que adquiriram autonomia e mostraram-se mais motivados, favorecendo a aprendizagem do conteúdo por meio da experimentação realizada com as tecnologias e atuação do professor.

Quando os dados foram submetidos a ANCOVA, mais uma vez os resultados corroboraram o melhor aproveitamento (maior coeficiente de rendimento) do grupo experimental mesmo depois de controlarmos pelo primeiro teste diagnóstico (pré-teste). Um outro fator a ser considerado, enfatizado por Abreu (2011), é a necessidade do docente atentar para questões da realidade do aluno ao ensinar matemática, desse modo os alunos terão mais facilidade para entendimento dos conteúdos, sendo essa interação essencial para qualquer aprendizado de qualidade.

Nesse seguimento, vale evidenciar a discussão de Feltes e Puhk (2016), quando apresentam suas observações durante o ensino de função, atribuindo-lhe a etapa "*levar para a vida*", que significa a representação pelos alunos de uma situação cotidiana ainda não abordada na sala de aula, de tal forma, ocorria o estudo do gráfico da função, segundo os autores pode-se afirmar, que desse modo "é possível dar sentido ao que estão aprendendo a partir de situações de suas próprias vivências", a maioria dos alunos mostraram-se mais participativos e curiosos, souberam realizar a proposta matemática e também relacionar com situações do cotidiano.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Encerradas as etapas da pesquisa e análise, com o objetivo de analisar a efetividade da estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, buscando evidências de aprendizagem significativa dos estudantes, cabe aqui apresentar uma síntese das reflexões acerca do que foi abordado na pesquisa.

Na revisão de literatura, verificamos o quanto ainda há de se investigar sobre a resolução de problemas, muitas pesquisas na área de resolução de problemas não trabalham a formação do conceito a partir de um problema, ou simplesmente o professor inicia com o problema, este problema não é esmiuçado pelo professor e posteriormente o professor inicia o conteúdo sem que haja uma mediação e questionamentos para que assim possa verificar como o estudante está construindo esse conhecimento. Neste sentido, Greca e Moreira (2003) salientam que a aprendizagem conceitual inclui a procedimental, se de verdade queremos que os estudantes compreendam os procedimentos científicos, eles devem ser capazes de expressar o que estão fazendo.

Para que se pudesse responder a questão primordial da pesquisa: "A implementação de uma estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, possibilitará aos estudantes da 1ª série do Ensino Médio aprender significativamente o conteúdo de função?" Foi elaborada uma sequência didática, de acordo com os princípios da teoria da aprendizagem significativa, utilizando a resolução de problemas como metodologia de ensino. A pesquisa foi realizada com quatro turmas, sendo duas do grupo experimental, onde foi aplicada a sequência didática e as outras duas as turmas do grupo controle, onde receberam o ensino tradicional.

Ressalta-se a importância desta pesquisa no conteúdo de funções, pois o mesmo está presente em muitas situações do cotidiano, e em diversas áreas do conhecimento, mas às vezes o professor não estabelece uma relação entre as funções e suas aplicações, fazendo com que os estudantes não gostem e não se interessem pelo conteúdo, não tendo assim, um aprendizado satisfatório. Dessa forma, quando se fala no ensino de função por meio da resolução de problemas, alguns equivocadamente imaginam que basta passar o problema, acreditando que os alunos irão fazer e aprender todo o conteúdo, todavia é justamente o contrário, pois nessa metodologia, é necessário que o professor interaja, questione, tire dúvidas e auxilie o aluno o tempo todo para que o mesmo não desanime.

A resolução de problemas é vista como uma metodologia de ensino capaz de promover aos estudantes um ambiente de investigação, exploração, estimular a criatividade na busca de estratégias e solução, trabalhar a comunicação, o raciocínio e o registro, podendo ser desenvolvida como ponto de partida da atividade matemática antes da definição do conceito formal.

Tratando-se do estudo de funções, foi realizado um diagnóstico inicial, pois Ausubel et al. (1980, 2003) enfatiza a necessidade do professor em averiguar os conhecimentos prévios do estudante e a partir daí elaborar sua metodologia de ensino. Os grupos foram escolhidos por meio de sorteio, no qual 84 estudantes, de ambos os sexos, com idades entre 15 e 16 anos, foram distribuídos em dois grupos: *experimental* com 43 (51,2%) da amostra das turmas B e D, e o restante 41(48,8%) dos estudantes, turmas A e C compuseram a metodologia tradicional (grupo controle). Sendo assim, o teste diagnóstico foi realizado através de uma prova de lápis-e-papel e um teste de associação de palavras que teve o intuito de averiguar os conhecimentos prévios dos estudantes no conteúdo de função e posteriormente função afim. O diagnóstico foi aplicado para os dois grupos, um pré-teste contendo três problemas.

Analisando o resultado de modo geral, observou que alguns estudantes de ambos os grupos tinham noções básicas do conceito de função, porém eles apresentaram dificuldades em estabelecer relação com os conceitos de função, e não utilizavam da linguagem matemática. No teste de associação de palavras, foi verificado que eles não conseguem descrever o que é uma função, pois só tem noções básicas, não utilizam as propriedades essenciais do conceito e geralmente confundem o conceito de função com os exemplos de função, outros relataram outros significados da palavra função como por exemplo, as funções com os deveres de casa.

Após a averiguação dos conhecimentos prévios, o objetivo era elaborar uma sequência de atividades, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa, utilizando a ERP como metodologia de ensino, de forma que auxiliasse os estudantes a compreender o conceito de função. Além disso, a sequência de atividades visava trabalhar o conceito de função e função afim, de forma que os estudantes compreendessem os significados, as propriedades essenciais do conceito e aplicassem em diversos contextos.

De início, a maioria dos estudantes respondiam os problemas por ensaio e erro, não escreviam a lei de formação da função e não escreviam a expressão “$f(x)$”. Outra dificuldade eloquente dos estudantes, apresentou-se no momento de justificar sua resposta, os estudantes não utilizavam da linguagem matemática adequada a cada situação, o que demonstrou a falta de hábito dos estudantes em trabalhar com problemas que os façam expressar e escrever o raciocínio. Verificou-se também que tanto o grupo experimental, quanto o grupo controle, tiveram um decréscimo quanto a interpretação da solução, sendo a do grupo controle um decréscimo mais significativo. No conteúdo de funções, isso ocorreu conforme foi aumentando o grau de complexidade dos problemas em outros contextos, alguns estudantes não se apropriaram da linguagem matemática para expressar-se e formalizar os conceitos envolvidos no problema, outros compreenderam parcialmente o problema não chegando a uma solução. Conforme a metodologia no grupo experimental foi avançando e feita sempre as correções, o grupo experimental teve um avanço do pré-teste ao pós teste, nas aulas do grupo experimental os estudantes tornaram-se cada vez mais participativos e expondo suas ideias, pois a estratégia de resolução de problemas tem como objetivo de resolver situações problema na zona de desenvolvimento proximal num contexto de ensino aprendizagem onde existe uma interação entre o professor, o estudante e a situação problema, utilizando a resolução de problema em Matemática como metodologia de ensino, para transitar pelos diferentes estados do processo de assimilação.

Verificou-se assim, que a estratégia torna-se eficaz incentivando os estudantes a expor seu pensamento, logo, não se pode deixar de salientar a importância da linguagem na resolução de problemas, pois esta desempenha um papel importante na verbalização de conceitos ou proposições que resultam das operações de transformação envolvidas no pensamento. Observou também que os estudantes dos dois grupos cometiam erros na solução, ou estava relacionado as quatro operações ou quando a solução envolvia outros conhecimentos matemáticos para resolvê-los, na qual o estudante não lembrava ou não dominavam. Sendo assim, houve a necessidade de aulas de reforço em horário oposto para que pudesse sanar este problema.

No entanto, houve uma melhora gradativa destas habilidades dos estudantes do grupo experimental no decorrer da proposta pedagógica, oportunizada pelas atividades de interpretação e análise gráfica, construir gráfico a partir de situações problemas, analisar gráficos no qual a situação envolvia outra área de conhecimento, sendo que estas atividades proporcionaram o envolvimento dos alunos em discussões e reflexões sobre as diferentes representações de uma função e os induziram a expor seu pensamento e escrevê-lo, oportunizando ao professor visualizar as possíveis falhas de interpretação por parte dos alunos e seus conhecimentos prévios acerca do tema em estudo, assim como, ajudá-los a expressarem-se de forma clara usando termos matemáticos, ampliando seus conhecimentos em linguagem matemática.

Já os estudantes do grupo controle tiveram mais dificuldades, pois eles realizavam alguns problemas apenas como exercício no final do conteúdo através de aulas expositivas. Um dos estudantes disse: "professora passa qualquer função aí que sei responder/calcular, agora quando vem com problemas dá um nó na cabeça e não sei nem por onde começar". A estratégia de resolução de problemas contribuiu de forma positiva para a aprendizagem significativa de funções, no qual os estudantes se tornaram mais motivados ao serem desafiados pela situação e ao mesmo tempo em que tornaram-se criativos.

Contudo, a verificação da aprendizagem significativa não é uma tarefa fácil e muito menos pode ser avaliada por meio de um único mecanismo, desse modo, os estudantes individualmente, esboçaram um mapa conceitual no final da intervenção do conteúdo de funções e função afim. Buscou-se através dos mapas averiguar como os estudantes organizam os conceitos que é parte do processo de assimilação da aprendizagem significativa. Os estudantes já sabiam construir mapas conceituais, pois realizavam este tipo de atividade constantemente nas aulas de Biologia. No resultado da análise dos mapas, observou que os mapas dos estudantes do grupo experimental tiveram uma melhor organização conceitual que os mapas do grupo controle, sendo que os mapas do grupo experimental estavam mais organizados quanto a hierarquia dos conteúdos, a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. Diante destas considerações podemos afirmar que a estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino fundamentada na TAS, favoreceu a evolução conceitual do conteúdo matemático de função e função afim.

A pesquisa buscou uma experiência de ensino, por meio de uma metodologia, que possibilitasse aos estudantes apropriarem-se dos conceitos sobre funções estudados no decorrer das atividades propostas. A resolução de problemas fez-se adequada aos propósitos da pesquisa, pois o estudo deste tema só tem sentido quando destinado resolver problemas e situações reais. Esta metodologia aplicada ao conteúdo de funções, oportunizou aos estudantes: visualizar por conta própria características importantes de cada uma das funções estudadas; atribuir significado às definições formais de cada tipo de função e a terminologia utilizada em cada caso; estabelecer relações e transitar entre diferentes registros desse objeto matemático; compreender as relações de dependência entre as grandezas envolvidas numa determinada situação; construir conceitos e habilidades importantes à compreensão de fenômenos modelados por funções e analisar as diferenças e semelhanças entre problemas propostos, a fim de serem capazes de adaptar os conhecimentos construídos a novas situações problema.

O aproveitamento do grupo experimental foi maior após a aplicação da metodologia. Além disso, comparando os resultados do grupo experimental e do grupo controle, pode-se concluir que a estratégia de resolução de problemas, é uma metodologia que contribuiu de forma significativa no processo de ensino, assim como do processo de compreensão e construção de conceitos, fazendo dos estudantes sujeitos autônomos no processo de aprendizagem e do professor um mediador e facilitador deste processo, ao escolher as atividades e intervir quando necessário para a construção de novos saberes.

A aprendizagem de funções de forma significativa é de fundamental importância, permitindo ao professor transitar em diversas áreas do conhecimento, fazendo conexões entre diversos conceitos e diferentes formas de pensamento matemático, sendo que todo o processo de ensino aprendizagem, deve levar em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes.

As reflexões feitas a partir da presente pesquisa oferecem embasamento para possíveis práticas pedagógicas que visem a estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino, realizada não somente como uma aplicação de exercício, mas como um ponto de partida para o início do conteúdo a ser estudado, pois este é sem dúvida, um caminho para uma aprendizagem significativa do tema, na qual o aluno é capaz de comparar e transferir para diferentes situações.

A teoria da aprendizagem significativa associada a resolução de problemas, demonstrou potencial significativo ao comparar os resultados obtidos entre o grupo experimental e o grupo controle. No entanto, o período de observação do escopo foi limitado, não sendo possível aplicar em todas as funções, o que deixou um espaço aberto para futuros pesquisadores das áreas de ensino. Portanto, esta pesquisa contém um aporte para futuros estudos no contexto da resolução de problemas, visando a assimilação de conceitos, aplicadas em diversas áreas do ensino. Desse modo, este estudo fica recomendado aos professores do ensino de Ciências e Matemática, como um aporte de sugestões para elaboração das aulas e assim alcançar resultados inovadores. Contudo, contribui para motivar professores a inovarem suas práticas em sala de aula. A Figura 76 traz um diagrama V da visão geral da tese.

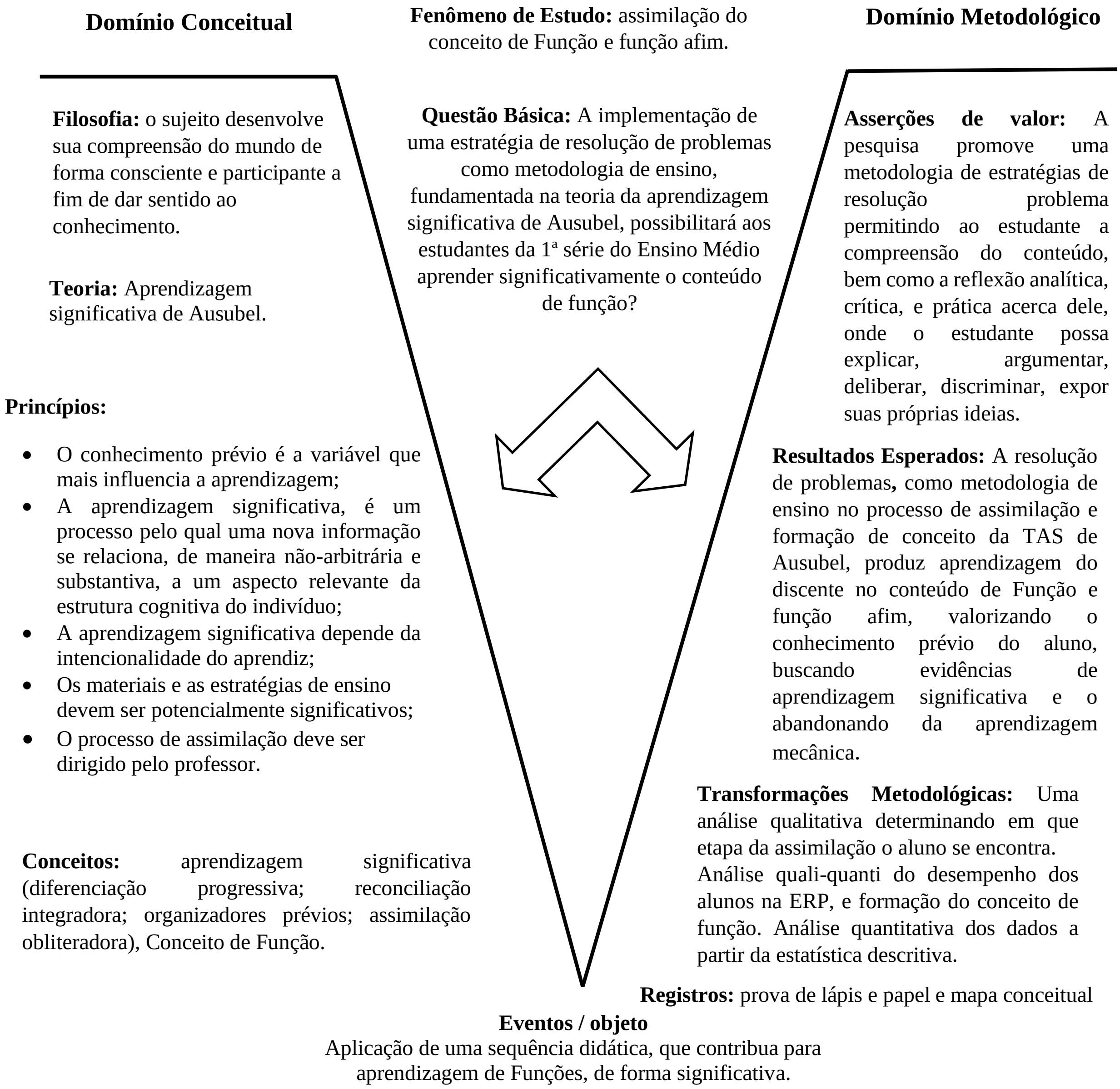


Figura 76- Diagrama V, visão geral da pesquisa

REFERÊNCIAS

ABREU, Lorena Luquini de Barros (2011). *Estudando conteúdos matemáticos com direcionamentos de modelagem matemática: o caso da função afim* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF. Juiz de Fora, MG, Brasil.

AFUSO, Anderson Yassuhir. (2014). *Métodos Numéricos para encontrar zeros de funções: aplicações para o Ensino Médio* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista -UNESP. Rio Claro, SP, Brasil.

ALMEIDA, Valdneide Pereira Santos de (2014). *Análise da resolução de problemas de função afim na modalidade mista de ensino: a efetividade de rede social educativa* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco-UFPE. Recife, PE, Brasil.

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. (2012). *Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função*. Relime, Portugal, v. 15 (2), p. 137- 169.

ASSIS, Victor Hugo Duarte. (2013). *Narrativas no ensino de funções por meio de investigações matemáticas* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista -UNESP. Rio Claro, SP, Brasil.

ASSUNÇÃO, J. A. (2015). *A Resolução de Problemas como metodologia de ensino no conteúdo de Função Afim, fundamentado na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel*. (Dissertação de Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, UERR. Boa Vista, RR, Brasil.

AUSUBEL, D. P. (2003). *Aquisição e retenção do conhecimento: uma perspectiva cognitiva.* Tradução Lígia Teopisto. Lisboa: Plátano.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. (1980). *Psicologia educacional*. Tradução Eva Nick. Rio de Janeiro: 2 ed. Melhoramentos.

AUSUBEl, D.P., NOVAK, J.D. e Hanesian, H. (1978). *Educational psychology*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

BANHATO, Matheus Pierry (2015). *Máximos e mínimos com proposta de aplicação para funções quadráticas* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista -UNESP. São José do Rio Preto, SP, Brasil.

BRAGA, E. R., VIALI, L. (2011). *A planilha como suporte à compreensão dos conceitos das funções afim e quadrátic*. UNION, n. 26, p. 57-71.

BRANCA, N. (1997). *A resolução de problemas como meta, processo e habilidades básicas. In: A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo*: Atual.

BRASIL. *Secretaria de Educação Fundamental.* (1999). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

BRASIL. Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica / Ministério da Educação. (2013) Secretária de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. – Brasília: MEC, SEB, DICEI.

BARBOSA, J. C. (2001). *Modelagem na educação matemática: contribuições para teórico. In: Reunião anual da ANPED*. Caxambu. Anais. ANPED, 2001. 1 CD-ROM

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. (1996). Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

BASSANEZI, J. C. (2002) *Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* São Paulo: contexto.

BEZERRA, Priscila Feitosa. (2014) As funções Seno e Cosseno*: A atividade de situação problema na aprendizagem de derivadas parciais do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal de Roraima na modalidade a distância* (Dissertação de Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, UERR. Boa Vista, RR. Brasil.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. (2003) *Curso de Matemática*. São Paulo: Moderna, Volume Único.

BIEMBERGUT, Maria Salett & HEIN, Nelson. (2011) *Modelagem Matemática no ensino*. 5ª Ed. São Paulo: Contexto.

BISOGNIN, Eleni; STRAPASON, Lisie Pippi Reis (2013). *Jogos pedagógicos para o ensino de funções no primeiro ano do ensino médio*. Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 579-595.

BOGDAN, R.; BIKLEN S. K. (1994). *Investigações qualitativa em educação: ums introdução as teorias e aos métodos.* Tradução de Maria J. Álvares, Porto: Porto Editora.

BOSCHETTO, Viviane Cristina. (2015). *Função afim e suas propriedades através da resolução de problemas* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista -UNESP. São José do Rio Preto, SP, Brasil

BOYER, Carl B. (1996). *História da Matemática*. [Tradução Elza F. Gomide]. 2ª Ed. – São Paulo: Edgard Blucher

CARVALHO, M. *O ensino da matemática* I. Disponível em: <http://www.pb.utfpr.edu.br/comat/mcarvalho.pdf>. Acesso em 03 OUT 2012.

COSTA, Sayonara Salvador Cabral da. (2008). *O aprender pela resolução de problemas*. In: MASINI, Elcie F. Salzano; MOREIRA, Marco Antônio. *Aprendizagem significativa: condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimento*. São Paulo: Vetor.

DANCEY, C. P., & Reidy, J. (2013). *Estatística sem matemática para psicologia* (5th ed.). Porto Alegre: Penso

DANTE, Luiz Roberto. (1989) *Didática da resolução de problemas de Matemática*: 1ª a 5ª séries. São Paulo: Ática.

DANTE, L. R. (2008)*Tudo é Matemática*. São Paulo: Ática.

DAZZI, Clovis José; Dullius, Maria Madlena (2013). *Ensino de funções polinomiais de grau maior que dois Através da análise de seus gráficos, com auxílio do software graphmatica*. Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 381-398.

DEWEY, John. (1910). *How we think*. Boston. MA: DC Heath.

DÌAZ, Felix. (2011). *O processo de aprendizagem e seus transtornos*. Salvador: EDUFBA.

DORNELAS, J. J. B. (2017). *Análise de uma sequência didática para a aprendizagem de conceito de uma função afim.* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, PE, Brasil.

FEITOSA, Soraya Araújo. (2014) *A atividade de situações problema como estratégia didática no tratamento da informação no 6º ano do ensino fundamental a partir da teoria de Galperin*. (Dissertação de Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, UERR. Boa Vista – RR

FILHO, Luiz Gonçalves (2011). *Modelagem matemática e o ensino de função do 1º grau* (Dissertação de mestrado). Pontifica Universidade Católica de São Paulo PUC. São Paulo, SP, Brasil.

FREIRE, P.(2008). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 4 ed. São Paulo: Paz e Terra.

GALVÃO, M. E. E. L; SOUZA, V. H. G; MIASHIRO, P. M (2016). *A Transição das Razões para as Funções Trigonométricas* Bolema, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 1127-1144.

GHEDIN, Evandro; Franco, Maria Almeida Santoro. (2011). *Questões de método na construção da pesquisa em educação.* 2 Ed. – SP: Cortez.

GÓMEZ-GRANELL, Carmen. (1997). *A Aquisição da Linguagem Matemática: símbolo e significado.* TEBEROSKY, A. & TOCHINKI, L. (Orgs.). *Além da Alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática*. Tradução Stela Oliveira. São Paulo: Ática.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. (2003). *Do saber fazer ao saber dizer: uma análise do papel da resolução de problemas na aprendizagem conceitual de Física*. Ensaio, Belo Horizonte, v. 5, n. 1, p. 52-67.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. (1997). *Fundamentos de matemática elementar: conjuntos funções.* 3 ed. São Paulo: Atua. v. 1

IEZZI, Gelson. et al. (2010). *Matemática: ciência e aplicações*. 6. ed. São Paulo: Saraiva. v. 1

JACOBINI, O. R. & WODEWOTZKI, M. L. L. (2006). *Uma Reflexão sobre a Modelagem Matemática no Contexto da Educação Matemática Crítica*. In: Boletim de Educação Matemática, ano 19, nº 25, p.71-88.

LESTER, F. K. Jr. And Others: (1983). *The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes.* Final Report. Indiana University, Bloomington: Mathematics Education development Centre.

LIBÂNEO, J. C.(1994) *Didática*. São Paulo: Cortez.

LIMA, Elon Lages. (2013). *Números e Funções Reais*. Coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM

LIMA, P. C. (2017). *Uma metanálise dos artigos sobre o ensino e a aprendizagem de função na Educação Básica, publicados por brasileiros nos últimos dez anos na revista Educação Matemática e Pesquisa*. (Dissertação de mestrado). Pontifica Universidade Católica de São Paulo PUC. São Paulo, SP, Brasil.

LUCAS, Anderson Barros (2009). *Equações e funções: descontinuidade conceitual* (Dissertação de mestrado). Pontifica Universidade Católica de São Paulo PUC. São Paulo, SP, Brasil.

LUCKESI, Cipriano Carlos. (1990). *Filosofia da Educação*. São Paulo: Cortez.

LUZ, Venâncio Silas. (2010). A*prendizagem significativa de função do 1º grau: uma investigação por meio da modelagem matemática e dos mapas conceituais*. (Dissertação de Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. Maringá, Paraná.

MACIEL, Paulo Roberto Castor; CARDOSO, Maria Tereza Fachada Levy (2014). *A história do conceito de função em vídeo: uma proposta para a aprendizagem*. Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1348-1367.

MAIA, Diana (2007). Função Quadrática*: Um estudo didático de uma abordagem computacional* (Dissertação de mestrado). Pontifica Universidade Católica de São Paulo PUC. São Paulo, SP, Brasil.

MAJMUTOV, M. I. (1983). *La enseñanza problémica*. Havana: Pueblo y educación.

MASSINI, E. F. S.; MOREIRA, M. A. (2006). *Aprendizagem Significativa. Condições para a ocorrência e lacunas que levam ao comprometimento*. São Paulo: Vetor.

MATTA, Alfredo. (2006). *Tecnologias de aprendizagem em rede e ensino de história. Brasília: Líber*.

MARKOVITS, Z.; Eylon, B. S.; & BRUCKHEIMER, M. (1994). *Dificuldades dos alunos com o conceito de função:Idéias da algébra*. Trad. Hygino, H. Do. São Paulo: Atual.

MELO, Gercílio da Rocha (2013). *A inserção do software Kmplot na aprendizagem de funções afim e quadrática* (Dissertação de mestrado). Centro Universitário UNIVATES. Lajeado, RS, Brasil.

MENEGHETTI, R. C. G.; Redling, J. P. (2012). *Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no ensino médio*. Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 193-229.

MENDOZA, Hector José Garcia. (2009). *Estudio del esfecto del sistema de acciones em el processo del aprendizaje de los alunos em la atividade de situaciones problema em matemática em la asignatura de álgebra lineal, em el contexto de la Faculdade Actual de la Amazônia.* Tese (Doutorado em Psicopedagogia) – Universidade de Jaén (UJAEN), Espanha.

MENDOZA, H. J. G., DELGADO, O. T. (2011). *Sistema de ações para melhorar o desempenho dos alunos na atividade de situações problema em matemática. XIII Conferencia Interamericana de Educação Matemática* – CIAEM.

MENDOZA, H. J. G., DELGADO, O. T. (2012). *A Contribuição de Galperin na Avaliação de Provas de Lápis e Papel de Sistemas de Equações Lineares*. Boa Vista, 25 p.

MORIN, E. (2003). *A cabeça bem-feita: repensar a reforma, reformar o pensamento* /Tradução Eloá Jacobina. – 8ª. ed. - Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

MOREIRA, Marco A. (1999). *Aprendizagem Significativa*. Fórum permanente de professores Brasília: UnB.

MOREIRA, M.A., Caballero, M.C. e Rodríguez, M.L. (orgs.) (1997). *Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo*. Burgos, España. pp. 19-44.

MOREIRA, Marco A. (2006). *A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua implementação em sala de aula.* Brasília: UnB.

________________. *A teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel*. In: MOREIRA, M. A e MASINI, E. F. S (Orgs.). (2008) . *Aprendizagem significativa: condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos*. São Paulo: Vetor, p.15-44.

MOREIRA, Marco Antônio. (2010). *Teorias de Aprendizagem*. 2. ed. ampl - São Paulo EPU.

MOREIRA, Marco Antônio. (2011). *Metodologias de pesquisa em ensino*. São Paulo: Ed. Livraria da Física.

MOREIRA, M. A. (2012). *Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares*. São Paulo: LF.

MÜLLER, Iraci. (2017). *Tendências atuais de Educação Matemática*. Unopar Científica – Ciências Humanas e Educação. Londrina, v. 1, n. 1, p. 133-144, jun.

NASCIMENTO, Ross Alves do (2007). *Modelagem matemática em simulação computacional na aprendizagem de funções* (Tese de doutorado). Universidade Federal de Pernambuco-UFPE. Recife, PE, Brasil.

NEVES, J. D.; RESENDE, M. R. (2016) *O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural*. Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC – são Paulo, v 18.

NOVAK, J. D. e GOWIN, D. B. (1996). *Aprender a aprender*. Tradução Carla Valadares. Lisboa: Plátano.

NOVAK, A.M., & KRAJICK, J. S. (2006). *Using tecnology to support inquiry in middle scholl science*. In L.B. Flick, & N. G. Lerderman. Scientific inquiry and nature of science: Implications for teaching, learning, and teacher education. Norwell: Kluwer Academic Publishen.

OLIVEIRA, Paulo César; PIRE, Rogério Fernando (2012). *O conceito de função na educação básica via registros de representação semiótica*. Revista Reflexão e Ação, Santa Cruz do Sul, v.20, n2, p.215-239.

OLIVEIRA, Rosiele Juvino de. (2007). *O Bom Professor de Matemática segundo a Percepção de Alunos do Ensino Médio.* Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática. Brasília: Universidade Católica de Brasília – UCB.

ONUCHIC, L. R.(1999) *Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas.* In: BICUDO, M. A. V.(Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. 5. São Paulo: UNESP. p. 199 - 218.

ONUCHIC, Lurdes de la Rosa; ALEVATO, Norma Suely Gomes (2011). *Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.* Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98.

ONUCHIC, L. R. et al. (2014). *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. Jundiaí, SP: Palco Editorial.

PAIVA, Manoel.(2013). *Matemática* . 2. ed. São Paulo: Moderna. v.1.

PASQUALI, L. (2010). *Testes referentes a constructo: teoria e modelo de construção*. (L. Pasquali, Ed.)*Instrumentação psicológica: fundamentos e prática*. Porto Alegre: Artmed.

PEREIRA, Rudolph dos Santos Gomes; JUNIOR, Guataçara dos Santo (2013). *Modelagem Matemática e o Ensino de Ajuste de Funções: um caderno pedagógico.* Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 531-546

POLYA, G.A. (1995). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

PONTE, J. P. (1990) *Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. Educação Matemática*: Temas de Investigação. Organização e textos de Brown, Fernandes, Matos, Ponte e al. Lisboa: IIE e Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, pp.185-239.

POZO, J. I. (1998). *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprende*. Porto Alegre: Artmed.

SANTAROSA, M. C. (2016).*Ensaio Sobre Aprendizagem significativa no Ensino da Matemática*. Aprendizagem Significativa em Revista, V6(3), pp. 57-69.

SARAIVA, M. J.; TEIXEIRA, A. (2009). *Secondary School Students' Understanding of*

Function via exploratory and investigative tasks. Journal of Quaderni di Ricerca in Didattica, 4 (19), p. 74-83.

RODRIGUES, Márcio Urel. (2007). *Narrativas no ensino de funções por meio de investigações matemáticas* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista -UNESP. Rio Claro, SP, Brasil.

SAMPIERI, Roberto Hernández; COLLADO, Carlos Fernández; LUCIO, Pilar Baptista. (2006). *Metodología de La Investigación*. 4ª ed. – México: McGraw-Hill Interamericana.

SALIN, Belissa (2014). *Matemática dinâmica: uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul-UFRGS. Porto Alegre, RS, Brasil.

SCHONARDIE, Belissa (2011). *Modelagem matemática e introdução da função afim no ensino fundamental* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul-UFRGS. Porto Alegre, RS, Brasil.

SILVA, H. N. (2017). *Estudo de Função: Uma proposta de reconstrução de atividades do imageciel medidas pelo geogebra* (Dissertação de mestrado). Pontificia Universidade Católica-PUC. São Paulo, SP, Brasil.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. (2001). *Ler, Escrever e Resolver Problemas – Habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed.

SIQUEIRA, Fábio Rodrigues (2012). *A programação no ensino médio como recurso de aprendizagem dos zeros da função polinomial do 2º grau* (Dissertação de mestrado). Pontificia Universidade Católica-PUC. São Paulo, SP, Brasil.

SKOVSMOSE, O. (2000). *Cenários para investigação.* Boletim de Educação Matemática-Bolema, n. 14, p.66-91.

SOUZA, Valdirene Rosa. (2010). *Funções no ensino médio: história e modelagem* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica-PUC. São Paulo, SP, Brasil.

SOUZA, Edilson Paiva (2010). As funções Seno e Cosseno*: Diagnóstico de dificuldade de aprendizagem, através de sequências didáticas com diferentes mídias* (Dissertação de mestrado). Pontifica Universidade Católica de São Paulo PUC. São Paulo, SP, Brasil.

TALÍZINA, Nina. (1988). *Psicologia do Ensino*, Moscou: Progresso.

TINTORER, O.; MENDOZA, H. J. G. (2016). Uma aproximação das teorias de aprendizagem significativa e formação por etapas das ações mentais. Aprendizagem significativa em revista, V. 2, p. 1-13.

VALENTE, J. A. (2007). *Diferentes usos do computados na educação*. São Paulo, Campinas.

VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative structures. In Hilbert, J. and Behr, M. (Eds). Research Agenda in Mathematics Education. Number, Concepts and Operations in the Middle Grades. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum. pp. 141-161.

VERGNAUD, G. (1990). La *Théorie des champs conceptuels. Recherches em Didactique des Mathématiques,* 10(23), p.133-170.

VERGNAUD, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds) The development of multiplicative reasoning in the leaning of mathematics. Albany, N.Y., State University of New York Press. pp. 41-59

VRANCKEN, Silvia (2017). *Función de primer grado. Construcción de significados desde una perspectiva variacional*. UNION, n. 49, p. 122-142.

YIN, Robert K. (2010). *Estudo de Caso: planejamento e métodos*. Tradução Ana Thorell. 4ª ed. – Porto Alegre: Bookman.

YOUSCHKEVICH, A. P. (1981). *The Concept of Function*. In: Arquive for History of Exact Sciences. Editions Springer, V. 16, no 1, p.37-85.

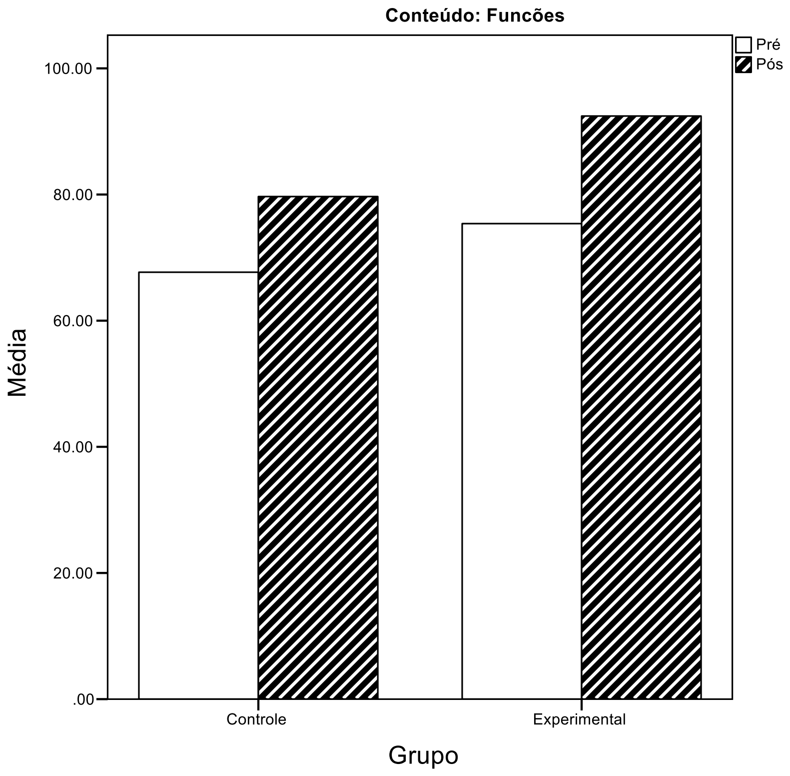
APÊNDICE A

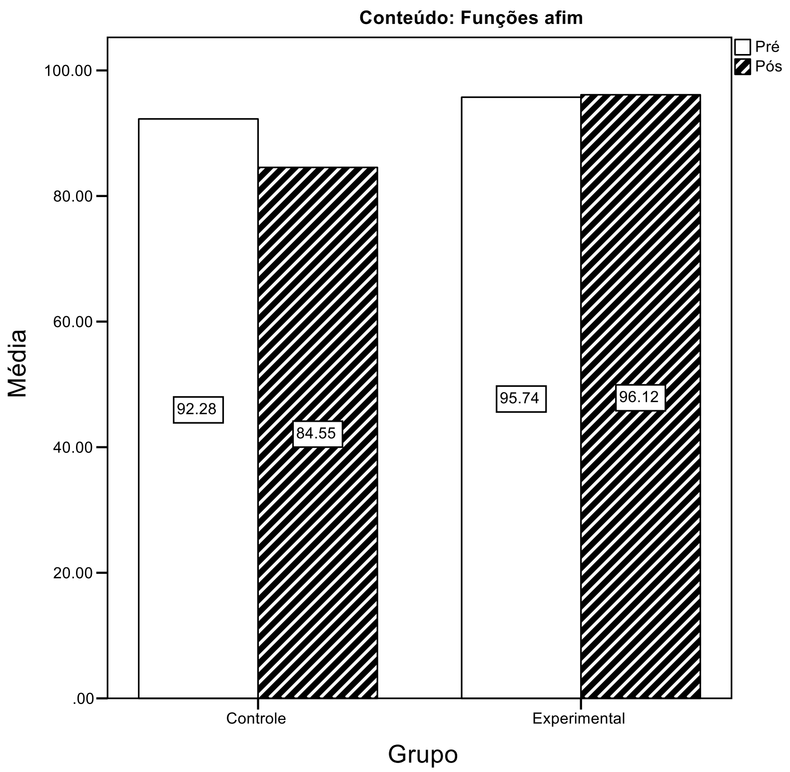
Tabelas e gráficos dos resultados estatísticos

APÊNDICE

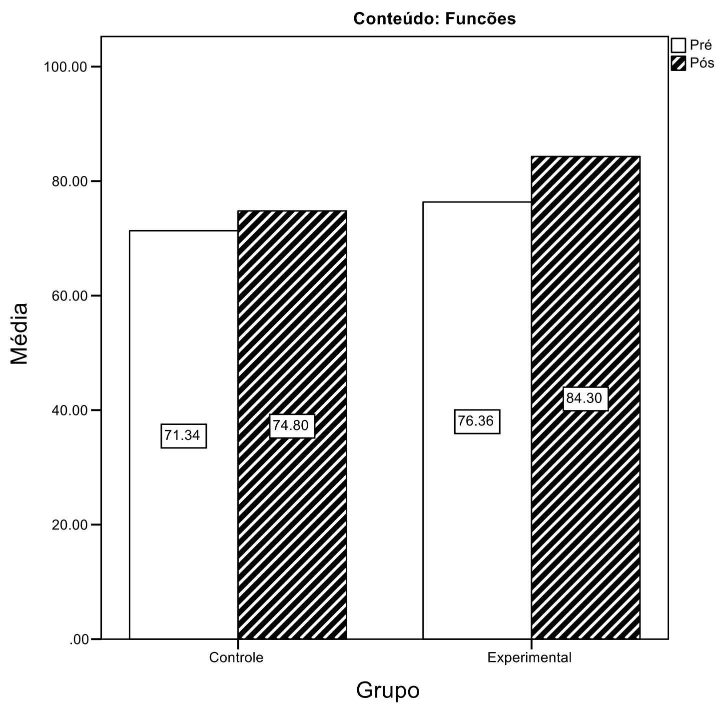
5.1 Gráficos

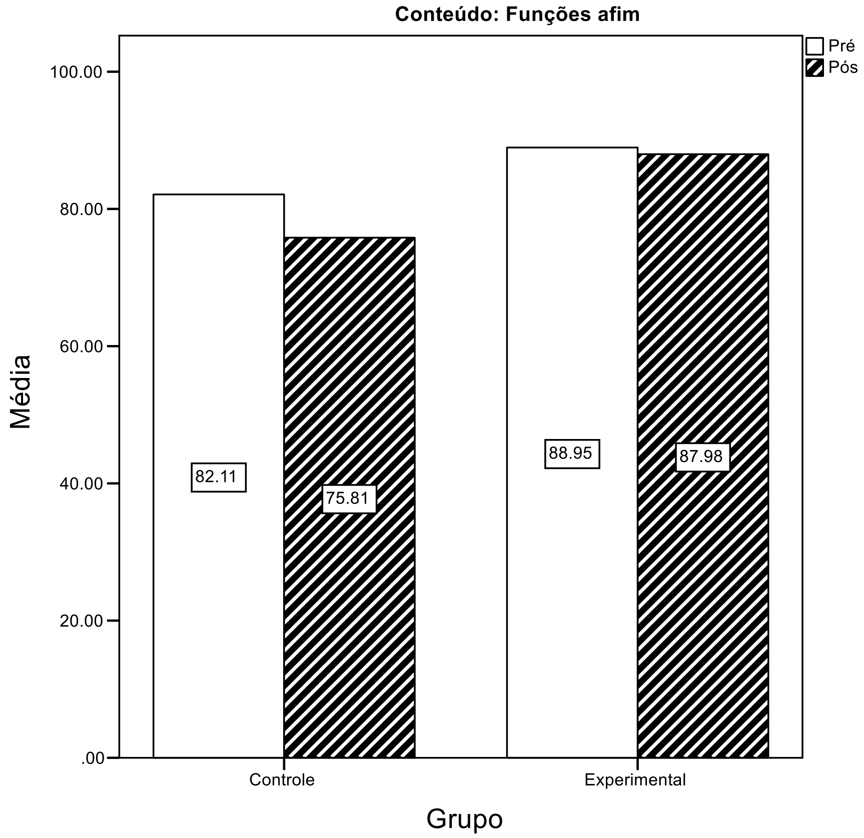
5.1.1 Compreender o problema (Y1)



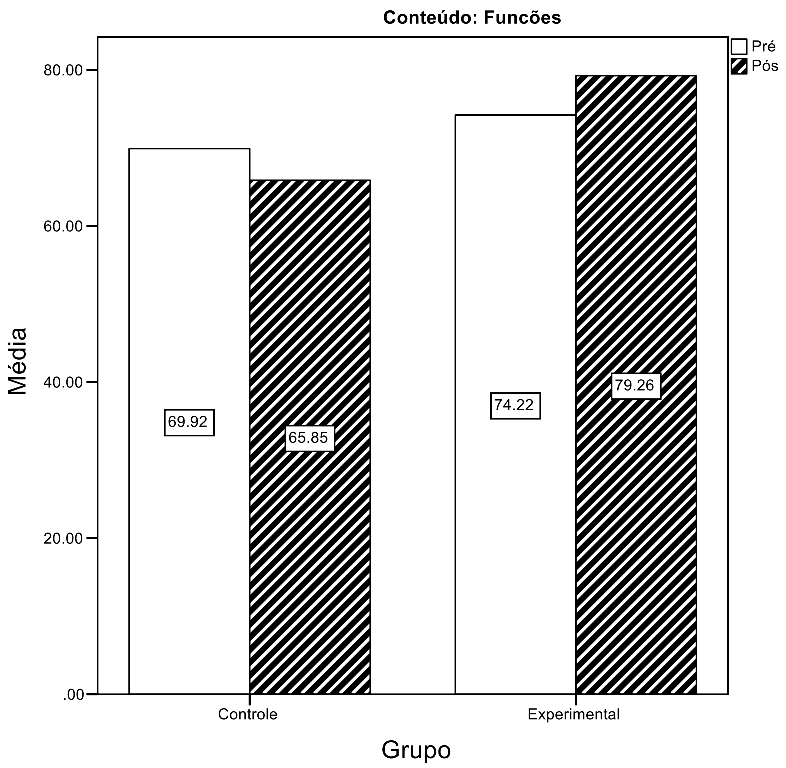


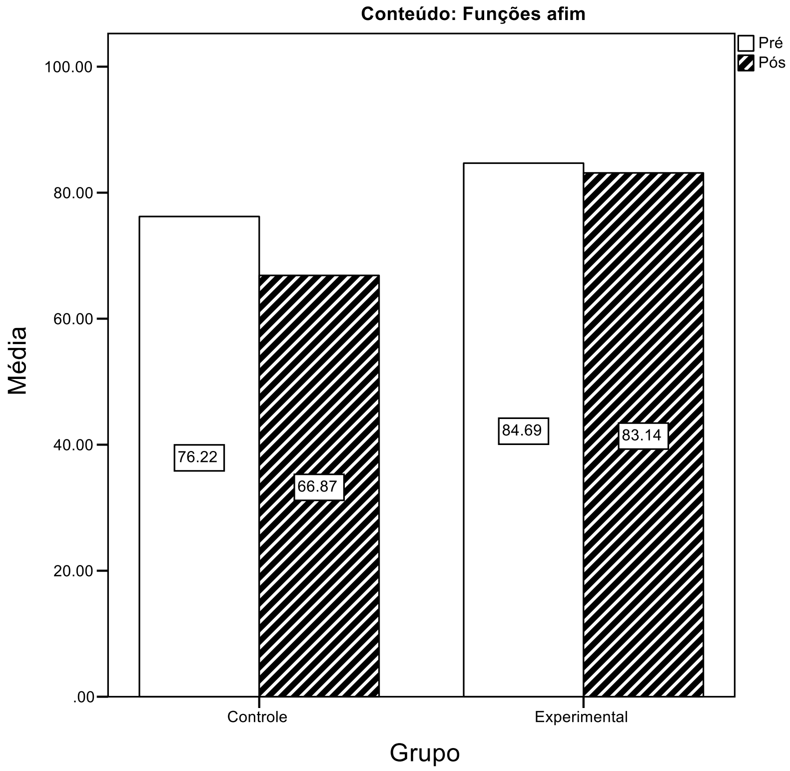
5.1.2 Construir o modelo matemático (Y2)



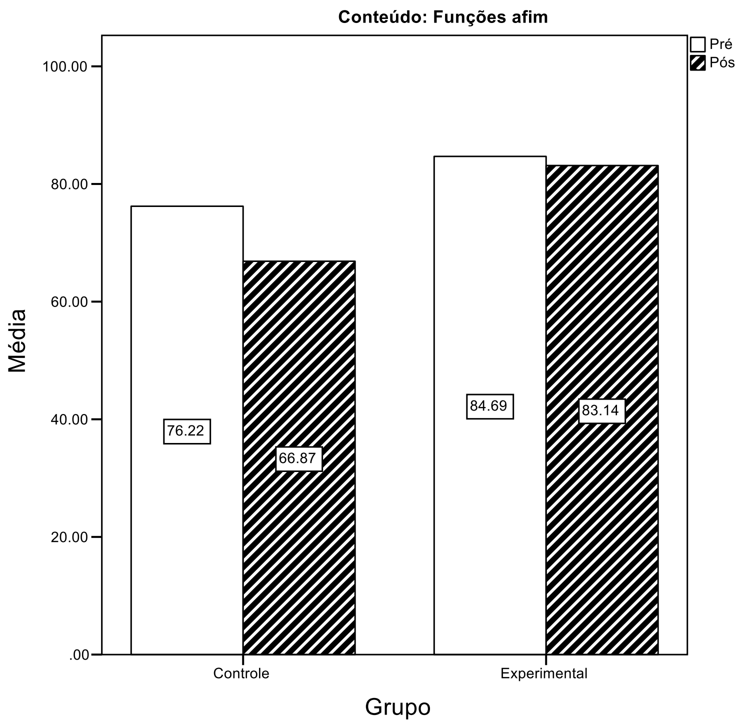


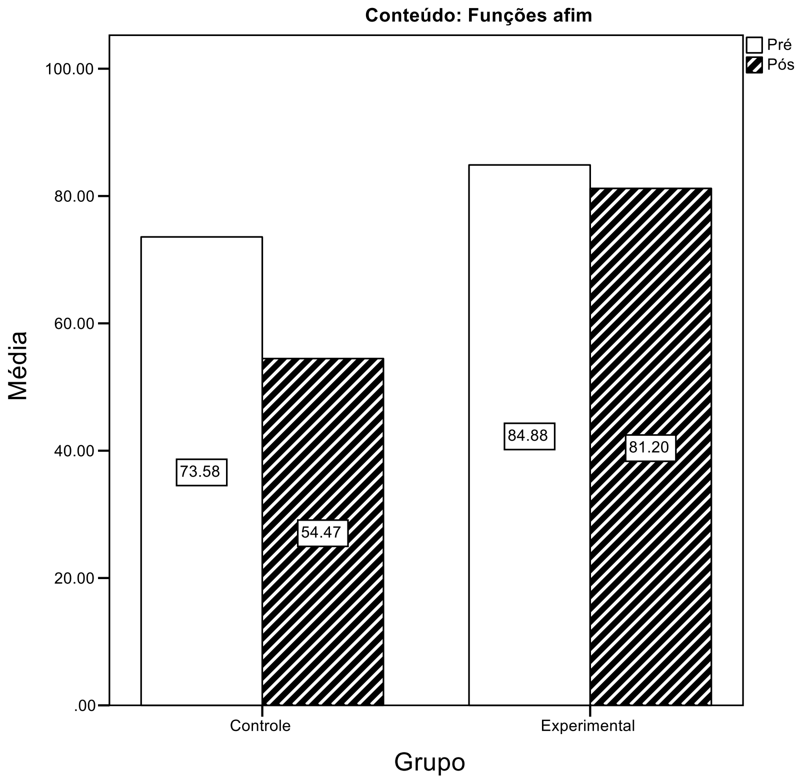
5.1.3 Solucionar o modelo matemático (Y3)



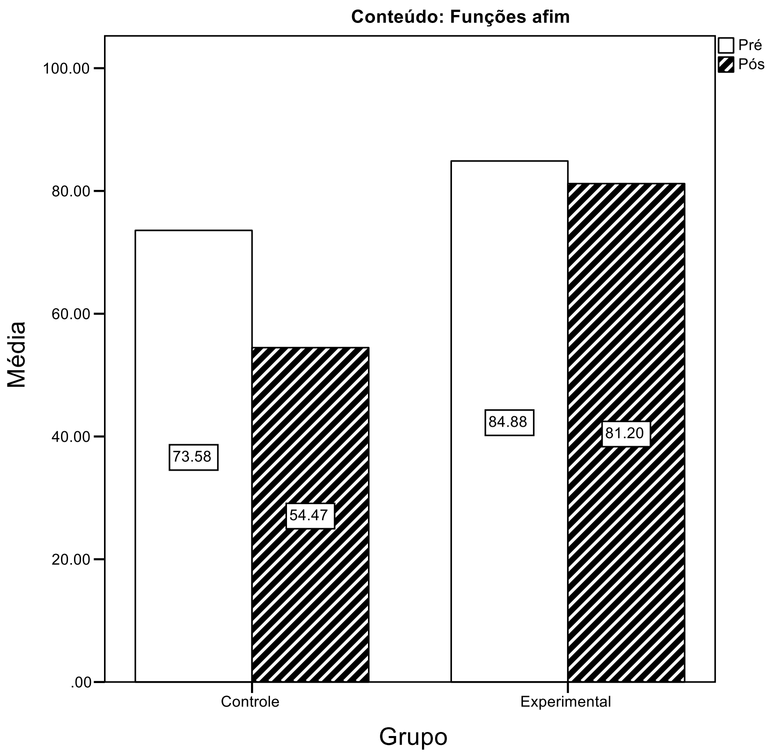


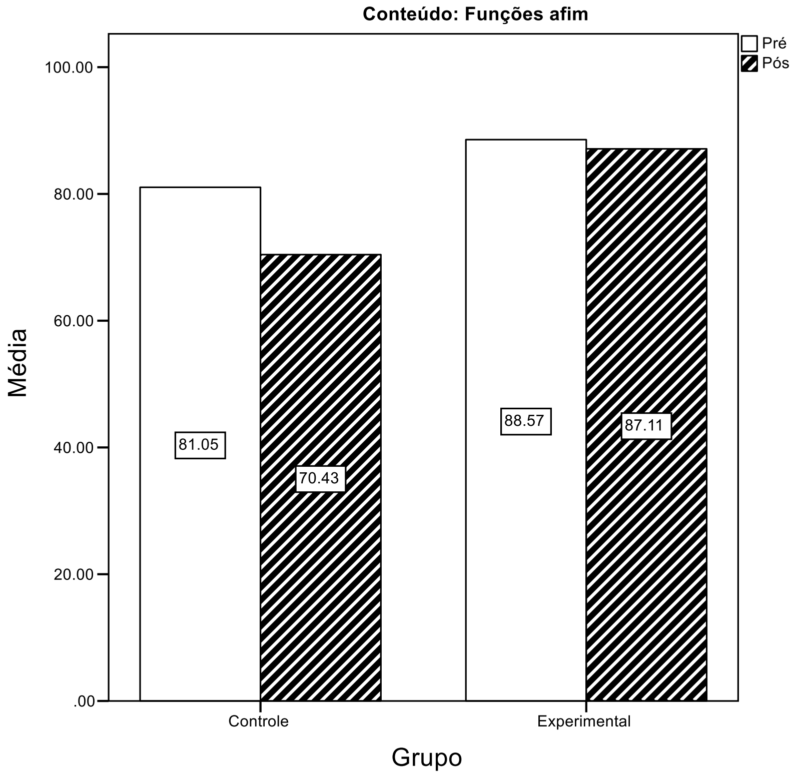
5.1.4 Interpretar a solução (Y4)





5.1.5 Escore geral (Y5)





Conteúdo: Funções afim
Pré
Pós
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
.00
Média
81.05
70.43
88.57
87.11
Controle
Experimental
Grupo

5.2 Estatísticas descritivas

		Grupo											
		Controle				Experimental				Total			
		Média	Mínimo	Máximo	Desvio padrão	Média	Mínimo	Máximo	Desvio padrão	Média	Mínimo	Máximo	Desvio padrão
Y1	Pré	78,05	41,67	100,00	14,73	83,91	50,00	100,00	12,75	81,05	41,67	100,00	14,04
Y2		75,68	50,00	100,00	13,01	81,72	50,00	100,00	12,93	78,77	50,00	100,00	13,30
Y3		72,36	33,33	100,00	13,87	79,01	50,00	100,00	13,57	75,76	33,33	100,00	14,09
Y4		67,07	41,67	100,00	15,64	74,68	41,67	100,00	16,15	70,97	41,67	100,00	16,33
Y5		73,29	41,67	100,00	12,74	79,83	50,00	100,00	12,52	76,64	41,67	100,00	13,02
Y1	Pós	83,06	50,00	100,00	11,41	92,38	66,67	100,00	8,70	87,83	50,00	100,00	11,12
Y2		75,27	50,00	100,00	10,84	85,01	50,00	100,00	11,08	80,26	50,00	100,00	11,99
Y3		66,06	41,67	100,00	12,81	80,88	58,33	100,00	13,30	73,64	41,67	100,00	15,01
Y4		55,69	25,00	100,00	13,85	79,91	41,67	100,00	15,53	68,09	25,00	100,00	19,06
Y5		70,02	45,83	95,83	10,43	84,54	60,42	100,00	10,74	77,46	45,83	100,00	12,83

5.3 Regressões

5.3.4 Compreender o problema (Y1)

Sumarização do modelo[b]

CONTEUDO	R	R quadrado	R quadrado ajustado	Erro padrão da estimativa	Durbin-Watson
Funcões	.681[a]	0,463	0,450	10,03806	1,529
Funções afim	.806[a]	0,649	0,641	6,40189	2,023
Geral	.803[a]	0,644	0,635	5,69800	2,076

a. Preditores: (Constante), Y1_PRE, GRUPO
b. Variável Dependente: Y1_POS

ANOVA[a]

CONTEUDO		Soma dos Quadrados	gl	Quadrado Médio	F	p-valor
Funcões	Regressão	7045,725	2	3522,863	34,962	.000[b]
	Resíduo	8161,781	81	100,763		
	Total	15207,507	83			
	Resíduo	7043,412	81	86,956		
	Total	8501,157	83			
Funções afim	Regressão	6144,563	2	3072,281	74,963	.000[b]
	Resíduo	3319,723	81	40,984		
	Total	9464,286	83			
Geral	Regressão	4760,666	2	2380,333	73,315	.000[b]
	Resíduo	2629,839	81	32,467		
	Total	7390,506	83			

a. Variável Dependente: Y1_POS
b. Preditores: (Constante), Y1_PRE, GRUPO

Coeficientes[a]

CONTEUDO		Coeficientes não padronizados B	Coeficientes não padronizados Erro Padrão	Coeficientes padronizados Beta	t	p-valor	95,0% Intervalo de Confiança para B Limite inferior	95,0% Intervalo de Confiança para B Limite superior
Funcões	(Constante)	43,258	6,271		6,898	0,000	30,781	55,735
	GRUPO	8,622	2,298	0,320	3,753	0,000	4,050	13,193
	Y1_PRE	0,538	0,090	0,512	5,998	0,000	0,360	0,717
	GRUPO	1,795	2,094	0,089	0,857	0,394	-2,371	5,961
	Y1_PRE	0,282	0,076	0,384	3,691	0,000	0,130	0,433
Funções afim	(Constante)	14,589	7,821		1,865	0,066	-0,972	30,150
	GRUPO	8,948	1,427	0,421	6,269	0,000	6,108	11,788
	Y1_PRE	0,758	0,084	0,606	9,020	0,000	0,591	0,925
Geral	(Constante)	32,416	5,397		6,007	0,000	21,678	43,153
	GRUPO	5,508	1,307	0,294	4,216	0,000	2,909	8,108
	Y1_PRE	0,649	0,068	0,662	9,515	0,000	0,513	0,785

a. Variável Dependente: Y1_POS

Bootstrap para Coeficientes

						Bootstrap[a]	
						BCa 95% de Intervalo de Confiança	
CONTEUDO		B	Viés	Erro Padrão	p-valor	Inferior	Superior
Funcões	(Constante)	43,258	-0,118	5,873	0,001	31,672	55,068
	GRUPO	8,622	-0,175	2,088	0,001	4,611	12,221
	Y1_PRE	0,538	0,002	0,079	0,001	0,384	0,699
	GRUPO	1,795	0,056	2,077	0,407	-2,214	6,033
	Y1_PRE	0,282	-0,006	0,073	0,002	0,142	0,407
Funções afim	(Constante)	14,589	-0,056	8,481	0,086	-2,177	31,136
	GRUPO	8,948	0,097	1,552	0,001	5,400	12,399
	Y1_PRE	0,758	0,000	0,093	0,001	0,566	0,942
Geral	(Constante)	32,416	0,006	4,847	0,001	22,442	42,206
	GRUPO	5,508	-0,026	1,357	0,001	2,831	8,136
	Y1_PRE	0,649	0,000	0,062	0,001	0,529	0,773

a. A menos que indicado de outra maneira, os resultados da bootstrap são baseados em 1000 amostras bootstrap estratificadas

5.3.5 Construir o modelo matemático (Y2)

Sumarização do modelo[b]

CONTEUDO	R	R quadrado	R quadrado ajustado	Erro padrão da estimativa	Durbin-Watson
Funcões	.778[a]	0,605	0,596	7,55425	1,613
Funções afim	.846[a]	0,716	0,709	6,99323	1,958
Geral	.876[a]	0,768	0,762	5,17594	1,668

a. Preditores: (Constante), Y2_PRE, GRUPO

b. Variável Dependente: Y2_POS

ANOVA[a]

CONTEUDO		Soma dos Quadrados	gl	Quadrado Médio	F	p-valor
Funcões	Regressão	7093,035	2	3546,518	62,147	.000[b]
	Resíduo	4622,408	81	57,067		
	Total	11715,443	83			
	Resíduo	6796,530	81	83,908		
	Total	12707,507	83			
Funções afim	Regressão	9996,184	2	4998,092	102,200	.000[b]
	Resíduo	3961,323	81	48,905		
	Total	13957,507	83			
Geral	Regressão	7166,677	2	3583,338	133,755	.000[b]
	Resíduo	2170,019	81	26,790		
	Total	9336,695	83			

a. Variável Dependente: Y2_POS

b. Preditores: (Constante), Y2_PRE, GRUPO

Coeficientes[a]

CONTEUDO		Coeficientes não padronizados B	Coeficientes não padronizados Erro Padrão	Coeficientes padronizados Beta	t	p-valor	95,0% Intervalo de Confiança para B Limite inferior	95,0% Intervalo de Confiança para B Limite superior
Funcões	(Constante)	32,001	4,637		6,901	0,000	22,775	41,228
	GRUPO	6,497	1,679	0,275	3,870	0,000	3,157	9,837
	Y2_PRE	0,600	0,063	0,678	9,543	0,000	0,475	0,725
	GRUPO	3,970	2,056	0,161	1,931	0,057	-0,120	8,060
	Y2_PRE	0,571	0,076	0,626	7,496	0,000	0,419	0,723
Funções afim	(Constante)	10,874	5,580		1,949	0,055	-0,229	21,977
	GRUPO	6,762	1,593	0,262	4,245	0,000	3,593	9,932
	Y2_PRE	0,791	0,067	0,733	11,867	0,000	0,658	0,923
Geral	(Constante)	20,706	4,008		5,166	0,000	12,730	28,681
	GRUPO	5,386	1,172	0,255	4,594	0,000	3,053	7,719
	Y2_PRE	0,721	0,052	0,773	13,898	0,000	0,618	0,824

a. Variável Dependente: Y2_POS

Bootstrap para Coeficientes

CONTEUDO		B	Viés	Erro Padrão	p-valor	Bootstrap[a] BCa 95% de Intervalo de Confiança Inferior	Superior
Funcões	(Constante)	32,001	-0,313	5,218	0,001	23,353	41,217
	GRUPO	6,497	-0,018	1,546	0,001	3,477	9,395
	Y2_PRE	0,600	0,005	0,070	0,001	0,447	0,750
	GRUPO	3,970	-0,080	2,059	0,059	0,103	7,636
	Y2_PRE	0,571	0,002	0,072	0,001	0,428	0,719
Funções afim	(Constante)	10,874	0,213	4,797	0,024	2,190	20,751
	GRUPO	6,762	0,026	1,532	0,001	3,761	9,992
	Y2_PRE	0,791	-0,003	0,061	0,001	0,671	0,896
Geral	(Constante)	20,706	-0,216	4,223	0,001	13,272	28,284
	GRUPO	5,386	0,042	1,149	0,001	3,174	7,629
	Y2_PRE	0,721	0,002	0,053	0,001	0,605	0,827

a. A menos que indicado de outra maneira, os resultados da bootstrap são baseados em 1000 amostras bootstrap estratificadas

5.3.6 Solucionar o modelo matemático (Y3)

Sumarização do modelo[b]

CONTEUDO	R	R quadrado	R quadrado ajustado	Erro padrão da estimativa	Durbin-Watson
Funcões	.829[a]	0,687	0,679	8,67813	1,896
Funções afim	.857[a]	0,735	0,728	8,25553	1,734
Geral	.900[a]	0,810	0,806	6,06701	1,740

a. Preditores: (Constante), Y3_PRE, GRUPO

b. Variável Dependente: Y3_POS

ANOVA[a]

CONTEUDO		Soma dos Quadrados	gl	Quadrado Médio	F	p-valor
Funcões	Regressão	13393,116	2	6696,558	88,920	.000[b]
	Resíduo	6100,105	81	75,310		
	Total	19493,221	83			
	Resíduo	7309,852	81	90,245		
	Total	19113,757	83			
Funções afim	Regressão	15309,564	2	7654,782	112,316	.000[b]
	Resíduo	5520,462	81	68,154		
	Total	20830,026	83			
Geral	Regressão	12736,008	2	6368,004	173,003	.000[b]
	Resíduo	2981,493	81	36,809		
	Total	15717,501	83			

a. Variável Dependente: Y3_POS

b. Preditores: (Constante), Y3_PRE, GRUPO

Coeficientes[a]

CONTEUDO		Coeficientes não padronizados B	Erro Padrão	Coeficientes padronizados Beta	t	p-valor	95,0% Intervalo de Confiança para B Limite inferior	Limite superior
Funcões	(Constante)	13,107	4,860		2,697	0,009	3,438	22,777
	GRUPO	10,161	1,916	0,333	5,304	0,000	6,349	13,974
	Y3_PRE	0,754	0,067	0,711	11,302	0,000	0,622	0,887
	GRUPO	10,013	2,141	0,332	4,677	0,000	5,753	14,274
	Y3_PRE	0,666	0,074	0,634	8,942	0,000	0,518	0,814
Funções afim	(Constante)	3,152	5,480		0,575	0,567	-7,751	14,056
	GRUPO	9,189	1,897	0,292	4,844	0,000	5,415	12,962
	Y3_PRE	0,836	0,070	0,720	11,963	0,000	0,697	0,975
Geral	(Constante)	7,365	4,062		1,813	0,074	-0,718	15,448
	GRUPO	9,430	1,373	0,345	6,867	0,000	6,698	12,162
	Y3_PRE	0,811	0,055	0,746	14,858	0,000	0,703	0,920

a. Variável Dependente: Y3_POS

Bootstrap para Coeficientes

CONTEUDO		B	Bootstrap[a] Viés	Erro Padrão	p-valor	BCa 95% de Intervalo de Confiança Inferior	Superior
Funcões	(Constante)	13,107	-0,177	5,111	0,012	3,637	22,466
	GRUPO	10,161	0,059	1,933	0,001	6,336	14,282
	Y3_PRE	0,754	0,002	0,076	0,001	0,605	0,898
	GRUPO	10,013	0,003	2,163	0,001	5,788	14,496
	Y3_PRE	0,666	0,004	0,077	0,001	0,520	0,845
Funções afim	(Constante)	3,152	-0,032	5,076	0,536	-5,930	13,081
	GRUPO	9,189	-0,041	1,803	0,001	5,981	12,379
	Y3_PRE	0,836	0,000	0,070	0,001	0,687	0,963
Geral	(Constante)	7,365	0,017	3,874	0,059	-0,953	15,174
	GRUPO	9,430	0,020	1,335	0,001	6,654	11,900
	Y3_PRE	0,811	-0,001	0,053	0,001	0,711	0,905

a. A menos que indicado de outra maneira, os resultados da bootstrap são baseados em 1000 amostras bootstrap estratificadas

5.3.7 Interpretar a solução (Y4)

Sumarização do modelo[b]

CONTEUDO	R	R quadrado	R quadrado ajustado	Erro padrão da estimativa	Durbin-Watson
Funcões	.843[a]	0,711	0,704	9,61543	1,677
Funções afim	.802[a]	0,643	0,634	12,93700	1,895
Geral	.874[a]	0,764	0,758	8,33084	1,674

a. Preditores: (Constante), Y4_PRE, GRUPO

b. Variável Dependente: Y4_POS

ANOVA[a]

CONTEUDO		Soma dos Quadrados	gl	Quadrado Médio	F	p-valor
Funcões	Regressão	18452,654	2	9226,327	99,791	.000[b]
	Resíduo	7488,979	81	92,457		
	Total	25941,634	83			
Funções afim	Regressão	24382,350	2	12191,175	72,841	.000[b]
	Resíduo	13556,638	81	167,366		
	Total	37938,988	83			
Geral	Regressão	18228,586	2	9114,293	131,324	.000[b]
	Resíduo	5621,631	81	69,403		
	Total	23850,217	83			

a. Variável Dependente: Y4_POS

b. Preditores: (Constante), Y4_PRE, GRUPO

Coeficientes[a]

CONTEUDO		Coeficientes não padronizados B	Coeficientes não padronizados Erro Padrão	Coeficientes padronizados Beta	t	p-valor	95,0% Intervalo de Confiança para B Limite inferior	95,0% Intervalo de Confiança para B Limite superior
Funcões	(Constante)	15,138	4,859		3,115	0,003	5,470	24,806
	GRUPO	23,328	2,101	0,664	11,104	0,000	19,148	27,508
	Y4_PRE	0,619	0,075	0,493	8,248	0,000	0,470	0,768
Funções afim	(Constante)	5,912	6,792		0,870	0,387	-7,601	19,425
	GRUPO	19,268	2,995	0,453	6,434	0,000	13,310	25,226
	Y4_PRE	0,660	0,088	0,527	7,489	0,000	0,485	0,835
Geral	(Constante)	9,532	5,165		1,846	0,069	-0,745	19,809
	GRUPO	18,986	1,905	0,563	9,968	0,000	15,196	22,775
	Y4_PRE	0,688	0,075	0,522	9,234	0,000	0,540	0,836

a. Variável Dependente: Y4_POS

Bootstrap para Coeficientes

CONTEUDO		B	Bootstrap[a] Viés	Bootstrap[a] Erro Padrão	Bootstrap[a] p-valor	Bootstrap[a] BCa 95% de Intervalo de Confiança Inferior	Bootstrap[a] BCa 95% de Intervalo de Confiança Superior
Funcões	(Constante)	15,138	-0,201	4,356	0,002	6,230	23,174
	GRUPO	23,328	-0,015	1,932	0,001	19,274	27,288
	Y4_PRE	0,619	0,002	0,073	0,001	0,480	0,773
Funções afim	(Constante)	5,912	0,266	5,979	0,320	-5,181	18,412
	GRUPO	19,268	0,022	3,138	0,001	13,035	25,389
	Y4_PRE	0,660	-0,004	0,086	0,001	0,488	0,813
Geral	(Constante)	9,532	-0,532	4,830	0,042	1,031	17,230
	GRUPO	18,986	-0,098	2,027	0,001	15,305	22,500
	Y4_PRE	0,688	0,008	0,076	0,001	0,532	0,855

a. A menos que indicado de outra maneira, os resultados da bootstrap são baseados em 1000 amostras bootstrap estratificadas

5.3.8 Escore geral (Y5)

Sumarização do modelo[b]

CONTEUDO	R	R quadrado	R quadrado ajustado	Erro padrão da estimativa	Durbin-Watson
Funcões	.888[a]	0,788	0,783	6,11890	1,902
Funções afim	.878[a]	0,772	0,766	6,64406	1,913
Geral	.920[a]	0,847	0,843	4,70527	1,980

a. Preditores: (Constante), Y5_PRE, GRUPO

b. Variável Dependente: Y5_POS

ANOVA[a]

CONTEUDO		Soma dos Quadrados	gl	Quadrado Médio	F	p-valor
Funcões	Regressão	11285,865	2	5642,933	150,716	.000[b]
	Resíduo	3032,711	81	37,441		
	Total	14318,576	83			
	Total	13105,727	83			
Funções afim	Regressão	12089,474	2	6044,737	136,934	.000[b]
	Resíduo	3575,621	81	44,143		
	Total	15665,096	83			
Geral	Regressão	9923,948	2	4961,974	224,123	.000[b]
	Resíduo	1793,304	81	22,140		
	Total	11717,252	83			

a. Variável Dependente: Y5_POS

b. Preditores: (Constante), Y5_PRE, GRUPO

Coeficientes[a]

CONTEUDO		Coeficientes não padronizados B	Coeficientes não padronizados Erro Padrão	Coeficientes padronizados Beta	T	p-valor	95,0% Intervalo de Confiança para B Limite inferior	95,0% Intervalo de Confiança para B Limite superior
Funcões	(Constante)	18,510	3,876		4,775	0,000	10,798	26,223
	GRUPO	11,577	1,359	0,443	8,516	0,000	8,872	14,282
	Y5_PRE	0,738	0,056	0,691	13,279	0,000	0,627	0,848
Funções afim	(Constante)	3,751	5,700		0,658	0,512	-7,591	15,093
	GRUPO	10,500	1,541	0,384	6,815	0,000	7,434	13,565
	Y5_PRE	0,823	0,069	0,671	11,895	0,000	0,685	0,960
Geral	(Constante)	12,298	3,736		3,292	0,001	4,864	19,733
	GRUPO	9,374	1,078	0,397	8,697	0,000	7,229	11,518
	Y5_PRE	0,788	0,050	0,719	15,756	0,000	0,688	0,887

a. Variável Dependente: Y5_POS

Bootstrap para Coeficientes

CONTEUDO		B	Bootstrap[a] Viés	Bootstrap[a] Erro Padrão	Bootstrap[a] p-valor	Bootstrap[a] BCa 95% de Intervalo de Confiança Inferior	Bootstrap[a] BCa 95% de Intervalo de Confiança Superior
Funcões	(Constante)	18,510	-0,175	3,741	0,001	11,593	25,050
	GRUPO	11,577	0,026	1,308	0,001	8,890	14,108
	Y5_PRE	0,738	0,002	0,055	0,001	0,616	0,852
Funções afim	(Constante)	3,751	-0,163	5,080	0,475	-5,808	13,789
	GRUPO	10,500	0,023	1,501	0,001	7,661	13,373
	Y5_PRE	0,823	0,001	0,065	0,001	0,688	0,950
Geral	(Constante)	12,298	-0,090	3,347	0,001	5,334	18,668
	GRUPO	9,374	0,003	1,064	0,001	7,300	11,600
	Y5_PRE	0,788	0,001	0,045	0,001	0,706	0,871

a. A menos que indicado de outra maneira, os resultados da bootstrap são baseados em 1000 amostras bootstrap estratificadas

APÊNDICE B

Tabela: Revisão de Literatura

Trabalhos que propõe a modelagem como metodologia de Ensino					
Autor/ Ano	**Objetivos**	**Base Teórica**	**Amostra**	**Metodologia**	**Resultados**
Lorena Luquini de Barros Abreu 2001	Utilizando-se da busca pelo conceito de funções afins, o trabalho aponta os vários mecanismos para se alcançar a prática da modelagem, direcionando para os principais passos de sua realização	Bassanezi, Bean, Burak, Biembengut e Barbosa	Um grupo de quatro alunos da 1ª série do ensino médio	Modelagem	A realização da pesquisa de campo (comércio de pizza) mostrou, através dos resultados e das falas dos alunos, que a modelagem matemática pode contribuir para a contextualização de matemática no cotidiano deles.
Ross Alvez do Nascimento 2007	Identificar as habilidades mobilizadas por estudantes da licenciatura em matemática na aplicação do conceito de função, explorando uma estratégia de modelagem matemática que faz uso da construção de simulações computacionais por via do software Modellus.	Bassanezi, 2002; Biembengut & Hein, 2003; Barbosa, 2003	6 estudantes do curso de licenciatura em Matemática de uma IES do Recife.	Modelagem/análise qualitativa das atividades proposta aos estudantes.	Os Resultados indicam habilidades específicas para modelar, influência de regras de contato didático, contexto utilizado nos problemas trouxeram elementos do cotidiano como é típico em situações de modelagem e que a dificuldade da fase de validação foi minimizada com a presença do software Modellus.
Belissa Schonardie 2011	Criar condições para que os alunos aprendam a fazer modelos matemáticos, aprimorando seus conhecimentos.	Barbosa (2001); Biembergut (2000) e Skovsmose (2000)	Uma turma da 1ª série do Ensino Médio	Estudo de caso	O desempenho dos alunos durante as aulas e os resultados por eles apresentados no final da sequência de atividades mostrou que a proposta desenvolvida é válida e adequada para a faixa etária em questão, bem como que através da modelagem matemática, ocorre uma melhor compreensão da matemática envolvida no trabalho.
Rudolph dos Santos Gomes Pereira;	Apoiar professores interessados em utilizar a modelagem matemática omo	Modelagem de Bassanezi	Professores da licenciatura	Pesquisa qualitativa	No final do projeto, percebeu-se que a modelagem matemática, como estratégia de ensino e aprendizagem de matemática, pode

Guataçara dos Santos Júnior 2013	estratégia de ensino e aprendizagem de ajuste de funções, ou, ainda, em outros conteúdos pertencentes à matriz curricular do referido curso.		em matemática		contribuir para o aprendizado de conceitos matemáticos e elaborou-se um caderno pedagógico que contém a atividade desenvolvida para ser utilizada por outros professores do ensino superior na contextualização de conceitos.
Luiz Gonçalves Filho 2011	Desenvolver a aplicação de algumas atividades da proposta curricular da secretaria de Estado da Educação adequando-as a formação de modelos matemáticos.	Modelagem de Bassanezi	Uma turma da 1ª série do ensino médio	Análise qualitativa das atividades realizadas pelos estudantes.	A realização deste trabalho contribuiu para não só promover uma reflexão acerca das dificuldades inerentes aos alunos do ensino médio nas aulas de Matemática no que diz respeito ao assunto de funções, como também adotar novas posturas em relação ao ensino de matemática, propondo um caminho para minimizar essas dificuldades.
Valdirene Rosa de Souza 2011	Abordar as funções no Ensino Médio por meio de relações estabelecidas entre a história da matemática e o uso de modelagem no ensino da matemática.	Estudo da variação do movimento de Nicole Oresme e a modelagem de Bassanezi			A pesquisa levou a entender que o desenvolvimento da matemática está relacionado aos acontecimentos presentes na sociedade nas diversas áreas do conhecimento.

Trabalhos que propõe a Resolução de Problemas como metodologia de Ensino					
Autor/ Ano	**Objetivos**	**Base Teórica**	**Amostra**	**Metodologia**	**Resultados**
Valdneide Pereira Santos de Almeida 2014	Analisar a resolução de problemas de função afim na modalidade mista de ensino	*Blended learning* modalidade mista de aprendizagem	84 estudantes da 1ª série do ensino médio	O trabalho apresenta a análise qualitativa das estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas matemáticos envolvendo o conceito de função afim na modalidade mista de ensino.	Com a execução da pesquisa, 08 estratégias de aprendizagem foram identificadas e através da análise dessas estratégias, foi possível constatar que a modalidade mista mostrou-se efetiva quando adotada no contexto previamente descrito.
Victor Hugo Duarte de Assis 2015	Fundamentar teoricamente as propriedades da função quadrática para obtenção do seu gráfico; apresentar aspectos da metodologia de Resolução de Problemas e os resultados de sua aplicação na terceira série do ensino médio para o ensino da função quadrática.	Polya, Dante e Onuchic	Uma turma da 3ª série do ensino médio	Aplicação de uma sequência didática	Com o trabalho apresentado, é possível ao professor compreender todas as características da função quadrática. Parte delas pode ser trabalhada na 1ª série do ensino médio e, pela aplicação já desenvolvida na 3ª série, mostrou ser viável o uso da metodologia para a compreensão de tais propriedades.
Viviane Cristina Boschetto 2015	Mostrar como desenvolver os conceitos relacionados à função afim com o uso da metodologia de resolução de problemas.	Onuchic e Polya	Uma turma da 1ª série do ensino médio	Análise qualitativa das atividades realizadas pelos estudantes.	Trabalhar com a metodologia resolução de problemas motivou não apenas o aluno, mas também o professor constatou a aprendizagem e a construção gradativa dos conceitos pelos alunos a cada aula
Matheus Pierry Banhato 2015	Estudar os máximos e mínimos de funções de uma e de duas variáveis reais, bem como apresentar uma proposta para estudo dos pontos extremos de funções quadráticas no ensino médio.	Não Informado	Uma turma da 1ª série do Ensino médio	Utilização de uma sequência didática baseada na resolução de problemas	Ressaltamos que o estudo através destas situações permite ao aluno o desenvolvimento da sua capacidade de raciocínio, gerando resultados positivos no crescimento intelectual discente.

Renata Cristina Geromel Meneghetti; Julyette Priscila Redling 2012	Analisar o potencial didático-pedagógico deste tipo de metodologia no Ensino Médio.	Aprendizagem significativa de Ausubel	Uma classe de treze alunos da terceira série do Ensino Médio	Utilizamos uma abordagem de pesquisa qualitativa (caracterizada como estudo de caso).	Verificamos que tarefas, tais como as que serão apresentadas e discutidas neste artigo, favorecem uma aprendizagem mais significativa aos alunos, permitindo-lhes maior compreensão conceitual, e tornam-se ainda mais potentes quando se considera o contexto sociocultural dos alunos.
Silvia Vrancken, Adriana Engler; Ana Leyendecker, Daniela Müller 2017	Desenhar e implementar uma situação de aprendizagem para dar significado à função de primeiro grau como um modelo de fenômenos de mudança	Cantoral, Montiel e Reyes (2014)	35 estudantes do curso de engenharia agrônoma	Análise qualitativa das atividades dos estudantes	Os alunos foram capazes de reconhecer elementos importantes que caracterizam essa função e de identificar os tipos de situações que se permite modelar. As tarefas promoveram o emprego de estratégias e argumentos importantes para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem variacional

Trabalhos que propõe a Representação Semiótica como metodologia de Ensino					
Autor/ Ano	**Objetivos**	**Base Teórica**	**Amostra**	**Metodologia**	**Resultados**
lizeane Borges Forte	Investigar a contribuição da abordagem do conceito de taxa de variação no estudo de função afim no ensino médio	Representação semióticas de Raymond Duval	Uma turma do 1º ano do ensino médio	Aplicação de uma sequência didática	O estudo do conceito de taxa de variação para a compreensão de função afim como relação entre duas variáveis
Elisabete Ramos Braga; Lorí Viali 2011	Análise das potencialidades da planilha como recurso auxiliar na compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática	Representação semióticas de Raymond Duval	30 estudantes do 9º ano do ensino fundamental	As atividades de coordenação dos registros de representação algébrico, tabular e gráfico das funções tanto afim quanto quadráticas foram analisadas quanto a possibilidade de transferência entre esses registros.	Concluiu-se que a utilização da planilha promoveu a compreensão desses conceitos no que diz respeito a mobilização entre as suas várias representações.
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão; Vera Helena Giusti de Souza; Paulo Masanobo Miashiro 2016	Investigar a contribuição de um ensino apoiado em construções com uma geometria dinâmica e em materiais concretos	Representação semióticas de Raymond Duval	9 estudantes da licenciatura em matemática	Aplicamos uma intervenção, com base no design based research, num trabalho em quatro sessões	Ao final da intervenção, verificamos que esta não foi suficiente para uma aprendizagem significativa desses conceitos; contudo, observamos que todos os participantes conseguiram construir uma tabela e um gráfico de uma função periódica e, para dois deles, esse gráfico é o da função seno
Ortega, Tomás y Pecharromán, Cristina Espanha-2010	Elaborar un diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones estructurado por los estadios semiótico, estructural y autónomo, y donde unas acciones sobre las representaciones de los	Socas (2007) enfoque lógico semiótico (ELOS)		Hemos utilizado la metodología cualitativa de investigación acción para su desarrollo experimental, porque permite comprender y mejorar la propia práctica educativa (Kemmis y McTaggart, 1988), aunque	Finalmente, consideramos que este diseño de enseñanza, fundamentado en el marco teórico ELOS, permite observar una continuidad en el desarrollo cognitivo de los sistemas de representación de los conceptos, concretado en sucesivas acciones de aprendizaje, por lo que, proporciona continuidad al proceso de aprendizaje de los mismos, posibilitando que

	conceptos concretan el aprendizaje asociado a cada estádio			también hemos hecho algunos cálculos estadísticos puntuales.	éste sea más significativo y evitando una memorización mecánica.
Eliana Bevilacqua Salin 2014	Investigar o papel dos registros de representação semiótica na construção do conceito de função, em particular do tipo afim e quadrática.	Não Informado	Uma turma a 1ª série do Ensino Médio	A pesquisa é inspirada nos moldes da engenharia didática de Artique. Análise qualitativa da sequência didática.	A observação de relações entre variáveis a partir da manipulação de pontos em uma construção no geogebra propiciou a compreensão do conceito de função e gráfico, através de constantes processo de conversão de registro.
María E. Díaz Lozano, Egle E. Haye, Fabiana Montenegro, Luis M. Córdoba 2015	Estudar a incidência de representações de conceitos na aprendizagem de matemática	Representação semiótica de Duval	109 estudantes iniciantes na engenharia	Descreve as atividades de conversão propostas e apresenta a análise dos resultados realizada sobre cada uma das variáveis dos sistemas de representação.	Os dados revelam que, no que se refere às funções lineares e quadráticas, uma percentagem considerável de alunos não estabeleceu uma articulação isenta de erros.
Jael Miriam Andrade; Manuel Joaquim \saraiva 2012	Identificar e compreender as dificuldades que os estudantes manifestam na aprendizagem de funções, conhecendo melhor a conexões feitas pelos alunos entre as diversas representações das funções consideradas.	Representação semiótica de Duval	Alunos do 9º ano do ensino fundamental II	Qualitativa interpretativa	Os resultados indicam que a coordenação que os estudantes fazem entre os diversos registros de representação de uma função e de diferentes funções, lhes permite alcançar diferentes perspectivas de uma função.
Paulo César Oliveira Rogério Fernando Pires 2012	Investigar que categorias de registros escritos são mobilizadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental envolvidos com atividades matemáticas relativas ao pensamento funcional, tendo como principal referencial teórico as ideias da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.	Semiótica de Raymond Duval	Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental	Análise qualitativa das atividades dos estudantes.	Os resultados encontrados após a análise da produção de informações revelam que os registros mais utilizados foram os multifuncionais de representação discursiva e os registros monofuncionais de representação discursiva e, ainda que as relações entre a congruência e não-congruência das representações de um objeto matemático, delimitam a compreensão do mesmo.

Diana Maia 2007	Complementar estudos já realizados a respeito do ensino de função quadrática e da utilização de software para este fim.	Representação semiótica	Uma turma do 9º ano do ensino fundamental	Engenharia didática de Artique	Os resultados obtidos levam a concluir que houve um avanço por parte dos alunos, na apreensão do conceito de função quadrática, propiciando pela compreensão e articulação entre as variáveis visuais e unidades simbólicas significativas.
Edilson Paiva de Souza 2010	Diagnosticar as dificuldades de aprendizagem de alunos do ensino médio em relação ao conceito das funções trigonométricas seno e cosseno.	Representação semiótica	Uma turma da 2ª série do ensino médio	Engenharia didática de Artique	Os dados coletados foram analisados e levaram a concluir que a utilização da tecnologia, através de um processo de ensino dinâmico proporcionado pelo software gráfico graphmatic, proporcionou um aumento no conhecimento sobre os conceitos das funções seno e cosseno.
Fábio Correa Scano 2009	Desenvolver uma sequência de ensino para iniciar o estudo com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, que contribuísse para o desenvolvimento da capacidade de expressar algébrica e graficamente uma função.	Uma turma do 9º ano do ensino fundamental	Representação semiótica	Análise qualitativa das atividades dos estudantes	A sequência didática desenvolvida e aplicada conduziu os estudantes a reconhecer que o gráfico de uma função afim é uma reta e a maioria expressa algébrica e graficamente a relação entre duas variáveis de uma função afim, além de relacionar os coeficientes da equação da reta com a representação gráfica de função afim.

Trabalhos que propõe o uso de software como metodologia de ensino					
Autor/ Ano	**Objetivos**	**Base Teórica**	**Amostra**	**Metodologia**	**Resultados**
Gercílio da Rocha Melo 2013	Ampliar a compreensão dos conceitos abordados em sala de aula	Não informa um referencial teórico específico	12 alunos da 1ª série do ensino médio	Pesquisa ação	A intervenção pedagógica realizada pelo pós teste evidenciou que o uso do softwer kmplot favoreceu a visualização dos gráficos, bem como a compreensão de conceitos como domínio, imagem, raízes das funções, crescimento.
Clóvis José Dazzi Maria Madalena Dullius	Investigar e propor uma abordagem alternativa para esse conteúdo, utilizando o *software Graphmatica*	Não informado	150 alunos de 30 ano de Ensino Médio	Análise qualitativa	Mostrou uma possibilidade dinâmica e interativa aos alunos para o estudo de funções polinomiais de grau maior que dois.
Vanessa Jurinic Cassol, Lori Viali, Regis Alexandre Lahm 2012	Refletir acerca do Ensino de Funções, por meio da conversão do registro algébrico para o registro gráfico das funções afim, linear e quadrática, com o auxílio do software Geogebra.	Não informado	Uma turma da 1ª série do ensino médio	As explorações se deram por intermédio de registros escritos pelos alunos que serviram como base para a análise, na perspectiva de investigar a compreensão do papel dos coeficientes dessas funções e as conversões realizadas pelos mesmos.	A pesquisa indicou que houve uma evolução na construção de significados dos coeficientes da representação algébrica associado a sua representação gráfica com o uso do software.
Fábio Rodrigues de Siqueira 2012	Verificar se a proposta de um algoritmo a ser convertido em programa de computador pode contribuir na aprendizagem de um objeto de estudo matemático.	APÓS de Ed Dubinsky	5 estudantes da 1ª serie do Ensino Médio	Design experimental	Os participantes da pesquisa tiveram melhorias em seu aprendizado, pois além de desenvolver um programa de computador para se determinar os zeros da função do 2º grau, passaram a elaborar outras funções.
Hercules Nascimento Silva 2017	Verificar em que medida construções dinâmicas no Geogebra e aplicadas em uma sequência de atividades possibilitam facilitar a	Régine Douady (1984)	Uma turma da 1ª série do ensino médio	Engenharia didática	Verificou-se que as atividades permitiram que os alunos construíssem o conceito de função, em especial, o de função definida por sentenças e intervalos reais.

	aprendizagem de função, em especial, a função real definida por sentença.				
Ronaldo Dias Ferreira 2013	Analisar as contribuições do geogebra, na interpretação e análise de funções afim e quadrática pelos estudantes de um curso de licenciatura em matemática.	Teoria de Registros de Representação Semiótica	Estudantes do curso de licenciatura em Matemáica.	Qualitativa centrada na desing research.	Conclui-se que, possivelmente, a visualização propiciada pelo dinamismo do geogebra chamou muito a atenção dos estudantes e teve uma contribuição significativa para a realização das atividades.
Sérgio Aparecido dos Santos 2009	Desenvolver um ambiente informatizado voltado ao ensino, para favorecer o aprofundamento dos conhecimentos relacionados a função polinomial do 2º grau.	Teoria de Registros de Representação Semiótica	Uma turma da 2ª série do ensino médio	Análise qualitativa	Os resultados obtidos levam a concluir que o ambiente informatizados e as atividades nele contidas favorecem a compreensão algébrico e o aprofundamento dos conhecimentos relacionados a função polinomial do segundo grau.

Trabalhos que propõe outros métodos e sequências didáticas como metodologia de ensino					
Autor/ Ano	**Objetivos**	**Base Teórica**	**Amostra**	**Metodologia**	**Resultados**
Paulo Roberto Castor Maciel Tereza Fachada Levy Cardoso 2013-Brasil	Possibilitar um processo de ensino-aprendizagem significativo do conceito de função por meio da História da matemática	Não apresentou um autor em específico.	Uma turma do Colégio Estadual do Rio de Janeiro, do ensino médio	A metodologia consistiu em pesquisa bibliográfica, criação de roteiro, pesquisa iconográfica, produção e edição de quatro vídeos e aplicação em sala de aula.	A aplicação do vídeo demonstrou que os alunos conseguiram compreender o conceito apresentado no vídeo, no entanto, a partir das atividades do material elaborado, que visavam promover um aprofundamento do conteúdo, não conseguiram atingir sua plenitude.
Julienne Jane Barbosa Dornelas 2007 Brasil	Investigar os efeitos de uma sequência didática nas concepções dos alunos da 1ª série do Ensino Médio em relação ao conceito de função afim.	Teoria das situações didáticas de Guy Brousseau (1982)	Uma turma do primeiro ano do ensino médio	Pesquisa qualitativa	Os resultados obtidos nos levam a concluir que houve uma evolução nas concepções dos alunos, na apreensão do conceito de função afim, propiciado pela compreensão do relacionamentos entre as variáveis dependentes e independentes e pelas devidas conexões entre as diferentes representações de funções.
Luciana Santos Peixoto 2011 Brasil	Analisar aproximações e distanciamentos existentes entre trabalhos publicados em um evento de âmbito nacional e a prática de professores do Ensino Básico da Grande Florianópolis, no que se refere ao ensino de funções utilizando computadores como ferramenta de ensino.	Não apresentou um autor em específico.	Professores	Foram realizadas entrevistas com professores da Grande Florianópolis que ministram aulas em turmas nas quais o conteúdo de funções é desenvolvido.	Trouxe uma reflexão a respeito da necessidade de uma aproximação entre o conhecimento acadêmico, através dos trabalhos publicados e a prática dos professores.
Walfredo josé de Souza-2013	Mostrar a importância das demonstrações e ao mesmo tempo despertar o interesse do aluno mostrando como esta função é importante para	Não informado	Não informado	Não informado	O trabalho oferece aos professores uma proposta de ensino da Função afim de uma forma que acreditamos ser o mais abrangente e didaticamente envolvente.

	solucionar problemas do cotidiano.				
Vera Clotilde Carneiro; Patrícia da C. Fantinel; Rute Henrique da Silva 2003	Identificar e descrever diferentes significados para a noção de "função", produzidos e circulantes no interior do Curso de Licenciatura.	Nenhuma	Alunos do curso de licenciatura da UFRGS (não informou a quantidade de alunos)	Este texto relata um estudo de caso desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRGS	Percebemos que estes seriam significados que os professores do Curso gostariam que fossem produzidos em suas disciplinas, embora fique claro que os estudantes estão produzindo significados próprios, alguns não desejáveis, como o Campo Semântico das aplicações, que descaracteriza o conceito acadêmico usual de função.
Lísie Pippi Reis Strapason; Eleni Bisognin 2013	Verificar se a utilização dessa estratégia de ensino facilita a aprendizagem dos alunos, referente a esse tópico.	Flemming e Collaço de Mello (2003)	Uma turma da 1ª série do ensino médio	Para atender ao objetivo proposto, foi desenvolvida uma pesquisa de abordagem qualitativa, em sala de aula. A coleta de dados foi realizada pela professora-pesquisadora, através das observações das estratégias dos alunos durante os jogos, registrada em diário de campo.	Concluiu-se que a utilização dos jogos, como estratégia de ensino e aprendizagem, além de motivar os alunos e despertar seu interesse pelas atividades desenvolvidas, facilitou a compreensão do conteúdo de funções.
Anderson Yassuhiro Afuso 2014	Apresentar três métodos numéricos (métodos da bissecção, de Newton-Raphson e das secantes) para encontrar os zeros de função.	Não apresentou um autor em específico.	Uma turma da 1ª série do ensino médio	Não apresentou	Não apresentou
Márcio Urel Rodrigues 2007	Investigar e ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no processo de ensinar e aprender Funções	Ponte (2003) e Abrantes et al. (1999)	Uma turma do 9º ano do ensino fundamental	Qualificamos nossa pesquisa como qualitativa interpretativa que utiliza as narrativas como objeto de estudo, a qual propõe que as narrativas são histórias de aprendizagens dos alunos por meio dos seus processos vividos e de suas experiências.	Na análise realizada, evidenciamos indícios de uma cultura diferenciada, a qual valoriza aspectos argumentativos e comunicativos em sala de aula. Esses aspectos se apresentam como potencialidades didático-pedagógicas das narrativas para o processo de ensinar e aprender Funções.
Davidson Paulo Azevedo Oliveira; Marger da Conceição; Ventura Viana; Milton Rosa	Fornecer aos professores e, mais especificamente, aos professores do ensino médio, um material teórico e suficientemente prático para	Não Informado	Uma turma da 1ª série do ensino médio	A metodologia utilizada na condução da pesquisa foi o estudo misto e a análise de conteúdos, que forneceu o apoio necessário para a elaboração desse produto.	Os resultados obtidos com a condução da dissertação sobre a utilização da perspectiva sociocultural da História da Matemática, em sala de aula, mostram a importância do estágio retórico da álgebra para o entendimento do simbolismo acadêmico e

2013	que possam elaborar atividades curriculares matemáticas práticas para o ensino de funções.				desenvolvimento da linguagem algébrica simbólica.
Renata Rossini 2007	Apresentar a análise da produção de professores da Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo, participantes de um projeto de formação continuada.	Teoria antropológica do didático,	Uma turma do 9º ano do ensino fundamental II	Os procedimentos metodológicos foram os da pesquisa-ação, que permitiu uma interação entre pesquisador e professores, debates sobre conteúdos matemáticos, juntamente com reflexões de cunho pedagógico.	A análise mostrou um progresso desde as primeiras cópias de materiais instrucionais, um enriquecimento do discurso do professor, o enfrentamento de dúvidas, uma preocupação com a redação de atividades. Alguns construtos foram retomados mais de uma vez, fortalecendo a organização matemática e a correspondente organização didática
André Ricardo Magalhães 2009	Analisar se o trabalho cognitivo gerado pela utilização de mapas conceituais alavanca o desenvolvimento de estratégias metacognitivas dos estudantes.	Teoria da Aprendizagem significativa de Novak	Estudantes do curso de ciências da computação	Engenharia didática de Artique	Os resultados alcançados indicam que a metacognição é utilizada nos momentos de criação de um mapa conceitual, e que, as características reflexivas e regulatórias que as estratégias metacognitivas proporcionam ao estudante podem influenciar positivamente no processo de aprendizagem.
Cristiana Monique Feltes, Cassiano Scott Puhl 2016	Relacionar os novos conceitos, gráfico da função quadrática, com o conhecimento prévio do estudante	Aprendizagem significativa de Ausubel	Uma turma da 1ª série do Ensino Médio	Análise qualitativa das atividades	Os resultados foram interessantes, pois foi possível avaliar se haviam compreendido os conceitos abordados, a localização de coordenadas no gráfico, além de explorar a criatividade e arte de cada um, estabelecendo uma relação entre o conhecimento abstrato e o mundo real.
Lissette Rodríguez Rivero, Yudelkys Ponce Valdés, Andel Pérez González 2016	Aplicar uma proposta de exercícios interdisciplinares que possibilitem a compreensão matemática das funções, passando por um processo de transferência entre representações e com um laço estreito com a vida prática.	Não Informado	Estudiantes que cursan el segundo año de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática-Física	Para a realização destes, se utilizaram métodos de investigação como: o indutivo - dedutivo, o analítico - sintético e a observação pedagógica que favoreceram a fundamentação e conformação da proposta; como também a elaboração dos exercícios	Verificou um maior desempenho por parte dos estudantes na manipulação e comunicação de resultados relacionados com o conceito de função
José Divino Neves	Analisar o processo ensino-aprendizagem do conceito de função nos anos finais do	Teoria Histórico Cultural	Alunos do 9º ano do ensino fundamental	Levantamento bibliográfico e documental; diagnóstico da realidade e elaboração do	Há indícios de que os alunos se apropriaram dos elementos que constituem a essência do conceito de função; na execução do

Marilene Ribeiro Resende 2016	Ensino Fundamental a partir de uma sequência didática elaborada, desenvolvida e analisada na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural			Experimento; desenvolvimento das atividades e análise dos dados.	Experimento didático, o trabalho coletivo favoreceu a apropriação de significados e de sentidos para função.
Luciane Santos Rosenbaum 2010	Verificar como compatibilizar perspectiva construtivista de aprendizagem com o planejamento do ensino de funções trigonométricas.	Trajetória hipotética de aprendizagem THA, de Simon	70 alunos da 2ª série do Ensino Médio	Análise qualitativa das atividades dos estudantes	Verificou-se que embora as THAs sejam potencialmente ricas, é complexa a tarefa de elaboração de atividades para que se efetive uma aprendizagem de funções trigonométricas. Porém, a THA elaborada não é suficiente para que a aprendizagem ocorra, pois a atuação do professor tem papel decisivo na mediação da construção do conhecimento de seus alunos.
Luis Manuel Peliz Marques Bica 2009	Investigar os aspectos visuais do tema função de forma geral, e da função afim em particular, em livros didáticos de Matemática da 1ª série do Ensino médio Brasileiro.	Não informado	Não informado	Análise qualitativa em três livros didáticos da 1ª série do Ensino Médio aprovados em 2005 pelo programa nacional de livros para o Ensino Médio do Ministério da Educação.	Os resultados mostraram que apenas dois livros, um mais que o outro, promoviam a apreensão global e apresentavam diversidade de registros. Estes livros mostraram também coerência entre o texto teórico e os exercícios, muitos deles contextualizados. Quanto aos exercícios a pesquisa mostrou que estes livros também apresentaram alguns exercícios com fenômenos de não congruência.
Aparecida Nunes Mesquita 2009	Investigar como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento de ensino, no caso particular do ensino e da aprendizagem de funções polinomiais do 2º grau.	Não informado	62 estudantes da 1ª série do ensino médio	Pesquisa qualitativa	Os resultados obtidos nos levaram a concluir que compatibilizamos perspectivas construtivistas de ensino aprendizagem com o planejamento ao propormos tarefas envolvendo resolução de problemas, uso de tecnologias, abordagens interdisciplinar, aplicações em situações do cotidiano dos estudantes e em outras áreas do conhecimento.
Patrick Oliveira de Lima 2009	Contribuir para a reflexão sobre um momento importante do processo de implementação curricular, ou seja, aquele que se desenvolve em sala de aula, analisando como pode se dar	Trajetórias Hipotéticas de aprendizagem de Simon	80 estudantes do ensino medio	Qualitativa	Verificamos que, apesar de considerar que atividades envolvendo resolução de problemas, contextualização interdisciplinar, levantamento de hipóteses, investigação, aplicação de conceitos matemáticos no cotidiano e uso de software, possam oferecer a aprendizagem dos alunos ainda existem

	seu planejamento e qual a participação do professor neste processo.				grandes dificuldades entre os professores em trabalhar dessa maneira.

APÊNDICE C

Provas de Lápis e Papel

Avaliação Diagnóstica-Função

Aluno(a):____________________________

____

Turma:___Data:______/_____/____

1-Márcia ligou seu computador à rede internacional de computadores, internet. Para fazer uso dessa rede, ela paga uma mensalidade fixa de R$ 30,00 mais 15 centavos por cada minuto de uso. Quanto gastará Márcia se, durante o mês, utilizar a internet por 10h? O valor a ser pago por Márcia no final do mês depende de quê?

2- Camila precisa ir ao CME para o aulão de Matemática, para não chegar atrasada decidiu ir de taxi. A corrida de taxi custa R$ 4,80 a bandeirada, mais R$ 0,40 por quilômetro rodado. A distância percorrida da casa de Camila até o CME foi de 15km, quanto ela vai pagar pela corrida? Este problema representa uma função? Justifique sua resposta.

3- Em Física, chamamos de movimento uniforme aquele em que a velocidade de um móvel é constante. Consequentemente, o espaço percorrido em intervalos de tempos iguais é sempre o mesmo. A função horária desse movimento é dada pela lei $s(t) = s_0 + v.t$, na qual **s** é a posição (em metros) do móvel no instante t (em segundos), s_0, a posição inicial, quando t = 0, e **v**, a velocidade constante (em m/s).

Considerando o texto acima e que a equação horária de certo móvel em movimento uniforme seja dada por $s(t) = 15 + 5t$, responda:

a) Qual é a variável dependente e independente?

b) Após quantos segundos o móvel estará a 48 m da posição inicial?

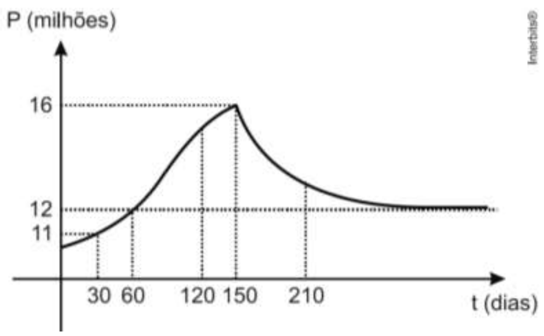
c) Após 2,5 minutos, em que posição se encontrará o móvel?

Pós-Teste-Função

Aluno(a):____________________________
____

Turma:___Data:______/_____/____

1- (UFPB-2012) O gráfico a seguir representa a evolução da população P de uma espécie de peixes, em milhares de indivíduos, em um lago, após t dias do início das observações. No 150º dia, devido a um acidente com uma embarcação, houve um derramamento de óleo no lago, diminuindo parte significativa dos alimentos e do oxigênio e ocasionando uma mortandade que só foi controlada dias após o acidente.



Com base no gráfico e nas informações apresentadas, julgue os itens a seguir, justificando sua resposta.

a) A população P de peixes é crescente até o instante do derramamento de óleo no lago;

b) A população P de peixes está representada por uma função injetiva no intervalo [150, 210]?

c) A população P de peixes atinge um valor máximo em t =150?

d) A população P de peixes, no intervalo [120,210], atinge um valor mínimo em t =120?

e) A população de peixes tende a desaparecer, após o derramamento de óleo no lago?

f) Expresse sua compreensão do problema analisando o enunciado e o gráfico.

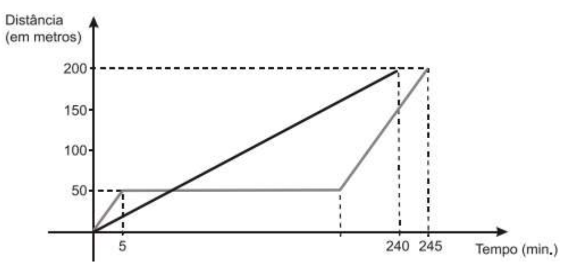
2- Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, f (t) = a · 2^{-bt}, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes. Se a população inicial (t = 0) e 1024 e após 10 anos seja a metade da inicial, determine:

a) os valores de a e b.

b) o tempo mínimo para que a população se reduza a 1/8 da população inicial.

c) se essa função e injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

3- A fábula A lebre e a tartaruga, do escritor grego Esopo, foi recontada utilizando-se o gráfico abaixo para descrever os deslocamentos dos animais.



Suponha que na fábula A lebre e a tartaruga apostam uma corrida em uma pista de 200 metros de comprimento. As duas partem do mesmo local no mesmo instante. A tartaruga anda sempre com velocidade constante. A lebre corre por 5 minutos, para, deita e dorme por certo tempo.

Quando desperta, volta a correr com a mesma velocidade constante de antes, mas, quando completa o percurso, percebe que chegou 5 minutos depois da tartaruga. Considerando essas informações,

a) Determine a velocidade média da tartaruga durante esse percurso, em metros por hora.
b) Determine após quanto tempo da largada a tartaruga alcançou a lebre.
c) Determine por quanto tempo a lebre ficou dormindo.
d) Escreva a função que determina o tempo percorrido em função da velocidade da lebre e o da tartaruga.

Avaliação Diagnóstica-Função Afim

Aluno(a):______________________________
____

Turma:___Data:______/_____/____

1- Uma empresa de telefonia móvel oferece um plano no qual o cliente paga um valor fixo de RS 50,00 por um pacote de 75 minutos mensais, mais R$ 0,75 para cada minuto adicional. Considerando a situação descrita, determine o que se pede:

a) O valor que um usuário vai pagar, sabendo que ele consumiu 120 minutos num mês.
b) Se o valor da conta de um cliente desse plano for R$ 106,25, qual o tempo, em minutos, consumido por ele?
c) Escreva a lei de formação que expressa o preço da conta telefônica em função do tempo, em minutos, que excede o pacote.

2- Um representante comercial recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 1.500 e uma variável, que corresponde a uma comissão de 6% sobre o total das vendas efetuadas durante o mês.

a) Qual o salário mensal desse representante em função de total de vendas?
b) Quanto receberá no mês que vender R$ 5.000?
c) Quanto deverá vender por mês para ter um salário de R$ 3.000?
d) Quanto receberá caso não consiga vender nada?
e) Qual a fórmula matemática que possibilita calcular o salário mensal desse representante?

3- Em um parque de diversões, cada bilhete dá direito a utilizar apenas um brinquedo, uma única vez. São duas opções de pagamento;

Opção 1: R$ 5,00 por bilhete

Opção 2: valor fixo de R$ 40,00 por dia, acrescido de R$ 2,00 por bilhete.

a) Escreva as funções para as duas opções de pagamento.
b) Se uma pessoa tem R$ 50,00 para gastar no parque, qual das opções lhe permite comprar a maior quantidade de bilhetes?
c) Em que condições a opção 2 é a mais vantajosa?

Pós-Teste Função Afim

Aluno(a):____

Turma:___Data:______/_____/____

1- Para cercar um terreno com arame, Elen obteve dois orçamentos:

1º Taxa de entrega de R$ 140,00 e R$ 12,00 o metro de arame.

2.º Taxa de entrega de R$ 20,00 e R$ 14,00 o metro de arame.

a) Represente o custo de cada opção para **x** metros de arame.

b) Qual das duas opções é mais vantajosa para cercar com três voltas de arame um terreno de 140 metros de perímetro?

c) Para qual medida de arame os dois orçamentos têm o mesmo valor? Que significado tem essa medida se desenharmos os gráficos das duas funções em um mesmo plano cartesiano?

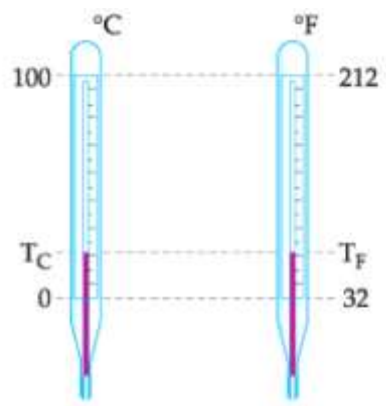
2- O comprimento de um fio metálico varia em função da sua temperatura e, dento de certos limites, essa é uma função afim. No caso de um fio de cobre que tem 25 metros de comprimento a 0° C, o comprimento a uma temperatura t, de 0° C a 100° C, é dado pela função L(t) = 0,0017 + 25.

a) Qual é a taxa de variação dessa função? Escreva uma frase explicando o que significa essa taxa de variação.

b) Calcule o comprimento desse fio quando aquecido a 40° C.

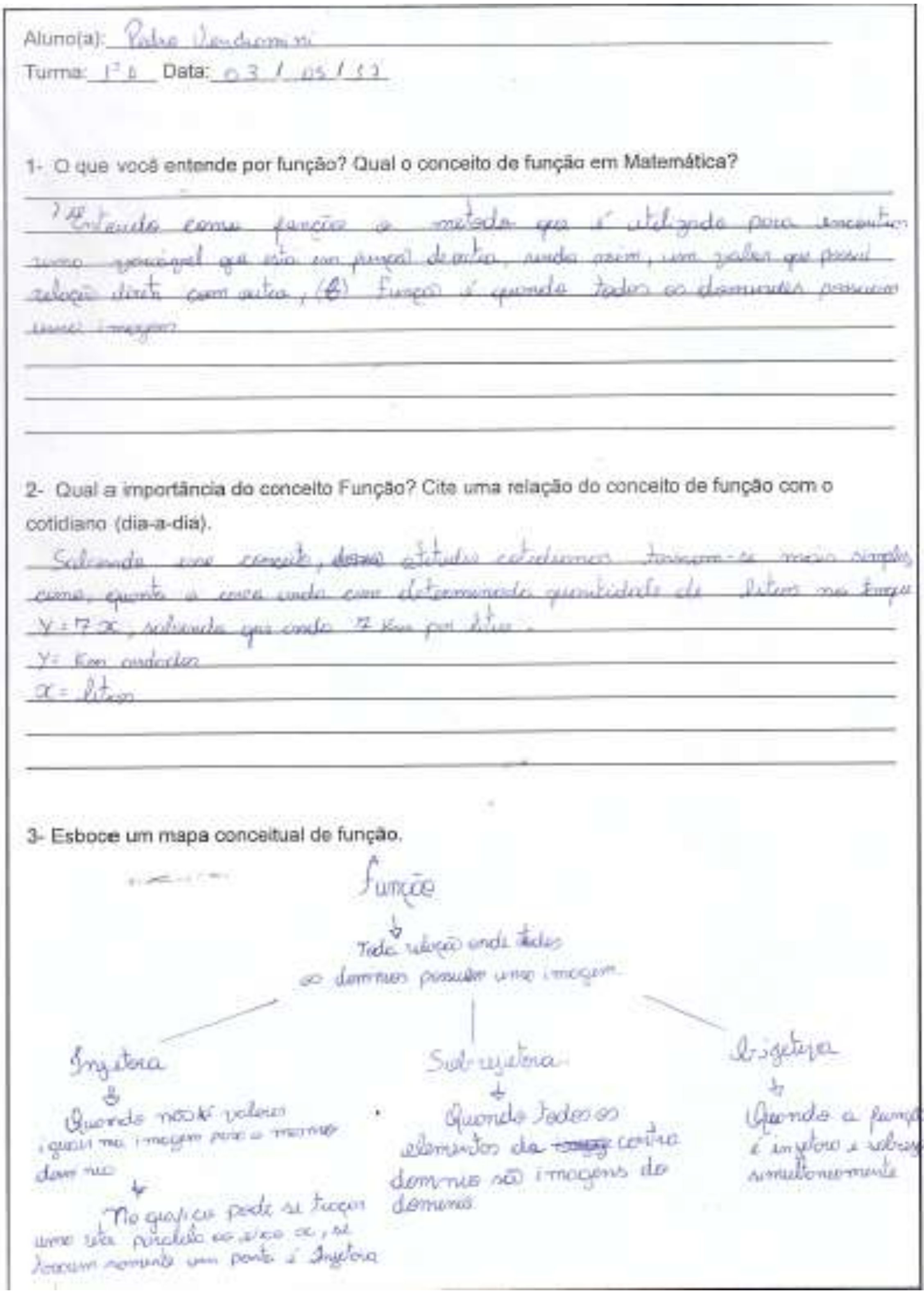
c) Para qual temperatura o aumento no comprimento do fio será de 17 cm?

3- O grau Fahrenheit (símbolo: ºF) é uma escala de temperatura proposta por Daniel Gabriel Fahrenheit em 1724. Nesta escala, o ponto de fusão da água (0ºC) é de 32ºF e o ponto de ebulição da água (100ºC) é de 212ºF. Sabendo que a temperatura na escala Fahrenheit é dada por uma função afim da escala Celsius, determine em qual temperatura na escala Celsius ambas assinalam o mesmo valor numérico.



ANEXO

Mapa Conceitual elaborado pelos estudantes



Aluno(a): Pedro Vendramini

Turma: 1º B Data: 03 / 05 / 11

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Entendo como função o método que é utilizado para encontrar uma variável que está em função de outra, sendo assim, um valor que possui relação direta com outro, (B) Função é quando todos os domínios possuem uma imagem.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Sabendo esse conceito, ~~[illegible]~~ atitudes cotidianas tornam-se mais simples como, quanto o carro anda com determinada quantidade de litros na função $y = 7x$, sabendo que anda 7 km por litro.

y = km andados

x = litros

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividade do Estudante da turma A

Aluno(a): Gabriela Alves Sotero

Turma: 1° A Data: 03 / 05 / 17

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Eu entendo função quando se tem uma variável (numero que pode mudar), sendo multiplicado por uma constante.

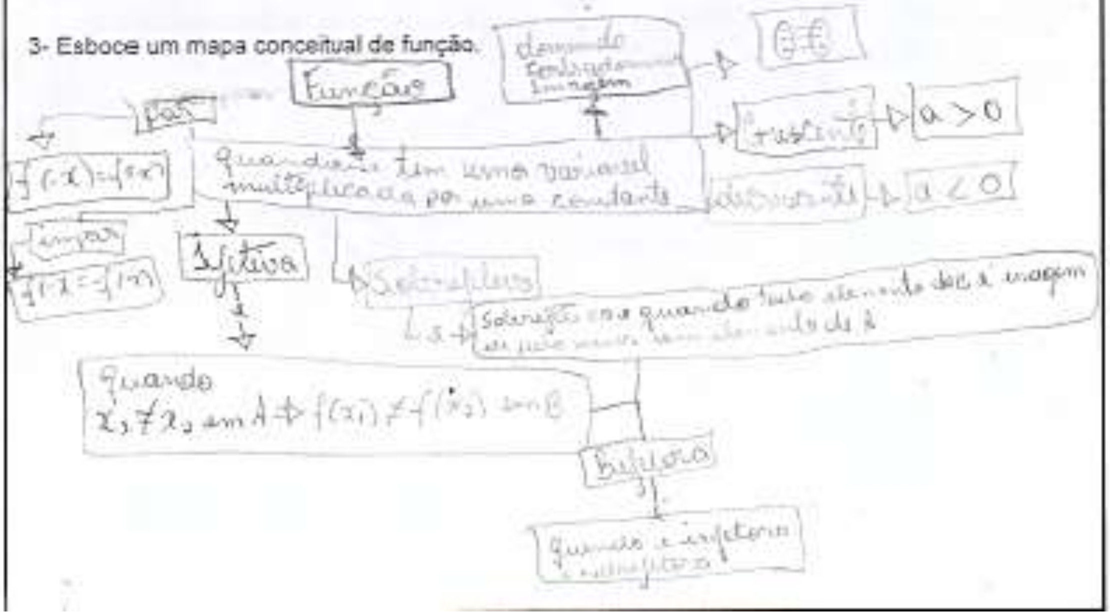
O livro da a seguinte função: "Dados os conjuntos X e Y, uma função $f: X \to Y$ (lendo: uma função de X em Y) é uma regra que determina como associar a cada elemento $x \in X$ um único $y = f(x) \in Y$.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

É importante em muitas áreas de estudo.

No dia a dia usamos para vendas quando se é colocado por exemplo um preço variável para uma quantidade x constante de tudo.

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividade do Estudante da turma A

Aluno(a): Ariane Souza

Turma: 1º A Data: 03 / 05 / 2017

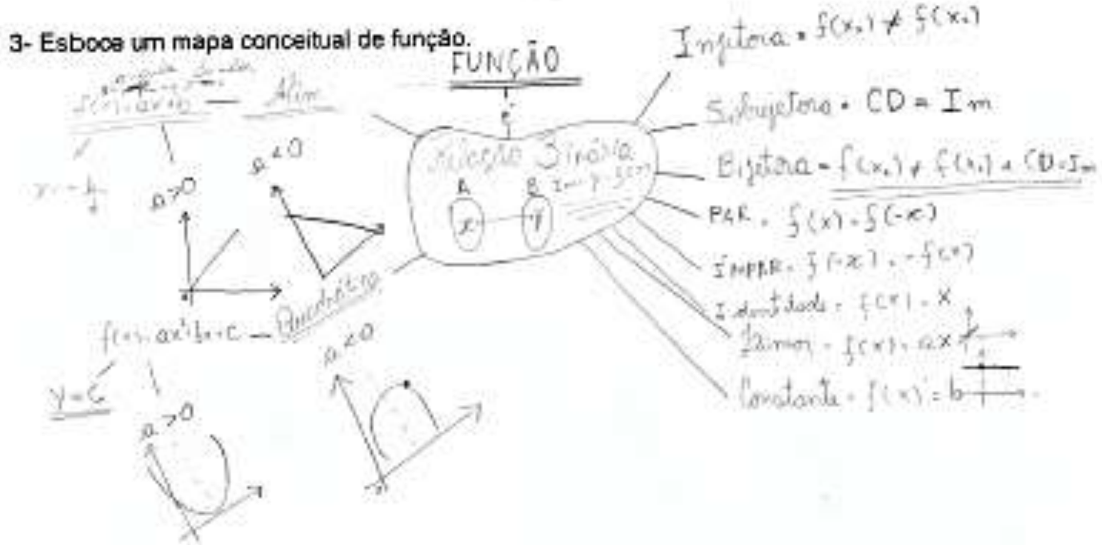
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

É uma relação binária de coexistência, onde certo elemento do conjunto A denominado x, possui apenas um correspondente no contra-domínio B, seria assim a variável dependente e o x a variável dominante. Logo chama-se essa "correspondência" em "y" de imagem.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Tem-se uma visão ampla sobre determinadas situações no cotidiano. Assim administrar tempo e finanças é um exercício que se tornará automático, facilitando sua vida.

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividade do Estudante da turma A

Aluno(a): Pedro Vendramini

Turma: 1º B Data: 03 / 05 / 11

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Entendo como função o método que é utilizado para encontrar uma incógnita que está em função de outra, sendo assim, uma relação que possui relação direta com outra, (B) Função é quando todos os domínios possuem uma imagem

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Sabendo esse conceito, ~~[illegible]~~ estudos cotidianos tornam-se mais simples, como: quanto o carro anda com determinada quantidade de litros no tanque $y = 7x$, sabendo que anda 7 Km por litro.
y = Km andados
x = litros

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Função

Toda relação onde todos os domínios possuem uma imagem

Injetora

Quando não há valores iguais na imagem para o mesmo domínio

No gráfico pode-se traçar uma reta paralela ao eixo x, se tocar somente um ponto é Injetora

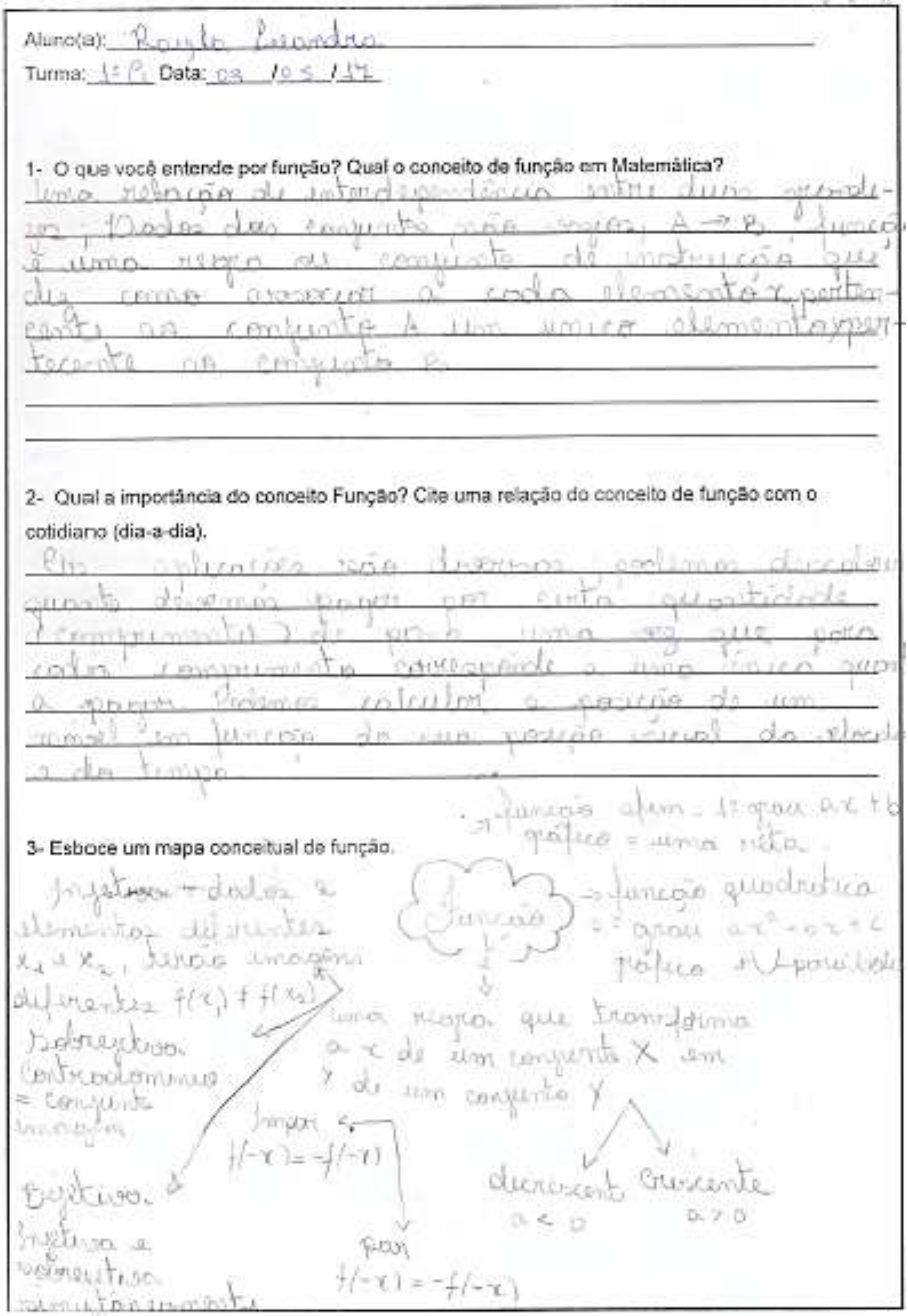
Sobrejetora

Quando todos os elementos do ~~[illegible]~~ contradomínio são imagens do domínio

Bijetora

Quando a função é injetora e sobrejetora simultaneamente

Atividade do Estudante da turma A



Atividade do Estudante da turma A

Aluno(a): Agnnes

Turma: 1ª série A Data: 03 / 05 / 17

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

É uma relação de dependência entre dois conjuntos. Função é uma relação entre y de um con-junto A e y de um conjunto B.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Importante na compreensão de determinadas situações que envolvem função.
O preço da conta de luz está em função de seu consumo

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividade do Estudante da turma A

Turma: 1ª A Data: 03/05/17

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Função é quando uma variável y se diz função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x, correspon-de, por alguma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, x denomina-se variável independente e y, variável dependente

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Função é aquilo que se dá em função de outra coisa. Digamos: O mecânico para ganhar dinheiro precisa consertar carros, ou seja, o mecânico está em função dos consertos para receber.

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividade do Estudante da turma A

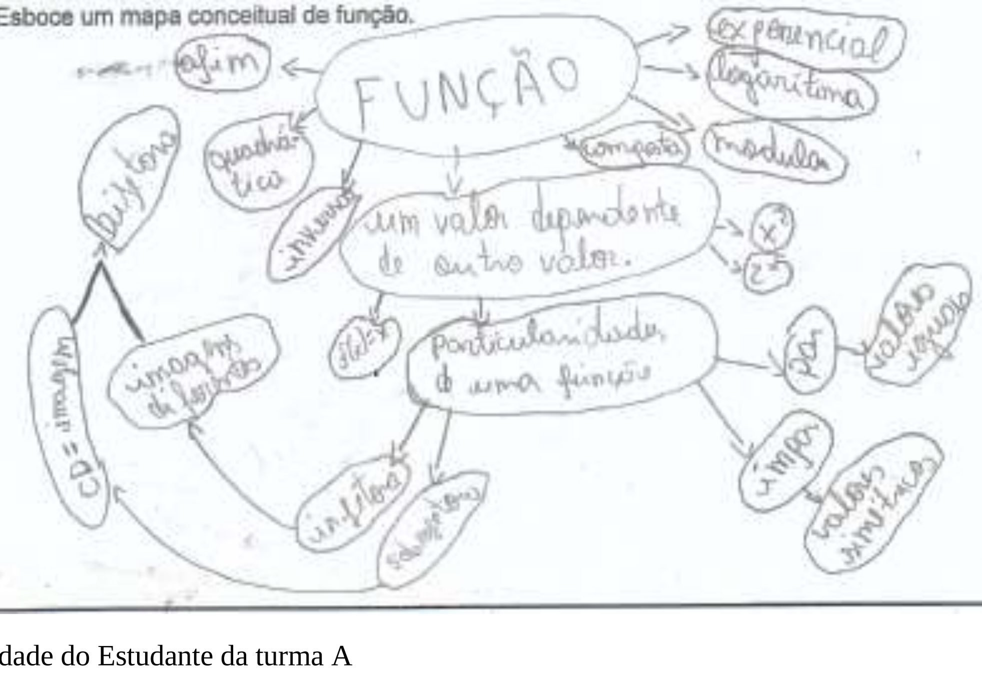
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Um valor dependente de outro

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Entendendo as dependências que uma coisa tem com outra. Podemos encontrar um conceito de função no dia a dia olhando para os letreiros de máquina: a quantidade de tempo de transporte está em função do dinheiro pago

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividade do Estudante da turma A

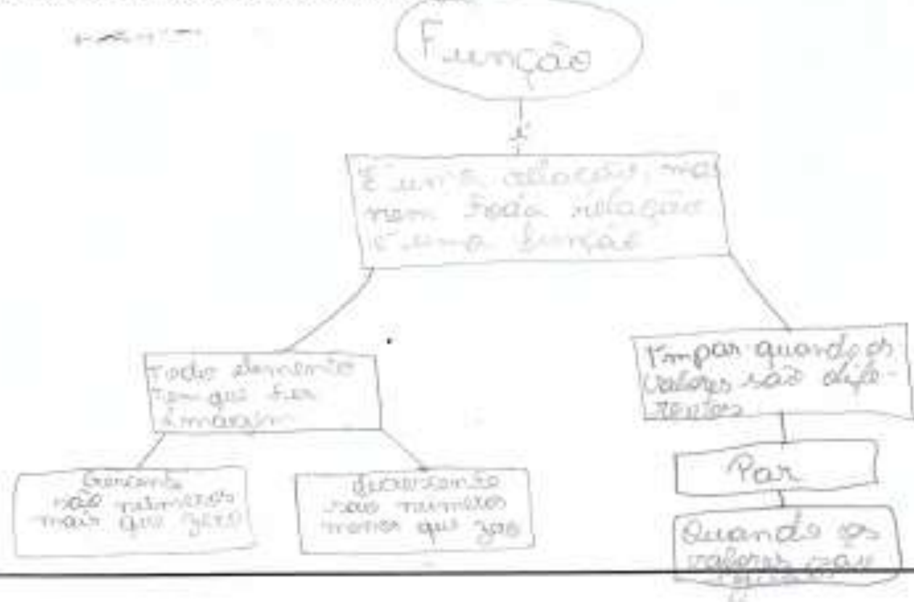
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Função né tudo aquilo que se da em função de outra coisa, exemplo: o preço de uma madeira é em função do tamanho, da largura.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

A gente usa função para tudo então é muito importante saber pelo menos o básico. Quando vamos no mercado e tem dois tipo de leite da mesma marca mas o preço e o tamanho eram diferente pois em função da quantidade o preço aumenta.

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividade do Estudante da turma A

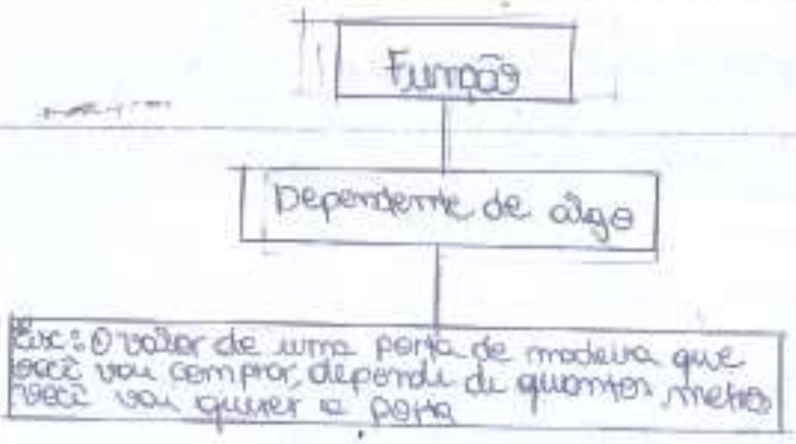
3- Toda relação é uma função? Porque ?

Não relação é uma coisa e função é outra.
relação: É algo relacionado a uma coisa.
função: É dependente de algo.

4- Como você avalia o desenvolvimento das atividades de função durante o bimestre? O que você considerou de positivo e negativo durante as aulas, suas sugestões. Suas atitudes em aula (atenção, fazer questionamentos, interesse próprio e concentração) colaboraram para sua aprendizagem? Você achaque deveria mudar em alguns aspectos para facilitar sua aprendizagem?

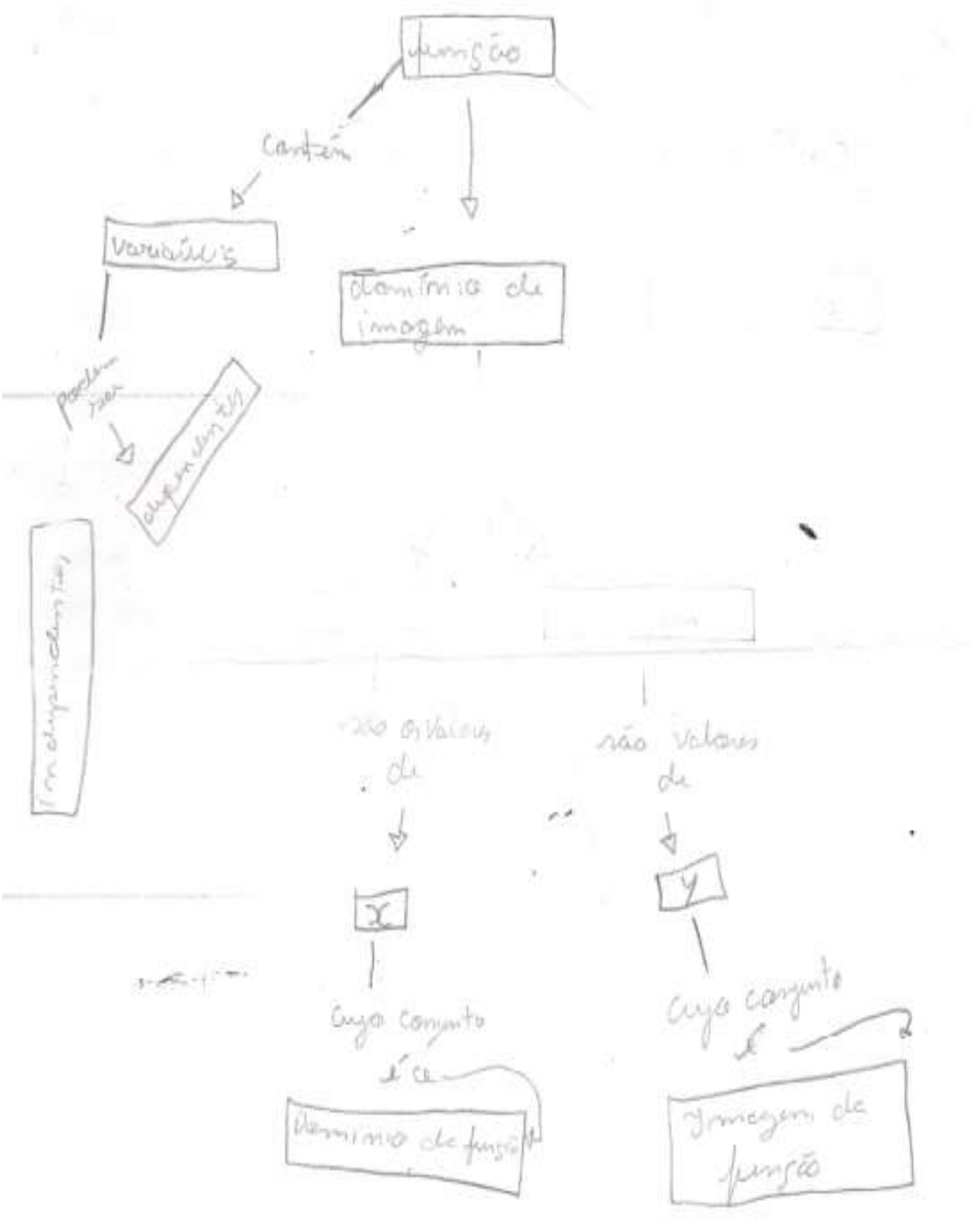
Bem elaborados a professora procurou de diversas formas fazer com que a gente entende-se o que é função. Sim, concentração e principalmente o interesse pra aprender, não acho que deveria mudar nada e não achei pontos negativos nesse bimestre.

5- Esboce um mapa conceitual sobre o que você estudou sobre função.



Atividade do Estudante da turma A

1- Esboce um mapa conceitual sobre função.



Atividade do Estudante da turma A

ATIVIDADES DOS ESTUDANTES DA TURMA B

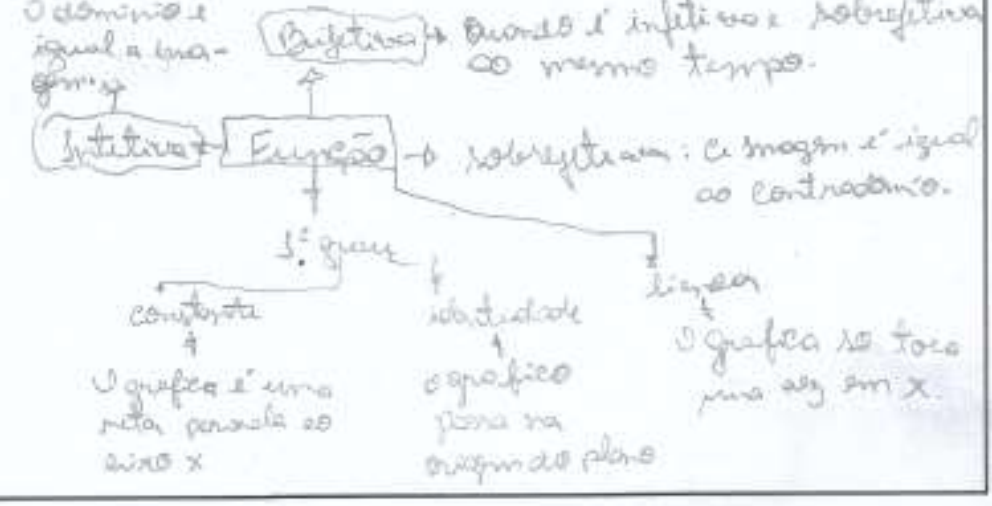
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Um termo dependente de outro
Dado dois conjuntos Domínio e Imagem um único elemento do domínio corresponde a um elemento do contradomínio

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

É importante sabermos até para não sermos enganados um exemplo é a gasolina: preço varia de acordo com a quantidade de litros

3- Esboce um mapa conceitual de função.

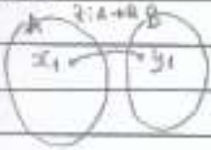


1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

• Função é algo que depende de outra coisa.

• A função matemática é quando um problema precisa de uma coisa para obter um resultado.

Exemplo:



→ O valor de y_1 dependerá do valor que estará no conjunto A e que for aplicado à fórmula da função.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

É importante pois usamos aplicado em diversas situações do cotidiano, como por exemplo, ao lavarmos a roupa. A quantidade de sabão gasto, dependerá da quantidade de roupas sujas.

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Função

Bijetiva → quando ela é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo

Injetiva → Domínio, ... igual a imagem

Sobrejetiva → Imagem é igual ao contra domínio

Ímpar → onde $f(x)$ é igual a $-f(x)$.

Par → função onde $f(x)$ é igual a $f(-x)$.

É a relação de dependência entre dois fatores, que é regido por uma lei de função

1° grau → Crescente $a > 0$; Decrescente $a < 0$.

- constante → o gráfico é uma reta paralela ao eixo x.
- Identidade → definida por $f(x) = x$, e o gráfico sempre passa pela origem.
- Linear → definida por $f(x) = ax + b$ e o gráfico toca apenas em um ponto no eixo x.

2° grau → $ax^2 + bx + c$

- Positiva → quando a x^2 for positivo
- Negativa → quando ax^2 for negativo.

Atividades dos estudantes da turma B

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

É quando existe uma relação de dependência entre uma coisa e outra.

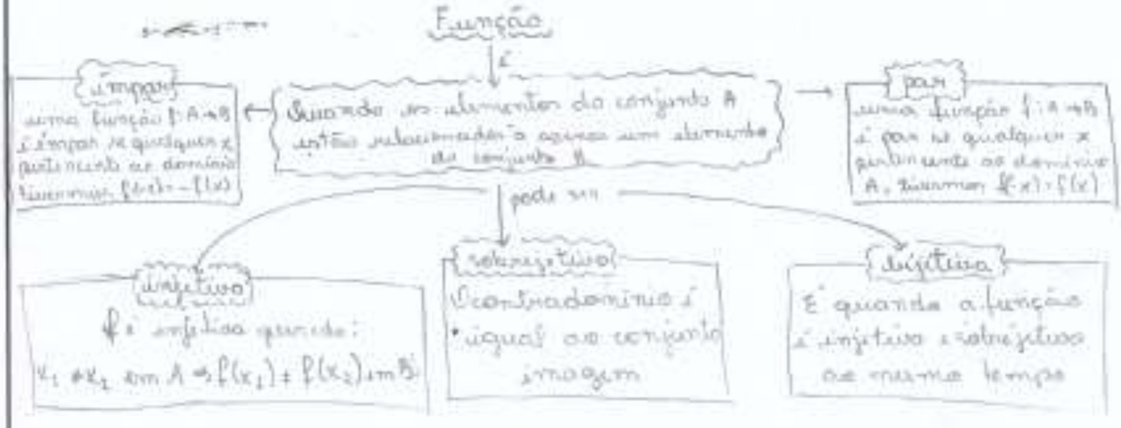
Os elementos do domínio (x) estão relacionados a apenas um elemento do contradomínio (y)

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

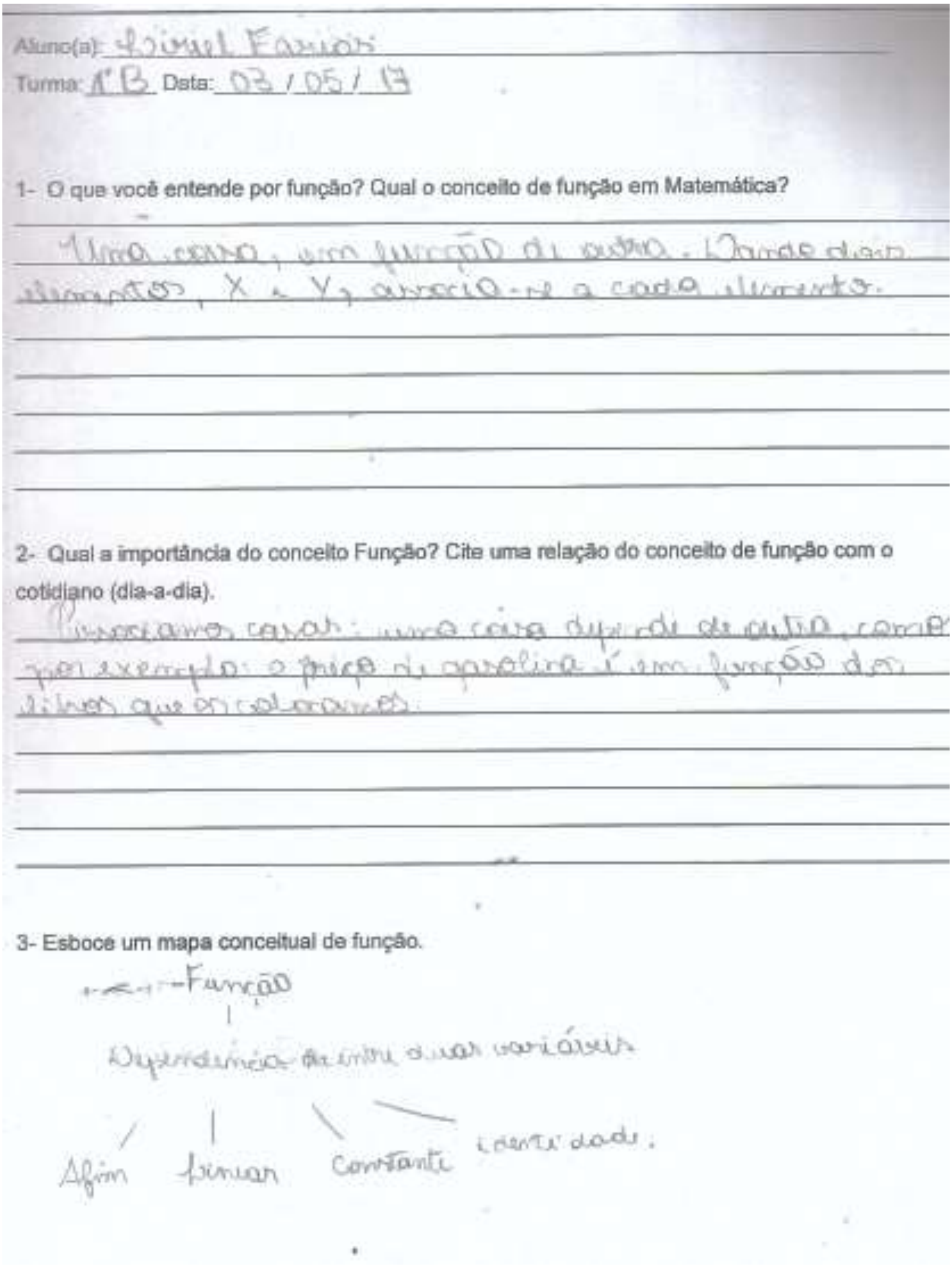
É importante pois ajuda na resolução de problemas no nosso dia a dia.

O preço a pagar quando pegamos um táxi depende da distância percorrida.

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades dos estudantes da turma B



Aluno(a): [illegible] Farias
Turma: 1ª B Data: 03 / 05 / 17

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Uma coisa, em função de outra. Dados dois elementos, X e Y, associa-se a cada elemento.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Precisamos casar: uma coisa depende de outra, como por exemplo: o preço da gasolina é em função dos litros que colocamos.

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades dos estudantes da turma B

Aluno(a): Maria Clara Rodrigues de Melo Gomes
Turma: "B" Data: 03 / 05 /2017

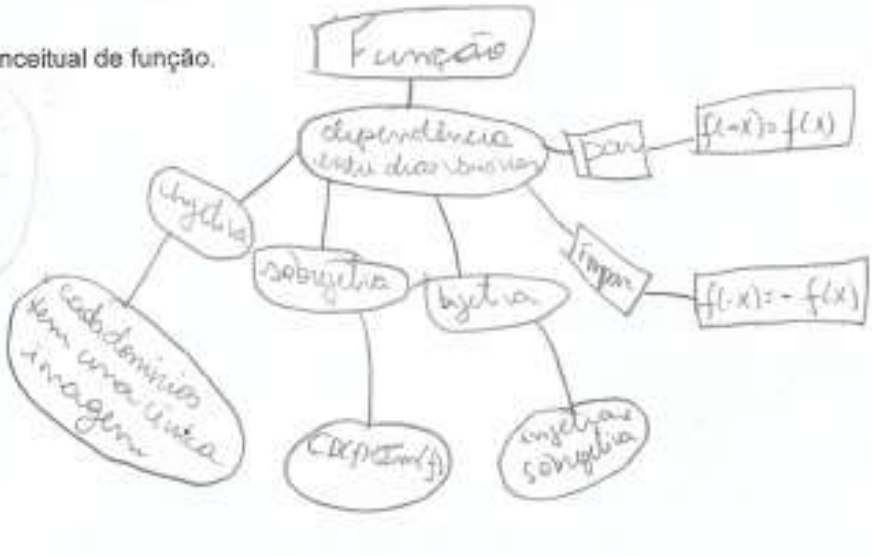
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Dependência entre duas variáveis

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Para resolver certos problemas do dia-dia

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades dos estudantes da turma B

Aluno(a): Camilla Salustiano Peixoto

Turma: 8 Data: 03 / 05 / 17

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

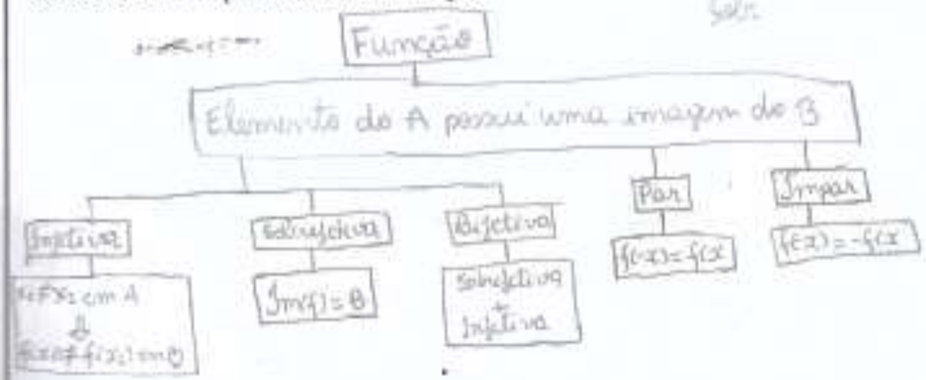
Quando um elemento do domínio possui uma única imagem do contra domínio

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Função está presente em várias ações do cotidiano, como por exemplo, para saber o número de questões que você acertou no teste ou quantos pontos foram adquiridos ao acertar x questões

Bij. Par
Inj. Ímpar
Sob.

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades dos estudantes da turma B

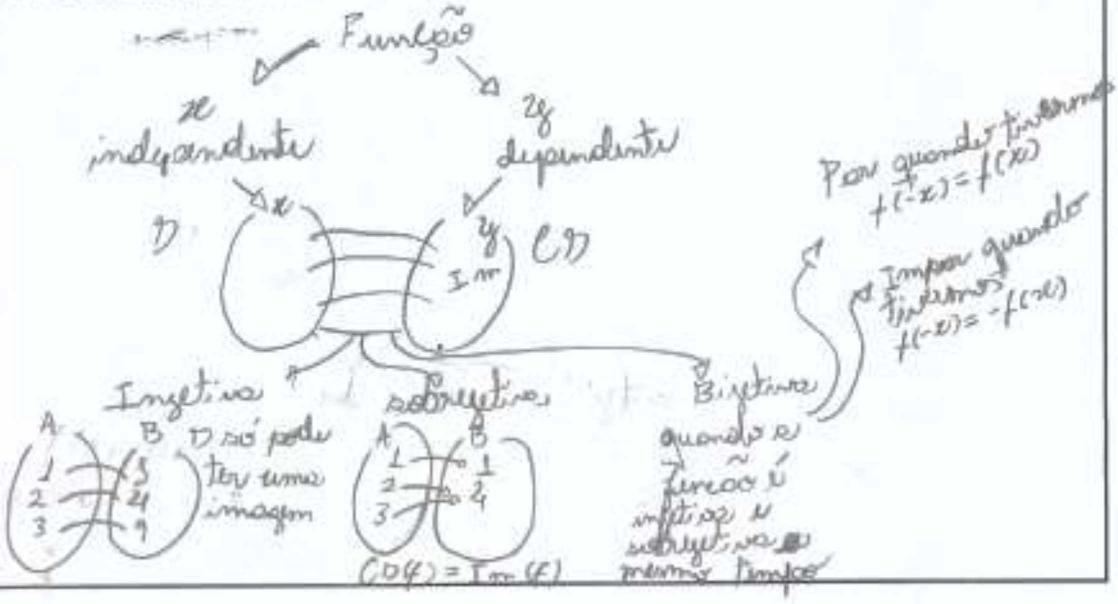
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Uma variável y se diz função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y.

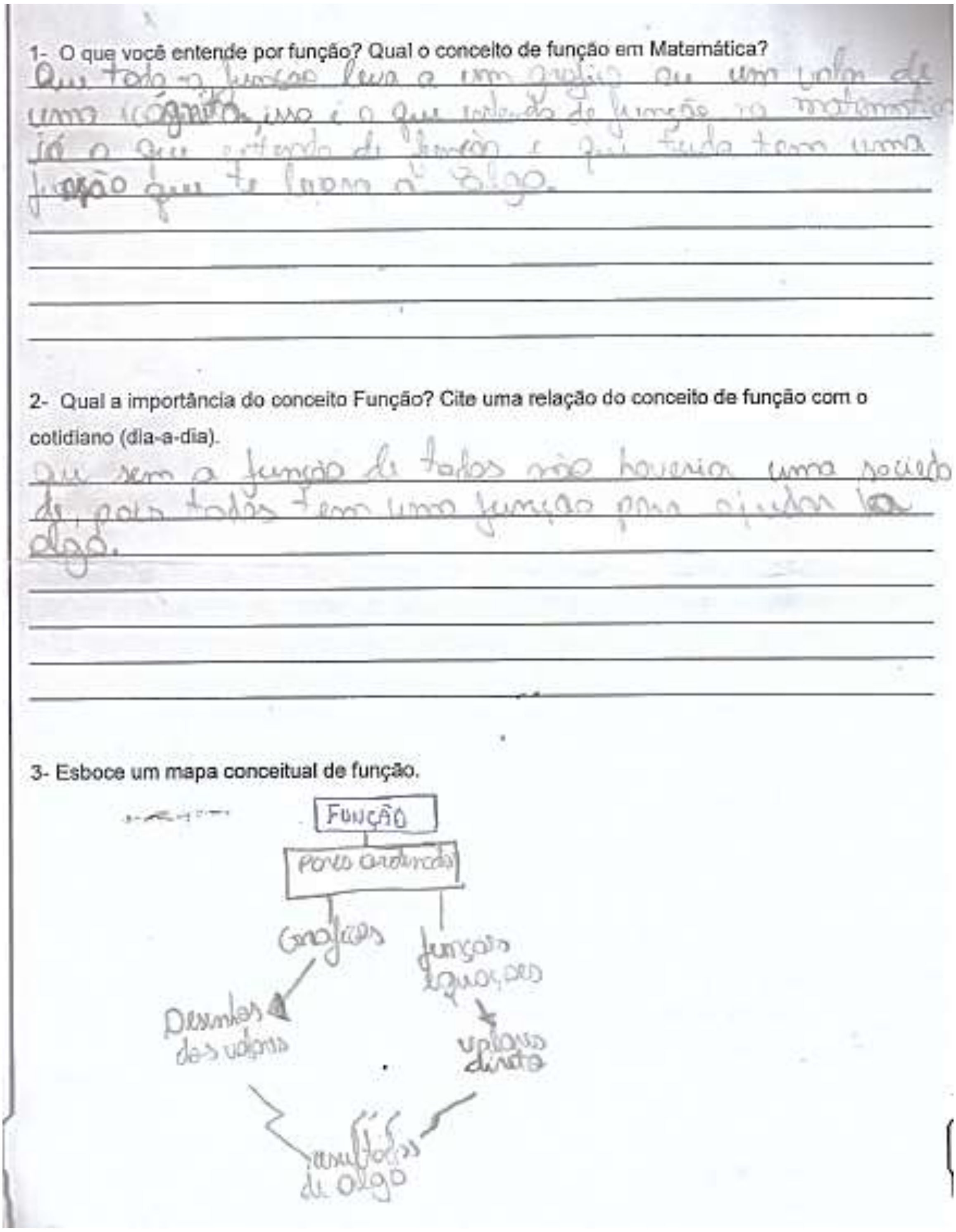
2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Quando vamos para comprar pão, temos que saber quantos pães podemos comprar com o total de dinheiro que temos

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades dos estudantes da turma B



1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

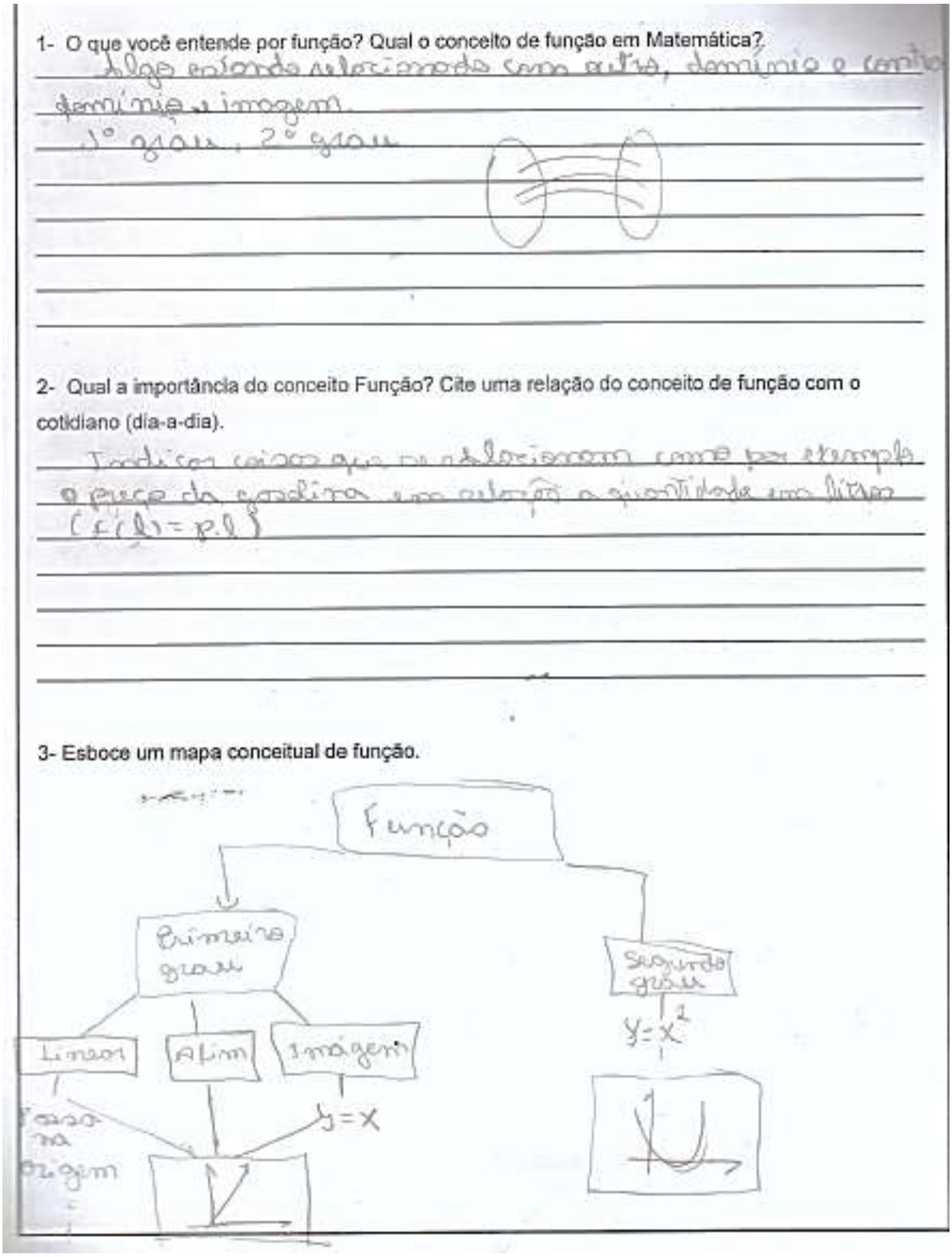
Que todo a função leva a um gráfico ou um valor de uma incógnita, isso é o que entendo de função na matemática já o que entendo de função é que tudo tem uma função que te leva a algo.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Que sem a função de todos não haveria uma sociedade, pois todos tem uma função para ajudar em algo.

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades dos estudantes da turma B



1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Algo estando relacionado com o outro, domínio e contradomínio e imagem.
1° grau, 2° grau

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Indícios coisas que se relacionam como por exemplo o preço da gasolina em relação a quantidade em litros
(f(l) = p.l)

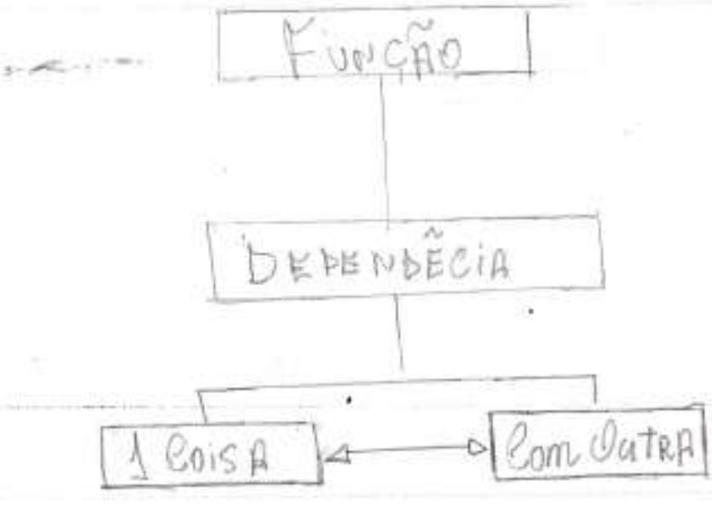
3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades dos estudantes da turma B

4- Como você avalia o desenvolvimento das atividades de função durante o bimestre? O que você considerou de positivo e negativo durante as aulas, suas sugestões. Suas atitudes em aula (atenção, fazer questionamentos, interesse próprio e concentração) colaboraram para sua aprendizagem? Você achaque deveria mudar em alguns aspectos para facilitar sua aprendizagem?

As atividades foram bem elaboradas. Para mim
as aulas de Matemática são bem interessantes,
pois a profª sempre procura fazer algo diferente.
As minhas atitudes nem sempre são boas, pois
eu converso na sala de aula, mas quando
eu não entendo o assunto eu procuro aprender.
Sim, devo prestar mais atenção nas aulas.

5- Esboce um mapa conceitual sobre o que você estudou sobre função.



Atividades da turma C

3- Toda relação é uma função? Porque ?

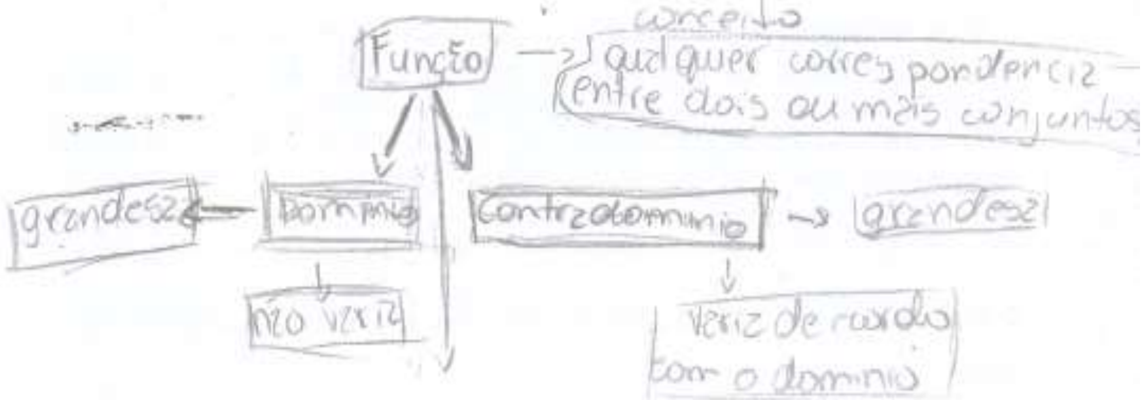
Não: para que uma relação seja uma função, são necessários dois conjuntos não vazios, A e B, e que os elementos do domínio (A) estejam ligados à imagem (B).

4- Como você avalia o desenvolvimento das atividades de função durante o bimestre? O que você considerou de positivo e negativo durante as aulas, suas sugestões. Suas atitudes em aula (atenção, fazer questionamentos, interesse próprio e concentração) colaboraram para sua aprendizagem? Você achaque deveria mudar em alguns aspectos para facilitar sua aprendizagem?

Boas explicações do conteúdo, conteúdos dados no momento certo, dúvidas sempre sendo tiradas.

Eu tenho problemas de concentração, mas sempre consegui prestar atenção em coisas importantes. Nas aulas de função, eu entendi tirando dúvidas com a professora.

5- Esboce um mapa conceitual sobre o quê você estudou sobre função.



Atividades da turma C

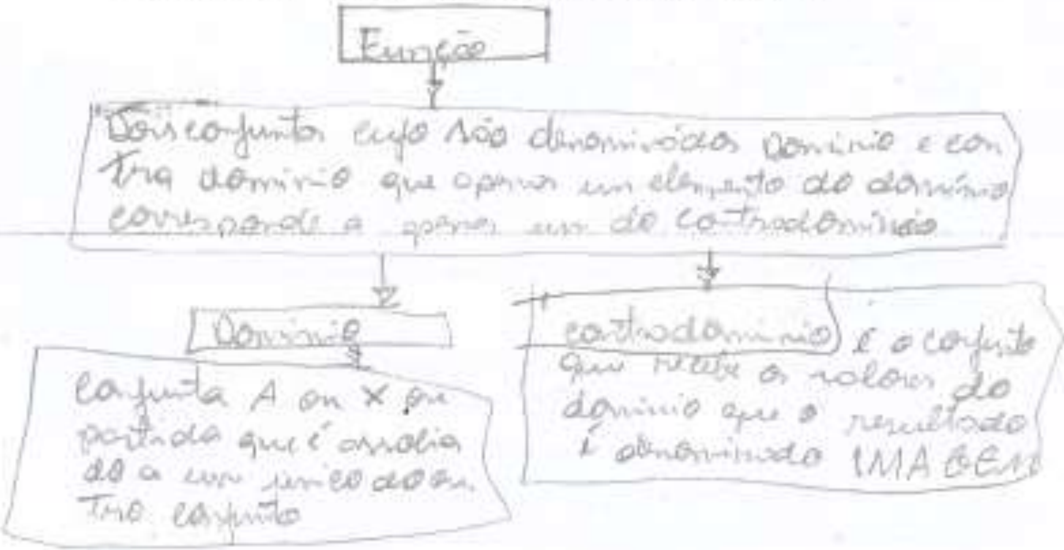
3- Toda relação é uma função? Porque ?

Não, pois toda função é uma relação porém nem toda relação é uma função.

4- Como você avalia o desenvolvimento das atividades de função durante o bimestre? O que você considerou de positivo e negativo durante as aulas, suas sugestões. Suas atitudes em aula (atenção, fazer questionamentos, interesse próprio e concentração) colaboraram para sua aprendizagem? Você achaque deveria mudar em alguns aspectos para facilitar sua aprendizagem?

Bom pois vimos onde ela é utilizado e como é importante em nosso cotidiano. De positivo que eu acho que aprendi e negativo que eu tenho dificuldades para interpretar os problemas. Minhas atitudes colaboraram sim pois não sou de conversar nas aulas. Sim eu acho que devo parar de [illegible] a [illegible] durante as aulas.

5- Esboce um mapa conceitual sobre o que você estudou sobre função.



Atividades da turma C

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Como a relação entre 2 dois conjuntos, estabelecendo por uma lei de formação, que seria uma regra geral.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

- número de questões que acertei numa teste, com a nota que eu vou tirar.
- número de pães que vou comprar, com o preço a pagar.
- velocidade média de um automóvel, com o tempo de duração de uma viagem.

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades da turma C

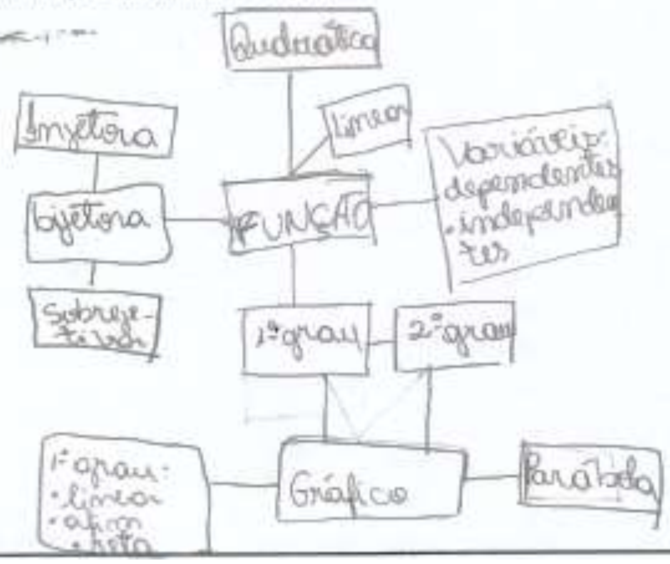
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

• Quando um elemento depende de outro
• Quando todos elementos do domínio possui uma imagem apenas no contradomínio

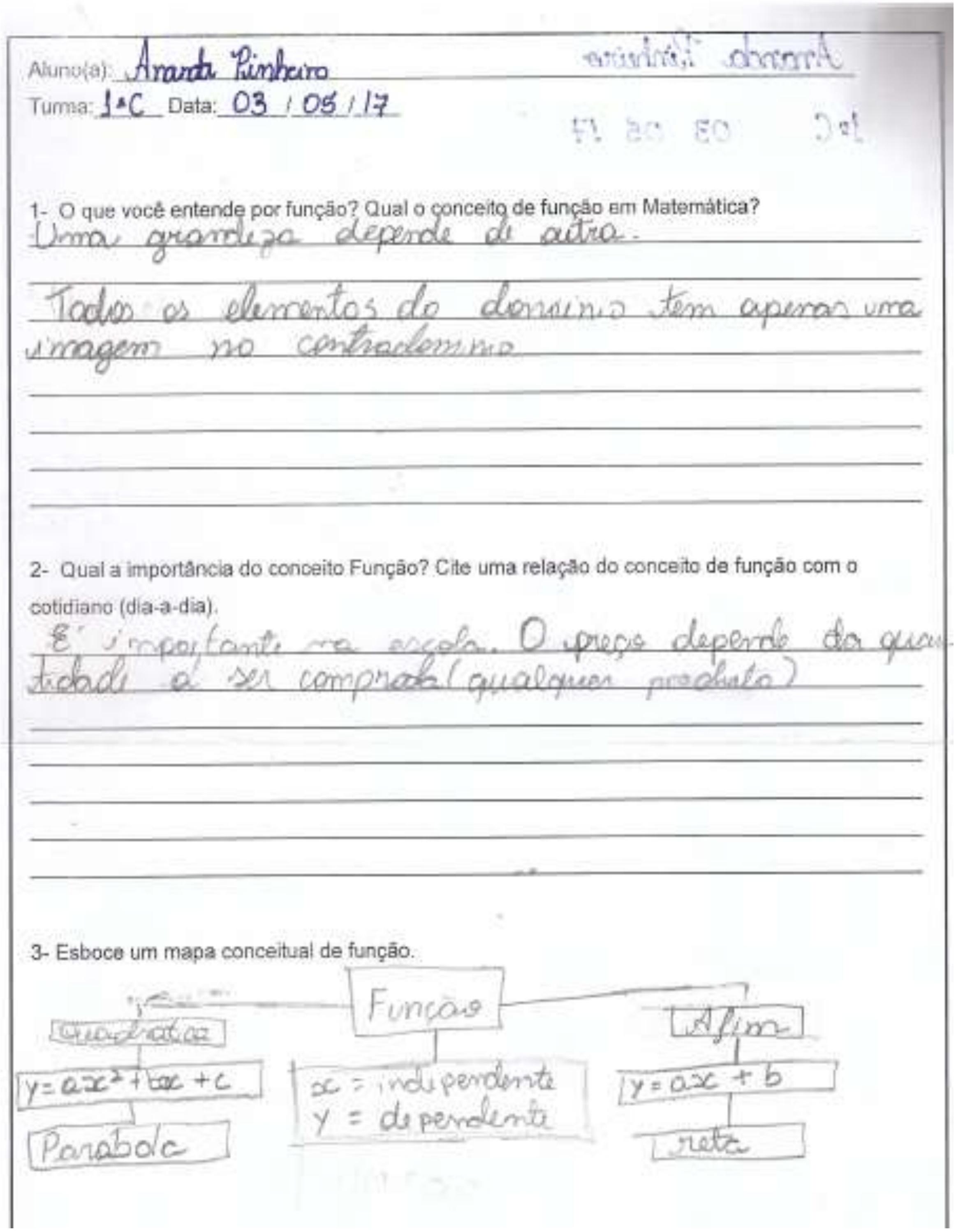
2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

• O carro depende da gasolina para funcionar
• O fogão depende do gás para executar seu trabalho
• Nós precisamos de Deus para seguirmos no caminho certo. Somos totalmente dependentes de Deus.

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades da turma C



Aluno(a): Amanda Pinheiro
Turma: 1ªC Data: 03 / 05 / 17

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Uma grandeza depende de outra.

Todos os elementos do domínio têm apenas uma imagem no contradomínio

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

É importante na escola. O preço depende da quantidade a ser comprada (qualquer produto)

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades da turma C

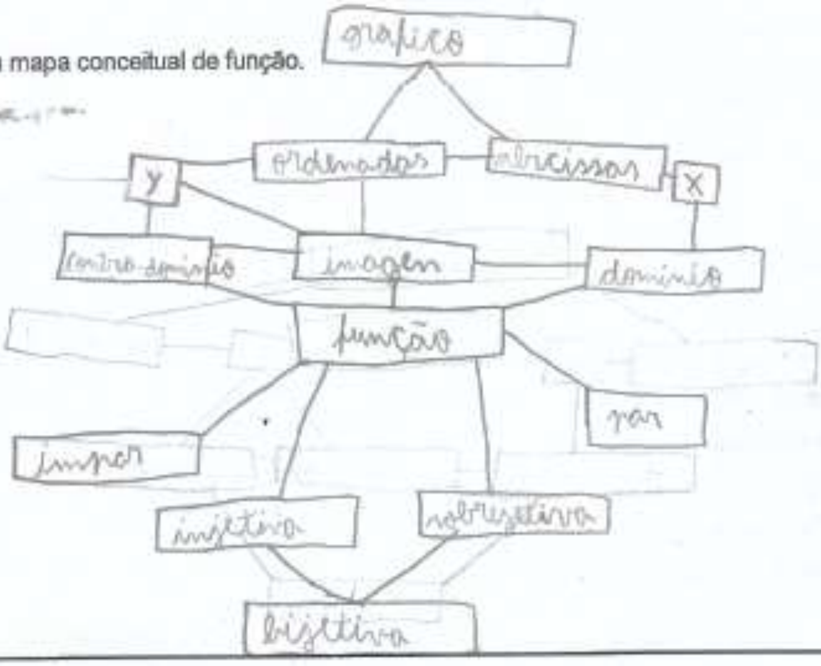
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

É a relação entre 2 variaveis

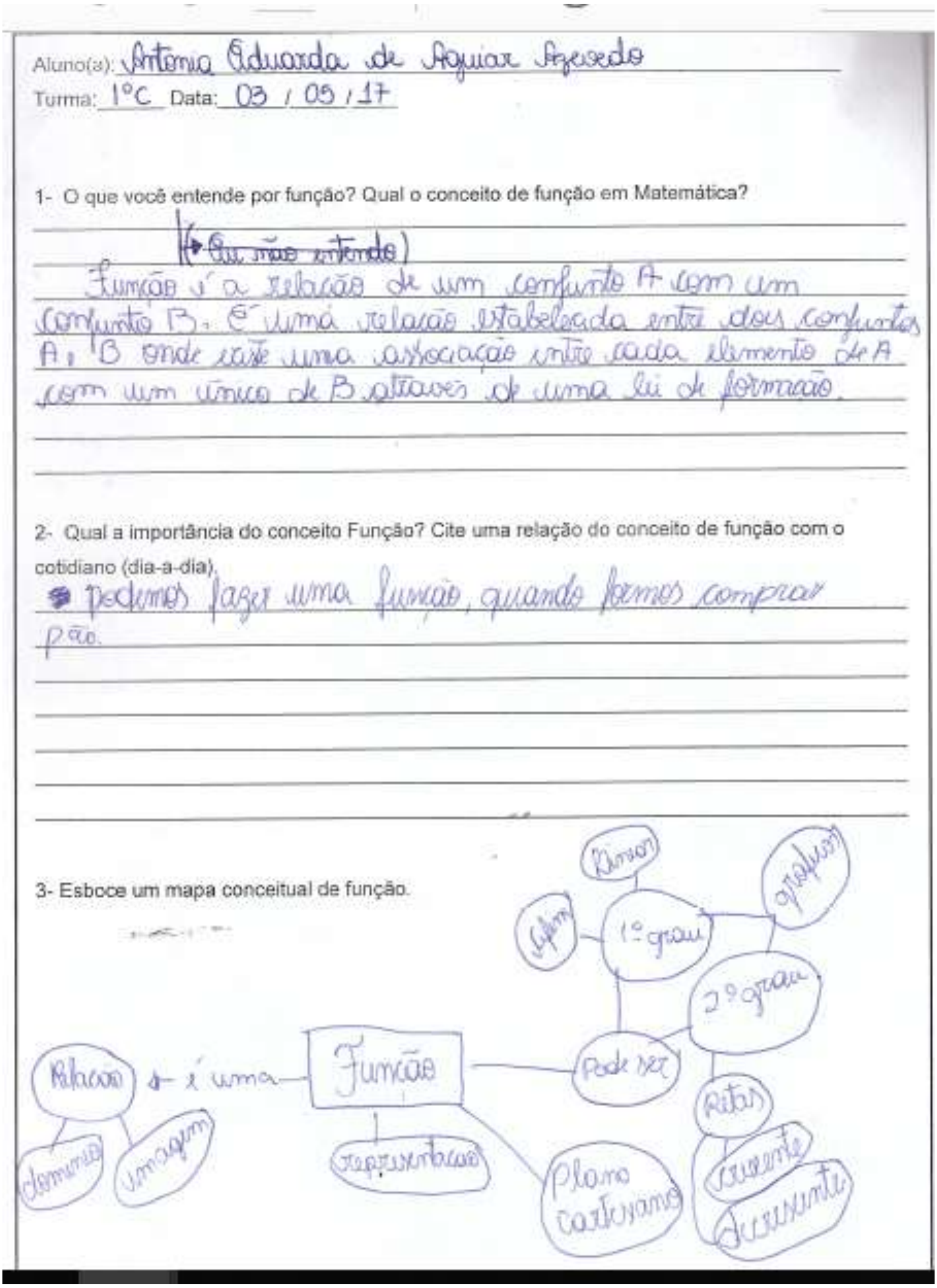
2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Funções serviriam no dia a dia para relacionar valores, um exemplo disto no dia a dia poderia ser em uma feira onde cada maça é vendido por 5R$ ou seja a cada 1 maça que você pega você compra você gasta 5R$, ou seja F(x)=5X

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades da turma C



Aluno(a): Antonia Eduarda de Aguiar Azevedo
Turma: 1ºC Data: 03 / 05 / 17

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

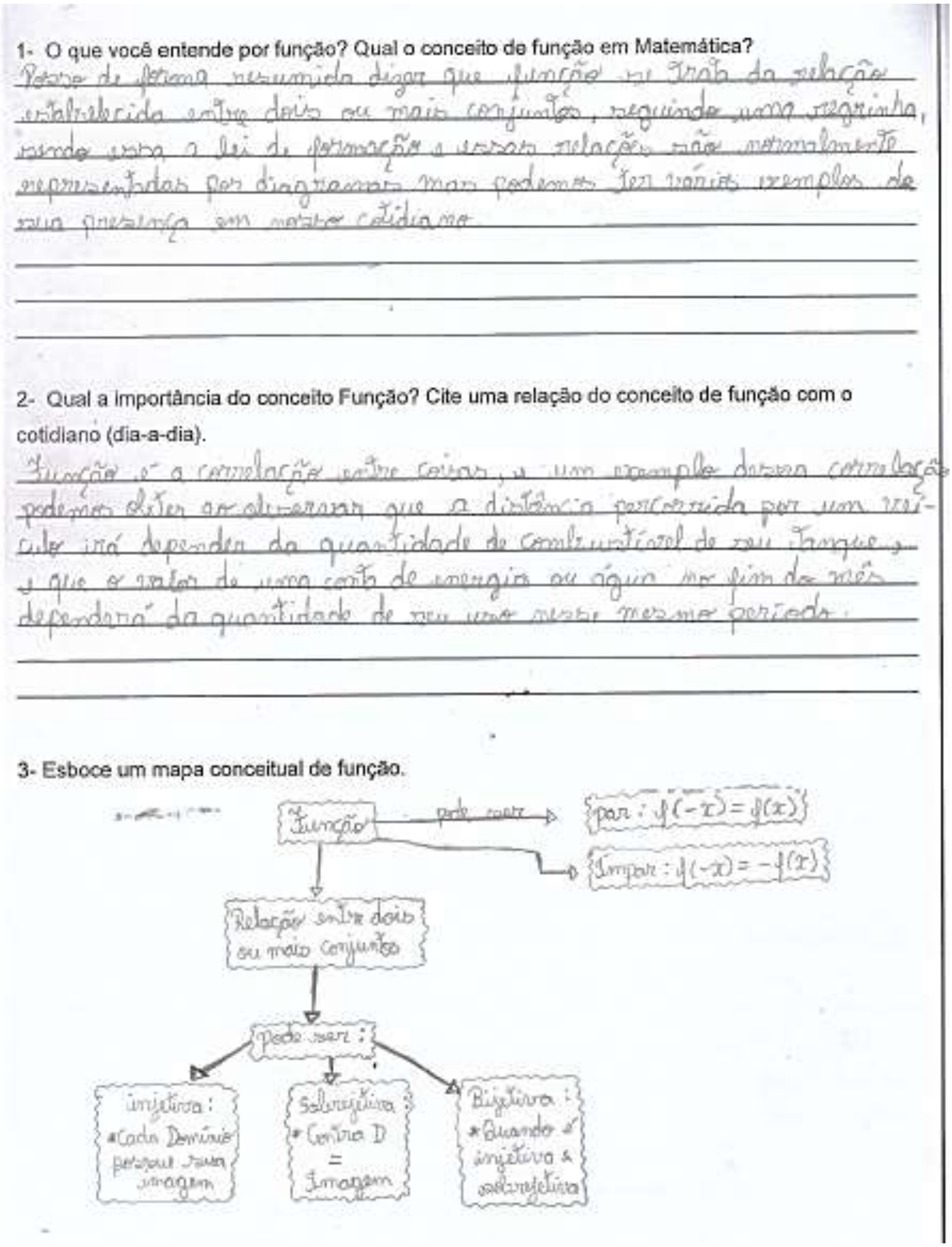
(~~Eu não entendo~~)
Função é a relação de um conjunto A com um conjunto B. É uma relação estabelecida entre dois conjuntos A e B onde existe uma associação entre cada elemento de A com um único de B através de uma lei de formação.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

podemos fazer uma função, quando formos comprar pão.

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades da turma C



1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Posso de forma resumida dizer que função se trata da relação estabelecida entre dois ou mais conjuntos, seguindo uma regrinha, sendo essa a lei de formação e essas relações são normalmente representadas por diagramas mas podemos ter vários exemplos de sua presença em nosso cotidiano

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Função é a correlação entre coisas, e um exemplo dessa correlação podemos dizer ao observar que a distância percorrida por um veículo irá depender da quantidade de combustível de seu tanque, e que o valor de uma conta de energia ou água no fim do mês dependerá da quantidade de seu uso nesse mesmo período.

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades da turma C

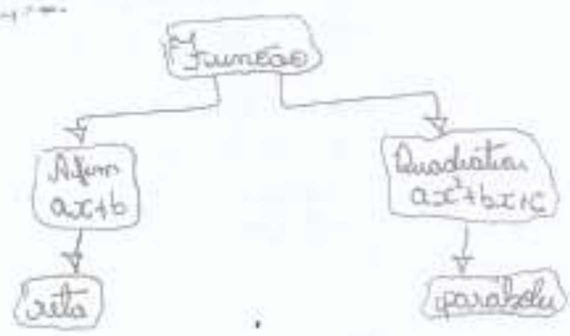
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

implantar uma variável

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Existem várias funções no dia-a-dia, no trabalho, escola, em casa.

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades da turma C

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

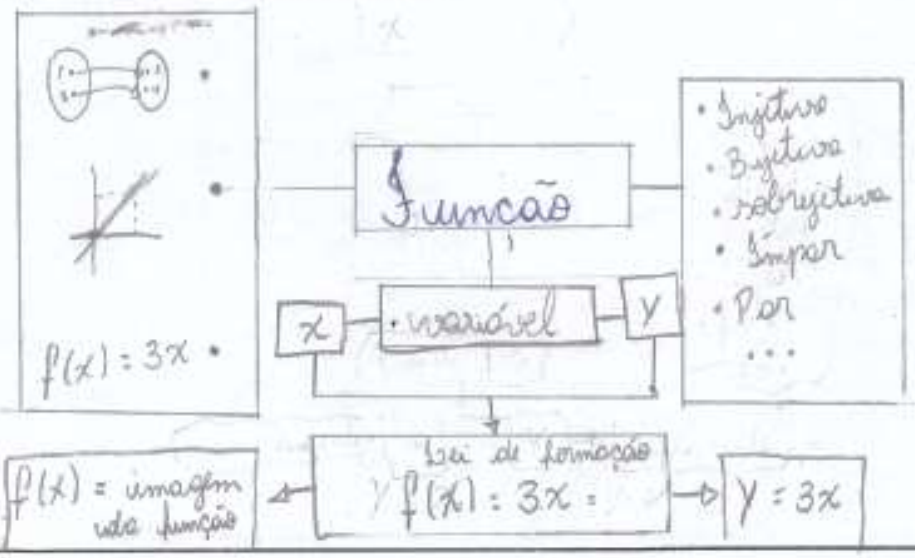
É um elemento que se associa/faz relação com outro elemento, existem 2 variáveis, uma dependente e uma independente, que formam uma lei de formação.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Estabelece uma relação, uma função em relação à algo

Diariamente, compramos carne, supondo que o kg da carne está R$ 15,00, dependendo de quanto kg compramos este preço vai variar, como $f(x): 15x$, o preço está em função dos kg

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades da turma C

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

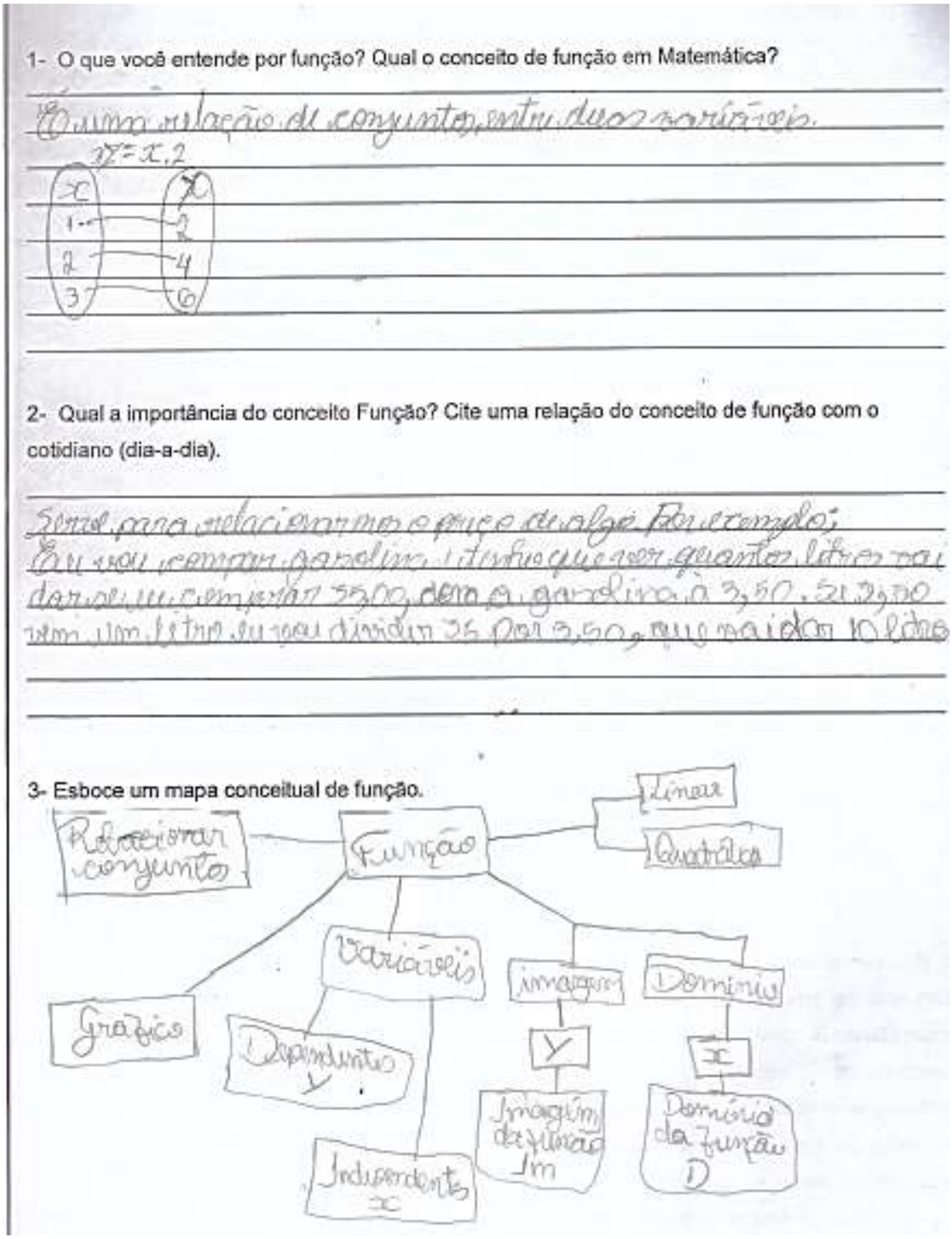
Que uma função leva um elemento do domínio a um elemento do contradomínio. F de A → B é uma relação que associa um único elemento.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Para você observar a variável dependente e a independente. A questão 1 da atividade é um exemplo.

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades da turma C


1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

É uma relação de conjuntos entre duas variáveis.

y = x . 2

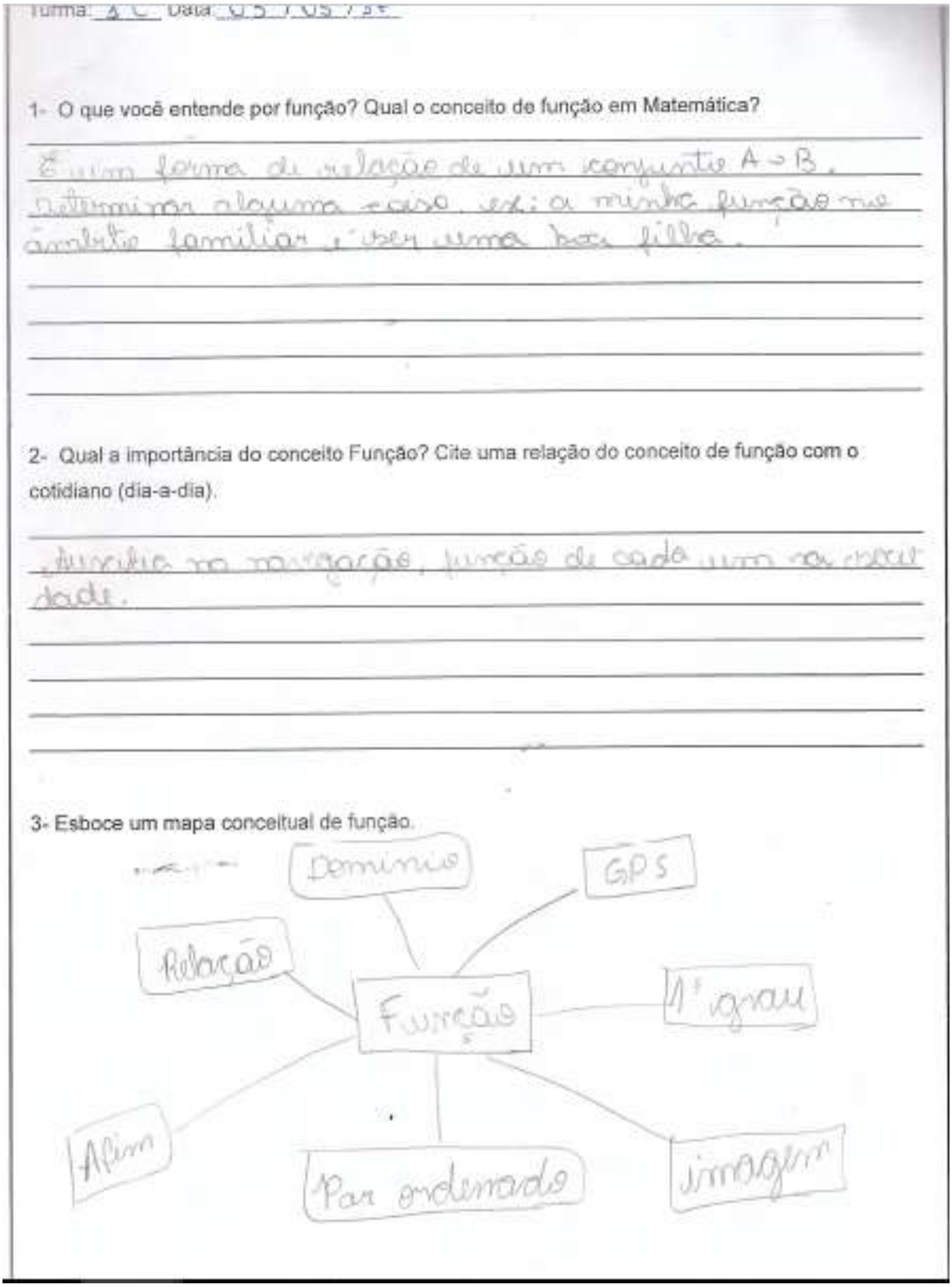
x	y
1	2
2	4
3	6

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Serve para relacionarmos o preço de algo. Por exemplo: Eu vou comprar gasolina, i tenho que ver quantos litros vai dar, se eu comprar 35,00, sendo a gasolina à 3,50. Se 3,50 vem um litro eu vou dividir 35 por 3,50, que vai dar 10 litros

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades da turma C



Turma: 3 C Data: 05 / 05 / ...

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

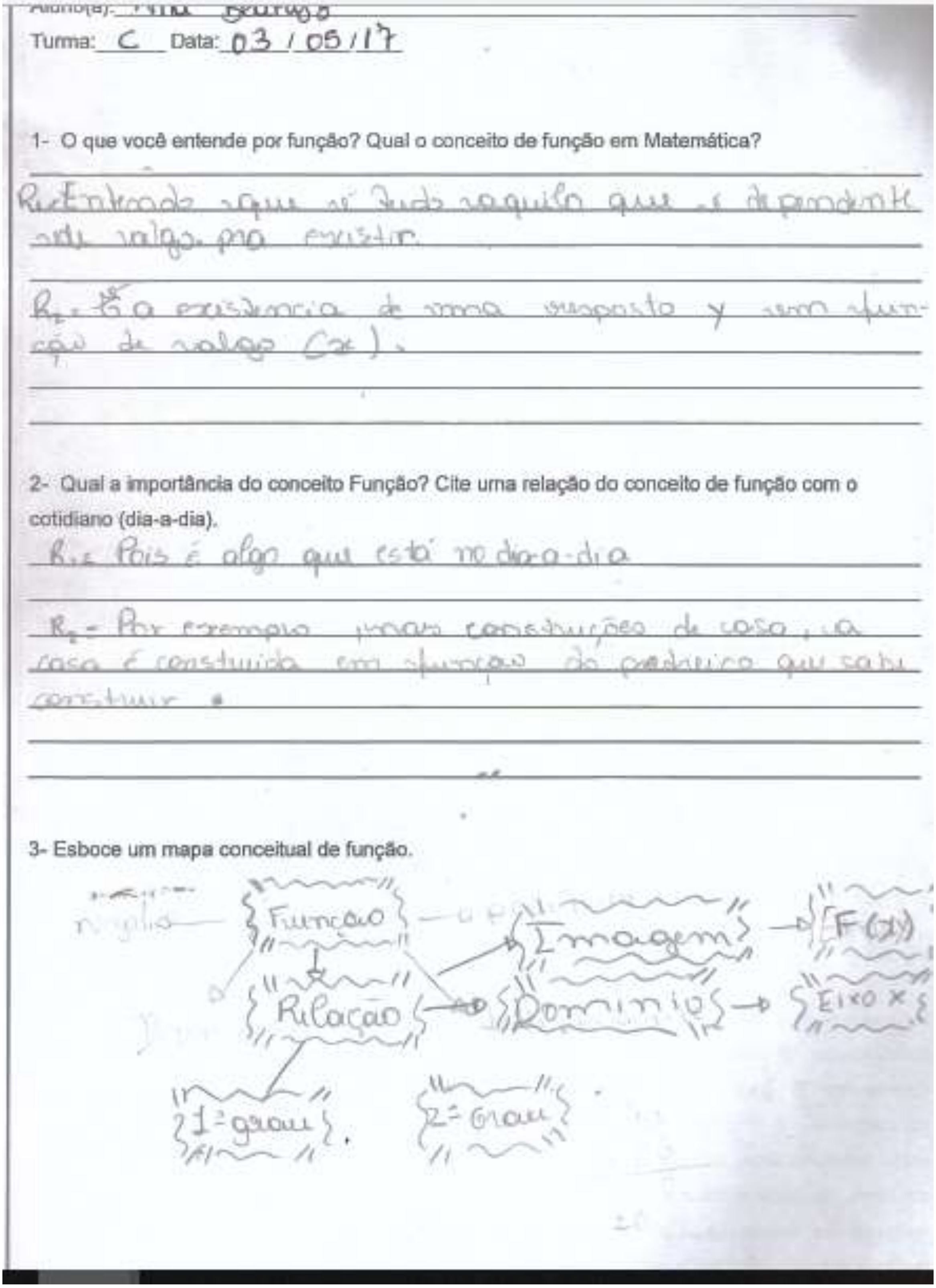
É uma forma de relação de um conjunto A → B. determinar alguma coisa. ex: a minha função no âmbito familiar é ser uma boa filha.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Auxilia na navegação, função de cada um na sociedade.

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades da turma C


Turma: C Data: 03 / 05 / 17

1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

R1: Entendo que é tudo aquilo que é dependente de algo pra existir.

R2: É a existência de uma resposta y em função de algo (x).

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

R1: Pois é algo que está no dia-a-dia

R2: Por exemplo nas construções de casa, a casa é construída em função do pedreiro que sabe construir.

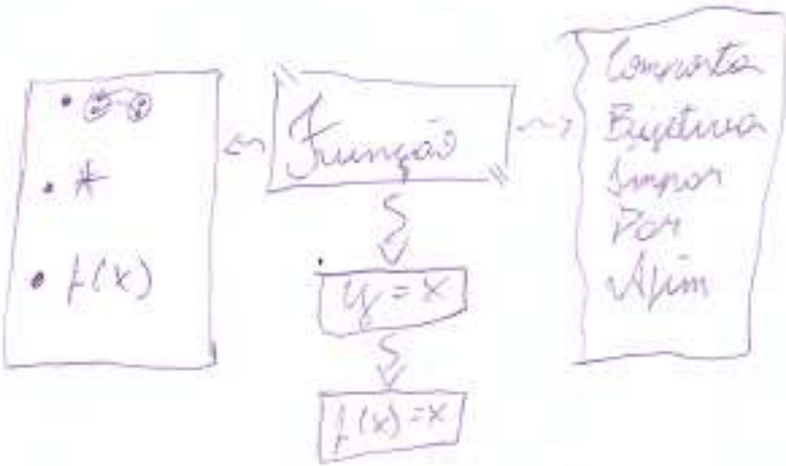
3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades da turma C

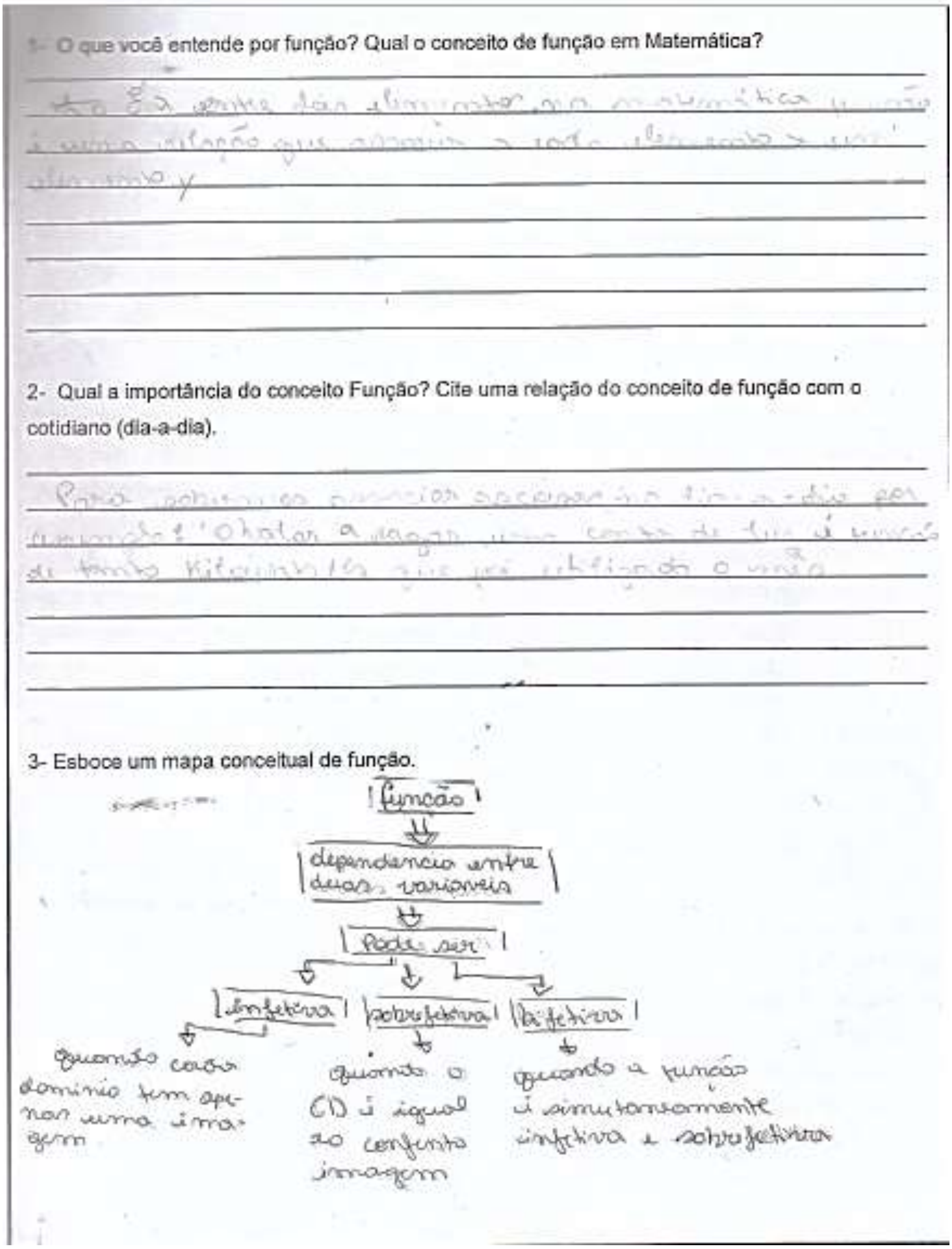
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades da turma C



1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

3- Esboce um mapa conceitual de função.

Atividades da turma D

Aluno(a): Wesson A. Barreiros de Souza

Turma: 1ºB Data: 03/05/14

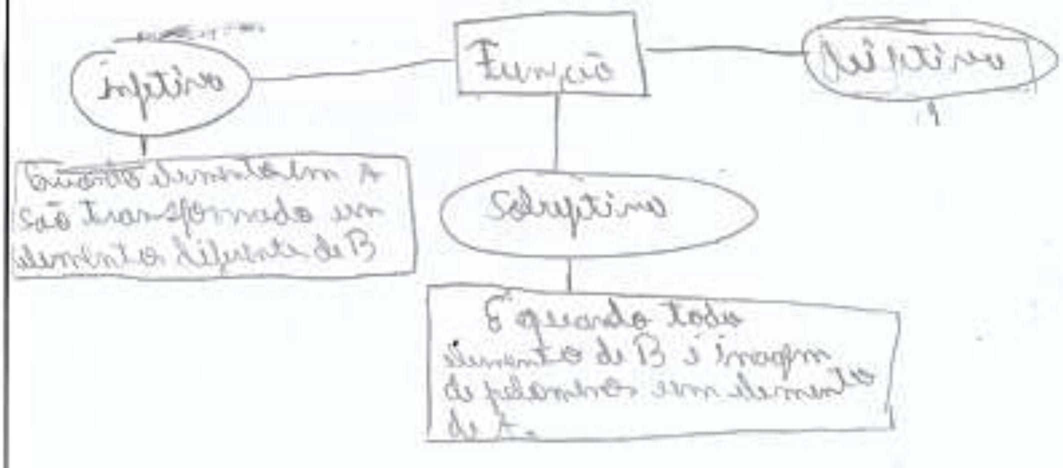
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

que cada elemento tem sua imagem, ou seja, tem seu resultado.

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

importância da função é fazer comparativos, em relação a valores, exemplo de compras, com a função, descobrimos o quanto de lucro temos, o quanto gastamos, através do total.

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades da turma D

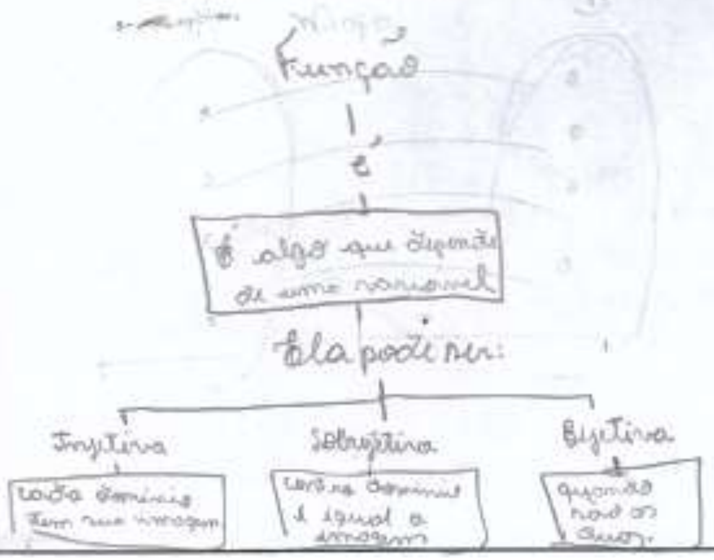
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Função é algo que depende de casos variáveis

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

Percebemos ela no dia a dia. Como por exemplo. O valor a pagar o bombom é função da quantidade que eu tenho pra comprar.

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades da turma D

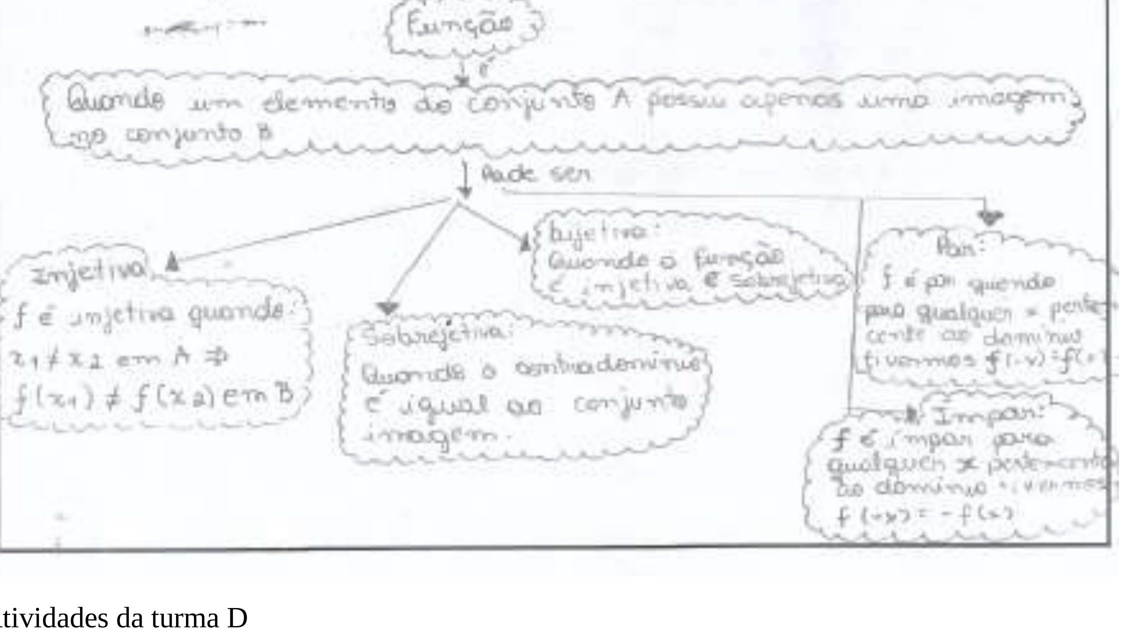
1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

Função é quando uma coisa depende de outra coisa. Função é uma lei que determina que um elemento do conjunto A possui apenas uma imagem no conjunto B.

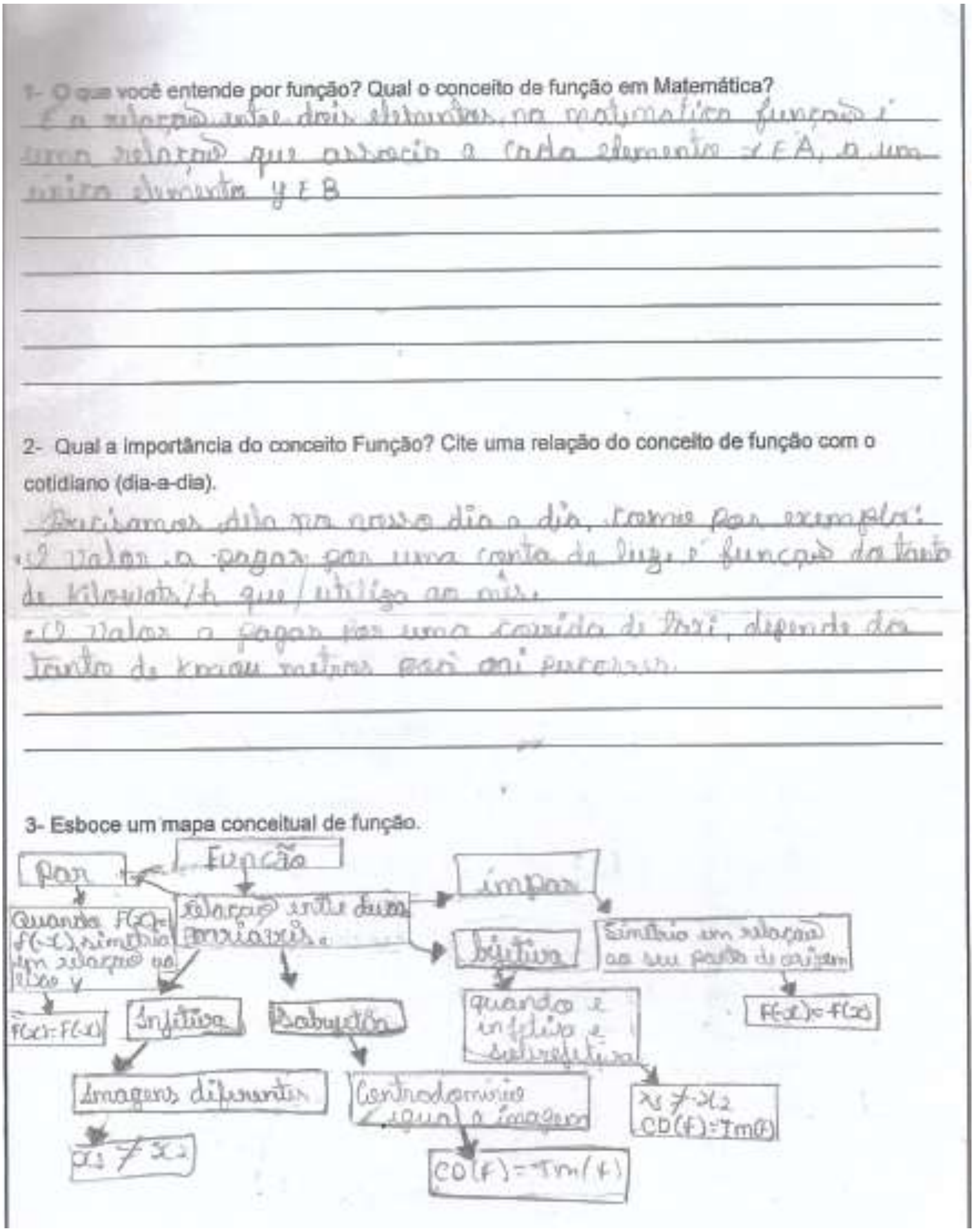
2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

A função é importante para facilitar a resolução de problemas no cotidiano. Ao comprar pão, o preço irá variar de acordo com a quantidade de pães.

3- Esboce um mapa conceitual de função.



Atividades da turma D



1- O que você entende por função? Qual o conceito de função em Matemática?

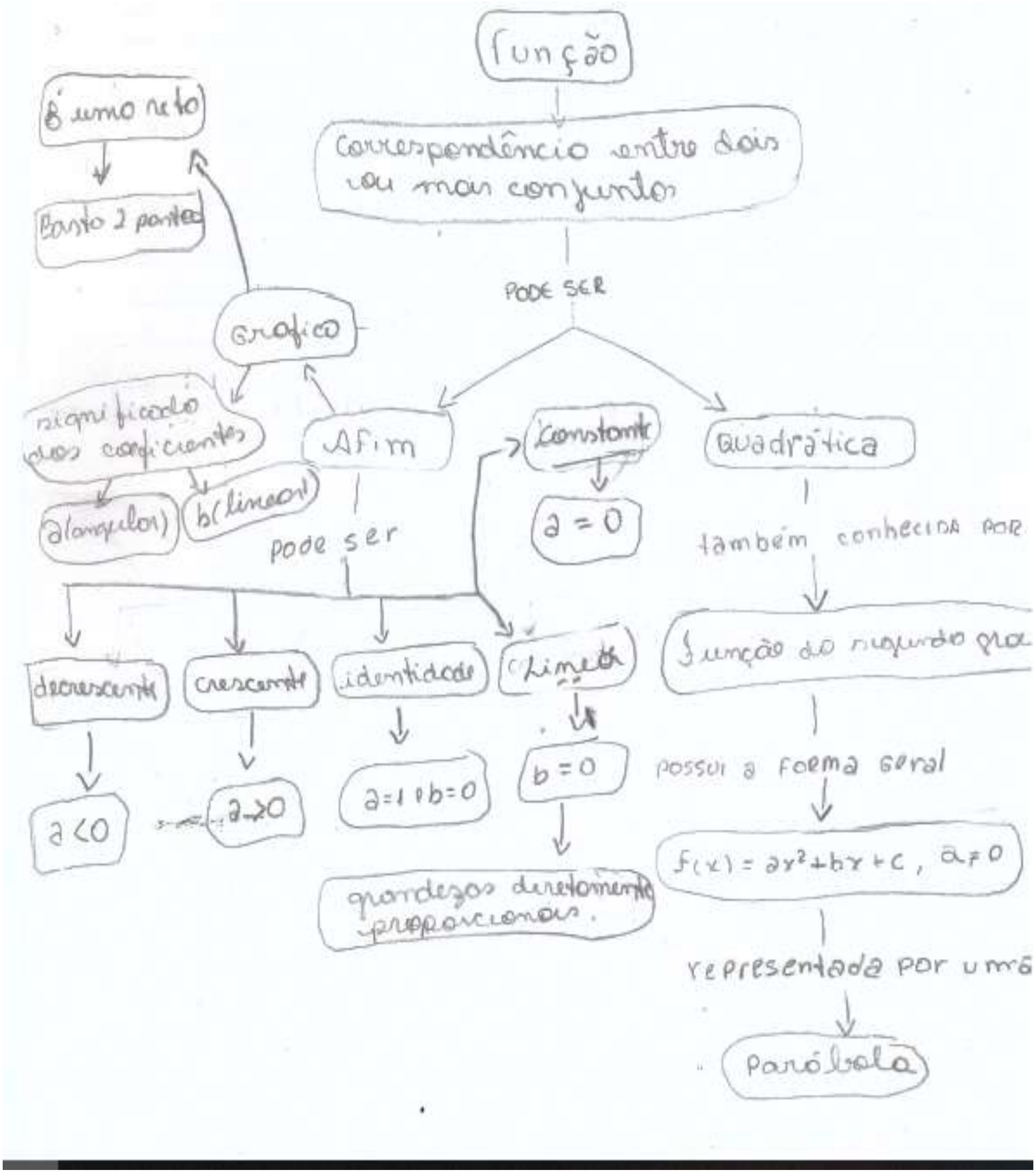
É a relação entre dois elementos, na matemática função é uma relação que associa a cada elemento $x \in A$, a um único elemento $y \in B$

2- Qual a importância do conceito Função? Cite uma relação do conceito de função com o cotidiano (dia-a-dia).

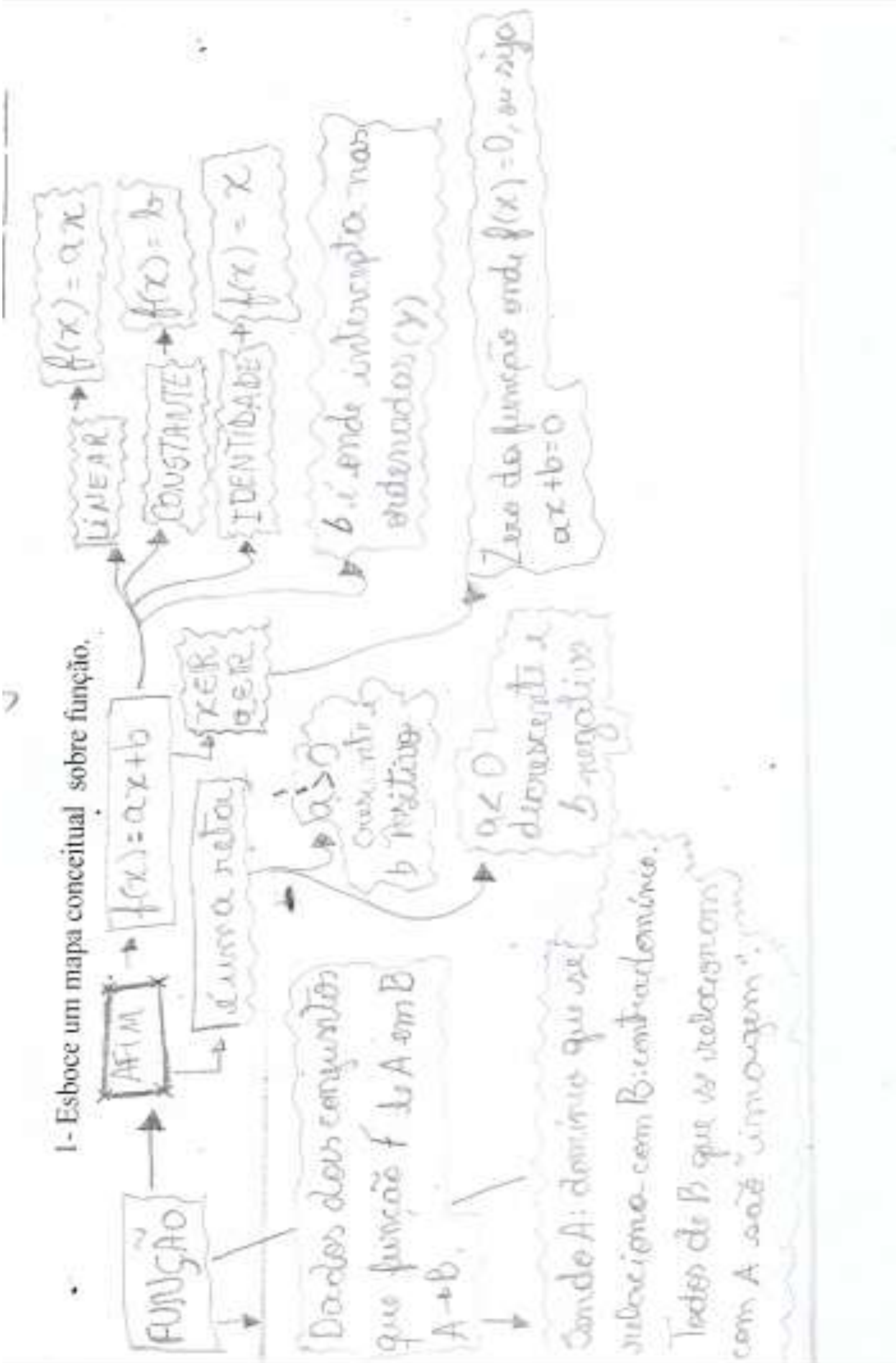
Precisamos dela no nosso dia a dia, como por exemplo:
• O valor a pagar por uma conta de luz, é função da tanto de kilowats/h que utilizo ao mês.
• O valor a pagar por uma corrida de taxi, depende da tanto de kilometros que vai percorrer.

3- Esboce um mapa conceitual de função.

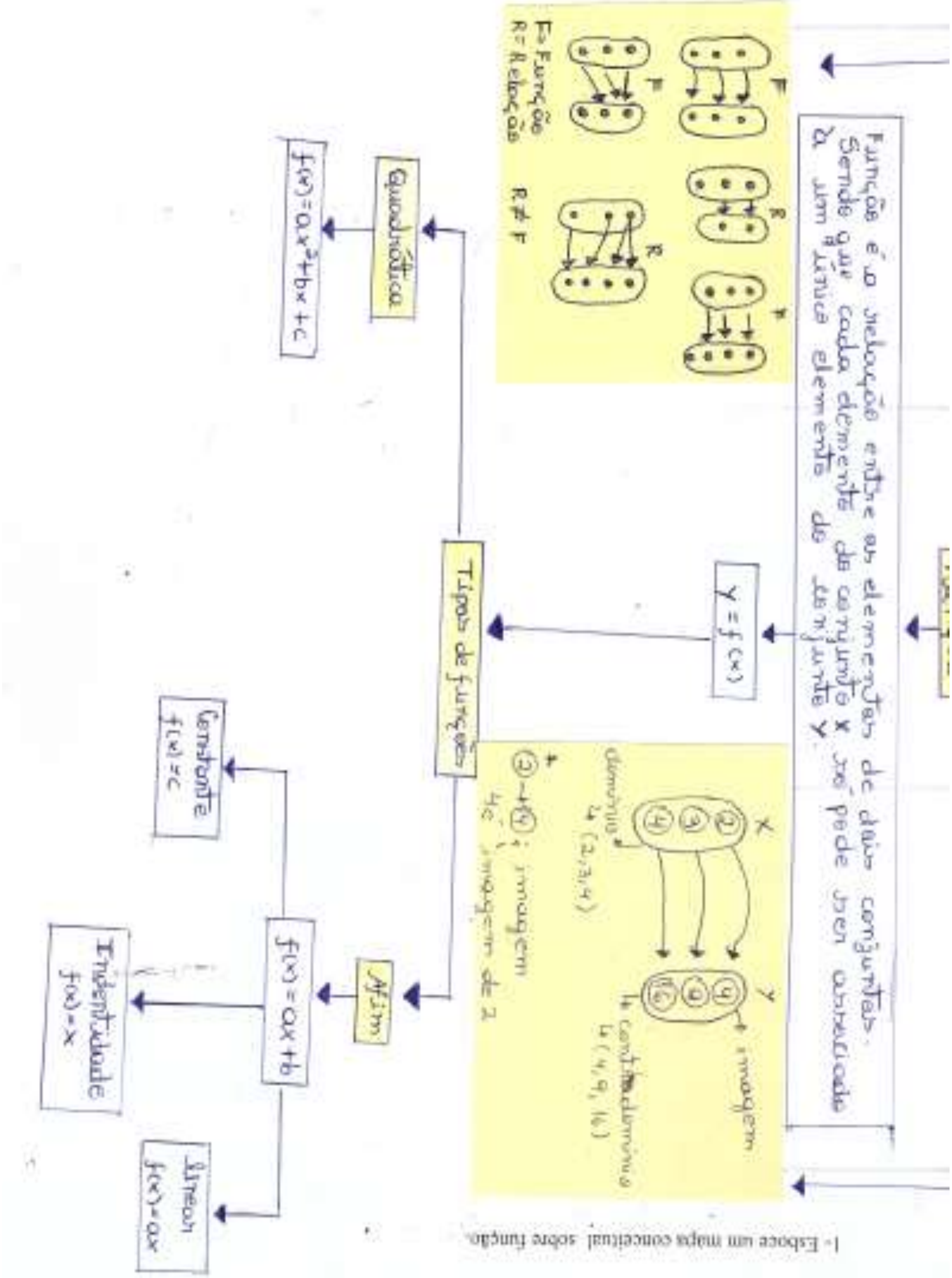
Atividades da turma D



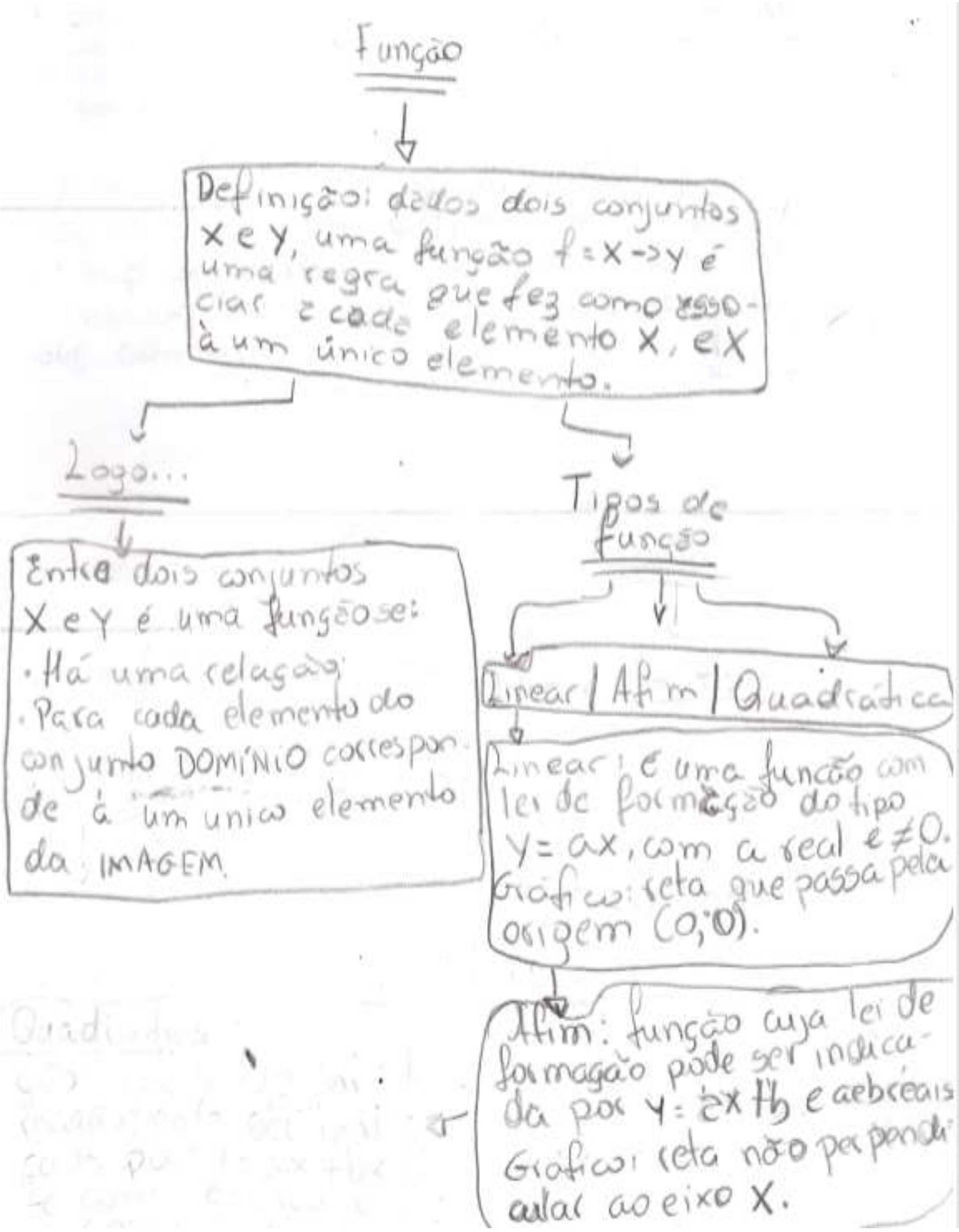
Atividades da turma D



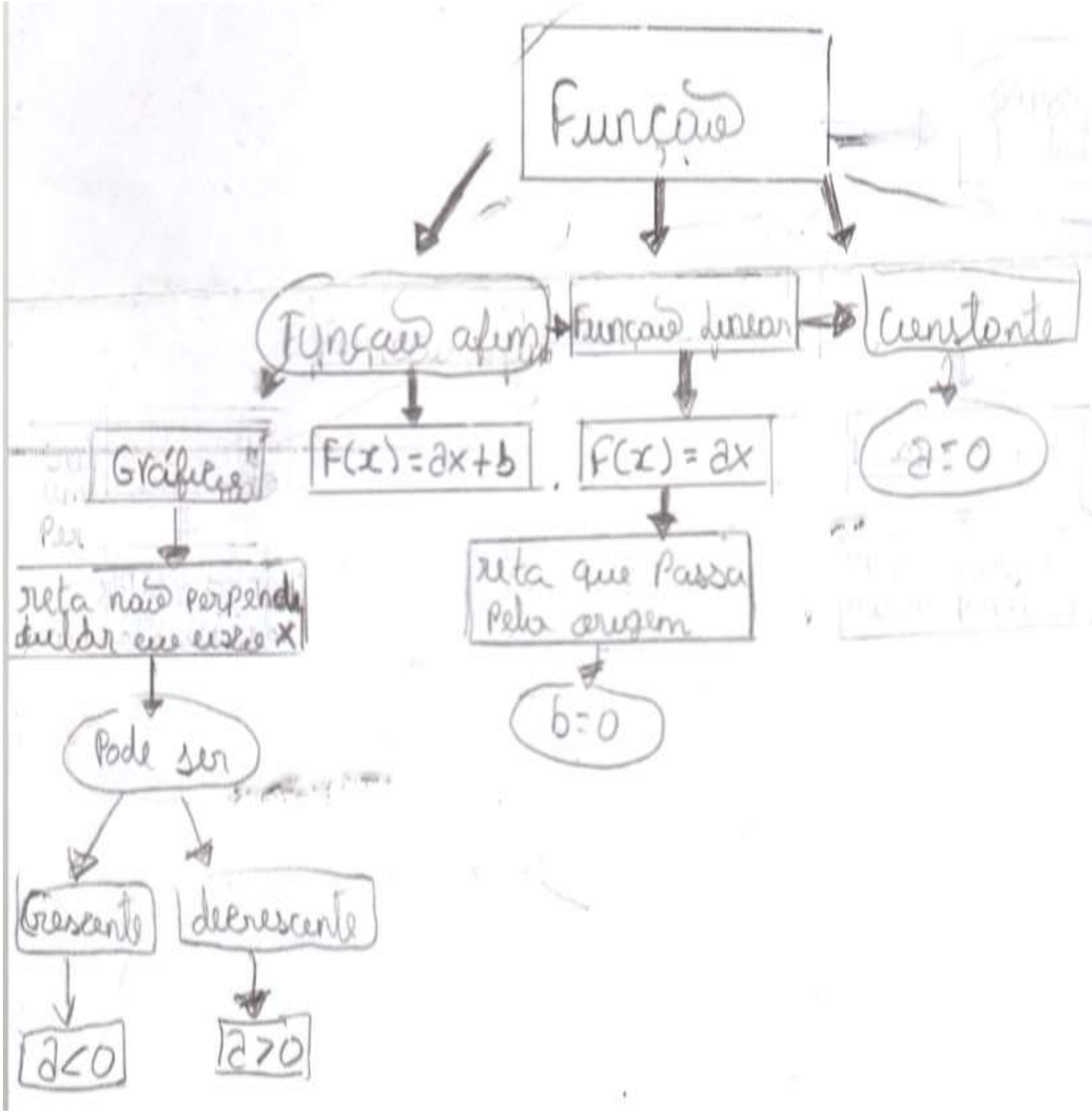
Atividades da turma D



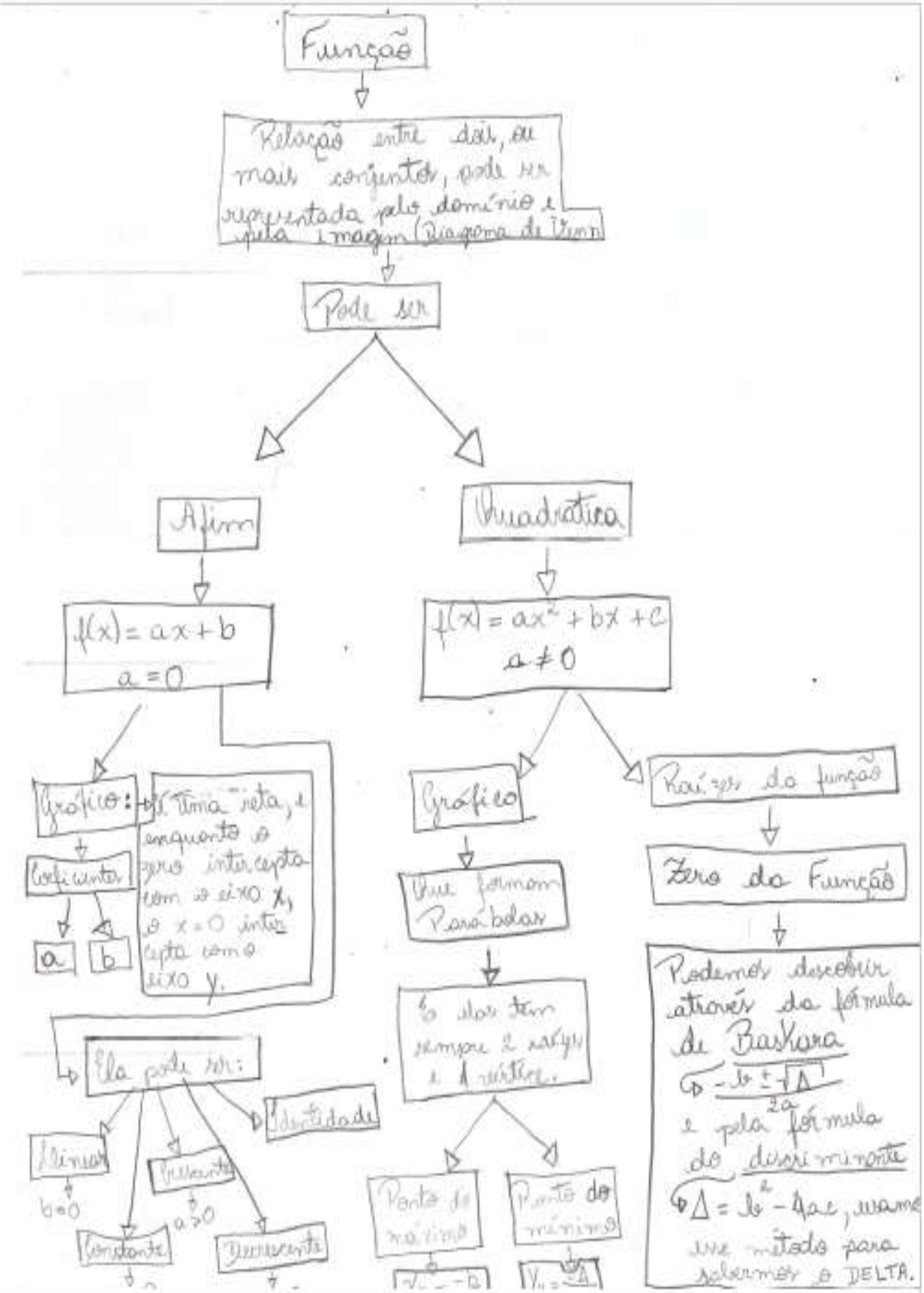
Atividades da turma D



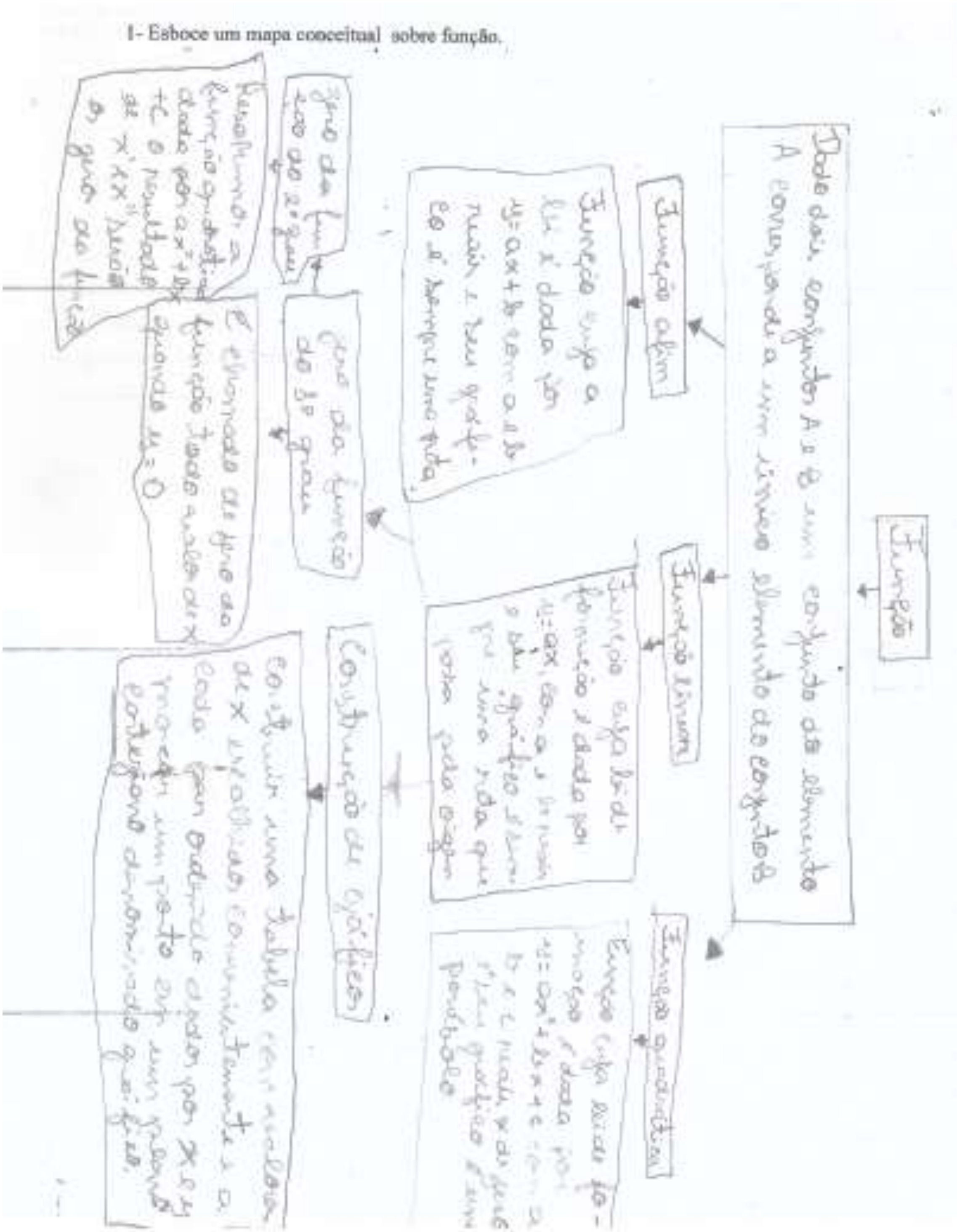
Atividades da turma D



Atividades da turma D

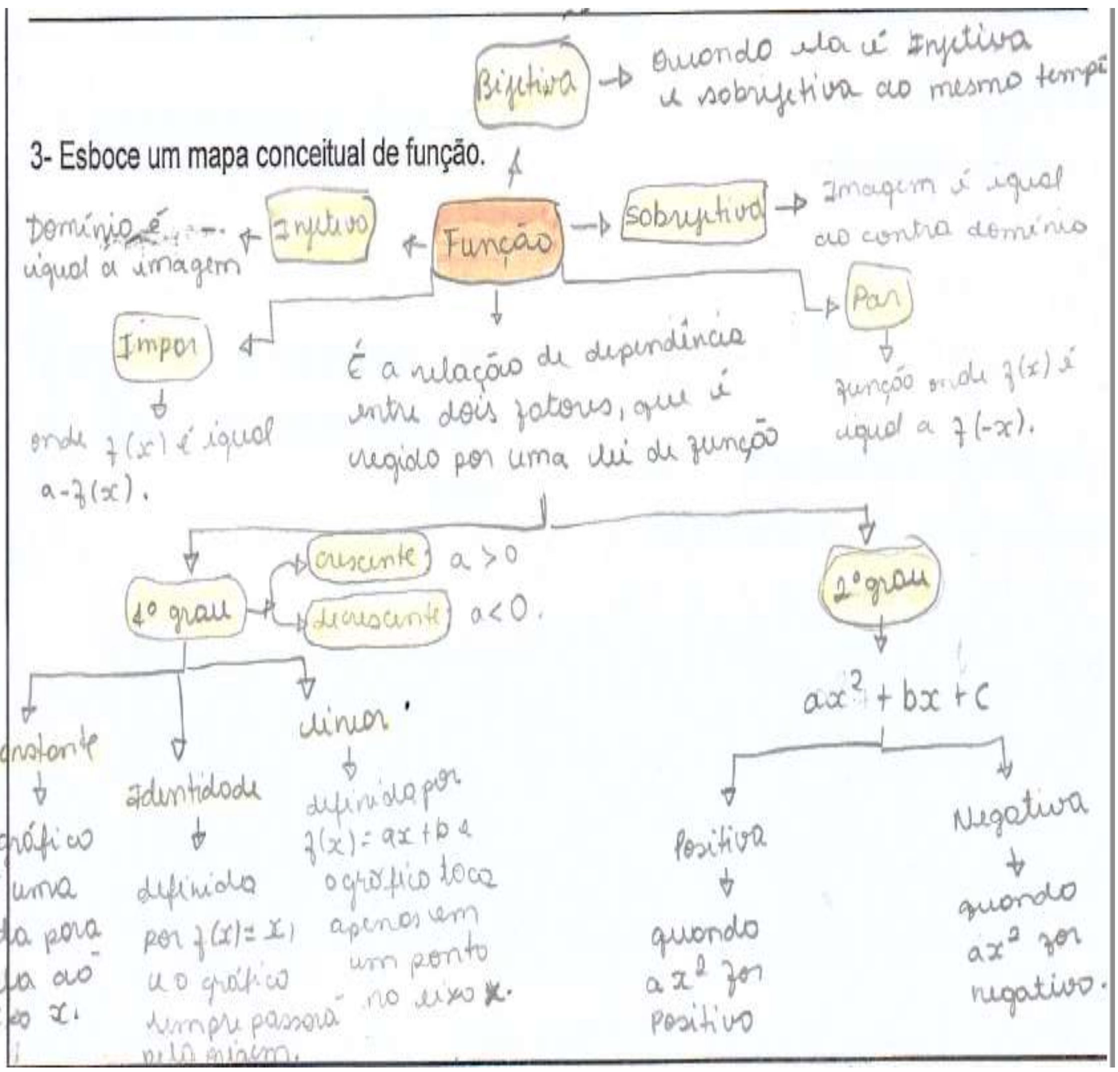


Atividades da turma D

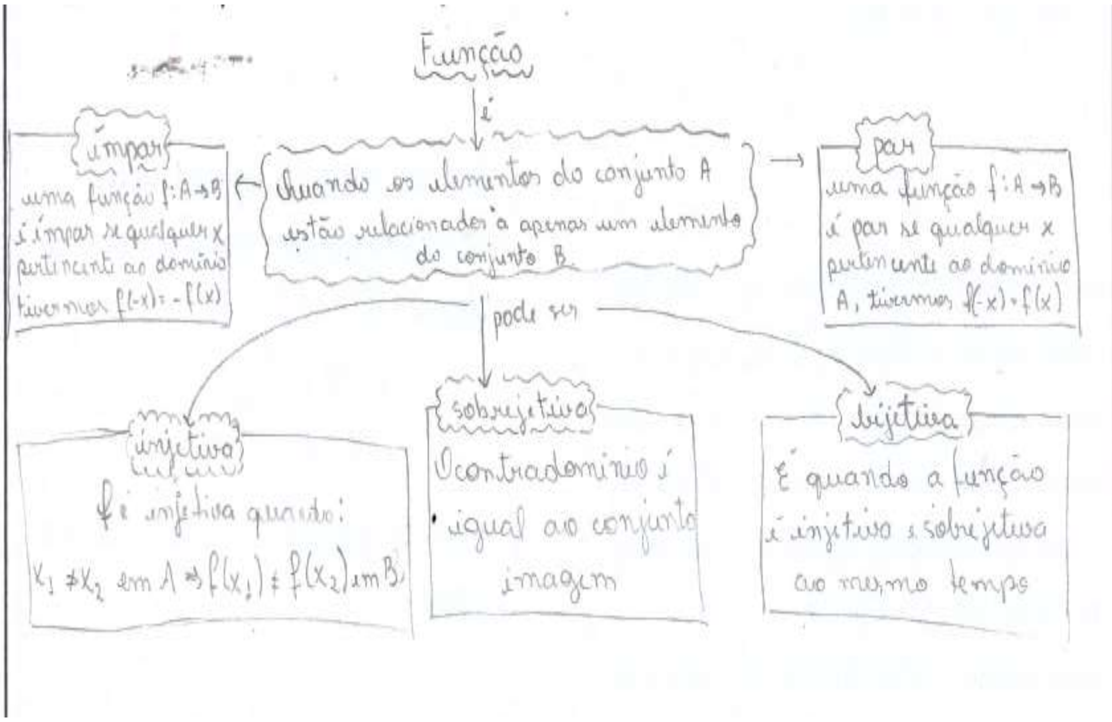


Atividades da turma D

Atividades da turma D



Atividades da turma D



Atividades da turma D