Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

TRABAJO FIN DE MASTER

LA GEOMETRÍA DE 3º DE LA ESO Y SU CONTEXTUALIZACIÓN EN LA CATEDRAL DE BURGOS

CURSO 2020- 2021

Alumno: Francisco Javier Fernández Manzanedo

Especialidad: Matemáticas

Director: Santiago Ruiz Miguel

RESUMEN

En el presente trabajo fin de master se diseña una propuesta didáctica novedosa, para impartir el bloque de contenidos de geometría, correspondiente al 3^er^ curso de la ESO de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Los resultados de nuestro país en matemáticas están por debajo de la media de la UE y de la OCDE y, en 2018, ha habido un empeoramiento de los resultados. Para favorecer el aprendizaje de la geometría en el alumnado y que éste sea significativo, se desarrolla la presente propuesta didáctica a través del desarrollo de un proceso de enseñanza-aprendizaje en un marco contextualizado en un escenario real que conocen los alumnos. El espacio didáctico elegido es la Catedral de Burgos, que este año resulta ser su octavo centenario, y que es Patrimonio de la Humanidad desde 1984. La práctica didáctica se realizará combinando en las clases ciertas actividades o problemas sobre determinados aspectos geométricos de la Catedral de Burgos y la realización de un proyecto de diseño de una vivienda siguiendo los patrones geométricos del gótico. La propuesta también se apoya en la utilización de las TIC así como en el dibujo gráfico.

Palabras clave: matemáticas, geometría, secundaria, Catedral de Burgos, arte gótico.

ABSTRACT

In this final master's work, a novel didactic proposal is designed to teach the geometry content block, corresponding to the 3rd year of ESO of the mathematics subject oriented to academic education. Our country's results in mathematics are below the EU and OECD average and, in 2018, there has been a worsening of the results. In order to favour the learning of geometry in students and make it meaningful, this didactic proposal is developed through the development of a teaching-learning process in a contextualised framework in a real scenario that the students know. The didactic space chosen is the Cathedral of Burgos, which this year marks its eighth centenary, and which has been a World Heritage Site since 1984. The didactic practice will be carried out by combining certain activities or problems on certain geometric aspects of the Cathedral of Burgos and the realization of a design project for a house following the geometric patterns of the Gothic style. The proposal is also supported by the use of ICT and graphic drawing.

Keywords: mathematics, geometry, secondary school, Burgos Cathedral, Gothic art.

ÍNDICE

ANEXOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1 INTRODUCCIÓN

La geometría es un campo de las matemáticas que ha venido preocupando a las personas desde muy antiguo. Todos hemos oído hablar en algún momento de ciertos matemáticos notables de la Edad Antigua (Thales de Mileto, Pitágoras, Euclides, Arquímides de Siracusa, Eratóstenes de Cirene, Apolonio de Perge o Hipatia de Alejandría entre otros) que destacaron en geometría, lo cual nos indica la importancia que tiene desde muy antiguo esta disciplina de las matemáticas para conocer el mundo que nos rodea. Ya en tiempos más actuales Freudenthal (1973) reconoce a la geometría la importancia que se merece e involucra a los docentes de matemáticas a desarrollar ciertas habilidades, a la hora de impartir la materia, que favorezcan el aprendizaje significativo por parte de los alumnos, de tal manera que les conecte con el mundo real que nos rodea.

1.1 JUSTIFICACIÓN DEL TFM

No cabe duda de que las matemáticas son una ciencia de naturaleza abstracta y que esta materia es a veces transmitida a los alumnos de manera muy mecánica. En ocasiones los problemas y las actividades que se desarrollan en el aula se realizan siguiendo en detalle el libro de texto de la asignatura, donde los enunciados suelen estar planteados en términos matemáticos muy vinculados al tipo de operación que se quiere desarrollar y donde el contexto no es importante. Esto potencia que los alumnos no aprendan correctamente, adivinando en muchas ocasiones lo que tienen que hacer, pero sin llegar al trasfondo de por qué esa es la manera en la que se ha de resolver el problema, del que además no suelen ver su utilidad.

No contextualizar las matemáticas puede favorecer que, debido a su grado de abstracción, los alumnos no vean la utilidad de la materia y muchos de ellos se pregunten si realmente es útil lo que se les está transmitiendo en el aula. La contextualización implica que se eliminen las dudas sobre la utilidad de las matemáticas, recurso muy común de los alumnos, tal y como he podido apreciar durante mi periodo de prácticas, siendo el argumento de algunos de los alumnos para evitar el esfuerzo de aprender la materia. El aprendizaje de las matemáticas supone un gran esfuerzo por parte del alumno y cualquier duda sobre su utilidad justifica su despreocupación por la asignatura. Por ello, como profesores hemos de tratar de evitar la falta de interés por parte de los alumnos, contextualizando la materia de tal manera que se favorezca que éstos puedan ver la utilidad de los contenidos y conceptos que están aprendiendo, y como los pueden aplicar fuera del aula en la vida diaria.

Considerar, por tanto, el contexto a la hora de plantear un problema permite a los alumnos hacerles conocedores de la realidad que rodea la cuestión que han de resolver, y poder palpar la situación. El contexto a la hora de facilitar el aprendizaje es un elemento fundamental y, además, puede ser de gran ayuda a la hora de plasmar los conocimientos que están adquiriendo los alumnos a través de proyectos llevados al aula.

A todo lo anterior le podemos añadir que muchos docentes priorizan la docencia de otros contenidos de la asignatura de matemáticas frente a la enseñanza de la geometría, materia ésta que se suele trasladar al final del curso y es impartida sin profundizar lo necesario. La organización del currículum de matemáticas en la ESO supone un problema para la geometría ya que se traslada la enseñanza de esta materia a las últimas sesiones del curso, por lo que la materia en muchas ocasiones se imparte de forma superficial y sin que los contenidos se lleguen a impartir en su totalidad. A esto se une que la geometría suele ser impartida con metodologías tradicionales, a través de procesos mecánicos, que se basan en la memorización de definiciones, formulas y propiedades descontextualizadas, lo que lleva a que los procesos de visión espacial, desarrollo y justificación del problema no tengan un papel principal su en proceso de enseñanza-aprendizaje de la materia (Gamboa y Ballestero, 2010), por los que muchos alumnos perciben la geometría como una parte de la asignatura de matemáticas que es poco importante, ya que no ven su aplicación en la realidad.

Sin embargo, el fin principal del aprendizaje de la geometría es proporcionar al estudiante una conexión con el entorno real y para ello, el conocimiento de la materia, la intuición y las relaciones geométricas resultan de gran utilidad para manejarse en el mundo que le rodea (Barrantes, 2003). El no contextualizar con ejemplos reales que favorezcan la enseñanza de la geometría, es una dificultad añadida a la hora de impartir las unidades y desarrollar las explicaciones de manera abstracta (Goncalves, 2006, como se citó en Gamboa y Ballestero, 2010). Los estudiantes se suelen desenvolver bien en un contexto concreto que reconocen, pero el mismo problema situado en una situación diferente suele representar un obstáculo para ellos (Galindo, 1996).

Desde ese punto de vista la geometría tiene aplicación directa en disciplinas artísticas como la arquitectura, la escultura, la pintura y en disciplinas profesionales ligadas a la modificación del espacio (o del terreno), como la arquitectura o la ingeniería.

Así pues, el presente trabajo pretende realizar una aproximación a la arquitectura y al arte que resulte motivadora y de interés para los alumnos, contextualizando el aprendizaje del bloque de geometría de 3º de la ESO para las enseñanzas académicas, a través del espacio didáctico de la Catedral de Burgos y posteriormente llevarlo al aula a través de un proyecto en el que se puedan plasmar los conocimientos adquiridos. Este proyecto consistirá en el diseño de una edificación (vivienda) aplicando los conocimientos geométricos propios del arte gótico.

Por tanto, según el guion de la UBU para la elaboración del TFM y su Memoria (aprobado en la reunión de la Comisión del título, celebrada el 18 de septiembre de 2020), el presente TFM quedaría englobado dentro de la línea de trabajo correspondiente a: *"Propuestas innovadoras de intervención en el aula, así como elaboración y/o diseño de nuevos materiales, programas, instrumentos y otros recursos relacionados con alumnado de ESO, BACH, FP y enseñanza de idiomas, tanto si ha podido implementarse como si no"*.

1.2 MOTIVACIÓN DEL TFM

La geometría es una disciplina que siempre me ha gustado y que tiene relación directa con mi profesión como Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Mi trayectoria profesional me ha llevado en múltiples ocasiones a aplicar conocimientos geométricos para solucionar cualquier problema en el ámbito profesional. Las mediciones de cualquier proyecto se realizan aplicando conocimientos geométricos, y también en la vida cotidiana he aplicado en diferentes ocasiones los conocimientos en geometría para solucionar diferentes problemas del día a día a los que me he enfrentado.

Por otra parte, también está mi gusto por el arte, y en especial por todo lo que tiene que ver con la Arquitectura.

No obstante, la motivación del presente trabajo es triple, se juntan mi gusto por la geometría, mi gusto por el arte y el hecho de que este año 2021 es el octavo centenario de la Catedral de

Burgos, obra arquitectónica de la que siempre he estado enamorado como burgalés, hecho éste último el que me llevó a pensar en el presente trabajo.

Además, mi periodo de prácticas me ha llevado a confirmar el presente trabajo, ya que cuando pregunté a mi tutor de centro de Prácticum por el bloque de Geometría de las asignaturas de matemáticas de 2º de la ESO y de 3º de la ESO (en la disciplina de Académicas), me indicó que el bloque de Geometría siempre queda para final de curso y en ocasiones no se llega a impartir por falta de tiempo, lo cual afianzó aún más si cabe mi motivación por el presente trabajo.

1.3 OBJETIVOS

El objetivo principal del presente TFM es:

- Mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje a través de una propuesta didáctica del bloque de geometría de 3º de la ESO (en la modalidad de Enseñanzas Académicas), contextualizada en el espacio didáctico de la Catedral de Burgos y plasmado en diferentes actividades y un proyecto de diseño de un edificio (vivienda) aplicando los conocimientos geométricos propios del arte gótico.

La consecución de este objetivo implica la consecución de otros objetivos específicos:

- Analizar el estado de la enseñanza de las matemáticas en nuestro país.
- Analizar las dificultades del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría.
- Consolidar los conocimientos de geometría del alumnado a través de la utilización de conceptos propios de la arquitectura gótica y la historia.
- Hacer partícipe al alumnado para que reconozca conceptos y elementos geométricos en un contexto real, que sirva de apoyo o cimiento a la abstracción del razonamiento geométrico.
- Mejorar las habilidades del alumnado para la utilización de programas informáticos de geometría dinámica.

2 MARCO TEÓRICO

Para tener un criterio objetivo de la situación de nuestro país en la enseñanza de las matemáticas, se puede recurrir al último informe PISA (Programme for International Student Assessment, Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes), estudio de evaluación promovido por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) para concretar, describir y explicar lo que los alumnos de 15 años, de los diferentes países que participan, conocen y saben hacer al final de la etapa educativa obligatoria, aplicando sus conocimientos a diferentes situaciones y contextos. PISA se centra fundamentalmente en tres competencias consideradas troncales: lectora, matemática y científica.

2.1 INFORME PISA 2018

Cada tres años, desde la primera edición del año 2000, se viene realizando el informe PISA. Se trata de una medida de la calidad de los sistemas educativos de los países participantes en el estudio. El último informe publicado es el del año 2018. En concreto, en el presente trabajo se analiza el citado informe poniendo el foco en la competencia matemática de los alumnos españoles. En el informe se pueden ver los resultados de España (y de sus CCAA) comparados con la media de los países miembros de la OCDE y participantes.

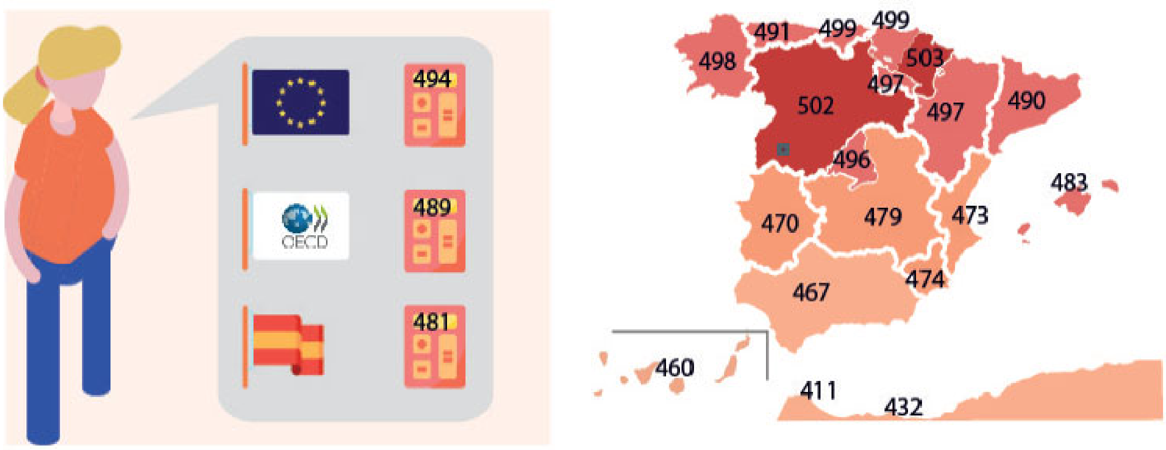


Figura 1. Puntuación media en matemáticas de la Unión Europea - OCDE - España (izquierda) y CCAA (derecha). Fuente: Informe PISA 2018 (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2018, p.38).

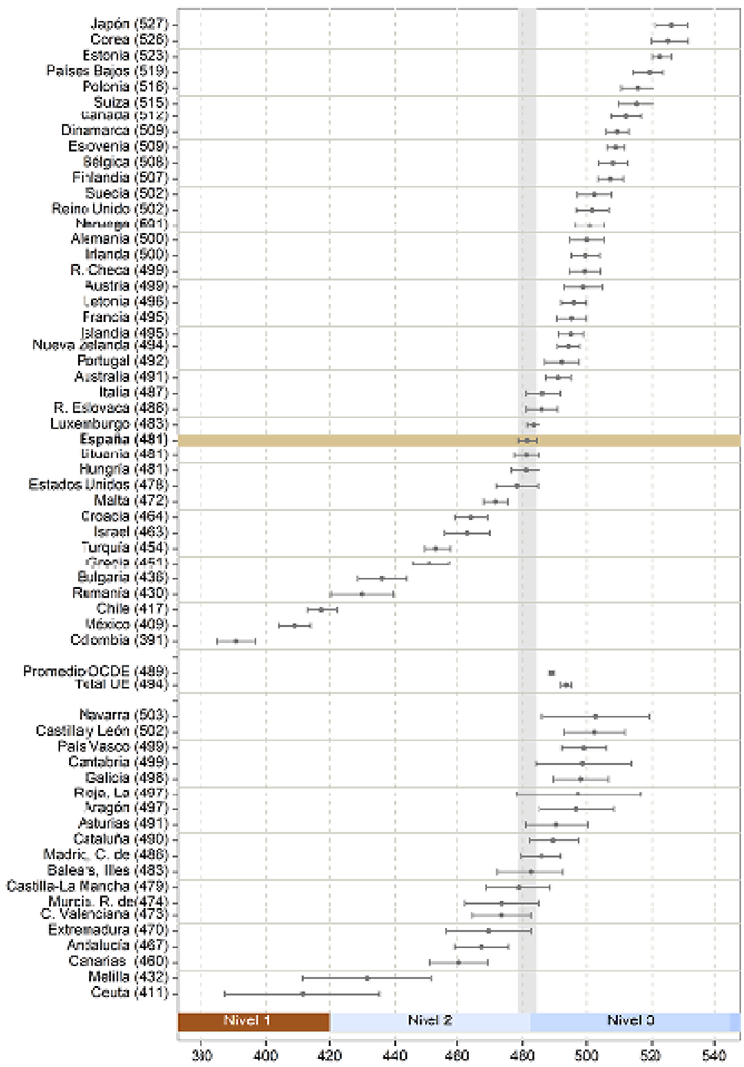


Figura 2. Puntuaciones medias estimadas en matemáticas junto con el intervalo de confianza al 95% para la media poblacional.
Fuente: Informe PISA 2018 (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2018, p. 50).

En el año 2018 España ha obtenido una puntuación en matemáticas de 481 puntos. La puntuación española se encuentra por debajo de la media de la puntuación de los países de la Unión Europea (UE) y también por debajo de la media de los países de la OCDE, con puntuaciones de 494 y 489 respectivamente. Si los resultados se analizan por CCAA, la Comunidad Foral de Navarra se sitúa primera seguida de Castilla y León, obteniendo puntuaciones de 503 y 502 puntos respectivamente, ambas CCAA por encima de la media de la UE y de la OCDE.

También es importante evaluar la evolución a lo largo del tiempo de la competencia matemática de los alumnos españoles comparados con la media del alumnado de la OCDE para ver la tendencia española. Se muestran a continuación los resultados obtenidos por la media de la OCDE y por España, en PISA 2009, 2012, 2015 y 2018.

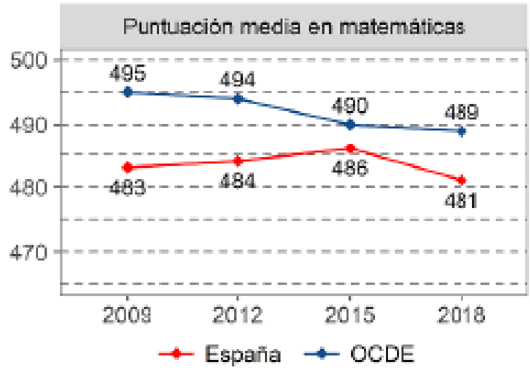


Figura 3. Tendencia de los resultados en competencia matemática de España y de la media de la OCDE. Fuente: Informe PISA 2018 (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2018, p. 51).

En el último informe PISA (2018) se ha perdido la tendencia creciente de mejora de los resultados matemáticos, habiendo caído a niveles inferiores a 2009.

Asimismo, el informe PISA establece 6 niveles de rendimiento, que indican el tipo de tareas que los alumnos son capaces de realizar con éxito, es decir, se trata de unos indicadores de las destrezas matemáticas que cada alumno es capaz de desarrollar. Cada nivel requiere un mínimo de habilidades, conocimientos y comprensión dentro de la escala matemática. Los niveles van del nivel 1 al 6, siendo el nivel 1, el peor, en lo que a competencia matemática se refiere, y el nivel 6, el mejor. El nivel 2 de rendimiento en la competencia matemática es lo que PISA establece como nivel mínimo que deberían adquirir todos los alumnos al terminar la ESO.

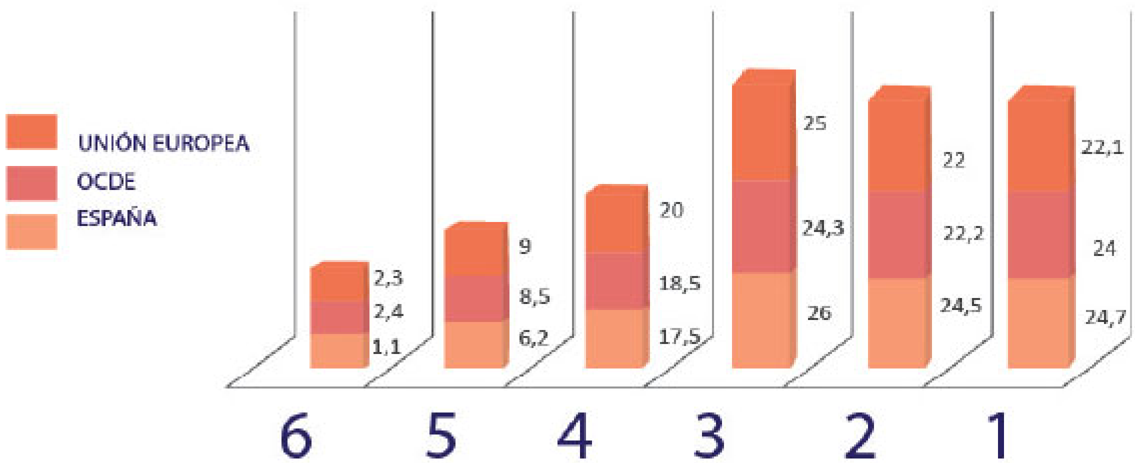


Figura 4. Distribución por niveles de rendimiento en matemáticas de la Unión Europea, la OCDE y España. Fuente: Informe PISA 2018 (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2018, p.39).

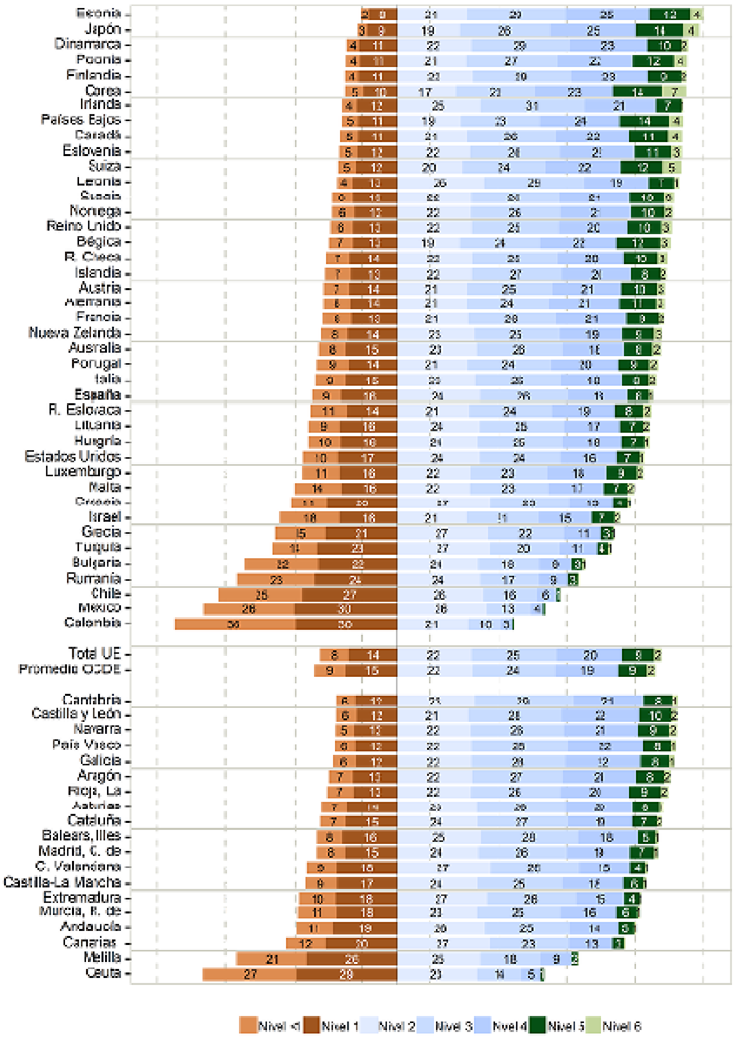


Figura 5. Distribución de los estudiantes por niveles de rendimiento en matemáticas.
Fuente: Informe PISA 2018 (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2018, p. 66).

Se comprueba que la proporción de los alumnos españoles en niveles inferiores es mayor que la media de la UE y de la OCDE, así como la proporción de alumnos españoles en niveles de mayor rendimiento es inferior a la media de la UE y de la OCDE.

Los resultados han decaído frente a los resultados de otras ediciones anteriores, lo cual rompe la tendencia en la evolución positiva que se venía produciendo.

2.2 LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Las matemáticas en sus orígenes, y la geometría en particular, derivan de la necesidad humana para solventar ciertos problemas que se plantearon en la antigüedad, como respuestas a cuestiones arquitectónicas (áreas, volúmenes), agrarias (parcelaciones), es decir, problemas geométricos que tenían que ver con el espacio. La geometría conecta al que la aprende con la vida cotidiana y el mundo real y debido a su aplicación a diferentes contextos y a su capacidad para formar razonamiento lógico en las personas ha sido considerada un pilar de la formación académica y cultural del individuo (Báez e Iglesias, 2007). Su contribución genera en los individuos habilidades para visualizar, conjeturar, pensar e intuir, resolver problemas, argumentar de manera lógica y razonar deductivamente (Jones, 2002, como se citó en Gamboa y Ballestero, 2010).

The National Council of Teachers of Mathematics (2000, como se citó en Gamboa y Ballestero, 2010) justifica la necesidad de que los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría se desempeñen en un marco contextualizado que potencie su utilidad y aplicación en la vida real, así como a desarrollar en el alumnado ciertas habilidades como el razonamiento y la justificación.

La geometría favorece la adquisición de ciertas capacidades como la percepción visual, el razonamiento lógico e incluso la expresión verbal, así como la capacidad para ser aplicada a problemas concretos de otras áreas de las matemáticas u otras materias. Así mismo, los contenidos que se pretenden enseñar en geometría tratan de crear una serie de destrezas cognitivas que puedan ser aplicadas en muchos casos particulares. La forma general para trabajar esta materia es a través de la resolución de problemas como metodología de aprendizaje y motivación del alumnado. (Barrantes y Balletbo, 2012).

También, los programas de geometría dinámica, tipo Geogebra u otros, son un recurso muy valioso con el que poder trabajar diferentes aspectos de la geometría. Estos programas son una ayuda importante para desarrollar destrezas y habilidades en el alumno, y en coherencia a la búsqueda de otras formas de enseñanza, la tendencia actual es trabajar con materiales que desarrollen una geometría dinámica (Damiani et-al., 2000, como se citó en Barrantes y Balletbo, 2012), que sirve para llevar al aula una metodología activa de enseñanza mediante el dinamismo que dichos programas pueden generar a la hora de resolver las actividades geométricas que se planteen a los alumnos.

Para que los alumnos lleguen a conseguir las habilidades y destrezas indicadas anteriormente, el aprendizaje de la geometría debe estar intrínsecamente relacionado con prácticas perceptibles que cimienten un aprendizaje significativo en el estudiante y a su vez, las habilidades visuales deben basarse en un razonamiento teórico para conseguir una argumentación rigurosa (Castiblanco et al., 2004, como se citó en Gamboa y Ballestero, 2010).

Según Báez e Iglesias (2007) los principios didácticos que han de regir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría son los siguientes:

1. *Principio globalizador e interdisciplinar:* Se trata de un acercamiento a la realidad en donde los elementos están estrechamente interrelacionados entre sí y unos son consecuencias de los otros.
2. *Integración del conocimiento:* El conocimiento no se puede fragmentar, sino que tiene que ser considerado como un todo (holístico) integrado y complejo, por lo que se deben incluir objetivos, contenidos, metodología y evaluación, todo ello a través de la teoría y práctica conjunta.
3. *Contextualización del conocimiento:* Adaptación de los contenidos al nivel de los alumnos, en lo que se refiere a necesidades y características, a través de situaciones reales conocidas por los alumnos (hechos concretos conocidos).
4. *Principio de flexibilidad:* El proceso de enseñanza-aprendizaje debe ser flexible y adaptable a las necesidades e intereses de los alumnos, en lo que a su organización e impartición se refiere, sin olvidar los contenidos que se quieren trabajar.
5. *Aprendizaje por descubrimiento:* El alumno debe participar activamente en su formación siendo el protagonista de su aprendizaje. Esto debe ser favorecido en un proceso de enseñanza-aprendizaje activo que además inducirá al alumno a la investigación, la reflexión y la búsqueda del conocimiento.
6. *Innovación de estrategias metodológicas:* Utilización de estrategias didácticas, bien individuales o grupales, que favorezcan la construcción de aprendizaje a través del descubrimiento y la investigación.

Estos principios hacen ver la enseñanza de la geometría a través de una óptica innovadora que se aleja de la metodología tradicional basada en la clase magistral, en donde los contenidos se trasladaban a los alumnos a través de memorización de definiciones, fórmulas, propiedades y teoremas que se aplicaban de forma descontextualizada.

Según Gamboa y Ballestero (2010), la enseñanza de la geometría se ha desvirtuado, habiéndose dejado de lado procesos tan importantes como la visualización, el razonamiento y la argumentación, los cuales son trascendentales para llegar a un aprendizaje significativo de la geometría. Además, dicha enseñanza debe estar encaminada al desarrollo de habilidades en el alumnado como: la exploración, la visualización, la argumentación y la justificación que les servirán para evitar la memorización, ayudándoles a descubrir y a aplicar conocimientos y a obtener conclusiones. Para ello, el educando debe tener un papel activo en el aprendizaje siendo el promotor del mismo con una metodología activa adecuada, en donde el docente u orientador se valga de actividades y recursos adecuados que guíen al alumnado y sirvan para propiciar un aprendizaje significativo que fomente la deducción, la intuición y la creatividad evitando limitar su nivel cognitivo a aplicar formulas aprendidas de manera memorística sin capacidad de reflexionar sobre lo que está haciendo. Los docentes guiarán los procesos de enseñanza de la geometría para generar situaciones que fomenten el desarrollo personal y social del alumnado.

Además de una metodología activa guiada, un recurso que puede contribuir a la adquisición de un aprendizaje significativo de la geometría son los recursos tecnológicos que actualmente podemos utilizar en las aulas (TIC). Como docentes es preciso adaptarnos y utilizar las TIC en la práctica docente, ya que estas motivan y estimulan a los alumnos (Soto, Herrera y Nappa, 2012) puesto que éstos pertenecen a una época digital que les capacita para el empleo de dichas tecnologías. Aplicaciones como Geogebra u otras contribuyen a la visualización de actividades de manera dinámica lo cual facilita la capacidad de visualización, modelización y exploración en los alumnos. También estas aplicaciones favorecen la autonomía del alumno promoviendo su propio aprendizaje. Las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas deben ser usadas desde un enfoque constructivista, es decir, como herramientas de apoyo para el aprendizaje, con las que se desarrollan destrezas cognitivas superiores; como medios integradores de lo que ya se conoce y lo nuevo, facilitando la construcción de aprendizajes significativos; y como estimuladoras del proceso cognitivo y la memoria (García-Valcárcel y Domingo, 2011). El uso de las TIC se ha de hacer de manera adecuada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de tal manera que su empleo facilite la interiorización de contenidos de manera significativa, así como fomente el sentido crítico y la autonomía del alumno. Además, las aplicaciones de geometría dinámica como Geogebra, permiten visualizar y manipular conceptos abstractos que nos conectan con el problema que analizamos lo que nos permite poder acceder a niveles superiores de conocimiento. Esto ayuda de manera importante al alumno en la comprensión de la geometría, ya que lo que antes (en otro momento en el que no existían las TIC) se podía intuir ahora se puede visualizar generando un aprendizaje significativo en el alumno.

Para evitar la muy abstracta metodología tradicional de enseñanza de la geometría, que se basa en conceptualizar figuras y plasmarlas en el cuaderno sin contar, en general, con objetos o modelos reales que permitan captar mejor los contenidos objeto de la enseñanza, los docentes tienen el deber de encontrar y/o generar estratégicas que potencien el nivel cognitivo de sus alumnos, es decir, que desarrollen la inteligencia a través del razonamiento (Goncalves, 2006, como se citó en Vargas y Gamboa, 2013).

2.3 NIVELES DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO Y FASES DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Van Hiele (1986, como se citó en Sarasua, 2006) concibe la geometría desde una doble vertiente: por un lado, como ciencia y, por otro lado, como instrumento válido para organizar el intelecto matemático. Diferencia cinco niveles de razonamiento y establece una gradación entre ellos según la manera de razonar sobre las tareas geométricas. Estos niveles sirven para conocer el lugar en el que se ubica el estudiante para hacer posible un adecuado aprendizaje (Arrieta, 1992).

El modelo de Van Hiele tiene una doble dimensión (Jaime y Gutiérrez, 1990):

a) Descriptiva: define cinco formas secuenciadas de razonar matemáticamente, es decir, los mencionados cinco niveles de razonamiento llamados: de reconocimiento, de análisis, de clasificación, de deducción formal y de rigor, a través de ellos los individuos (estudiantes de infantil, primaria, secundaria o bachillerato) progresan en su capacidad de razonamiento matemático desde el inicio del aprendizaje hasta el máximo nivel de capacitación en cierta área de la geometría.
b) Didáctica: ofrece al docente una serie de pautas para ayudar a sus alumnos para que logren con mayor facilidad un nivel cognitivo superior de razonamiento. A dichas pautas las llama fases de aprendizaje.

A continuación, se describen los cinco niveles de razonamiento de Van Hiele según diversas fuentes (Fouz y De Donosti, 2005, Jaime, 1993, Jaime y Gutiérrez, 1994, y Beltranetti, Esquivel y Ferrari, 2005, como se citó en Vargas y Gamboa, 2013):

- NIVEL 1.- Reconocimiento o visualización: reconocer figuras como un todo por parte del individuo, en vez de no diferenciar partes o componentes en ellas. Puede percibir las figuras globalmente pero no conocer sus propiedades matemáticas, las describe visualmente y las compara con elementos conocidos. No tiene un lenguaje básico para referirse a ellas.

- NIVEL 2.- Análisis: el estudiante es capaz de analizar propiedades y partes o elementos de las figuras y las identifica en base a ellas, pero no relaciona ni clasifica las propiedades de diferentes familias de figuras. Determina las propiedades de manera empírica por manipulación o experimentación. No elabora definiciones ya que muchas dependen de las propiedades.
- NIVEL 3.- Deducción informal u orden: el estudiante conoce las propiedades de las figuras y como derivan unas de otras e interrelaciona las figuras entre familias de estas y entre sus componentes. Es capaz de establecer las condiciones necesarias y suficientes que han de cumplir las figuras geométricas y es a partir de ahí cuando las definiciones adquieren significado. Es capaz de seguir demostraciones, pero no las entiende a nivel global, por lo que no puede organizar razonamientos lógicos que justifiquen sus observaciones basadas en la manipulación. No comprende el sistema axiomático de la geometría ya que no es capaz de realizar razonamientos lógicos formales. Sin embargo, sí es capaz de llegar a entender en este nivel que unas propiedades se deducen de otras.
- NIVEL 4.- Deducción: el estudiante es capaz de deducir, y realizar demostraciones formales y lógicas ya que necesita justificar las propuestas planteadas. Es capaz de manejar y comprender las relaciones existentes entre las propiedades y llega a plantearlas como sistemas axiomáticos de las matemáticas que, por otra parte, ya comprende. Entiende que se puede llegar al mismo resultado partiendo de planteamientos diferentes, por lo que entiende que se puede llegar al mismo resultado a través de diferentes demostraciones. El estudiante al alcanzar este nivel tiene una visión globalizadora de las matemáticas. Así mismo puede realizar diferentes desarrollos para deducir propiedades sin embargo puede realizar los razonamientos sin el necesario rigor que no reconoce.
- NIVEL 5.- Rigor: el estudiante es capaz de analizar y comparar entre si el grado de rigor de diferentes razonamientos deductivos. Es capaz de estimar apreciar los sistemas axiomáticos de la geometría en lo que se refiere a consistencia, independencia y completitud. Entiende la geometría de manera abstracta. Este nivel es propio de estudiantes de universidad con excelentes capacidades en geometría (Alsina, Fortuny y Pérez, 1997, Gutiérrez y Jaime, 1991, como se citó en Vargas y Gamboa, 2013).

Como podemos ver, los niveles de razonamiento están jerarquizados de menor a mayor. El paso de un nivel de razonamiento a otro supone que el estudiante ha logrado conseguir el nivel inferior, que es a su vez la base del siguiente nivel. El salto de un nivel a otro implica que el alumno ha desarrollado un nivel superior en su capacidad de razonamiento, en base a las experiencias acumuladas en el nivel inferior.

El modelo Van Hiele representa un esquema de las dificultades de los alumnos cuando aprenden geometría y sirve para realizar diseños instruccionales de geometría en secundaria. También interpreta los diferentes escalones por los que pasa el alumno a la hora de aprender geometría desde cuando es un niño, en el nivel básico, donde solo se limita a observar el espacio sin conocer las propiedades de las figuras, hasta el último nivel (propio de la universidad) donde se deducen aspectos abstractos y formales de la geometría (Morales y Camacho, 1994)

Por otra parte, el modelo Van Hiele establece cinco fases de aprendizaje. Estas fases ayudan al docente a realizar el diseño de las unidades didácticas. Son unas etapas que gradúan y organizan las actividades preparadas por los docentes, que ha de hacer el alumno para llegar a absorber la experiencia necesaria que le transporte a un nivel superior de razonamiento (Gutiérrez y Jaime, 2012).

Estas fases de aprendizaje no son exclusivas de un niel de razonamiento, sino que el estudiante ha de pasar por la primera fase hasta la quinta en cada nivel de razonamiento. En cada fase el estudiante ha de realizar diferentes actividades adecuadas a la misma, y ha de transitar por cada una de las fases y superarlas en cada nivel de razonamiento. Una vez ha superado cada una de las fases, el estudiante habrá alcanzado el siguiente nivel de razonamiento. A continuación, se describen las fases de aprendizaje en base a diversos autores (Jaime, 1993, y Fouz y De Donosti, 2005, como se citó en Vargas y Gamboa, 2013):

- FASE 1: **Información**. Se trata de una toma de contacto con el tema que se pretende estudiar. Es deber del docente identificar los conocimientos previos y el nivel de razonamiento que el alumno tiene sobre el tema. El docente debe informar a los alumnos del tema objeto de estudio que van a realizar, los materiales a utilizar la metodología y los métodos de trabajo, el tipo de problemas a resolver, etc.
- FASE 2: **Orientación dirigida**. Se trata de que los alumnos realicen problemas y actividades guiadas al objeto de que puedan aprender y descubrir las relaciones o conceptos básicos de los conocimientos que deben aprender. Los problemas planteados

deben conducir a los alumnos a los objetivos, es decir, hacia las propiedades y resultados que han de conocer e interiorizar. Es función primordial del docente la elección de estos problemas y actividades, y además debe guiar a sus alumnos (cuando éstos lo necesiten) hacia el resultado (evitando dar la solución).

- FASE 3: **Explicitación**. Los estudiantes deben explicitar por escrito o con sus palabras los resultados obtenidos, así como discutir e intercambiar sus experiencias con sus compañeros o con el docente. Todo lo anterior al objeto de ser conscientes de las relaciones y características encontradas, así como para ir formando un lenguaje técnico referente al tema estudiado y propio de ese nivel Se trata de una fase en la que no hay un aprendizaje nuevo en cuanto a contenidos o estructuras sino un repaso del trabajo anterior a través de la práctica, del perfeccionamiento del lenguaje así como de las conclusiones que se obtienen, lo que produce un cimiento adecuado de la malla de conocimientos que se está generando.
- FASE 4: **Orientación libre**. Se trata de una fase de consolidación del aprendizaje de las fases anteriores. Los alumnos deben utilizar todos los conocimientos adquiridos en fases anteriores para realizar problemas diferentes y, quizás, incluso más complejos. El docente planteará a los estudiantes problemas que no sean de aplicación directa, sino que puedan ser más abiertos (con varios caminos hacia la solución y con diferentes soluciones o ninguna) y en los que puedan plantear nuevas propiedades o relaciones. Además, el docente no debe casi ayudar a los alumnos en la resolución, es decir, su ayuda debe ser mínima pues es el estudiante el que debe solucionar el problema aplicando los conocimientos y el lenguaje aprendido en fases anteriores.
- FASE 5: **Integración**. Los alumnos terminan adquiriendo una visión general de todos los conocimientos del tema y terminan de formar las relaciones entre diferentes elementos, maneras de razonar, formas de trabajar, integrándolo todo ellos con los que tenían de antes. El docente guiará todo este proceso mediante resúmenes de la información que favorezcan la integración indicada. Las actividades o problemas que se planteen deben recopilar la organización de todo el conocimiento aprendido, pero no debe tener nuevos contenidos ni nuevos conocimientos. Se trata por tanto de actividades que contengan una visión estructurada y global del tema que integre todo lo aprendido así como lo que ya sabían de antes, la manera de razonar, procedimientos y algoritmos, todo ello de manera integrada que facilite la comprobación del docente para ver si el alumno ha conseguido alcanzar esta fase de aprendizaje.

Atravesar todas las fases de aprendizaje supone ir adquiriendo un conocimiento nuevo y relacionarlo con el que ya se tenía, es decir, ir generando una malla interrelacionada de conocimientos, así como ir estructurando la forma de pensar del alumnado, todo ello necesario para progresar en los diferentes niveles de razonamiento. La evaluación del modelo de Van Hiele (Fouz y De Donosti, 2005, como se citó en Vargas y Gamboa, 2013) pasa por la valoración de cada alumno, donde se ha de tener en cuenta las razones que el alumno da para responder determinadas preguntas. En la evaluación se deben considerar los siguientes aspectos:

- El nivel de razonamiento, que depende del área de la matemática que se evalúe.
- Es más importante como contestan y la razón de la respuesta que si no responden o responden bien o mal.
- El nivel del alumno está en la respuesta, no en la pregunta.
- El alumno puede estar en unos contenidos en un nivel y en otros estar en otro nivel diferente.
- Cuando se encuentran en la frontera entre un nivel u otro puede ser difícil determinar donde se encuentran.

2.4 EL GÓTICO COMO FORMA DE ARTE Y GEOMETRÍA

Según Ruiz (1999), es a partir del siglo IV a.C. cuando en la cultura griega se inician 2 caminos diferentes en la geometría. Por un lado, está el camino de la geometría como ciencia y, por otro lado, está el de la geometría elemental de los oficios. Este segundo camino tiene su aplicación en la arquitectura y solamente está interesado en la habilidad operativa de regla y compás, para poder llevar a la práctica las formas geométricas, siendo ajeno a reflexiones geométricas teóricas profundas, y esto fue así hasta la etapa renacentista en donde se empiezan a fusionar teoría y práctica.

Durante la Alta Edad Media la geometría se estanca e incluso retrocede en occidente y, es hasta avanzada la Baja Edad Media cuando la geometría vuelve a recuperar el protagonismo de la cultura griega (Ruiz, 1999). Es en este periodo cuando se desarrolla el arte Gótico.

Ruiz (1999) nos indica que, la escuela de traductores de Toledo fundada en el siglo XII tradujo al latín numerosos textos antiguos que habían sido traducidos a lengua árabe (la cultura griega en occidente desapareció, pero afortunadamente en oriente se fundió con otras aportaciones culturales y fue asimilada por el Islam tres siglos antes, desde el siglo IX hasta el siglo XII, siendo la cultura árabe la portadora del saber del momento). Esto supuso un gran avance para occidente ya que recuperó los conocimientos del mundo clásico. Gracias a ello fue como avanzó la geometría y la ciencia medieval, y como se desarrolló el arte gótico.

Hasta ese momento, la geometría de los oficios o geometría fabrorum, de regla y compás, se transmitía por tradición oral de manera no sistemática y fragmentaria dentro del gremio de los oficios (Ruiz, 1999).

La ciencia musulmana desarrolló al máximo las posibilidades de la geometría en los oficios de la construcción. La geometría euclídea a través de fórmulas sencillas está presente en la base de sus diseños arquitectónicos, mocárabes, yeserías y alicatados, y es su cuerpo técnico lo que se denomina como geometría fabrorum (Ruiz, 1999).

Ruiz (1999) nos indica que la Practica Geometriae escrita en 1220 por Fibonacci es un texto de geometría teórica para gente culta que está escrito en latín. Aplica el álgebra a problemas geométricos, algo muy novedoso en occidente en ese momento, pero alejado de la geometría fabrorum. Las soluciones planteadas en el libro de Fibonacci no son las usadas por los agrimensores que prefieren aplicar el método vulgarem.

Avanzado el siglo XIII es cuando empiezan a aparecer obras de geometría práctica dirigidas a profesionales de los oficios. Pero quizás la obra más conocida es el Cuaderno de notas de Villard de Hônnecourt, maestro cantero de dicho siglo, que sigue la tradición constructiva de su gremio. Se trata de un conjunto de dibujos y enseñanzas de oficio con una fuerte presencia de la geometría fabrorum donde la técnica del dibujo se basa en el arte de la geometría y se utiliza como instrumento de control formal (Ruiz, 1999).

Los métodos de la geometría fabrorum cada vez tienen mayor importancia dada la complejidad creciente de los edificios góticos, ya que ellos son capaces de coordinar mediante fórmulas la totalidad de detalles y elementos de la construcción. Las fórmulas utilizadas son trazados proporcionales que interrelacionan unos elementos con otros independientemente de la unidad empleada para medir en cada edificio. Este modo de actuar se basaba en recursos que no siempre eran necesariamente geométricos, procedentes del conocimiento empírico de cada gremio que se venía transmitiendo oralmente y a través del aprendizaje manual (Ruiz, 1999).

Los conocimientos matemáticos quedaban para los teóricos de esta ciencia, no para los canteros, arquitectos o artesanos que trabajaban en la construcción, los cuales tenían conocimientos de las matemáticas principalmente prácticos. Las reglas numéricas que utilizaban para el control de proporciones en la construcción se basaban en números enteros normalmente sencillos, o bien en reglas geométricas aprendidas con los años de proporciones implícitas que el cantero aplicaba sin ser consciente, en muchas ocasiones, de su empleo (Ruiz, 1999).

La tradición geométrica euclídea apoyada en procedimientos empíricos muy elaborados es el fundamento que subyace en la construcción de la Edad Media. Está basada en leyes simples que paso a paso permiten coordinar y generar formas complejas. El hecho de que los fundamentos de la geometría fabrorum, es decir, las reglas de oficio, fueran simples, no implica que su aprendizaje y aplicación fuera sencilla, ya que el aprendizaje gremial era un camino largo y penoso, y pocos alcanzaban el grado de maestros (Ruiz, 1999).

El conocimiento de esta tradición geométrica se focaliza en los gremios de la construcción, que eran los que la difundían. En los gremios se aprendían y evolucionaban los conocimientos prácticos de la geometría y sobre ellos se guardaba riguroso hermetismo gremial (Ruiz, 1999).

Ruiz (1999) indica que, por el conocimiento de algunos tratados medievales del final de la Edad Media, podemos valorar los contenidos de conocimiento geométrico de la práctica medieval (de final del siglo XV) y también conocer los conocimientos de geometría que un profesional importante de la época tenía. Sus conocimientos de geometría se reducían a siete formulas breves: a) determinar 2 rectas perpendiculares entre sí, b) trazado de un pentágono regular, c) trazado de un heptágono regular, d) trazado de un octógono regular, e) desarrollo de una circunferencia (cálculo gráfico), f) obtener el centro de un arco, g) determinar un triángulo de igual área a la de un cuadrado o al revés. Todas se pueden resolver con regla y compás y aunque no todas son exactas el grado de precisión es suficiente para la época y el tipo de trabajo.

Los maestros canteros y los maestros arquitectos, con elementos y herramientas tan rudimentarias como las que existían en el siglo XIII, fueron capaces de llegar a la perfección en la ejecución de las formas y las dimensiones de las catedrales góticas. Las formas y estructuras geométricas que nacieron de la geometría fabrorum han generado elementos funcionales o decorativos, conjugando proporciones, simetrías y ritmos, todo ello en armonía, integrado para llegar a la perfección, a lo divino, que era la finalidad última de la construcción tal y como se refleja en la Catedral de Burgos, en la inscripción en piedra que se puede leer en el cimborrio "IN MEDIO TEMPLI TUI LAUDABO TE ET GLORIAM TRIBUAM NOMINI TUO QUI FACIS MIRABILIA" (Catedral de Burgos, s.f., párr. 4), texto tomado de los salmos, que revela el sentido de la catedral, y que traducido quiere decir: "En medio de tu templo te alabaré y daré gloria a tu nombre porque haces maravillas" (Catedral de Burgos, s.f., párr. 4).

La relación entre Geometría, Diseño y Arquitectura es milenaria, y ser capaz de conocer las relaciones entre Geometría, Diseño y Arquitectura supone tener la capacidad de desenvolverse tridimensionalmente y poder tener capacidad para desarrollar procesos de creatividad espacial. Según Alsina (2005), algunos aspectos geométricos enlazados directamente al Diseño y a la Arquitectura, son: la orientación geográfica, la modelización geométrica, la representación geométrica, la modularidad, la proporción, la inclinación estructural, la fractalidad, la acústica, la preparación para terremotos y desgracias, las formas poligonales y circulares, las curvas y los arcos, las formas poliédricas, las superficies quebradas, las formas conoidales y cilíndricas, las esferas y paraboloides de revolución, los hiperboloides de una hoja, el paraboloide hiperbólico, la simetrización ya la forma y función en Diseño. De todos estos aspectos, propios de la arquitectura moderna, los aspectos tenidos en cuenta para realizar las construcciones góticas son: la orientación geográfica, la modelización, la representación, la modularidad, la proporción, la fractalidad, la forma y la simetría.

Los docentes que enseñan geometría se enfrentan al reto de transmitir a los estudiantes la importancia del mundo que nos rodea y su relación directa con la materia que imparten, esto debe ser no solo un reto sino también un objetico de los docentes. Barrantes y Zapata (2008) indican que los docentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría deben ralentizar el proceso en la parte de la materia correspondiente a las figuras, realizando ejercicios y actividades interdisciplinarias con otras materias como el arte. Es importante ampliar el número de actividades de laboratorio en donde las propiedades y conceptos concernientes a las figuras geométricas se manejen y puedan palpar o se realicen investigaciones o proyectos de las mismas (Barrantes, 1998, como se citó en Barrantes y Zapata, 2008).

Las curiosidades matemáticas, la relación con otras materias, la historia y la evolución de las matemáticas son importantes herramientas con las que cuenta el docente para motivar o despertar el interés del alumno para el aprendizaje de la geometría (Barrantes y Balletbo, 2012)

Todo lo anterior nos indica que la geometría es una materia de suma importancia para el desarrollo del individuo y el docente ha de aprovecharse de ello para potenciar diferentes habilidades y formas de pensamiento a despertar en el estudiante sin olvidar las posibilidades actuales que ofrece la tecnología y los programas de geometría dinámica que hay en el mercado al alcance de todos.

2.5 LA CATEDRAL DE BURGOS

La construcción de la catedral de Burgos que ahora conocemos se inició el 20 de julio de 1221. Anterior a esa fecha, en la misma ubicación, había una catedral románica que se construyó entre 1080 y 1095. El 30/11/1219, en la catedral románica, se celebró un evento muy importante: la boda del Rey de Castilla Fernando III, el Santo, con Beatriz de Suabia.

Poco después, el Rey Santo y el Obispo D. Mauricio (prelado de la diócesis burgalesa en aquel momento), decidieron levantar un nuevo templo de estilo gótico, nuevo estilo constructivo que ya se estaba desarrollando por Europa, que sustituyese al anterior templo románico. El obispo había estudiado en París y conocía ese estilo novedoso con el que se estaban construyendo las grandes catedrales de Francia, alguna de ellas ya concluida. El obispo se encargó de traer a Burgos a arquitectos y maestros franceses para la construcción de la nueva catedral siguiendo los modelos de las grandes catedrales francesas (Notre Damme de París, las de Reims, Amiens, Chartres, Bourges…) siendo la primera gran catedral gótica que se construía en Castilla y León (Catedral de Burgos, s.f.).

La construcción de la catedral de Burgos fue meteórica. En nueve años (1230) quedó dispuesta para el culto, recibiendo su primera consagración, habiéndose terminado en aquel momento las obras del coro-ábside, la cabecera de la catedral, las naves de la girola y las capillas absidiales. A partir de esa fecha se derribó la antigua catedral románica y se continuó con la construcción de la nave del crucero, sus portadas y las naves central y laterales que quedarían terminadas en 1260, año en el que se consagró todo el templo, 39 años después de su inicio. Después de esta fecha la catedral se siguió ampliando y enriqueciendo con nuevas construcciones. En el último tercio del siglo XIII se construye el claustro nuevo, anexo a la nave sur de la girola; también en ese periodo se van remodelando las capillas absidiales. Desde finales del siglo XIV hasta el siglo XVIII se fueron construyendo capillas de manera intermitente. Pero es a final del siglo XV cuando en la catedral se construyen tres obras de suma importancia: la Capilla de los Condestables, las agujas y el cimborrio. Merece la pena indicar que el cimborrio actual es el tercer crucero que ha tenido la Catedral de Burgos, pues inicialmente se salvaba dicho espacio con una bóveda sencilla de crucería que, en el siglo XV, el obispo D. Luis Acuña, mandó derribar para ser sustituida por un cuerpo de luces que construyeron Juan y Simón de Colonia, y que finalmente quedó concluido hacia finales del siglo XV. Dicho crucero debía ser una obra de gran belleza en base a los testimonios de viajeros europeos, pero la noche del 3 al 4 de marzo de 1539 ese crucero se desplomó con gran estrépito (al parecer los pilares que lo sostenían estaban agrietados). Ese mismo año se inició la obra de un nuevo crucero encargado a Juan de Vallejo y a Francisco de Colonia. En 1555 estaba prácticamente terminado pero las obras duraron hasta 1568. De este último crucero que combina todas "las galas del gótico y todos los lujos del renacimiento" (Catedral de Burgos, s.f., párr. 2) decía el Rey Felipe II que "más parecía obra de ángeles que de hombres" (Catedral de Burgos, s.f., párr. 1). Las ampliaciones de la catedral se dan por concluidas en el siglo XVIII con la construcción de la nueva sacristía y dela Capilla de las Reliquias (Catedral de Burgos, s.f.).

La catedral de Burgos fue declarada Monumento Nacional el 8 de abril de 1885, y el 31 de octubre de 1984 fue declarada Patrimonio de la Humanidad por la Unesco. Se trata de la única catedral española que, de manera independiente, goza de esta distinción sin estar unida a otros edificios o estar unida a un centro histórico.

En la catedral de Burgos se encuentran encerrados los secretos de la geometría fabrorum que aplicaban los maestros arquitectos y canteros de la Baja Edad Media. Toda esta riqueza matemática se puede analizar a través de la rama teórica de la geometría, es decir, analizando su geometría desde el punto de vista de las matemáticas, y ser transmitida para que resulte de utilidad educativa y cultural. La Catedral de Burgos tiene escondidos muchos "tesoros matemáticos" que pueden contribuir a generar la inquietud y el interés del alumnado. Así pues, resulta de interés la Capilla Mayor y el altar, el trasaltar, la girola y las capillas absidiales y su relación con el decágono y el triángulo áureo; la Capilla de los Condestables, su bóveda calada y sus frisos, y su relación con las transformaciones geométricas, los octógonos y los cuadrados, los polígonos estrellados así como el significado matemático de la vésica piscis, protagonista fundamental del arte gótico; las agujas y su relación con la proporción áurea, con el rectángulo áureo, con el triángulo dorado y con la pirámide octogonal, así como las tracerías caladas y su relación con arcos, tangencias, curvas, simetrías y triángulos de Releaux; los arcos de la catedral y sus diferentes implicaciones con tangencias, curvas y simetría; los rosetones con diferentes números de lóbulos y sus relaciones con diversas figuras geométricas como los triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y decágonos; el cimborrio y su relación con el cuadrado y el octógono, las razones de semejanza, los polígonos estrellados; y la escalera dorada y su relación con los rectángulos áureos y el ritmo de las diferentes potencias de proporción áurea (Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", 2021).

3 PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

3.1 MARCO LEGISLATIVO

Ahora se analiza el marco legislativo para acotar el currículo, los contenidos, los objetivos, las competencias, los criterios de evaluación y su concreción en los estándares de aprendizaje evaluables, que comprenderá la propuesta de intervención centrada en el bloque de geometría de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del 3er curso de la ESO.

La Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE) tiene la finalidad de poner en marcha un ordenamiento legal renovado que incremente las posibilidades educativas y formativas de los ciudadanos, que favorezca la obtención de unos mejores resultados educativos por parte del alumnado, y satisfaga las demandas sociales para la mejora de la calidad educativa. (BOE núm. 340, 2020). La Educación Secundaria se mantiene con la estructura de las leyes anteriores, habiendo dos ciclos, el primero con tres cursos escolares y el segundo ciclo con un curso de carácter propedéutico (o de enseñanza preparatoria para la siguiente etapa educativa), con las opciones de elección de enseñanzas académicas o enseñanzas aplicadas.

En dicha ley se mantienen la estructuración de los objetivos por etapas y continúan la estructuración de las asignaturas en materias troncales, específicas y de libre configuración autonómica. Se vuelve a los Programas de diversificación curricular. Se implantan evaluaciones

diagnósticas para establecer planes de mejora. Los centros educativos realizarán estas evaluaciones al alumnado de cuarto curso de educación primaria y en segundo curso de educación secundaria obligatoria. Se comprobará al menos el grado de dominio de la competencia en comunicación lingüística y de la competencia matemática.
Según la disposición final quinta de la Ley Orgánica 3/2020 (LOMLOE), referente al calendario de implantación:

> Las modificaciones introducidas en el currículo, la organización, objetivos y programas de educación secundaria obligatoria se implantarán para los cursos primero y tercero en el curso escolar que se inicie un año después de la entrada en vigor de esta Ley, y para los cursos segundo y cuarto en el curso que se inicie dos años después de dicha entrada en vigor. (p. 122952)

Por lo que, teniendo en cuenta que la LOMLOE entro en vigor el martes 19 de enero de 2021, será para el curso 2022-2023 cuando se implanten las modificaciones indicadas en el curso de 3º de la ESO, curso objeto de la presente propuesta de intervención, por lo que, a los efectos del presente trabajo, cuya propuesta se podría implementar el próximo curso 2021-2022, se tendrá en cuenta los requisitos legales de la ley anterior.

Las competencias clave se detallan en la orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato, y son las siguientes: a) Comunicación lingüística (CCL), b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT), c) Competencia digital (CD), d) Aprender a aprender (CAA), e) Competencias sociales y cívicas (CSC), f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (CIEE) y g) Conciencia y expresiones culturales (CEC).

La propuesta de intervención objeto del presente trabajo plantea la catedral de Burgos como espacio didáctico para la enseñanza de la geometría. Por tanto, se contextualiza el proceso de aprendizaje del bloque de geometría de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del 3er curso de la ESO en una realidad arquitectónica, cuyo octavo centenario es este año, abordando la competencia matemática y de manera transversal la competencia en conciencia y expresiones culturales. De esta manera se estaría teniendo en cuenta lo indicado en la orden ECD/65/2015:

> La adquisición eficaz de las competencias clave por parte del alumnado y su contribución al logro de los objetivos de las etapas educativas, desde un carácter

> interdisciplinar y transversal, requiere del diseño de actividades de aprendizaje integradas que permitan avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo. (p. 6989).

Para trabajar por competencias en el aula, la orden ECD/65/2015 indica lo siguiente:

> Todo proceso de enseñanza-aprendizaje debe partir de una planificación rigurosa de lo que se pretende conseguir, teniendo claro cuáles son los objetivos o metas, qué recursos son necesarios, qué métodos didácticos son los más adecuados y cómo se evalúa el aprendizaje y se retroalimenta el proceso.
>
> […]
>
> En el actual proceso de inclusión de las competencias como elemento esencial del currículo, es preciso señalar que cualquiera de las metodologías seleccionadas por los docentes para favorecer el desarrollo competencial de los alumnos y alumnas debe ajustarse al nivel competencial inicial de estos. Además, es necesario secuenciar la enseñanza de tal modo que se parta de aprendizajes más simples para avanzar gradualmente hacia otros más complejos. (p. 7002).

También la orden ECD/65/2015 indica lo siguiente:

> Para un proceso de enseñanza-aprendizaje competencial las estrategias interactivas son las más adecuadas, al permitir compartir y construir el conocimiento y dinamizar la sesión de clase mediante el intercambio verbal y colectivo de ideas. Las metodologías que contextualizan el aprendizaje y permiten el aprendizaje por proyectos, los centros de interés, el estudio de casos o el aprendizaje basado en problemas favorecen la participación activa, la experimentación y un aprendizaje funcional que va a facilitar el desarrollo de las competencias, así como la motivación de los alumnos y alumnas al contribuir decisivamente a la transferibilidad de los aprendizajes. (p. 7002).

3.2 CONTENIDOS CORRESPONDIENTES AL BLOQUE DE GEOMETRÍA DE 3º DE LA ESO DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato y ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, es la normativa que regula el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en el territorio español y en Castilla y León respectivamente.

En ambas normativas se organiza el currículo correspondiente a la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del 3$^{\underline{er}}$ curso de la ESO en 5 bloques de contenidos: Bloque 1: Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas (o Contenidos Comunes, tal y como lo denomina la ORDEN EDU/362/2015), Bloque 2: Números y Álgebra, Bloque 3: Geometría, Bloque 4: Funciones, Bloque 5: Estadística y Probabilidad.

La propuesta se ciñe a los contenidos del bloque 3 correspondiente a Geometría, que se estructuran en tres unidades didácticas:

UD. 1.- Geometría del plano: Lugar geométrico. Mediatriz. Bisectriz. Circunferencia. Otros lugares geométricos que den lugar a rectas, segmentos y arcos de circunferencia. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Escalas. Aplicación a la resolución de problemas.

UD. 2.- Movimientos del Plano: Traslaciones. Giros. Simetrías en el plano. Elementos dobles o invariantes. Reconocimiento de los movimientos y valoración de su belleza en el arte y la naturaleza. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar y construir formas, configuraciones y relaciones geométricas.

UD. 3.- Geometría del espacio: Poliedros. Planos de simetría en los poliedros. Fórmula de Euler para los poliedros simples. Poliedros regulares, poliedros duales. Cilindro, cono, tronco de cono y esfera. Intersecciones de planos y esferas. Cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. Contextualización en la realidad. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.

Se muestran en el Anexo nº1 las tablas que sintetizan los contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables, competencias y objetivos que se trabajan en las mencionadas unidades didácticas.

A través de la contextualización que se plantea se abordará, de manera transversal, el siguiente aspecto:

Educación en la identidad propia cultural: Contenidos y actividades relacionadas con la historia, la cultura y otros hechos diferenciadores de Castilla y León y de España, para que sean conocidos, valorados y respetados como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.

También, a través de la utilización de programas de geometría dinámica se abordará de manera transversal lo siguiente:

Educación para las nuevas tecnologías de la información y la comunicación: Formación para la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación, estimulando su uso en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el trabajo del alumnado a través de la utilización de Geogebra.

Es importante que el alumnado no sólo vea las nuevas tecnologías como un medio de diversión sino también como una oportunidad de avanzar en su futuro, tanto en lo personal como en su futuro laboral.

3.3 DISEÑO DE LA PROPUESTA

3.3.1 METODOLOGÍA

La propuesta de intervención se diseña para aglutinar los contenidos de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del 3er curso de la ESO, valiéndonos de la contextualización de la materia a través de la Catedral de Burgos. En base a los objetivos del trabajo se desarrolla la presente propuesta de intervención. Con el presente trabajo, contextualizado en la Catedral de Burgos, se pretende que los estudiantes puedan adquirir una estructuración del pensamiento que conecte su utilidad y aplicación en la vida real y potencie ciertas habilidades como la visión espacial, el razonamiento y la justificación.

La práctica didáctica se realizará combinando en las clases ciertas actividades o problemas sobre determinados aspectos geométricos de la Catedral de Burgos y la realización de un proyecto de diseño de una vivienda siguiendo los patrones geométricos del gótico burgalés.

Se detallan a continuación los recursos y la temporalización que se utilizarán para el desarrollo de las actividades y la evaluación tanto de los alumnos que experimenten la presente propuesta, como del proceso.

3.3.1.1 RECURSOS

Los recursos necesarios para poder llevar a cabo la presente propuesta didáctica son los siguientes:

Recursos humanos: correspondiente al personal involucrado en la puesta en práctica de la presente propuesta didáctica. En este caso sería suficiente con los docentes del departamento de matemáticas involucrados en la docencia del tercer curso de la ESO, responsables del diseño y de la programación didáctica correspondiente, además del responsable del departamento de matemáticas.

Recursos materiales: el diseño de las actividades y del proyecto requieren, en algún caso, del uso del software libre del programa Geogebra, por lo que se requiere que los alumnos, para algunas de las actividades, utilicen ordenadores portátiles. Muchos colegios disponen ya de este tipo de medios y en caso de no disponer de ellos se haría uso del aula de informática para las sesiones en las que se requiera de la utilización de este recurso técnico. La contextualización del bloque de geometría de 3º de la ESO en el marco didáctico de la Catedral de Burgos lleva a la utilización de planos y material fotográfico de la catedral que los alumnos habrán tomado el primer día tras la visita a la Seo y se utilizarán en algunas actividades o en el proyecto, por lo que es necesario que dispongan de un soporte con el que tomar fotografías (máquina de fotos o dispositivo móvil/tablet). El aula debe tener ordenador ordenador de clase, proyector y pantalla o pizarra digital para exponer los aspectos que sean necesarios bien con materiales preparados o a través del software de Geogebra, así como acceso a internet. Los alumnos deben disponer del material necesario, principalmente útiles de dibujo (compás, escuadra, cartabón, regla, transportador de ángulos, lápiz o portaminas, goma de borrar, etc.), calculadora y pendrive. Así mismo, cuando se lleve a cabo el proyecto la configuración del aula variará, por ello es necesario que las aulas dispongan de mesas/pupitres individuales que se puedan mover con facilidad para el trabajo conjunto en equipo en las sesiones dedicadas al proyecto.

3.3.1.2 TEMPORALIZACIÓN

La temporalización del bloque de Geometría se realizará atendiendo a lo siguiente:

El bloque se impartirá por completo en el último trimestre del curso (3er trimestre). El último trimestre ocupa las últimas 11 semanas del curso. El bloque de Geometría aglutinará las 9 últimas semanas. Se impartirá de la siguiente manera:

Tabla 1. Unidades didácticas del bloque de geometría de 3º de la ESO de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.
Fuente: Elaboración propia a partir de la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

Unidad didáctica	**Duración**
UD. 1.- GEOMETRÍA DEL PLANO	3 semanas
UD. 2.- MOVIMIENTOS DEL PLANO	3 semanas
UD. 3.- GEOMETRÍA DEL ESPACIO	3 semanas

El primer día se realizará una visita a la catedral de Burgos para que los alumnos conozcan diversos aspectos sobre los que se irá trabajando en clase con actividades y/o problemas, y en el proyecto. Irán dotados de dispositivos con los que puedan realizar fotografías a los diferentes elementos que se vayan a trabajar y que el profesor indicará en la visita. El último día de cada semana se dedicará para la realización del proyecto. La distribución de actividades se estructurará de la siguiente manera:

Tabla 2. Temporalización de las unidades didácticas del bloque de geometría de 3º de la ESO de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.
Fuente: Elaboración propia a partir de la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

UD. 1.- GEOMETRÍA DEL PLANO:	
Día 1: VISITA	**Visita guiada por el profesor a la Catedral de Burgos.**
Día 2: INICIO MATERIA	*Lugar geométrico:* ➢ La circunferencia. ➢ Mediatriz de un segmento. ➢ Bisectriz de un ángulo. *Ángulos complementarios y suplementarios.* *Ángulos opuestos por el vértice.* **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 3:	*Lugar geométrico:* ➢ Rectas y puntos notables de un triángulo. (Circuncentro/mediatrices, Incentro/Bisectrices, Ortocentro/Alturas y Baricentro/medianas. Recta de Euler **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 4: INICIO PROYECTO	**Explicación de la metodología. Definición de los grupos de trabajo (4 alumnos). Establecimiento de roles de los alumnos.**
Día 5	*Figuras semejantes:*

	➢ Triángulos semejantes. Criterios de semejanza. *Teorema de Thales.* **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 6	*Triángulos en posición de Thales.* *Teorema de Pitágoras.* **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 7	*Escalas.* **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 8: PROYECTO	**Continuación con el Proyecto.**
Día 9	*Perímetro. Semiperímetro.* *Área.* ➢ Ángulos de un polígono ➢ Longitudes y áreas de figuras poligonales **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 10	*Área.* ➢ Ángulos de la circunferencia ➢ Longitudes y áreas de figuras circulares *Forma geométrica compuesta.* **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 11	**Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 12: PROYECTO	**Continuación con el Proyecto.**
Día 13	Control UD 1.- GEOMETRÍA DEL PLANO:
UD. 2.- MOVIMIENTOS DEL PLANO:	
Día 14	*Transformaciones geométricas:* ➢ Isometrías. ➢ Semejanzas. ➢ Composición de transformaciones geométricas. **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 15	*Traslaciones:* ➢ Vector. Módulo, dirección sentido. Suma de vectores. ➢ Traslaciones en el plano. Coordenadas. **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 16: PROYECTO	**Continuación con el Proyecto.**
Día 17	*Traslaciones:* ➢ Composición de traslaciones. ➢ Traslaciones en el espacio. **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 18	*Giros:* ➢ Giros en el plano. Simetría central en el plano. Centro de simetría. ➢ Composición de giros.

	Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.
Día 19	*Giros:* ➢ Elementos invariantes. ➢ Giros en el espacio. Simetría central en el espacio. Centro de simetría. **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 20: PROYECTO	**Continuación con el Proyecto.**
Día 21	*Simetrías:* ➢ Simetrías axiales. Eje de simetría ➢ Composición de simetrías. ➢ Simetría especular en el espacio. Plano de simetría **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos**.
Día 22	*Frisos.* *Mosaicos.* *Rosetones.* **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 23	Control UD 2.- MOVIMIENTOS DEL PLANO:
Día 24: PROYECTO	**Continuación con el Proyecto.**
UD. 3.- GEOMETRÍA DEL ESPACIO:	
Día 25	*Perpendicularidad y paralelismo en el espacio:* ➢ Posiciones relativas en el espacio. ➢ Ángulos diedros, triedros y poliedros. ➢ Perpendicularidad en el espacio. **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 26	*Poliedros:* ➢ Elementos de un poliedro. ➢ Poliedros convexos. Teorema de Euler. ➢ Poliedros regulares. ➢ Dual de un poliedro regular. **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 27	*Poliedros:* ➢ Prismas. ➢ Paralelepípedos. ➢ Teorema de Pitágoras en el espacio. ➢ Pirámides. **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 28: PROYECTO	**Continuación con el Proyecto.**
Día 29	*Área lateral y total de un poliedro:* ➢ Área total de un poliedro regular. ➢ Áreas lateral y total de un prisma. ➢ Áreas lateral y total de una pirámide y de un tronco de pirámide.

	Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.
Día 30	*Cuerpos de revolución:* ➢ Cilindros, cono y esfera. ➢ Intersecciones de planos y esferas. ➢ Áreas lateral y total de un cilindro. ➢ Áreas lateral y total de un cono. ➢ Áreas lateral y total de un tronco de cono. ➢ Área total de una esfera. **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 31	*Volúmenes de cuerpos geométricos:* ➢ Principio de Cavalieri. ➢ Volumen de un prisma y de un cilindro. ➢ Volumen de una pirámide y de un cono. ➢ Volumen de un tronco de pirámide y de un tronco de cono. ➢ Volumen de la esfera. **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 32: PROYECTO	**Continuación con el Proyecto.**
Día 33	*El Globo terráqueo:* ➢ El globo terráqueo. ➢ Longitud y latitud. Coordenadas geográficas. ➢ Husos horarios. **Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 34	**Actividades/ejercicios, alguno de ellos contextualizado en la Catedral de Burgos.**
Día 35	Control UD 3.- GEOMETRÍA DEL ESPACIO:
Día 36: PRESENTACIÓN PROYECTO	**Presentación del Proyecto a la clase y votaciones de los alumnos.**

Todo lo referido en la tabla 2 en negrilla es lo que se desarrolla en el presente trabajo.

3.3.2 ACTIVIDADES

Muchas de las actividades que se desarrollan en la propuesta surgen de aspectos que se tratan en el libro de la Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”, (2021), que ha servido de base para desarrollarlas.

Siguiendo la temporalización, para cada uno de los días, según se indica en la tabla 2, se desarrolla una actividad contextualizada en algún elemento geométrico de la Catedral de

Burgos. Los alumnos la deben realizar en clase o bien, si no diera tiempo suficiente, puedan llevársela a su casa para terminarla como tarea.

En el Anexo nº 2 se detallan todas las actividades que se han desarrollado teniendo en cuenta los contenidos impartidos y la temporalización de las clases.

3.3.3 PROYECTO

Muchos de los apartados del proyecto surgen de aspectos que se tratan en el libro de la Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”, (2021), que ha servido de base para desarrollarlas.

3.3.3.1 DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

La sesión 1 del proyecto (día 4) es el día en el que el profesor explica el proyecto a los alumnos, la temática y de las distintas fases de la metodología. Ese mismo día el profesor asigna los grupos de trabajo en grupos de 4 alumnos elegidos de manera heterogénea, y también indica los roles que ha de asumir cada miembro del grupo. Estos roles son los siguientes: un DIRECTOR DE DISEÑO, un DELINEANTE GRÁFICO en soporte papel, un BUSCADOR DE INFORMACIÓN en soporte digital y un OPERADOR de Geogebra. También el profesor explicará los criterios de éxito y las recompensas (si las hubiere). Las actividades se realizarán en soporte papel tal y como los maestros de la catedral realizaron sus diseños, pero, además, tendremos ayuda y soporte de internet, así como de Geogebra, para trabajar. Los bocetos se entregarán tanto en soporte papel como los realizados con Geogebra en soporte digital.
El proyecto consiste en el diseño de una vivienda con patrones del gótico burgalés para servir de tormenta de ideas para la construcción de una vivienda con diseño gótico.
El proyecto está destinado a un magnate extranjero que tras su visita a la Catedral de Burgos años atrás, quedó enormemente fascinado, y actualmente continúa enamorado de la maravilla arquitectónica que visitó.
El magnate tras recordar a diario todo lo que vio y estar obsesionado con dicha construcción, no puede dejar pasar la oportunidad de vivir en una vivienda diseñada sobre patrones góticos, y pretende modificar su residencia actual para vivir en una nueva vivienda construida con

dichos patrones que tratarán de reflejar el gótico burgalés. Además, como benefactor de diferentes fundaciones y promotor de las causas nobles pretende favorecer y colaborar con el Ayuntamiento de la ciudad de Burgos en la organización de diferentes eventos culturales para el octavo centenario de la catedral. El Ayuntamiento, conociendo su pasión por la catedral y en agradecimiento a su colaboración, pretende obtener la colaboración de los alumnos de los colegios de Burgos para que les llenen de ideas a los arquitectos que van a llevar a cabo el proyecto de su edificio.

Los alumnos podrán manejar información de la catedral basada en los siguientes planos, además de la información gráfica, en forma de fotografías, que obtuvieron el día de la visita a la catedral, así como toda la información que puedan obtener a través de internet. Se utilizarán los siguientes planos de la catedral como referencia, la escala se adecuará a la medida en rojo dada en el plano:

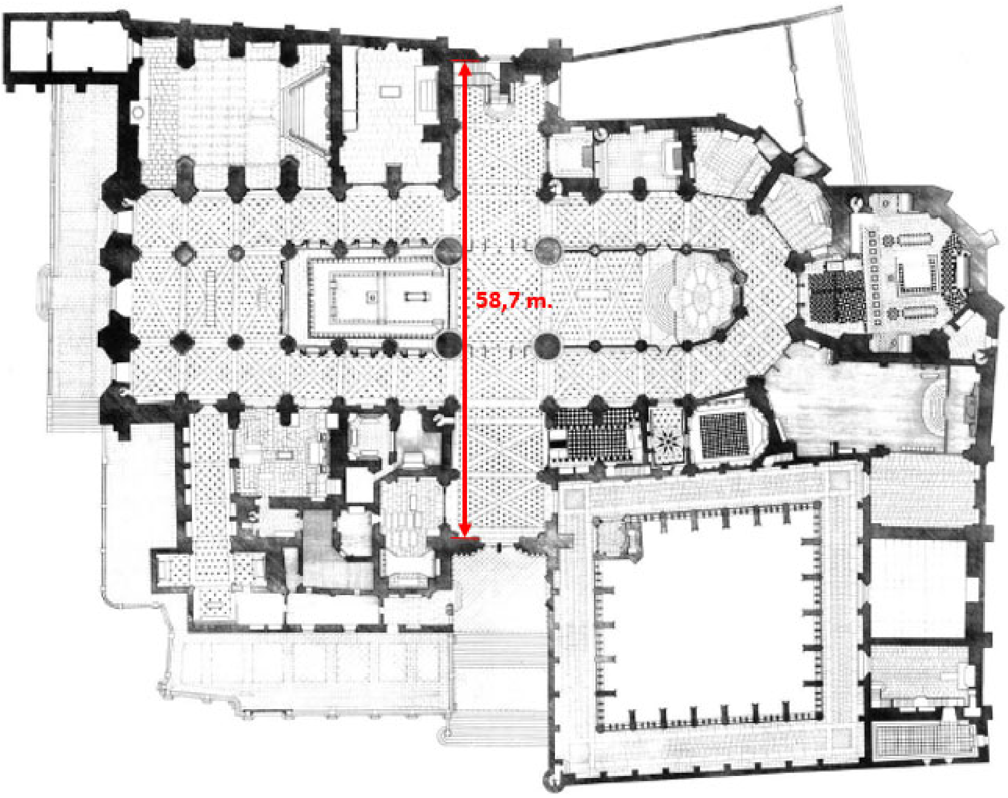


Figura 6. Planta general de los pavimentos de la Catedral de Burgos.
Fuente: Elaboración propia a partir de los planos del informe de levantamiento de la catedral de Burgos de Clemente y Cantera (1989).

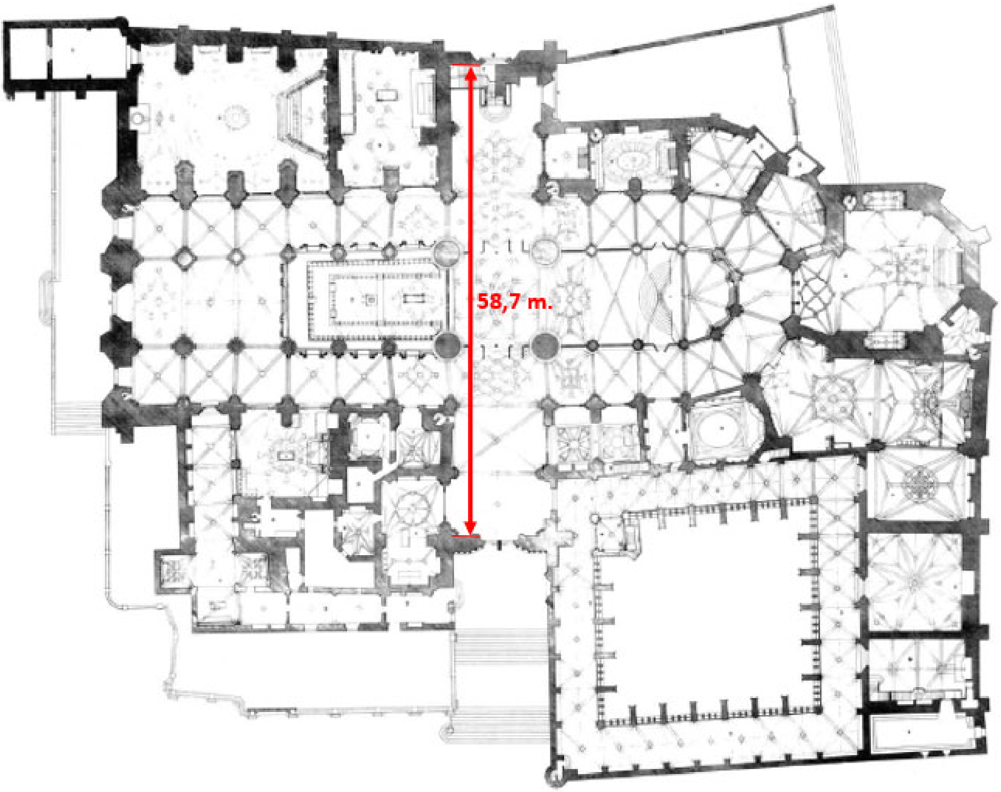


Figura 7. Planta general de las bóvedas de la Catedral de Burgos.
Fuente: Elaboración propia a partir de los planos del informe de levantamiento de la catedral de Burgos de Clemente y Cantera (1989).

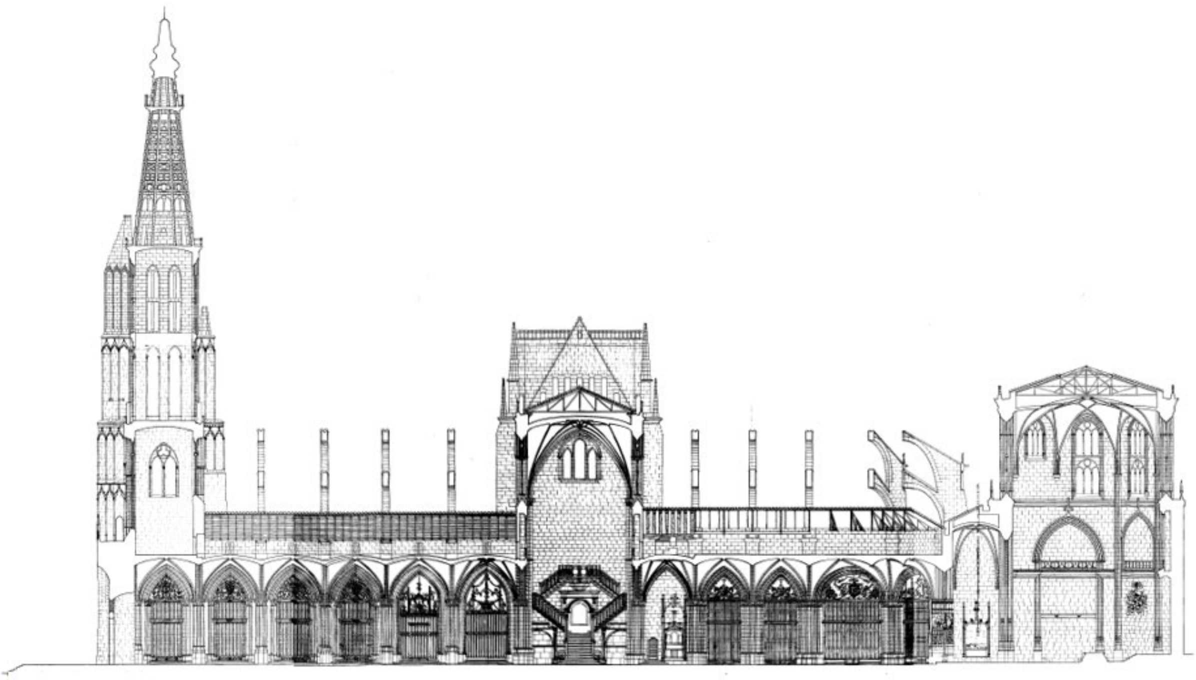


Figura 8. Sección longitudinal de la Catedral de Burgos.
Fuente: Planos del informe de levantamiento de la catedral de Burgos de Clemente y Cantera (1989).

3.3.3.2 DESARROLLO DEL PROYECTO

Se detalla en el Anexo nº 3 el desarrollo del presente apartado.

3.4 EVALUACIÓN

Para la evaluación de la propuesta didáctica se han de considerar dos enfoques diferentes, por un lado, hay que evaluar el aprendizaje de los alumnos, cuáles han de ser los criterios que han de regir su evaluación y como se va a materializar y, por otro lado, la evaluación de la propuesta didáctica que se plantea en este documento como posibilidad de mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

3.4.1 EVALUACIÓN DEL ALUMNO

Para la evaluación del alumno se atenderá a las exigencias normativas (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato y ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León) correspondientes al bloque 3 de geometría de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas del 3er curso de la ESO, en lo que respecta a criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables. Estos criterios y estándares han quedado expuestos en el Anexo nº1 referente al apartado 3.2 de contenidos correspondientes al bloque de geometría de 3º de la ESO de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

Los contenidos de cada unidad del bloque de geometría se van usando a medida que se va avanzando, por lo que el progreso en la materia va reforzando los conocimientos anteriores y el profesor puede ir apreciando si es necesario reforzar en cualquier momento los contenidos anteriores para el adecuado progreso del alumno.

La evaluación no solamente ha de servir para poner una nota, sino que debe ser un instrumento que sirva para orientar la práctica educativa, concretamente debe servir como guía del desarrollo curricular, para orientar y no solo calificar. La evaluación es un proceso de recogida y análisis de información para la toma de decisiones encaminadas a la mejora de los procesos educativos. La evaluación ha de ser continua, para adquirir las competencias imprescindibles, entendiendo el aprendizaje del alumno como un proceso en el que se pueden establecer refuerzos en los momentos que se consideren adecuados y se analiza a través de tres modalidades o fases:

Evaluación inicial: para tener un conocimiento previo del punto de partida de cada alumno. No computa para la nota de la asignatura. Proporciona al profesor una perspectiva de inicio para atender las diferencias entre los alumnos, así como para reconsiderar el enfoque metodológico.

Evaluación formativa: o de mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje, siguiendo los progresos de los alumnos individualmente, durante el curso o en un periodo concreto, detectando dificultades o progresos para adecuar, mejorar, regular y orientar las estrategias de enseñanza en el proceso de enseñanza-aprendizaje, encaminado todo ello hacia la obtención de un nivel concreto de conocimiento y aprendizajes concreto en cada alumno.

Evaluación sumativa: para determinar el nivel alcanzado en los alumnos en los aprendizajes de un contenido. Establece el resultado alcanzado al final del periodo y la adquisición de los objetivos por el alumno. Se compara sus resultados con un estándar y se califica en función de los aspectos que se consideren otorgando (si se logra) o no una certificación.

La evaluación ha de ser individual, o centrada en cada alumno y sus particularidades, integradora, o que tenga en cuenta las diferentes situaciones y la flexibilidad en la aplicación de los criterios de evaluación, cualitativa, en la medida en que se consideran todos los aspectos que inciden en cada situación particular y se evalúan los niveles de desarrollo del alumno (no solo cognitivos) y, orientadora, para aportar al alumno información adecuada para su mejora y la adquisición de estrategias.

Los procedimientos de evaluación que se emplean para la propuesta son los siguientes:

- **Observación directa y sistemática:** para valorar la participación en las actividades diarias, el trabajo en equipo y la interacción entre los alumnos, la actitud hacia el trabajo y la búsqueda de información, etc.
- **Análisis de trabajos y tareas de los alumnos:** para llevar un registro continuo en la toma de datos sobre la realización de actividades y los aprendizajes logrados por los alumnos. Es un procedimiento muy trabajoso, pero es clave para conocer en todo

momento la situación de cada alumno, sus necesidades de ayuda u otras particularidades.

- **Autoevaluación**: para que los alumnos se evalúen a sí mismos. Deben poder expresar sus opiniones y criterios sobre la dificultad o facilidad encontrada en el proceso de aprendizaje o si los contenidos tratados les atraen o no, culminando todo ello en indicar su juicio sobre los resultados que creen haber conseguido.
- **Coevaluación:** para evaluarse entre los propios alumnos de clase valorando los trabajos realizados por los compañeros. Entre pares se produce este proceso basado en criterios predefinidos, para conocer si han adquirido los aprendizajes que de ellos se espera.
- **Pruebas específicas**: como pruebas escritas para valorar las capacidades cognitivas y los contenidos y aprendizajes de los alumnos.

El proceso de evaluación del alumno se cuantifica de la siguiente manera:

- Pruebas escritas de los temas 1, 2 y 3: 55%
- **Proyecto de diseño de una vivienda gótica**: 25%
- **Actividades de la catedral**, tareas y cuaderno de clase (se realizará de manera aleatoria al menos una vez por semana): 15%
- Actitud y participación: 5%

El Proyecto tiene su propia forma de evaluación (para alcanzar ese 25%):

- Autoevaluación de los alumnos en el desempeño del trabajo: 15%
- Coevaluación de los alumnos en la exposición y presentación del trabajo realizado por sus compañeros: 15%
- Evaluación del profesor del trabajo grupal atendiendo a los criterios de evaluación: 60%
- Actitud y participación en el proyecto: 10%

A continuación, se detallan las rúbricas de evaluación de las Actividades, que como máximo serán un 15 % de la nota del alumno, y del Proyecto, que será un 60% del 25% de la nota (ya que el otro 40% de la nota del proyecto es autoevaluación y coevaluación de los alumnos y actitud individual y participación del alumno). En estas rúbricas se tendrán también en cuenta las rúbricas sobre los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables que se han cuantificado en el Anexo nº4 de rubricas por criterios de evaluación para cada una de las unidades didácticas. A continuación, se muestran las rubricas correspondientes a las Actividades y al proyecto:

Tabla 3. Rúbrica de valoración de Actividades.
Fuente: Elaboración propia.

	Items de evaluación	En proceso (1 – 5)	Adquirido (5 – 6)	Avanzado (7 – 8)	Excelente (9 – 10)	% nota
ACTIVIDADES DE CLASE	**Presentación y limpieza**	Muy desorganizado en la presentación sin un guión claro	Poco organizado y con un guión difuso	Parcialmente organizado y con un guión claro pero poco explicado	Organizado y con un guión claro y bien explicado	5%
	Lectura compresiva del enunciado, reflexión y organización de la información.	Los datos no los expresa bien y no explica las relaciones entre los datos mediante esquemas o dibujos.	Expresa los dato pero explica con dificultad las relaciones entre los datos mediante esquemas o dibujos.	Expresa los datos con corrección y explica con corrección las relaciones entre los datos mediante esquemas o dibujos.	Expresa de forma sintetizada los datos y explica con claridad las relaciones entre los datos mediante esquemas o dibujos.	5%
	Mostrar interés por superar las dificultades, desarrollar actitudes de esfuerzo y perseverancia	No muestra interés ni actitud y ninguna perseverancia	Muestra interés pero no muestra mucha actitud y poca perseverancia	Muestra interés, actitud y algo de perseverancia	Muestra interés, actitud y perseverancia	10%
	Desarrollo y resolución del problema	Desconoce los pasos a dar para la resolución del problema. No llega a resultados	Conoce los pasos a dar para la resolución del problema. Llega a una solución	Conoce los pasos a dar para la resolución del problema, explica lo que hace y llega a una solución	Conoce los pasos a dar para la resolución del problema, explica lo que hace, indica las operaciones y llega a la solución	60%
	Desarrollo gráfico o TIC	No presenta desarrollo gráfico o TIC	Presenta desarrollo gráfico o TIC con imprecisiones	Presenta desarrollo gráfico o TIC	Presenta desarrollo gráfico o TIC detallado y limpio	20%
	Cumplimiento de los objetivos de la actividad	No se logran los objetivos de la actividad	Se logran los objetivos parcialmente	Se logran los objetivos en gran medida	Se logran los objetivos totalmente	-

Tabla 4. Rúbrica de valoración del Proyecto.
Fuente: Elaboración propia.

	Items de evaluación	En proceso (1 – 5)	Adquirido (5 – 6)	Avanzado (7 – 8)	Excelente (9 – 10)	% nota
PROYECTO DISEÑO VIVIENDA GÓTICA	**Presentación y limpieza**	Muy desorganizado en la presentación sin un guión claro	Poco organizado y con un guión difuso	Parcialmente organizado y con un guión claro pero poco explicado	Organizado y con un guión claro y bien explicado	5%
	Lectura compresiva del enunciado del proyecto, reflexión y organización de la información.	Los datos no los expresan bien y no explican las relaciones entre los datos mediante esquemas o dibujos.	Expresan los datos pero explican con dificultad las relaciones entre los datos mediante esquemas o dibujos.	Expresa los datos con corrección y explica con corrección las relaciones entre los datos mediante esquemas o dibujos.	Expresa de forma sintetizada los datos y explica con claridad las relaciones entre los datos mediante esquemas o dibujos.	5%
	Mostrar interés por superar las dificultades, desarrollar actitudes de esfuerzo y perseverancia	No muestra interés ni actitud y ninguna perseverancia	Muestra interés pero no muestra mucha actitud y poca perseverancia	Muestra interés, actitud y algo de perseverancia	Muestra interés, actitud y perseverancia	10%
	Desarrollo y resolución de cada parte del proyecto	Desconoce los pasos a dar para la resolución de cada una de las partes del proyecto. No llega a resultados	Conoce los pasos a dar para la resolución de cada una de las partes del proyecto. Llega a una solución en al menos dos de las partes	Conoce los pasos a dar para la resolución de cada una de las partes del proyecto, explica lo que hace y llega a una solución en todas las partes menos en una	Conoce los pasos a dar para la resolución de cada una de las partes del proyecto, explica lo que hace, indica las operaciones y llega a la solución en todas las partes	50%
	Desarrollo gráfico o TIC	No presenta desarrollo gráfico o TIC	Presenta desarrollo gráfico o TIC con imprecisiones	Presenta desarrollo gráfico o TIC	Presenta desarrollo gráfico o TIC detallado y limpio	20%
	Exposición/Debate	Mal expuesto o con escasas o cortas intervenciones de los miembros del grupo en su explicación. No se fomenta el debate ya que se contesta erroneamente a las preguntas	Bien espuesto con cortas intervenenciones de los miembros del grupo. No se fomenta el debate ya que las intervenciones son breves y a veces no son adecuadas	Bien espuesto con intervenención suficiente de los miembros del grupo. Se fomenta el debate aunque las intervenciones de los miembros son breves pero coherentes.	Bien espuesto con intervenención adecuada de los miembros del grupo. Se fomenta el debate con intervenciones de los miembros precisas y claras.	10%
	Cumplimiento de los objetivos de la actividad	No se logran los objetivos de la actividad	Se logran los objetivos parcialmente	Se logran los objetivos en gran medida	Se logran los objetivos totalmente	-

3.4.2 EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA

Es un deber del docente poder reflexionar sobre lo que hace en el aula, sobre la forma en la que transmite los conocimientos a los alumnos, es decir sobre las estrategias que lleva a cabo en la práctica educativa para poder mejorarlas.

Tal y como he podido ver en las prácticas que acabo de realizar en un centro educativo de la ciudad de Burgos, mi tutor de prácticas para sus clases se encargaba de organizar los recursos materiales, la temporalización de las sesiones de clase, las actividades a desarrollar conforme a los objetivos propuestos, la metodología didáctica y los agrupamientos que conllevaba, así como los instrumentos de evaluación. También se ocupaba de favorecer un buen clima de convivencia en el aula, así como de interaccionar con diferentes personas involucradas en el proceso educativo y, por si todo eso no fuera poco, además tenía encomendadas otras actividades de gestión para el funcionamiento del propio centro. Todo lo anterior implica que los docentes tienen una carga de trabajo muy importante, pero es necesario que paren en algún momento a reflexionar sobre la idoneidad de la práctica educativa y como mejorarla, ya que una enseñanza de calidad es la finalidad principal que todo docente debe perseguir.

Para favorecer la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje hay que someter a la propuesta a una evaluación continua y sistemática. Hay que ir evaluando los avances e ir introduciendo si es preciso reajustes. El proceso se puede evaluar a través de las aportaciones de los diversos agentes implicados, bien a nivel individual como a nivel colectivo, teniendo en cuenta las aportaciones de los componentes del departamento didáctico de matemáticas como de los docentes que desarrollan la propuesta en el aula y de los alumnos que la reciben directamente. La forma idónea de evaluarla es realizar la evaluación una vez se ha llevado a cabo la propuesta didáctica en el aula ya que no se verá influenciada por posteriores experiencias y se tendrá una idea clara en ese momento.

Un instrumento adecuado para valorar la propuesta es el cuestionario de evaluación que considere diversos aspectos fundamentales de la propuesta. Estos cuestionarios de valoración de la propuesta pueden estar enfocados a docentes y alumnos. También para conocer el escenario en el que nos movemos es conveniente realizar un análisis DAFO que consiste en

plantearse cuestiones con el objetivo de que diagnostiquen la situación de partida, proyecten situaciones futuribles y prevean acciones posibles en base a las condiciones (positivas o negativas) en que se desarrolla la propuesta. Todo esto se concreta en analizar cuestiones que corresponden a criterios internos como las Fortalezas y Debilidades de la propuesta, así como a criterios externos como las amenazar y Oportunidades (Colás y Pablos, 2004).
A continuación, se puede ver la matriz DAFO elaborada para la propuesta didáctica que se desarrolla en el presente trabajo:

Tabla 5. Matriz DAFO.
Fuente: Elaboración propia.

DEBILIDADES	AMENAZAS
➤ Falta de formación del profesorado en el uso de TIC ➤ Carencia de recurso TIC en el aula / Interferencia aula informática ➤ Desconocimiento del arte gótico y de la Catedral de Burgos	➤ Complicación a la hora de sustituir bajas y coordinar la propuesta educativa con profesores sustitutos ➤ Descordinación interdepartamental a la hora de coordinar el aula de informática ➤ Legislación cambiante
FORTALEZAS	**OPORTUNIDADES**
➤ Metodología mixta que mezcla el método expositivo con actividades contextualizadas de aula y con la metodología activa del trabajo por proyectos ➤ Aprendizaje contextualizado en un bien que es patrimonio de la Humanidad ➤ Motivación del alumnado por el contexto de la propuesta educativa ➤ Utilización de TIC ➤ Utilización de técnicas de dibujo técnico.	➤ Implantación de una nueva metodología exportable a otros niveles ➤ Implantación de recursos adecuados a la nueva propuesta didáctica ➤ Justificación de utilidad clara de las matemáticas ante el contexto educativo de la propuesta a la hora de hacerselo ver al alumnado ➤ Interés de los alumnos por dos materias las matemáticas y el arte ➤ Interés por el dibujo técnico

Las debilidades expuestas se refieren a la falta de formación o conocimiento en herramientas informáticas planteadas para el desarrollo de la propuesta, concretamente, el software de Geogebra. También es una debilidad importante el desconocimiento del arte gótico de la catedral y su relación con las matemáticas, así como la carencia de recursos TIC, en este caso ordenadores portátiles para uso de los alumnos y ordenador de clase con pantalla digital. Esto puede causar interferencias con el aula de informática del centro.

Las amenazas a las que nos enfrentamos son la complicación a la hora de sustituir bajas de larga duración del profesor responsable de la implementación de la propuesta y su dificultad para coordinarla con los profesores sustitutos. También hay una amenaza directamente relacionada con la debilidad de la carencia de recursos, que es la descoordinación entre departamentos a la hora de coordinar la utilización del aula de informática, hay que tener en cuenta que si esto no se considera puede haber horarios solapados en dicha aula con otros cursos. Por último, la legislación en España es muy cambiante y siempre puede surgir algo nuevo en la legislación que afecte a la propuesta.

Respecto a las fortalezas, indicar que la propuesta está integrada dentro de una metodología mixta que combina una fase teórica de enseñanza convencional, donde se introducen y explican los conceptos teóricos, una fase de consolidación, donde se introducen y realizan las actividades de la propuesta contextualizadas en la catedral y, una metodología activa de aprendizaje por proyectos, para desarrollar un proyecto de diseño de una vivienda sobre patrones geométricos góticos, También, toda la propuesta (actividades y proyecto) está contextualizada en un escenario patrimonio de la Humanidad que los alumnos conocen como es la catedral de Burgos, que entendemos es algo que es motivador para el alumno. La utilización de TIC, así como la utilización del dibujo técnico como herramientas para la comprensión de la geometría, entendemos son fortalezas de la propuesta.

Las oportunidades que la propuesta tiene son que se puede exportar a otros niveles (superiores o inferiores). La implantación de nuevos recursos para desarrollar la propuesta también son una oportunidad. La propuesta también da la oportunidad de justificar ante los alumnos de manera tangible el porqué de aprender matemáticas. Y por último de la oportunidad de que entre los alumnos se fomente el interés por las matemáticas, el arte y el dibujo técnico al ser tratados todos estos campos de una manera integradora.

Para finalizar este apartado, se presentan en el Anexo nº5 los cuestionarios de evaluación de la propuesta didáctica elaborados para que sean cumplimentados por los alumnos y por los docentes.

3.5 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

En cuanto a la atención a la diversidad y como esto afectaría a la propuesta de intervención, hay que indicar que cada año que pasa hay más alumnos que requieren de una atención específica. Esta atención, de índole muy diversa, requiere de una atención extra por parte de los profesores. Se seguirá el siguiente proceso para la atención a la diversidad:

- **Adopción de medidas de atención a la diversidad**: Una vez que se conoce o se detecta la necesidad, se adoptarán medidas para paliarla. Las medidas, en todos los casos, serán consensuadas con el Departamento de Orientación del centro y en función del tipo de necesidad, se podrá realizar lo siguiente:
    - Ajuste de los contenidos o readaptación de los mismos. El alumno deberá alcanzar unos contenidos mínimos que se habrán readaptado a sus circunstancias.
    - Las pruebas de evaluación se readaptarán a las circunstancias del alumno.
    - Atención personalizada en todo momento (tareas, trabajos, seguimiento de las clases, explicaciones…).
    - Participación en clases de apoyo o apoyos en el aula.
    - Cuando las medidas sean para atención a alumnos de alto rendimiento se les podrán facilitar actividades extra contextualizadas en la catedral.
    - Otras medidas que puedan ser necesarias y el centro pueda ofertar.
- **Efectividad de las medidas**: Se irá comprobando y evaluando, junto con el Departamento de Orientación, la efectividad de las medidas para darlas continuidad o buscar otras alternativas si resultan ser ineficaces.

4 CONCLUSIONES

La realización de la presente propuesta didáctica está orientada a la consecución de un objetivo principal y varios objetivos específicos. Sabiendo que la propuesta didáctica no ha podido ser implementada durante las prácticas que he realizado en un centro de la ciudad de Burgos, se exponen a continuación las conclusiones a las que he podido llegar en el periodo de redacción del presente documento, todo ello motivado hacia la consecución de los objetivos indicados.

Los primeros objetivos específicos indicados (analizar el estado de la enseñanza de las matemáticas en nuestro país y analizar las dificultades del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría.) se consideraron ya que, para hacer una propuesta didáctica de cambio en una metodología de enseñanza, tiene que haber un motivo, es decir, ha de haber algo que no funciona bien. Este fue uno de los principales motivos para indagar sobre estos aspectos. Al analizar el primero de los objetivos específicos indicados, la fuente mejor para ello es el Informe PISA, que evidencia el estado de la enseñanza en nuestro país en comparación con otros países de la OCDE y participantes, incluyendo a los países de nuestro entorno de la UE. Como hemos podido ver, los resultados en matemáticas de nuestro país están por debajo de la media de la UE y de la OCDE. El resultado si se compara con años anteriores se puede ver que hasta 2015 había una tendencia ligeramente creciente (prácticamente inmóvil), pero en 2018 ha habido un empeoramiento en los resultados, rompiendo la tendencia de ligero crecimiento, cayendo los resultados a niveles inferiores a 2009. Los resultados demuestran que la enseñanza en nuestro país necesita reinventarse, es decir, necesita de nuevas estrategias, y esto supone pensar en otras formas de enseñar, en otras metodologías con las que lograr un aprendizaje significativo de las matemáticas en los alumnos.

Respecto al objetivo de analizar las dificultades del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, se ha consultado diferente bibliografía y se ha podido apreciar que las dificultades que atraviesa el educando cuando aprende geometría están esquematizadas en cinco niveles de razonamiento según el modelo Van Hiele, los niveles son los escalones por los que el alumno transita en su caminar hacia el aprendizaje de la geometría. Por otra parte, Van Hiele establece cinco fases de aprendizaje o etapas que gradúan y organizan las actividades a desarrollar por los docentes para que el alumno pueda llegar a absorber la experiencia necesaria para transitar en los niveles de razonamiento. Atravesar todas las fases supone progresar en el nivel de razonamiento. Así mismo, se llega a la conclusión, a través de la bibliografía consultada, de que para favorecer el aprendizaje de la geometría en el alumnado y que éste sea significativo, el proceso de enseñanza-aprendizaje se ha se desarrollar en un marco contextualizado en un escenario real lo cual hace que se desarrollen en el alumnado ciertas habilidades como la visión espacial y capacidades de razonamiento y justificación. Una forma idónea de trabajar la materia es a través de la resolución de actividades o problemas como metodología de aprendizaje y motivación del alumnado. Además, también se ha podido contrastar que los programas de geometría dinámica, tipo Geogebra u otros, son un recurso fundamental con el que poder trabajar diferentes aspectos de la geometría.

Respecto al objetivo específico tercero sobre consolidar los conocimientos de geometría del alumnado a través de la utilización de conceptos propios de la arquitectura gótica y la historia, aunque la propuesta didáctica no se ha llevado al aula y no se ha podido valorar en la realidad, la bibliografía consultada indica que las metodologías que contextualizan el aprendizaje y permiten el aprendizaje por proyectos facilitan el desarrollo de competencias en el alumnado ya que la contextualización favorece que los alumnos estén más motivados, lo cual les lleva a participar activamente y a experimentar en el proceso de enseñanza-aprendizaje lo cual favorece que alcancen un aprendizaje significativo. Además, se indica que los docentes guiarán los procesos de enseñanza de la geometría para generar situaciones que fomenten el desarrollo personal y social del alumnado. Todo lo anterior se ha considerado en la propuesta didáctica, lo cual hace predecir que este objetivo se cumplirá una vez se lleve la propuesta al aula.

En lo que respecta al objetivo específico cuarto de hacer partícipe al alumnado para que reconozca conceptos y elementos geométricos en un contexto real, que sirva de apoyo o cimiento a la abstracción del razonamiento geométrico, indicar lo mismo que para el anterior objetivo analizado, al no haberse materializado la propuesta didáctica, no se ha podido valorar en la realidad, pero, tal y como se ha comentado antes, con el soporte de la bibliografía consultada, el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje en un marco contextualizado en un escenario real favorece que el alumnado desarrolle ciertas habilidades, como la visión espacial, y otras capacidades de razonamiento y justificación, esto unido al conocimiento de la catedral en la visita que se realiza, hace presuponer que el objetivo cuarto se cumpla.

Sobre el quinto y último objetivo específico considerado, de mejorar las habilidades del alumnado para la utilización de programas informáticos de geometría dinámica, debido a que la propuesta no se ha llevado al aula, no se puede valorar realmente, y aunque la utilización de TIC se ha considerado en la propuesta didáctica como una herramienta de apoyo para el aprendizaje, las TICs, desde un enfoque constructivista, sirven para desarrollar destrezas cognitivas superiores facilitando la construcción de aprendizajes significativos y, además, la utilización de las nuevas tecnologías favorece la motivación y estimulación del alumno, por lo que creemos que el quinto objetivo se cumplirá al igual que los anteriores. Además, el uso de las TICs desde la ESO es imprescindible para ir adquiriendo destreza ya que las TIC, y muy especialmente Geogebra (que es muy intuitivo), lo utilizarán una vez alcancen la universidad.

La consecución de los objetivos específicos indicados, apoya la idea de que el objetivo principal del trabajo sobre mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje a través de una propuesta didáctica del bloque de geometría de 3º de la ESO (en la modalidad de Enseñanzas Académicas), contextualizada en el espacio didáctico de la Catedral de Burgos y plasmado en diferentes actividades y un proyecto de diseño de un edificio (vivienda) aplicando los conocimientos geométricos propios del arte gótico, se cumple, todo ello desde la perspectiva de la investigación en diversa bibliografía de conceptos teóricos probados por diferentes investigadores, ya que los objetivos planteados en la propuesta didáctica no han podido ser demostrados de modo empírico.

5 LIMITACIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

La propuesta didáctica diseñada es, a priori, adecuada para cubrir la enseñanza del bloque de geometría de 3º de la ESO de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. No obstante, no se ha podido llevar a la práctica por lo que todo lo indicado solamente tiene un soporte teórico sin haber un soporte práctico por detrás que pueda corroborar si la presente propuesta es adecuada o no.

Por otra parte, la presente propuesta didáctica queda bastante limitada a la provincia de Burgos, ya que su contexto es la catedral de la ciudad de Burgos. Se considera difícil de llevar a cabo en centros educativos de otras ciudades españolas ya que, aunque la Catedral de Burgos es un templo de primer nivel, siendo la única catedral de España que por sí sola es Patrimonio de la Humanidad sin estar unida a un centro histórico de una ciudad (como en otros casos), la distancia entre ciudades y el hecho de que en casi todas ellas existen maravillosos templos, góticos o de otra tipología artística, así como el desconocimiento de la misma por los docentes de otros núcleos de población, son argumentos de peso para que la propuesta didáctica no se pueda materializar en centros diferentes a los de la provincia de Burgos. Tampoco hay que perder de vista que la visita a la Catedral de Burgos, desde otros núcleos de población, requiere de recursos económicos que no todas las familias se pueden permitir.

Como futuras líneas de investigación, estarían las implementaciones de la propuesta en otros niveles académicos, ya que, por ejemplo, la trigonometría es un campo que no forma parte de los contenidos de 3º de la ESO y es de gran aplicación en diferentes elementos geométricos del templo. Alguna de las actividades se ha diseñado teniendo en cuenta esta limitación, aportando ciertos datos que por trigonometría podrían haber sido calculados. De igual manera, la propuesta se puede diseñar para niveles académicos inferiores, más a nivel descriptivo de los elementos geométricos que nos encontramos.

De la misma manera, en base a lo indicado antes, también otras futuras líneas de investigación pasarían por analizar otros complejos arquitectónicos u otros estilos artísticos en los diferentes niveles académicos, para que sea exportable a otros lugares donde el contexto sea conocido y apreciado por los alumnos.

Por último, para evitar la visita física al templo, otras líneas futuras de investigación pueden ir en la línea de sustituir la visita física, que no cabe duda de que es mucho mejor para hacerse idea de las dimensiones y de la grandiosidad del templo, por una visita virtual desde el aula de clase en la que se pueda ver con claridad todos los elementos sobre los que se pretende trabajar.

6 BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C. (2005). Los secretos geométricos en diseño y arquitectura. *Horizontes matemáticos. Servicio de Publicaciones de la Universidad de la Laguna.* https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3lp/3/calsina.pdf

Arrieta, M. (1992). Bases para un planteamiento actual de la Geometría en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (10),* 9-14. http://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/10/SUMA_10.pdf

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática, 12 al 16* (Extraordinario 2003 – 2007), 67-87. https://core.ac.uk/download/pdf/287746183.pdf

Barrantes, M. (2003). Caracterización de la enseñanza aprendizaje de la geometría en primaria y secundaria. *Campo abierto, 24*, 15-36. https://www.researchgate.net/publication/39207658_Caracterizacion_de_la_ensenanza_aprendizaje_de_la_geometria_en_primaria_y_secundaria

Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria. *Campo Abierto, 31*(2), 139-153. https://core.ac.uk/download/pdf/235503427.pdf

Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales, 8*(1), 25-42. https://www.researchgate.net/publication/277276342_Tendencias_actuales_de_la_ensenanza-aprendizaje_de_la_geometria_en_educacion_secundaria

Catedral de Burgos. (s.f.). *Catedral de Burgos. Su Historia.* http://catedraldeburgos.es/la-catedral-de-burgos-su-historia/

Catedral de Burgos. (s.f.). *Crucero y cimborrio.* http://catedraldeburgos.es/visita-cultural/crucero-y-cimborrio/

Catedral de Burgos. (28 de abril de 2021). En *Wikipedia.* https://es.wikipedia.org/wiki/Catedral_de_Burgos

Clemente, C. y Cantera, J. (1989). Levantamiento de la catedral de Burgos. *Informes De La Construcción, 41*(401), 15–24. https://doi.org/10.3989/ic.1989.v41.i401.1534

Colás, P., Pablos, J. (2004). La formación del profesorado basada en redes de aprendizaje virtual: aplicación de la técnica DAFO. *Revista Electrónica–Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*. Salamanca, España: Universidad de Salamanca. https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/24626/file_1.pdf?sequence=1

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M.P., Margarit, J.B., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. *Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.* https://sede.educacion.gob.es/publiventa/diseno-y-evaluacion-de-una-propuesta-curricular-de-aprendizaje-de-la-geometria-en-la-ensenanza-secundaria-basada-en-el-modelo-de-razonamiento-de-van-hiele/investigacion-educativa/1379

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Holanda: Dordrecht. Reidel Publishing Company.

Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la Geometría. *Revista Ema*, *2*(1), 49-58. http://funes.uniandes.edu.co/1035/1/22_Galindo1996Desarrollo_RevEMA.pdf

Gamboa, R, y Ballestero, E. (2010) La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare, 14*(2), 125-142. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194115606010

García-Valcárcel, A. y González, A. D. (2011). Integración de las TIC en la práctica escolar y selección de recursos en dos áreas clave: lengua y matemática. *La práctica educativa en la Sociedad de la Información. Innovación a través de la investigación. La pratica educativa nella Società dellInformazione. Linnovazione attraverso la ricerca* (pp. 129-144). Alcoy-Brescia: Marfil & La Scuola Editrice. https://evidenciaspiea.jimdofree.com/app/download/10271064357/La-practica-educativa_tic.pdf?t=1410160626&mobile=1

Grupo EsTalMat de Burgos - Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (2011). *Matemáticas en la Catedral de Burgos*. Obra Social Caja Círculo.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 32,* 55-70. http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n32/n32a05.pdf

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2018). PISA 2018. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español.

https://sede.educacion.gob.es/publiventa/pisa-2018-programa-para-la-evaluacion-internacional-de-los-estudiantes-informe-espanol/evaluacion-examenes/23505

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el Modelo Van Hiele. en Llinares, S.; Sánchez, M.V. (Ed.), *Teoría y práctica en educación matemática*. *(Colección "Ciencias de la Educación" n° 4)* 295-384. Alfar. Sevilla. https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Ley Orgánica 3/2020. Por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. 29 de diciembre de 2020. Boletín Oficial del Estado, núm. 340, 2020, 30 de diciembre. Referencia: BOE-A-2020-17264

Morales, A. y Camacho, M. (1994). Algunas características del Currículum de Geometría en la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Sugerencias didácticas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, (21)*, 83-94. https://www.researchgate.net/publication/28254860_Algunas_caracteristicas_del_curriculum_de_geometria_en_la_ensenanza_secundaria_obligatoria

Orden ECD/65/2015. Por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. 21 de enero de 2015. Boletín Oficial del Estado, núm. 25, de 29 de enero de 2015. Referencia: BOE-A-2015-738.

ORDEN EDU/362/2015. Por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. 4 de mayo de 2015. Boletín Oficial de Castilla y León, núm. 86, 2015, 8 de mayo. Referencia: BOCYL-D-08052015-4.

Real Decreto 1105/2014. Por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. 26 de diciembre de 2014. Boletín Oficial del Estado, núm. 3, 2015, 3 de enero. Referencia: BOE-A-2015-37

Ruiz, J. (1999). De geometría y arquitectura. RA. *Revista de Arquitectura. 3*, 22-32. https://hdl.handle.net/10171/17819

Sarasua, J. (2006). Hacia una categorización de la adquisición de objetivos geométricos en el marco del modelo van hiele. *International Journal of Developmental and Educational Psychology*, *1*(1), 415-427. https://www.redalyc.org/pdf/3498/349832311038.pdf

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021). *Tesoros Matemáticos de la Catedral de Burgos*. Fundación Caja Rural Burgos.

Soto, S. M., Herrera, N. E. y Nappa, N. R. (2012). Recursos educativos abiertos en el aprendizaje de geometría tridimensional. En Ramírez, M. S. y Burgos, J. V (Eds), *Movimiento Educativo Abierto: Acceso, colaboración y movilización de recursos educativos abiertos.* (43-53). México. https://www.uv.mx/personal/albramirez/files/2012/05/REA_libro.pdf

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia, 27*(1), 74-94. https://www.redalyc.org/pdf/4759/475947762005.pdf

ANEXOS

ANEXO Nº1: CONTENIDOS, CRITERIOS DE EVALUACIÓN, ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES, COMPETENCIAS Y OBJETIVOS

UD. 1.- GEOMETRÍA DEL PLANO:

Tabla 6. Contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables, competencias y objetivos de la unidad didáctica 1: Geometría del plano.
Fuente: Elaboración propia a partir de la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES	COMPETENCIAS	OBJETIVOS
Lugar geométrico: • La circunferencia. • Mediatriz de un segmento. • Bisectriz de un ángulo. • Rectas y puntos notables de un triángulo. (Circuncentro/mediatrices, Incentro/Bisectrices, Ortocentro/Alturas y Baricentro/medianas. Recta de Euler Ángulos complementarios y suplementarios. Ángulos opuestos por el vértice. Figuras semejantes: • Triángulos semejantes. Criterios de semejanza Teorema de Thales. Triángulos en posición de Thales. Teorema de Pitágoras. Escalas. Perímetro. Semiperímetro. Área. • Ángulos de un polígono • Longitudes y áreas de figuras poligonales Área. • Ángulos de la circunferencia • Longitudes y áreas de figuras circulares Forma geométrica compuesta.	**CE 1**. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, y sus configuraciones geométricas.	**EA 1.1.** Maneja el concepto de lugar geométrico (mediatriz, bisectriz) y las propiedades de los ángulos.	CMCT-CAA	• Identificar y dibujar un lugar geométrico sencillo. • Determinar la relación de los ángulos formados con dos rectas paralelas cortadas por una secante. • Identificar y conocer la relación entre ángulos de lados paralelos y de lados perpendiculares. • Calcular la amplitud de los ángulos de un polígono regular. • Conocer y usar el teorema de Pitágoras. • Construir figuras semejantes. • Conocer y usar el teorema de Thales. • Dividir un segmento en partes proporcionales. • Identificar triángulos en posición de Thales. • Identificar una sección cónica • Conocer y usar las fórmulas que permiten calcular: - Las áreas de los polígonos. - La longitud de una circunferencia y de un arco de circunferencia. - El área de un círculo, un sector circular y una corona circular. • Calcular perímetros y áreas de figuras compuestas. • Resolver problemas geométricos aplicando una estrategia conveniente y escogiendo el método más idóneo para la realización de los dibujos según su complejidad: regla y compás o con ordenador.
	CE 2. Utilizar el teorema de Thales y Pitágoras para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales en la resolución de problemas geométricos.	**EA 2.1**. Conoce el teorema de Pitágoras y lo aplica en la resolución de problemas	CMCT-CAA-CEC	
		EA 2.2. Conoce el teorema de Thales y lo aplica en la resolución de problemas.	CMCT-CAA	
		EA 2.3. Calcula perímetros y áreas.	CMCT-CAA-CEC	
	CE 3. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando semejanza y el teorema de Pitágoras.	**EA 3.1.** Resuelve problemas geométricos utilizando semejanza, escalas y los teoremas de Thales y de Pitágoras.	CCL-CMCT-CAA-CEC	
	CE 4. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, para realizar cálculos, dibujos geométricos y resolución de problemas, así como utilizarlas de modo habitual en el proceso de aprendizaje.	**EA 4.1.** Utiliza calculadoras, applets y asistentes matemáticos para realizar cálculos, dibujos geométricos y resolver problemas.	CCL-CMCT-CAA- CD-CSC	

UD. 2.- MOVIMIENTOS DEL PLANO:

Tabla 7. Contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables, competencias y objetivos de la unidad didáctica 1: Movimientos del plano.
Fuente: Elaboración propia a partir de la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

<table>
<tr><th>CONTENIDOS</th><th>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</th><th>ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES</th><th>COMPETENCIAS</th><th>OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Transformaciones geométricas:
 Isometrías.
 Semejanzas.
 Composición de transformaciones geométricas.
Traslaciones:
 Vector. Módulo, dirección sentido. Suma de vectores.
 Traslaciones en el plano. Coordenadas.
 Composición de traslaciones.
 Traslaciones en el espacio.
Giros:
 Giros en el plano. Simetría central en el plano. Centro de simetría.
 Composición de giros.
 Elementos invariantes.
 Giros en el espacio. Simetría central en el espacio. Centro de simetría.
Simetrías:
 Simetrías axiales. Eje de simetría
 Composición de simetrías.
 Simetría especular en el espacio. Plano de simetría
Frisos. Mosaicos. Rosetones.</td><td rowspan="4">CE 1. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.</td><td>EA 1.1. Identifica y utiliza vectores y la suma de vectores para realizar traslaciones.</td><td>CMCT-CAA-CSC-CEC</td><td rowspan="6">• Hacer una traslación de un vector dado. Hacer la composición de dos traslaciones.
• Hacer un giro de centro y argumento dados.
• Calcular el centro de giro observando un giro dibujado.
• Identificar figuras planas con centro de giro.
• Hacer una simetría central de centro dado.
• Identificar figuras planas con centro de simetría.
• Hacer una simetría axial de eje dado. Hacer la composición de dos simetrías de ejes paralelos.
• Identificar figuras planas con eje de simetría.
• Reconocer frisos y mosaicos regulares y semirregulares.
• Realizar frisos, mosaicos y rosetones sencillos.
• Identificar cuerpo con planos de simetría y ejes de simetría.
• Resolver problemas geométricos aplicando una estrategia conveniente y escogiendo el método más idóneo para la realización de los dibujos según su complejidad: regla y compás o con ordenador.</td></tr>
<tr><td>EA 1. 2. Identifica y realiza giros y simetrías centrales.</td><td>CMCT-CAA-CSC-CEC</td></tr>
<tr><td>EA 1.3. Identifica y realiza simetrías axiales, frisos y mosaicos.</td><td>CMCT-CAA-CSC-CEC</td></tr>
<tr><td>EA 1.4. Identifica planos y ejes de simetría en poliedros y cuerpos redondos.</td><td>CMCT-CAA-CSC-CEC</td></tr>
<tr><td>CE 2. Resolver problemas que conlleven transformaciones e identificación de ejes y centros de simetría de figuras planas, poliedros y cuerpos redondos.</td><td>EA 2.1. Resuelve problemas geométricos utilizando transformaciones geométricas.</td><td>CCL-CMCT-CAA-CEC</td></tr>
<tr><td>CE 3. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, para realizar cálculos, dibujos geométricos y resolución de problemas, así como utilizarlas de modo habitual en el proceso de aprendizaje.</td><td>EA 3.1. Utiliza calculadoras, applets y asistentes matemáticos para realizar cálculos, dibujos geométricos y resolver problemas.</td><td>CCL-CMCT-CAA- CD-CSC</td></tr>
</table>

UD. 3.- GEOMETRÍA DEL ESPACIO:

Tabla 8. Contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables, competencias y objetivos de la unidad didáctica 1: Geometría del espacio.
Fuente: Elaboración propia a partir de la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES	COMPETENCIAS	OBJETIVOS
Perpendicularidad y paralelismo en el espacio: - Posiciones relativas en el espacio. - Ángulos diedros, triedros y poliedros. - Perpendicularidad en el espacio. Poliedros: - Elementos de un poliedro. - Poliedros convexos. Teorema de Euler. - Poliedros regulares. - Dual de un poliedro regular. - Prismas. - Paralelepípedos. - Teorema de Pitágoras en el espacio. - Pirámides. Área lateral y total de un poliedro: - Área total de un poliedro regular. - Áreas lateral y total de un prisma. - Áreas lateral y total de una pirámide y de un tronco de pirámide. Cuerpos de revolución: - Cilindros, cono y esfera. - Intersecciones de planos y esferas. - Áreas lateral y total de un cilindro. - Áreas lateral y total de un cono. - Áreas lateral y total de un tronco de cono. - Área total de una esfera. Volúmenes de cuerpos geométricos: - Principio de Cavalieri. - Volumen de un prisma y de un cilindro. - Volumen de una pirámide y de un cono. - Volumen de un tronco de pirámide y de un tronco de cono. - Volumen de la esfera. El Globo terráqueo: - El globo terráqueo. - Longitud y latitud. Coordenadas geográficas. - Husos horarios.	**CE 1.** Utilizar las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.	**EA 1.1.** Calcula áreas y volúmenes de prismas y cilindros.	CMCT-CAA-CSC-CEC	• Identificar cuerpos en el espacio y su desarrollo plano, así como sus características. • Utilizar las fórmulas del área y volumen del prisma, del cilindro, de la pirámide, del cono, del tronco de pirámide, del tronco de cono y de la esfera. • Identificar el globo terráqueo y sobre él el eje de la Tierra, polos, el ecuador terrestre, hemisferios, paralelos y meridianos. • Usar las coordenadas geográficas. • Resolver problemas geométricos aplicando una estrategia conveniente y escogiendo el método más idóneo para la realización de los dibujos según su complejidad: regla y compás o con ordenador.
		EA 1.2. Calcula áreas y volúmenes de pirámides y conos.	CMCT-CAA-CSC-CEC	
		EA 1.3. Calcula áreas y volúmenes de troncos de pirámide, troncos de cono y esfera.	CMCT-CAA-CSC-CEC	
	CE 2. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	**EA 2.1.** Localiza un lugar por sus coordenadas geográficas y la distancia aproximada entre dos puntos.	CMCT-CAA	
	CE 3. Resolver problemas geométricos que conlleven el cálculo de áreas y volúmenes del mundo físico.	**EA 3.1.** Resuelve problemas geométricos de áreas y volúmenes.	CCL-CMCT-CAA-CSC-CEC	
	CE 4. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, para realizar cálculos, dibujos geométricos y resolución de problemas, así como utilizarlas de modo habitual en el proceso de aprendizaje.	**EA 4.1.** Utiliza calculadoras, applets y asistentes matemáticos para realizar cálculos, dibujos geométricos y resolver problemas.	CCL-CMCT-CAA- CD-CSC	

ANEXO Nº2: ACTIVIDADES DE CLASE

ACTIVIDAD Nº1

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 2.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre lugares geométricos sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Lugares geométricos básicos.

Desarrollo:

La Vésica Piscis, el Triángulo de Releaux y la Triqueta. ¿Qué es todo esto? Se trata de formas geométricas sencillas que aparecen en el arte gótico, con mucha frecuencia las dos primeras.

La Vésica Piscis es una imagen sagrada que se obtiene de la intersección de dos círculos del mismo diámetro, siendo el centro de cada uno de ellos un punto de la circunferencia del otro. Su nombre proviene del latín y significa vejiga de pez. Se construye a través de un segmento AB en el que, con centro en cada extremo, trazamos sendas circunferencias de radio AB.

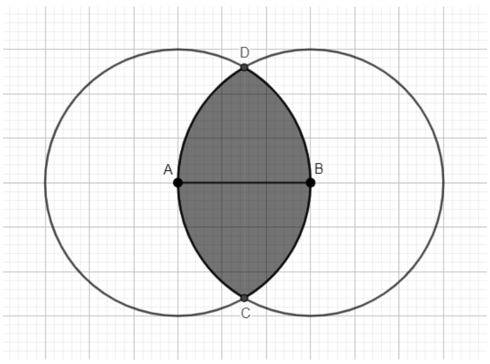


Figura 9. Actividad 1. Vésica Piscis.
Fuente: Elaboración propia a partir de Grupo EsTalMat de Burgos - Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (2011).

El Triángulo de Releaux se obtiene dando un paso más, trazando una circunferencia con el mismo radio desde el punto D de intersección con las 2 circunferencias, es decir, la tercera circunferencia pasará por A y B. El Triángulo de Releaux es la imagen que queda sombreada con un color más oscuro en el centro:

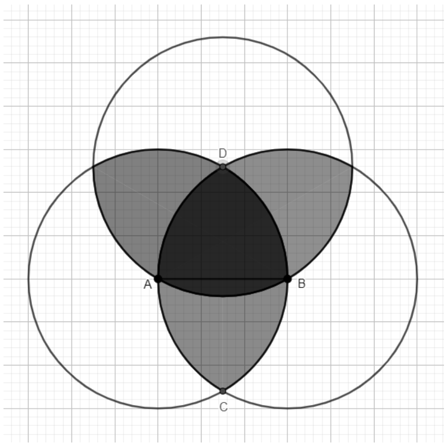


Figura 10. Actividad 1. Triángulo de Releaux y triqueta invertida.
Fuente: Elaboración propia a partir de Grupo EsTalMat de Burgos - Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (2011).

La Triqueta sería la forma geométrica que resultaría de girar 180º la superficie geométrica que queda sombreada como suma de la parte más oscura y la parte más clara.

En la Vésica Piscis, uniendo A con D y B con D obtenemos un triángulo. **¿Por dónde pasan las mediatrices de los lados AB, AD y BD? ¿Coinciden las mediatrices de los lados con algún otro lugar geométrico estudiado? ¿Qué tipo de triangulo es? ¿Cuál es la relación entra la diagonal mayor (segmento DC) de la Vésica Piscis y la diagonal menor (segmento AB)?**

Como actividad adicional para realizar en casa se propone que el alumno busque información sobre el significado de dichas formas geométricas (por ejemplo, el significado místico/religioso en la Vésica Piscis, las características técnicas del Triángulo de Releaux y sus aplicaciones y las atribuciones mágicas o religiosas en la Triqueta,).

<u>ACTIVIDAD Nº2</u>

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 3.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre lugares geométricos sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Lugares geométricos básicos.

Desarrollo:

Como todos hemos visto, el arte gótico está basado en formas geométricas sencillas. En el caso que nos ocupa, correspondiente a los puntos notables de un triángulo, nos fijaremos en algunos triángulos que aparecen en la catedral, como el triángulo equilátero que en la Actividad nº1 obtuvimos en el interior de la Vésica Piscis, y también nos fijaremos en otros triángulos isósceles que aparecen en la catedral como parte del arte gótico, en este caso nos referimos al triángulo dorado o triángulo de Calvimont (perfil de las agujas de la catedral de Burgos), que está relacionado con el número áureo.

Para construir un Triángulo de Calvimont primero hemos saber el valor del número áureo ($\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62$) que nos servirá para construir previamente un rectángulo áureo:

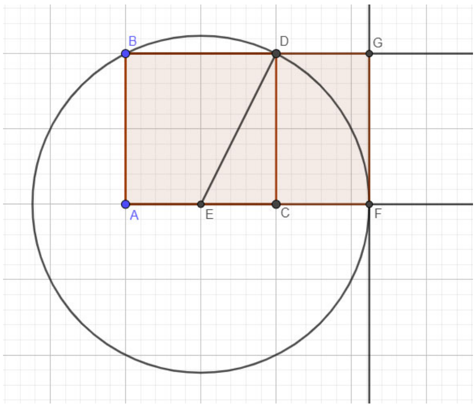


Figura 10. Actividad 2. Construcción de un rectángulo áureo.
Fuente: Elaboración propia a partir de Grupo EsTalMat de Burgos - Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (2011).

En primer lugar, trazamos un cuadrado ACDB de lado 2 Ud. Trazamos el punto medio del segmento AC (Punto E). Con centro en E trazamos la circunferencia que pasa por D y que corta a la semirrecta que contiene la base del cuadrado en F. El rectángulo áureo es el rectángulo AFGB. **Justifica que los lados del rectángulo están en proporción áurea**, es decir, el lado mayor entre el lado menor es igual a $\emptyset$.

Una vez que conocemos lo que es un rectángulo áureo, es decir, un rectángulo en donde la relación entre sus lados es $\emptyset$, el triángulo de Calvimont se construye de la siguiente manera:

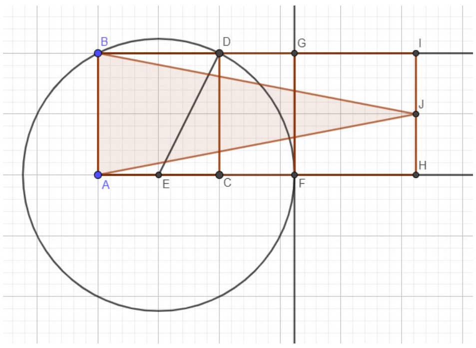


Figura 11. Actividad 2. Construcción de un triángulo de Calvimont.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Partiendo del rectángulo áureo anterior colocamos a continuación del mismo, adyacente al lado FG, un cuadrado FHIG igual al primero. El triángulo de Calvimont ABJ queda definido por el punto J (punto medio del segmento HI) y por el segmento AB (base del triángulo de Calvimont). **Justifica que la relación entre la altura del triángulo y la base es $\emptyset^2$.**

Como se puede ver, en el triángulo de Calvimont coexisten 2 rectángulos áureos, el AFGB y el CHID que tienen una parte en común, el rectángulo CFGD. Además, en los rectángulos áureos, el rectángulo pequeño (CFGD) que queda al dibujar el cuadrado ACDB sobre el rectángulo áureo inicial (AFGB) también es un rectángulo áureo. **Demuestra que la relación entre los lados del rectángulo pequeño (CFGD) es $\emptyset$**. Si sobre cada rectángulo áureo vamos dibujando el cuadrado menor, vamos obteniendo rectángulos áureos (es decir, con proporción entre sus lados igual a $\emptyset$) cada vez más pequeños hasta el infinito.

Determinar los puntos notables (circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro) del triángulo equilátero, del triángulo dorado o de Calvimont y del triángulo resultante de dividir el triángulo de Calvimont por su eje de simetría (de altura proporcional a $\emptyset$ y de base proporcional a $\frac{1}{2\emptyset}$). Determinar la recta de Euler para esos triángulos. ¿Puedo dibujarla en ambos todos los casos?

<u>ACTIVIDAD Nº3</u>

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 5.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre semejanzas sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Semejanzas, Teorema de Thales.

Desarrollo:

El caso que ahora nos ocupa tiene que ver con otra figura importante del arte gótico: el pentágono, materializado con polígonos múltiplos de 5 en nuestra catedral en diversos sitios, como en el rosetón del Sarmental o en la zona del trasaltar, girola y capillas absidiales a través de varios semi-decágonos anidados. El pentágono y el decágono tienen encerrado en su interior un triángulo, denominado triángulo áureo. Este triángulo es el protagonista de esta actividad. Como no podía ser de otra manera, el triángulo áureo también está relacionado con el número áureo ($\emptyset$).

Para construir un Triángulo áureo primero hemos de construir un pentágono regular:

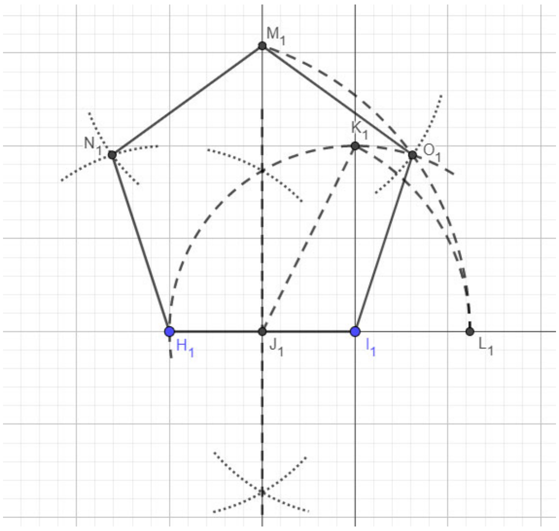


Figura 12. Actividad 3. Construcción de un pentágono a partir de su lado.
Fuente: Elaboración propia.

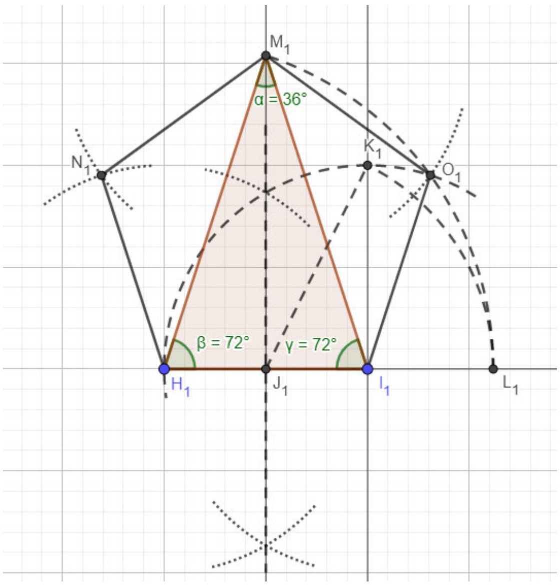


Figura 13. Actividad 3. Construcción de un triángulo áureo en el interior de un pentágono.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Para construir un pentágono regular, trazamos un segmento H_1I_1 (de valor 2 Ud.). Levantamos, sobre la perpendicular al segmento por I_1, el punto K_1 (trazando un arco con centro en I_1 y radio la longitud del segmento H_1I_1). Trazamos la mediatriz del segmento H_1I_1 y obtenemos el punto J_1. Con centro en J_1 y radio J_1K_1 abatimos sobre la horizontal el punto K_1 obteniendo el punto L_1. Con centro en H_1 y radio H_1L_1 levantamos el punto L_1 sobre la mediatriz del segmento H_1I_1 obteniendo el punto M_1 (vértice del pentágono opuesto al lado H_1I_1). Con centro en M_1 y en H_1 trazamos arcos de circunferencia de radio H_1I_1 que intersectan en el punto N_1. De la misma manera, con centro en M_1 e I_1 obtenemos el vértice O_1.

En el pentágono construido, un triángulo áureo ($H_1I_1M_1$) se forma con cualquiera de sus lados y el vértice opuesto a dicho lado opuesto. **Justifica que los lados de triángulo áureo están en proporción áurea, es decir, el lado mayor entre el lado menor es igual a ∅.**

Una vez sabemos lo que es un triángulo áureo, si trazamos la bisectriz al triángulo áureo por su vértice H1 obtenemos lo siguiente:

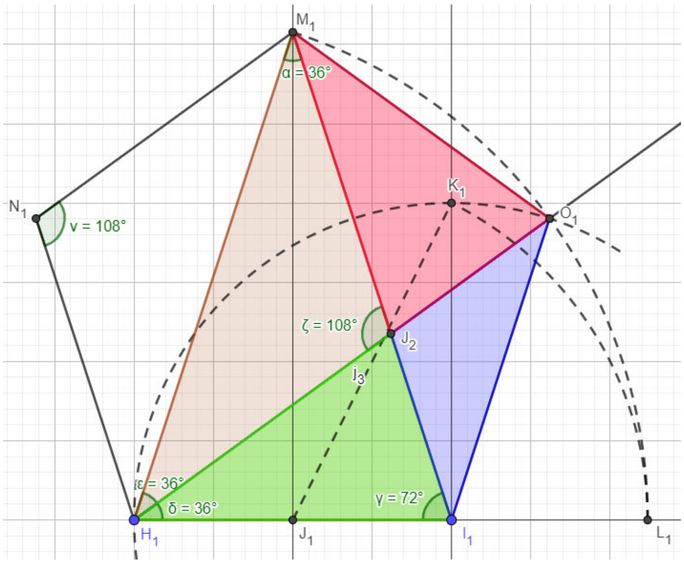


Figura 14. Actividad 3. Construcción de diferentes triángulos en el interior de un pentágono.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Determinar, conociendo el valor de la base $H_1I_1 = 2$ uds. (y el valor del lado $H_1M_1 = 1 + \sqrt{5}$ uds.), las dimensiones de los triángulos $H_1I_1J_2$ (triángulo verde), $I_1O_1J_2$ (triángulo azul), M_1,J_2O_1 (triángulo rosa) y $M_1N_1H_1$. (triángulo blanco).

ACTIVIDAD Nº4

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 6.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre Triangulos en posición de Thales y Teorema de Pitágoras sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral. Para analizar los triangulos en posición de Thales nos centraremos en los semi-decágonos anidados comentados. También analizaremos el suelo de la Capilla de los Condestables para enlazarlo con el Teorema de Pitágoras.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Triángulos en posición de Thales y Teorema de Pitágoras.

Desarrollo:

Actividad 4.1

El caso que ahora nos ocupa da continuidad a la actividad nº 4. En este caso vamos a analizar el decágono. En nuestra catedral está presente, como hemos dicho anteriormente, en el rosetón del Sarmental o en la zona del trasaltar, girola y capillas absidiales a través de varios semi-decágonos anidados. Trabajaremos con diversos triángulos áureos en posición de Thales.

Primero veremos cómo se construye en decágono regular:

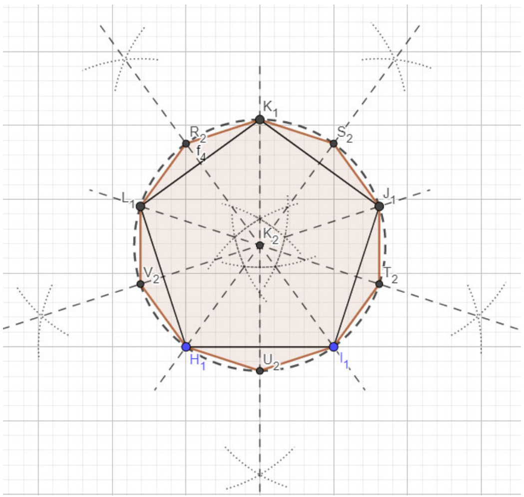


Figura 15. Actividad 4.1. Construcción de un decágono a partir de un pentágono.
Fuente: Elaboración propia.

Partiendo del pentágono dibujado en la actividad nº 3, trazamos las mediatrices de los lados del pentágono. Todas ellas se cortan en el punto K_2 (centro del pentágono). A continuación, con centro en K_2, trazamos la circunferencia que circunscribe al pentágono y los puntos de corte de las mediatrices con la circunferencia y los vértices del pentágono definen los 10 vértices del decágono.

Resulta impresionante poder observar que las paredes del trasaltar-girola, girola-capillas absidiales y capillas absidiales-exterior están anidados en 3 semi-decágonos que se construyen así:

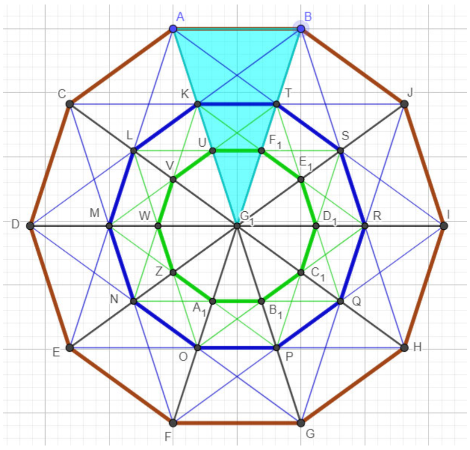


Figura 16. Actividad 4.1. Construcción de decágonos anidados a partir de poligonos estrellados 10/3.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Una vez tenemos nuestro decágono, si trazamos el polígono estrellado 10/3, es decir, el polígono que resulta de recorrer el decágono empezando en un vértice y yendo desde esta hasta el siguiente saltando vértices de 3 en 3, cerramos un polígono estrellado y en su interior está el decágono azul. Haciendo esto mismo, recorriendo los vértices del decágono azul saltando de 3 en 3, obtenemos el decágono verde. El triángulo color cian es un triángulo áureo.

En nuestra catedral obtendríamos en la zona del trasaltar, girola y capillas absidiales podemos detectar 5 triángulos en posición de Thales:

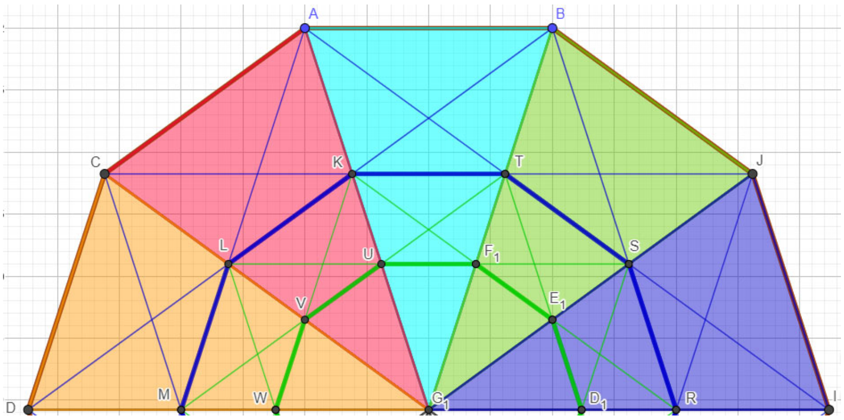
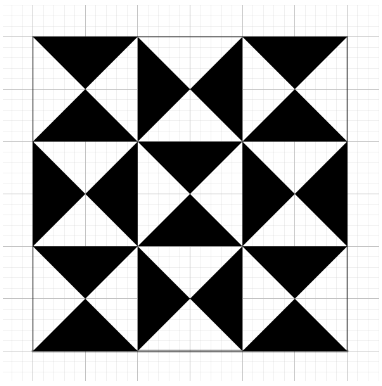


Figura 17. Actividad 4.1. Construcción de triángulos áureos en los semi-decágonos anidados.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Fijándonos en el triángulo de color cian, determinar la relación entre los lados sabiendo que el lado AB=2 uds., el valor del lado $AG_1 = 1+\sqrt{5}$ uds. y el valor del lado KT = $\frac{4}{1+\sqrt{5}}$ uds. y el valor del lado UF1 = $\frac{8}{(1+\sqrt{5})^2}$ uds. Determinar la relación entre los lados de los triángulos en posición de Thales (ABG_1 con KTG_1 y con UF_1G_1). ¿Hay algún tipo de cadencia o ritmo entre las proporciones de los lados? ¿Cuál?

Actividad 4.2

Otra actividad que se pide es, fijándonos en el suelo de la Capilla de los Condestables, **demostrar el Teorema de Pitágoras**. Actividad muy sencilla dado que el suelo es de estas características:



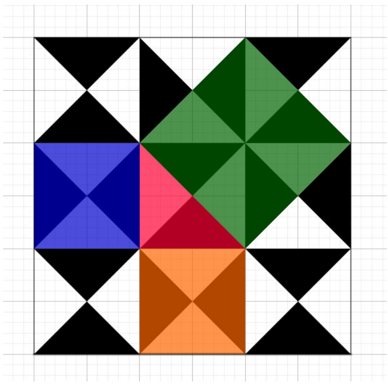


Figura 18. Actividad 4.2. Suelo de la Capilla del Condestable y demostración 1 del teorema de Pitagoras.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

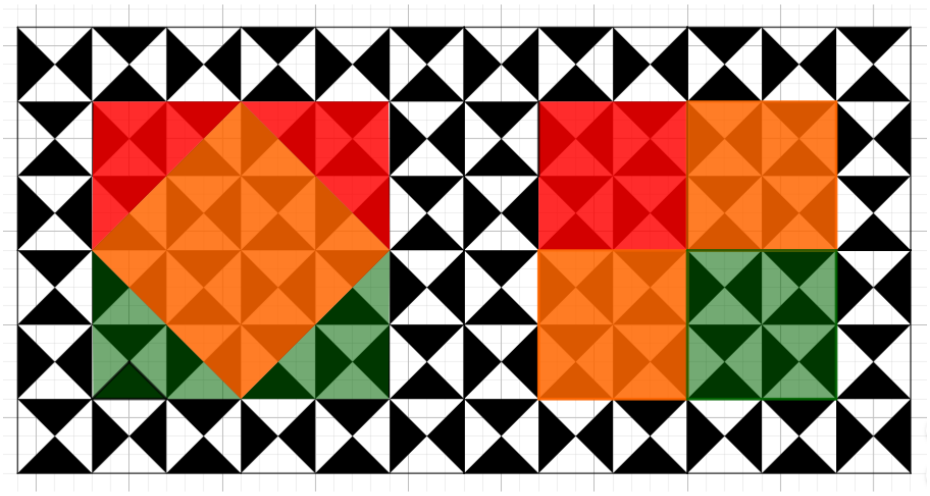


Figura 19. Actividad 4.2. Demostración 2 del teorema de Pitagoras sobre el suelo de la Capilla del Condestable. Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

A los alumnos se les diría que, con las fotografías tomadas de ese suelo, el día de la visita, demuestren el Teorema de Pitágoras. Con los colores quedaría demostrado.

También **se pide que, aplicando el teorema de Pitágoras, calculen los valores de los lados de los cuadrados de colores (verde, azul y morado), teniendo en cuenta que el dato del problema es la medida del cuadrado rojo, cuyo valor es "l". Particularizar para l= 40 cm.**

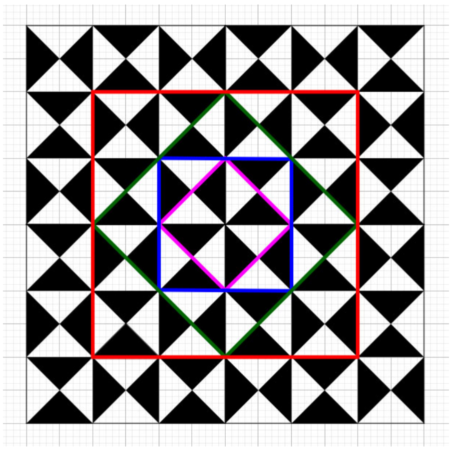


Figura 20. Actividad 4.2. Cuadrados anidados en el suelo de la Capilla del Condestable. Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

<u>ACTIVIDAD Nº5</u>

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 7.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre escalas sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral. Para analizar las escalas, hemos de saber una de las dimensiones reales de la Catedral, y de esta manera trabajar con planos de la Catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Escalas.

Desarrollo:

La medida intramuros entre la puerta del Sarmental y la de la Coronería es de 58,70 m. (o 198,50 pies capitolinos, siendo 1 pie capitolino = 29,57 cm.). Partiendo del siguiente plano, **se pide calcular la escala del mismo, así como indicar las medidas que se obtendrían con este plano para las medidas (largo x ancho) de las siguientes zonas: Capilla de la Presentación, Capilla del Condestable, Crucero-cimborrio, brazo sur y brazo norte del Transepto, Claustro bajo, Capilla del Santísimo Cristo de Burgos, naves laterales (desde la puerta de Santa María hasta el deambulatorio o girola), nave central (desde la Puerta de Santa María hasta la Capilla y Retablo Mayor) y Capilla de Santa Tecla.**

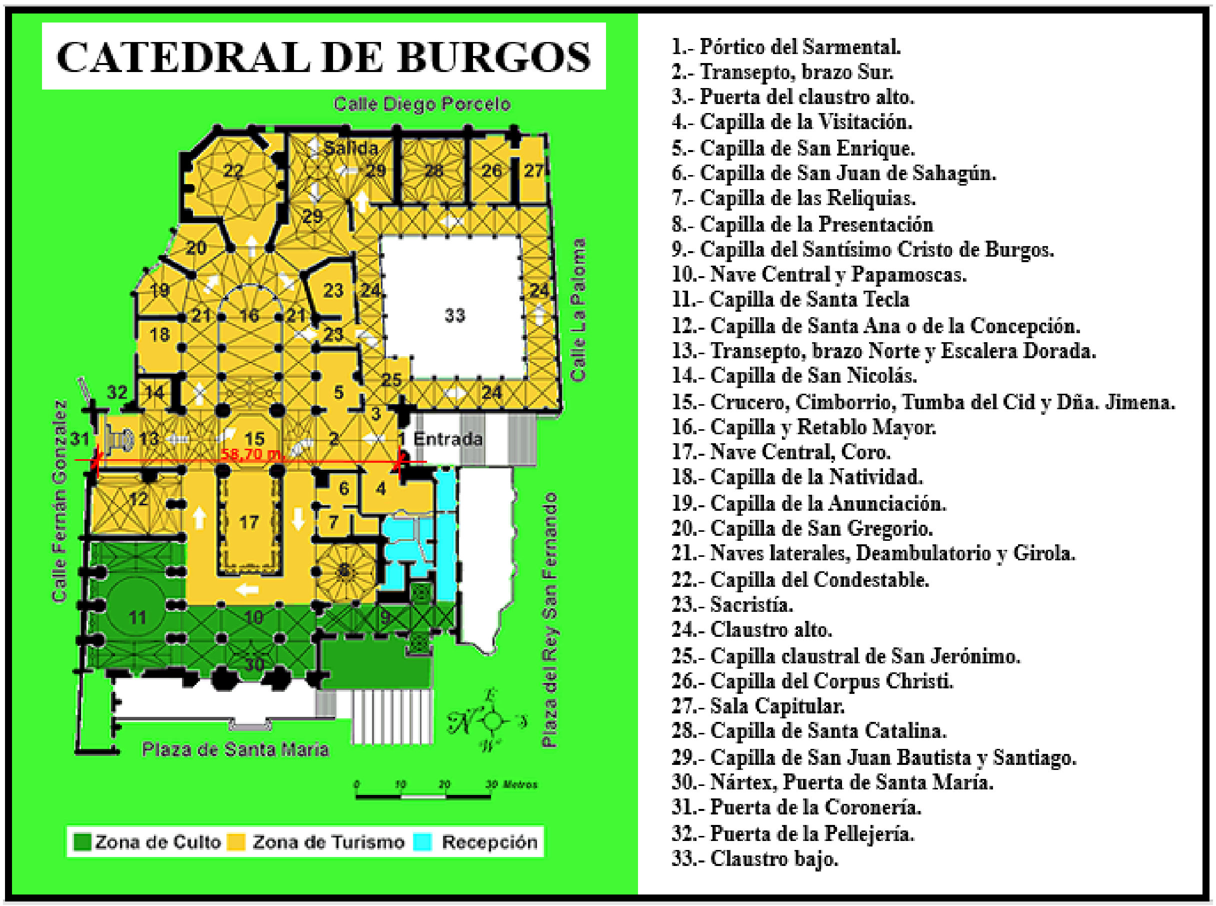


Figura 21. Actividad 5. Plano de la Catedral de Burgos rferenciando los diferentes espacios.
Fuente: Elaboración propia a partir de Catedral de Burgos (2021).

ACTIVIDAD Nº6

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 9.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre perímetros y áreas sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral. Para el presente ejercicio tendremos muy en cuenta el Triángulo de Calvimont.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Perímetros y áreas.

Desarrollo:

Trazamos un Triángulo de Calvimont tal y como ya sabemos hacerlo de la actividad nº2. Nos quedamos con la mitad del triángulo (el semi-triángulo resultante de dividir el triángulo por su eje de simetría). Dibujamos los puntos notables del triángulo (circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro). Trazamos la recta de Euler. Nos quedamos con el segmento que une los tres puntos notables, y vemos que el circuncentro está en el medio de la hipotenusa del semi-triángulo de Calvimont y el ortocentro está en el vértice que forman los catetos del triángulo. Trazamos la circunferencia que circunscribe el triángulo. Se puede observar que la recta de Euler (segmento Circuncentro-Ortocentro) divide el triángulo en otros 2 triángulos, uno, formado por los puntos J-Circuncentro-Ortocentro y, otro, formado por el triángulo de Calvimont B-Circuncentro-Ortocentro. Trazamos la altura vertical (Circuncentro-L) de este nuevo triángulo y la nueva recta de Euler (o segmento LK) del triángulo, y volvemos a obtener un triángulo (Circuncentro-L-K, que es semejante al triángulo Circuncentro-Ortocentro-J), y volvemos a hacer esto hasta el infinito tal y como se muestra en la siguiente imagen:

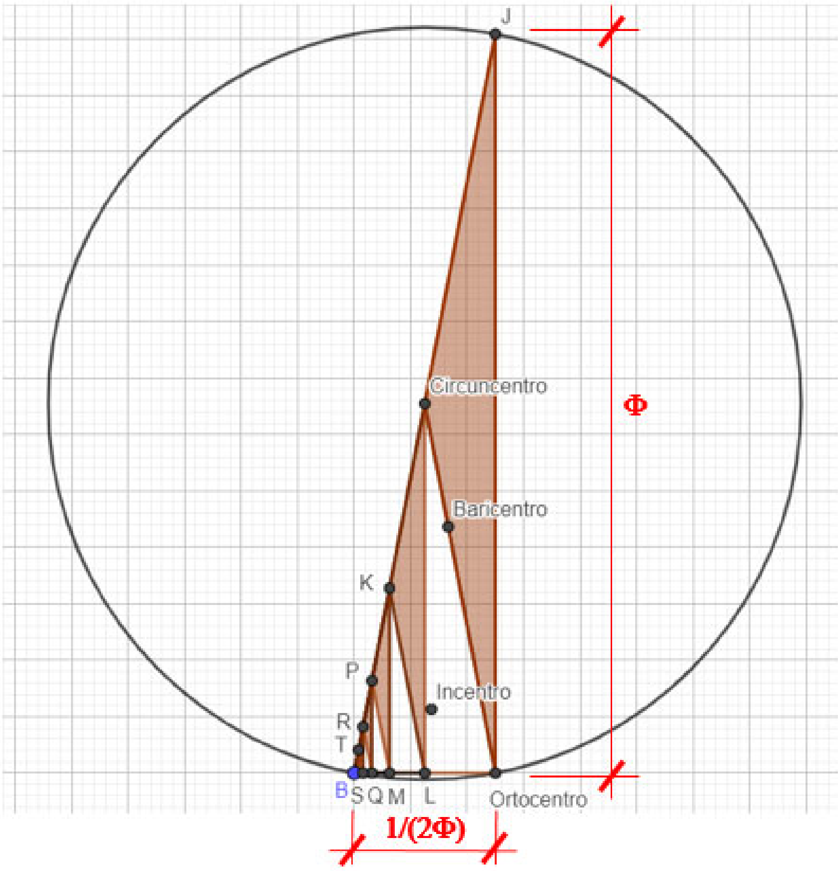


Figura 22. Actividad 6. Semi-triángulo de Calvimont y triángulos anidados en su interior.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Se pide: calcular el área sombreada en rojo. ¿Las áreas tienen algún tipo de razón geométrica? Calcula el área no sombreada interior a la circunferencia circunscrita (y al triángulo).

Respecto al perímetro, determinar el perímetro de los triángulos sombreados en rojo.

Aplica los conocimientos sobre progresiones para obtener el área y el perímetro.

ACTIVIDAD Nº7

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 10.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre perímetros y áreas sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral. Para el presente ejercicio continuaremos con algunos de los triángulos que ya hemos visto en otras actividades.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Ángulos de la circunferencia, longitudes y áreas de figuras circulares.

Desarrollo:

Actividad 7.1

A partir del semi-triángulo de Calvimont de la unidad anterior, **determina los ángulos que forma el perfil de las agujas de la catedral de Burgos. Como dato del ejercicio se da el ángulo α.**

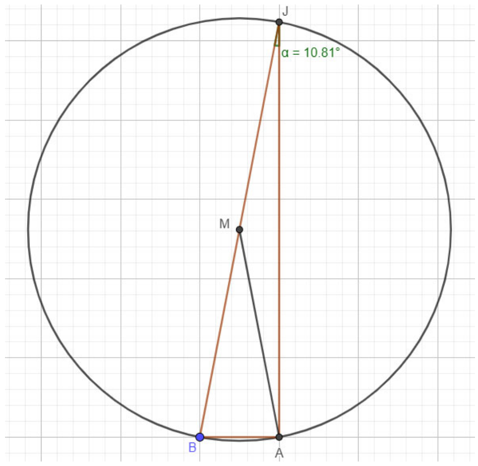


Figura 23. Actividad 7.1. Semi-triángulo de Calvimont y triángulo de Calvimont en su interior.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Actividad 7.2

Respecto al triángulo áureo, representativo de la zona del trasaltar, girola y capillas absidiales, **se pide determinar los ángulos que definen el triángulo áureo del dibujo. También se pide determinar los ángulos del pentágono regular. Asimismo, se pide, determinar el valor de las áreas 1, 2 y 3 indicadas en el dibujo.**

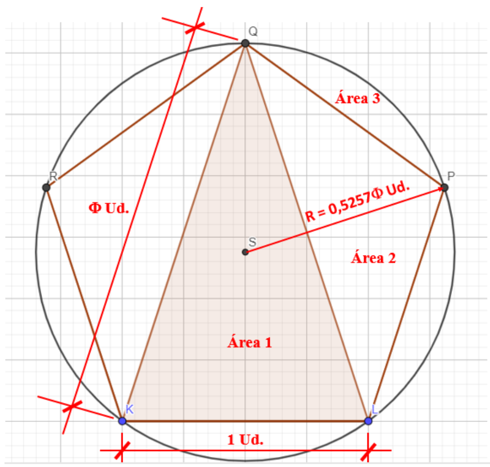


Figura 24. Actividad 7.2. Triángulo áureo dentro de un pentágno. Datos de la actividad.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

ACTIVIDAD Nº8

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 11.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre perímetros y áreas sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Contenidos: Ángulos de la circunferencia, longitudes y áreas de figuras circulares.

Desarrollo:

Actividad 8.1

Se pide determinar el área y el perímetro del triángulo de Releaux (equilátero) de la imagen.

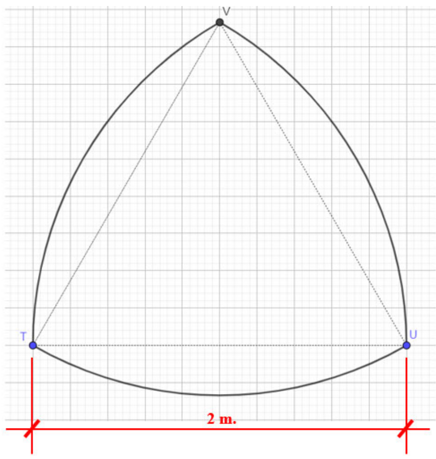


Figura 25. Actividad 8.1. Triángulo de Releaux. Datos de la actividad.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Actividad 8.2

Volvemos la Vésica Piscis. Nos fijamos esta vez en un friso que hay en el canto de los escalones de Capilla del Condestable. Se trata de la siguiente composición geométrica: Trazamos la Vésica Piscis tal y como se hizo en la actividad nº1. Después trazamos su diagonal mayor (B_1C_1) y su diagonal menor (WZ). Trazamos los triángulos equiláteros (WZB_1 y WZC_1) interiores a la Vésica Piscis. Como podemos ver en el dibujo se forman 4 triángulos rectángulos. Tal y como hemos visto en otras actividades, el circuncentro de un triángulo rectángulo siempre está en el punto medio de su hipotenusa, de ahí los puntos E_1 y F_1 centros de las circunferencias que circunscriben los triangulos rectángulos B_1D_1Z y WD_1C_1 respectivamente. **Se pide determinar**

el área sombreada de la imagen teniendo en cuenta que el segmento WZ mide 2 Ud. También se pide determinar el perímetro exterior e interior de la Vesica Piscis (Arcos B_1WC_1, C_1ZB_1, B_1D_1 y D_1C_1).

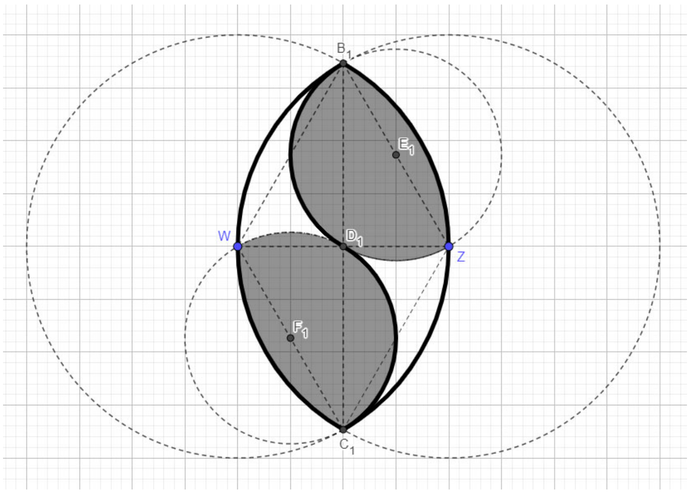


Figura 26. Actividad 8.2. Composición geométrica en el interior de la Vésica Piscis.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

<u>Actividad 8.3</u>

Nos centramos ahora en los rosetones trilobulados, que en la catedral podemos verlos en los arcos del triforio. Para su construcción gráfica partimos de una circunferencia de radio R_e que circunscribe a un triángulo equilátero de lado $\sqrt{3}\,R_e$, para ello se habrán trazado las mediatrices de los lados del triángulo (que coinciden con las bisectrices, alturas y medianas al tratarse de un triángulo equilátero) y se habrá obtenido el circuncentro (que coincide con el incentro, el ortocentro y el baricentro). Las mediatrices (o bisectrices, alturas o medianas) dividen la circunferencia en tres arcos de 120º (AC, AB y CB). La circunferencia tangente interior superior es una circunferencia que pasa por el punto C y es tangente a las rectas AD y BD. Para obtener su centro trazamos por C una recta perpendicular a la bisectriz (o recta DC) que corta en el punto E con la recta BD. Desde E trazamos una circunferencia de radio EC que corta a la recta BD en F. Por F trazamos la perpendicular que corta a las rectas CD y AD en G y H respectivamente. Esos son los centros de 2 de las circunferencias tangentes interiores. El tercer centro se obtiene trazando un triángulo paralelo al triángulo inicial de lado GH. Al no ser objeto del 3er curso de la ESO la trigonometría, se proporcionan los siguientes datos reflejados en el dibujo.

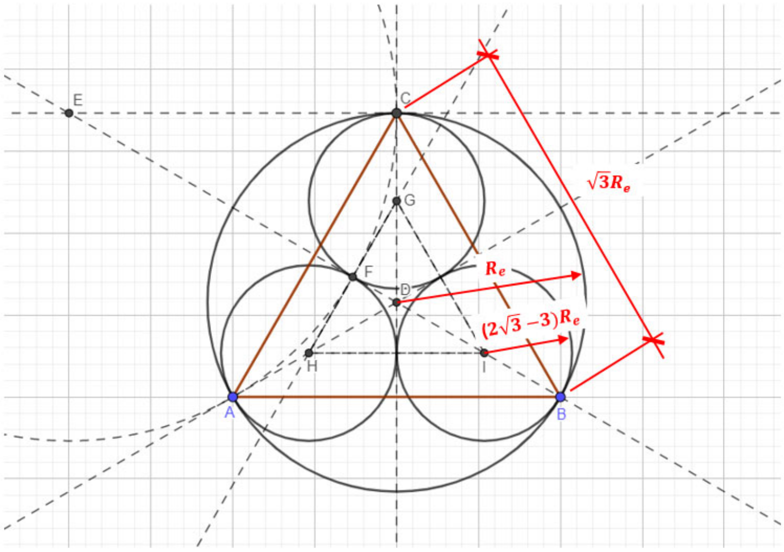


Figura 27. Actividad 8.3. Construcción de un rosetón trilobulado. Datos del problema 1.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Se pide, determinar el área sombreada en rojo y el perímetro del trilóbulo reflejado con línea roja, siendo Re = 1 Ud.

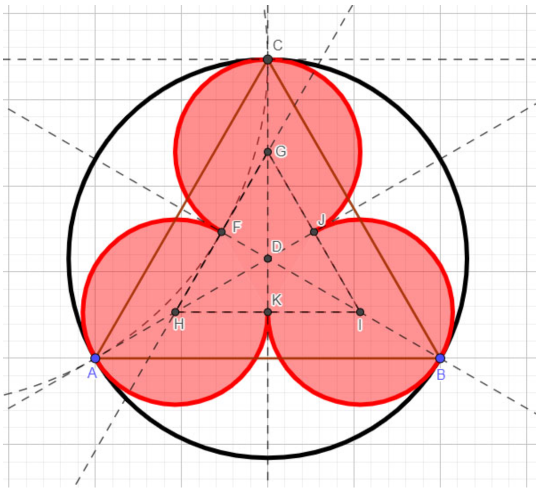


Figura 28. Actividad 8.3. Construcción de un rosetón trilobulado. Datos del problema 2.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

<u>ACTIVIDAD Nº9</u>

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 14.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre transformaciones geométricas sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora, así como un ordenador portátil del colegio para el desarrollo de la actividad con Geogebra.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Transformaciones geométricas.

Desarrollo:

En esta actividad vamos a introducir una figura que también aparece en la catedral, pero es más característica del arte nazarí. Se trata del pétalo nazarí. Lo podemos encontrar en algún retablo como el de la capilla de Santa Ana o en el rosetón de la portada de Santa María. Se trata de una forma geométrica que rellena el plano de manera perfecta, pudiendo rellenar cualquier superficie con utilizando transformaciones geométricas. Para construir geométricamente un pétalo tan solo debemos dibujar un triángulo equilátero y unir los puntos medios de sus lados, de esta manera tendremos 4 triángulos equiláteros más pequeños (con 1/4 del área del inicial). Trazando los arcos con centro en los vértices inferiores (A y E) y con centro en los vértices medios (C y D), y todos ellos de radio la mitad del lado del triángulo inicial, obtenemos el pétalo:

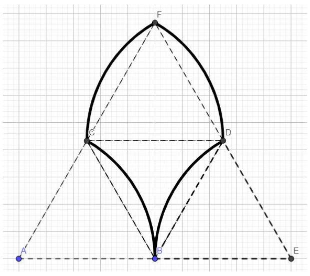


Figura 29. Actividad 9. Construcción de un pétalo nazarí.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Mediante transformaciones geométricas podemos ir rellenando el espacio. Se muestran a continuación imágenes con transformaciones geométricas en el retablo y en el rosetón comentados:

Figura 30. Actividad 9. Relleno del espacio con pétalos nazaríes.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

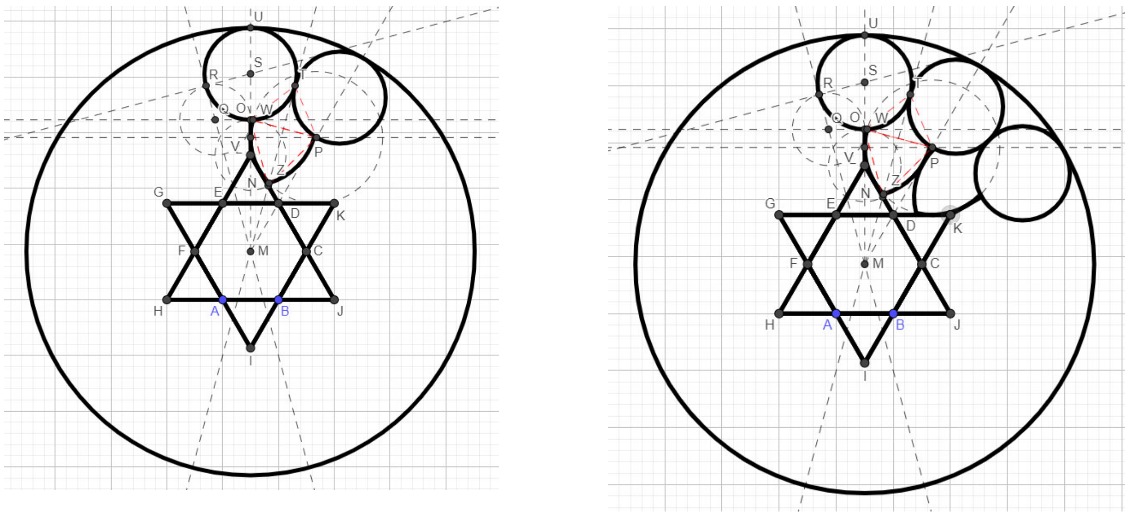


Figura 31. Actividad 9. Otra forma de rellenar el espacio utilizando pétalos nazaríes en el rosetón de Santa María. Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”, (2021).

¿Qué tipo de transformaciones se han aplicado en las imágenes anteriores? ¿Son directas o inversas?

Sobre la base de las imágenes (archivos de Geogebra que se proporciona al alumno), **se pide, como actividad para casa, que completen el rosetón de Santa María (sin realizar los polilóbulos interiores).**

ACTIVIDAD Nº10

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 15.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre vectores y traslaciones en el plano con coordenadas sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora, así como un ordenador portátil del colegio para el desarrollo de la actividad con Geogebra.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Vectores, Traslaciones en el plano. Coordenadas.

Desarrollo:

Actividad 10.1

Continuamos con el pétalo nazarí y el rosetón de la portada de Santa María. En esta actividad **se pretende que mediante traslaciones del pétalo (apoyadas en vectores), el alumno trate**

de construir el relleno completo de un ventanal gótico. El alumno deberá ir indicando para cada paso (o cada traslación) y el punto inicial, el punto final y las coordenadas del vector traslación. También, con base en la imagen del rosetón de la portada de Santa María. También se valorará con un punto positivo el que averigüé la relación entre la altura y la anchura del ventanal (construido sobre la base de un triángulo de Calvimont).

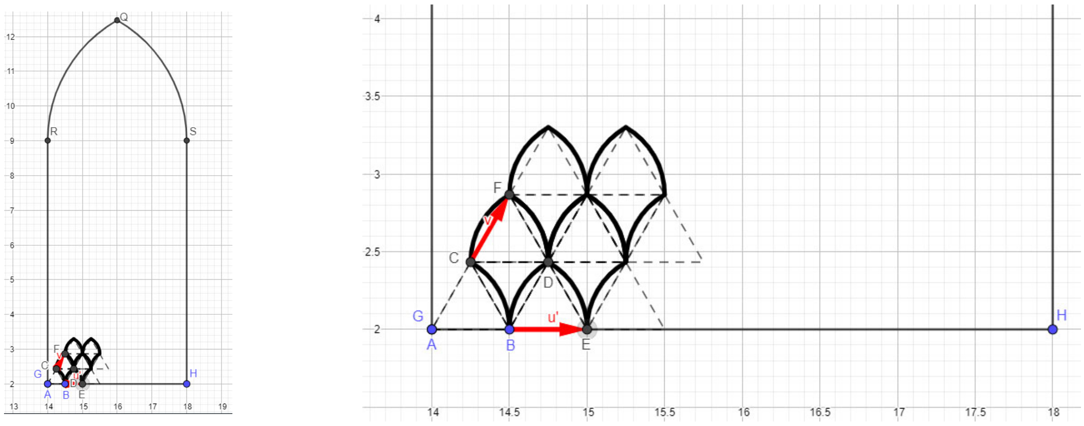


Figura 32. Actividad 10.1. Relleno de un ventanal gótico con pétalos nazaríes.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

También, con base en la imagen del rosetón del Sarmental, **el alumno apoyará un punto en uno de las circunferencias (punto A_1) y trazará su punto simétrico (punto B_1 respecto al eje rojo-recta que pasa por el centro del rosetón y es tangente a la circunferencia en la que hemos apoyado en punto). Trazará el vector u (MA_1) y el vector v (MB_1) y realizará la suma de los vectores u+v (w, en el origen de coordenadas), y finalmente activará el movimiento de A_1 (en su objeto) y activará la sombra de B_1. Irá viendo como varía el vector w. Posteriormente multiplicará w por un valor entero para que vea como varía también con el movimiento de A_1.**

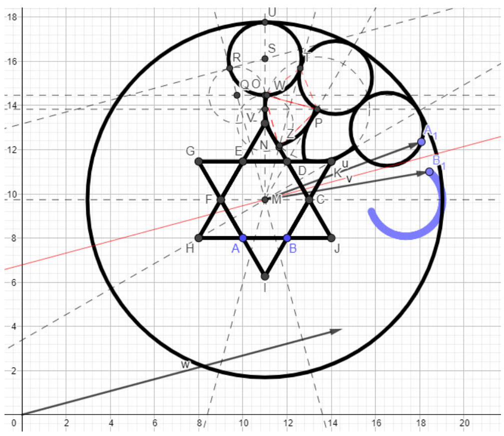


Figura 33. Actividad 10.1. Suma de vertores simétricos en rosetón de Santa María.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Actividad 10.2

La noche del 3 al 4 de marzo de 1539 el cimborrio de la catedral de Burgos se hundió con un estruendo aterrador. Después de esto se encargó a Juan de Vallejo la construcción del actual cimborrio, quizás una de las obras más maravillosas de la catedral, de la que el Rey Felipe II dijo que "más parecía obra de ángeles que de hombres" (Catedral de Burgos, s.f., párr. 1). Se trata de un elemento arquitectónico muy voluminoso y de gran peso. El cimborrio se construyó sobre 4 grandes pilares y sobre ellos se construyeron capiteles y pináculos. En la siguiente imagen se ha representado un único pilar para evitar que la imagen quede muy saturada. El peso del cimborrio se transmite por la pechina y los arcos torales generando una transmisión de la carga de empuje hacia el exterior y hacia abajo. El elemento superior del pilar es un peso muerto cuyo peso sirve para centrar la carga de empuje (para que no sea tan inclinada).

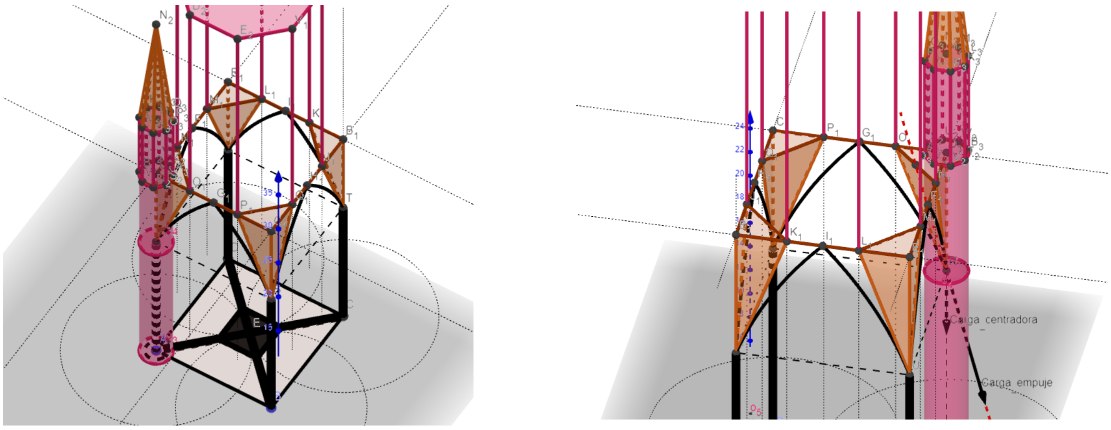


Figura 34. Actividad 10.2. Suma de vertores de cargas transmitidos por una pechina del cimborrio del crucero de la Catedral de Burgos. Pináculo sobre pechina. El aspa y el cuadro negro son una representación del suelo y la tumba del Cid y Doña Jimena.
Fuente: Elaboración propia.

En base a esto se pide: **si la carga de empuje es un vector de componente (2, -10) y la carga centradora es un vector de componentes (0, -5) determinar el vector carga que llega al cimiento. ¿Se produce el centrado de la carga? Explícalo con tus propias palabras.**

ACTIVIDAD Nº11

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 17.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre composición de traslaciones sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora, así como un ordenador portátil del colegio para el desarrollo de la actividad con Geogebra.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Composición de traslaciones.

Desarrollo:

Nos fijamos ahora en el suelo de la Capilla del Condestable con el diseño de los triángulos blancos y negros resultantes de dividir un cuadrado por sus diagonales y colorear las áreas resultantes dos a dos. **Se trata de comprobar la composición de traslaciones, es decir, el alumno debe realizar una traslación (de vector u en la imagen) y posteriormente realizar otra diferente desde la posición a la que llegó (de vector v). Comprobar que se puede realizar la misma traslación a través de una traslación que une los puntos inicial y final (vector w). A partir de ahí rellenar un área de 24x24 uds. utilizando traslaciones y los triángulos que se aportan en el archivo de Geogebra.**

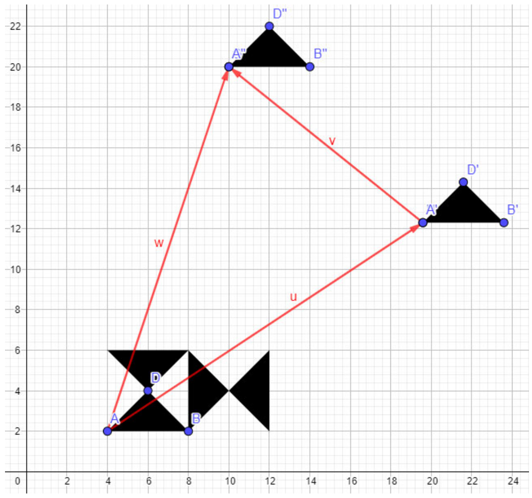


Figura 35. Actividad 11. Composición de traslaciones con el suelo de la Capilla del Condestables.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Además, ahora nos fijamos en el suelo de las naves de la catedral. El suelo está compuesto por paños rellenos por triángulos y hexágonos. Mediante dos triángulos y un hexágono **los alumnos deberán tratar de conseguir una composición hexagonal de un recinto (sin llegar a formar la cruz). Pueden tomar como ejemplo el suelo alrededor de la tumba del Cid o el suelo de las naves de la catedral. Deberán rellenar el espacio correspondiente a 5 unidades cuadradas si la base del triángulo es de 1 ud., Se adjunta archivo de Geogebra. ¿Qué vectores has utilizado en las traslaciones?**

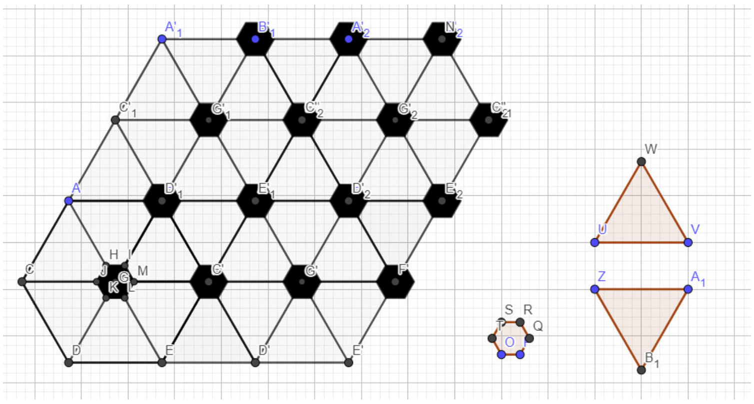


Figura 36. Actividad 11. Composición de traslaciones con el suelo del crucero.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

ACTIVIDAD Nº12

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 18.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre giros en el plano, simetría central y centro de simetría sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral. Ahora nos fijaremos en los arcos de tipo conopial y de tipo angrelado.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Giros en el plano, simetría central y centro de simetría

Desarrollo:

Ahora nos fijamos en los arcos de tipo conopial existentes en diferentes lugares de la catedral, formando parte de piezas escultóricas, de barandillas u otros detalles. **En el arco que nos ocupa, con tres giros del arco EG (c), podemos formar el arco completo. ¿Cuáles son esos giros y sus centros de giro? ¿Se consiguen todos ellos con simetrías centrales? Razona la respuesta.**

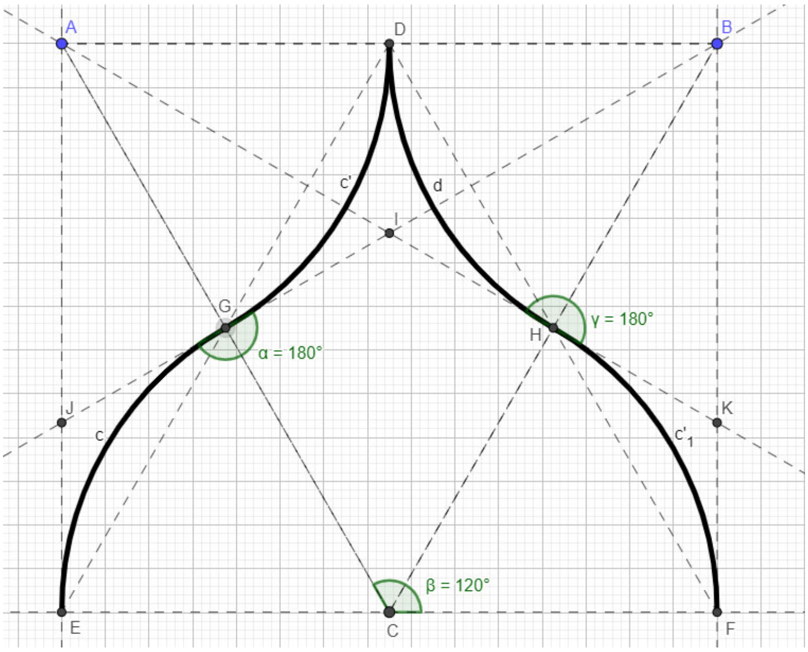


Figura 37. Actividad 12. Formar un arco conopial equilatero a partir de giros de una parte del arco.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Ahora un poco más difícil. Nuestro objetivo es construir un arco angrelado, partiendo de los arcos NE (c_1) y EG (c). Valiéndonos únicamente de giros construir el arco angrelado completo. **¿Cuáles son esos giros y sus centros de giro? ¿Se consiguen todos ellos con simetrías centrales? Razona la respuesta.**

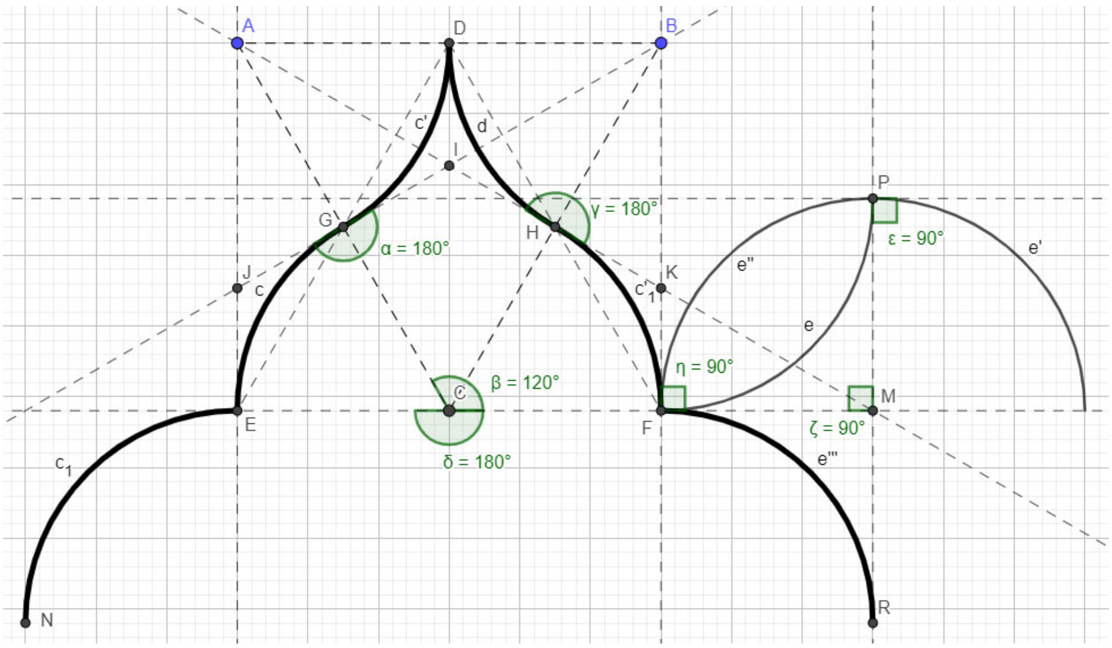


Figura 38. Actividad 12. Formar un arco angrelado a partir de giros de partes del arco.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

ACTIVIDAD Nº13

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 19.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre giros en el espacio, simetría central en el espacio y centro de simetría sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral. Ahora nos fijaremos en la bóveda de crucería y en el crucero de la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora, así como un ordenador portátil del colegio para el desarrollo de la actividad con Geogebra.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Giros en el espacio. Simetría central en el espacio. Centro de simetría.

Desarrollo:

El ejercicio que ahora nos ocupa trata de uno de los principales elementos estructurales del gótico: la bóveda de crucería. Es un elemento estructural que se caracteriza por la intersección o el cruce de dos bóvedas apuntadas de cañón. La intersección de las bóvedas se materializa en dos arcos cruzados diagonalmente denominados arcos fajones. Longitudinalmente al eje de la nave y perpendicularmente a él, la bóveda queda enmarcada por los arcos formeros, denominados arcos torales cuando soportan cúpulas o cimborrios, dos de ellos dan continuidad a la nave y los otros dos abren huecos en la fachada y en el interior. Las bóvedas de crucería transmiten las cargas a los apoyos laterales y desde allí se canalizan hasta la cimentación. Estas cargas compuestas de componente vertical y horizontal se canalizan respectivamente a través de los pilares fasciculados (pilares compuestos por un núcleo central y por haces de baquetones) y de los arbotantes hacia los contrafuertes. Es fascinante el avance que se produjo respecto a la arquitectura de épocas anteriores ya que las bóvedas apuntadas disminuían los empujes horizontales notablemente, y, además, con la ayuda adicional de los arbotantes dichos empujes se canalizaban al exterior, lo cual hacía que el peso estabilizador de la pared no fuera necesario lo que permitió abrir grandes ventanales y llenar de luz los templos. En el caso que nos ocupa vamos a analizar una bóveda de crucería para analizar giros en el espacio, simetría central en el espacio y centro de simetría. Nos fijamos en el siguiente dibujo realizado con Geogebra. Para apreciar mejor los detalles se ha realizado sobre la base de prismas y solamente se ha dibujado el aire de las bóvedas en los arcos formeros. **Se pide: Partiendo de los segmentos MK, OK (constitutivos de medio triángulo equilátero) y del arco formero OK (constitutivo de**

media bóveda), y del tronco de prisma OMH (base recta) – NIP (base oblicua), ¿somos capaces de formar el dibujo completo aplicando giros en el espacio, simetría central en el espacio y centro de simetría?

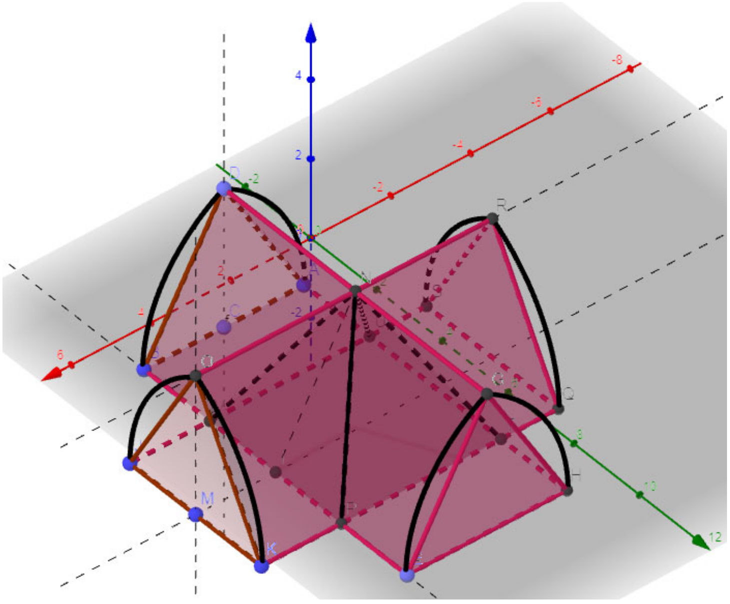


Figura 39. Actividad 13. Bóveda de crucería - Cruce de bovedas ojivales equiláteras. Composición geométrica en el espacio.
Fuente: Elaboración propia.

Ahora nos fijamos en el crucero de la catedral. El crucero se materializa con un cimborrio calado que es una de las joyas emblemáticas de la catedral. Se trata, por tanto, de la transición entre una parte inferior de sección cuadrada y una parte superior de sección octogonal. La transición entre el cuadrado y el octógono se realiza mediante pechinas y las cargas del peso del prisma octogonal superior se canalizan a través de 4 pechinas y 4 arcos torales. **Partiendo de uno de los pilares (dibujado en negro), de la pechina que tiene sobre él (dibujada en marrón), de los dos semi-arcos torales que desembarcan en dicho pilar (dibujados en negro) y de una de las caras rectangulares del prisma octogonal que apoya sobre dicha pechina (dibujada en morado), se pide, si somos capaces de formar el dibujo completo aplicando los conceptos de giros en el espacio, simetría central en el espacio y centro de simetría.**

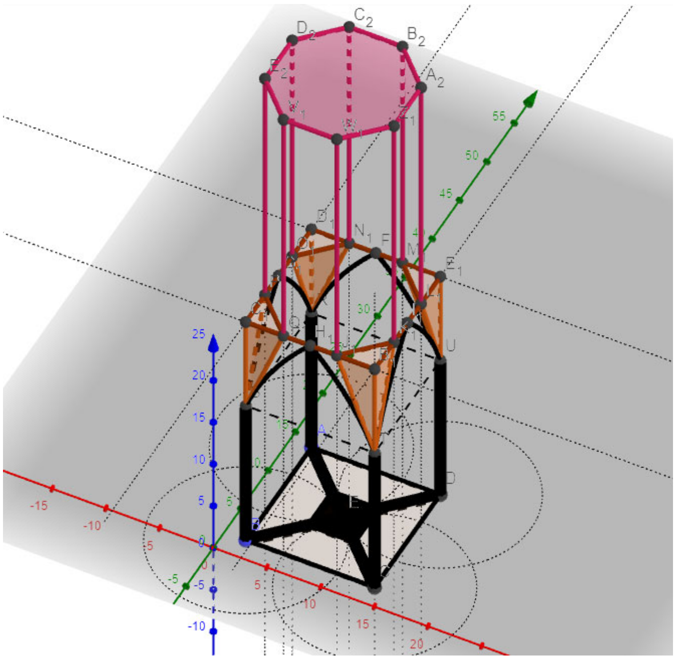


Figura 40. Actividad 13. Crucero de la Catedral de Burgos.
Fuente: Elaboración propia.

ACTIVIDAD Nº14

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 21.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre simetrías axiales, eje de simetría y composición de simetrías sirven como base para desarrollar los conceptos que se trabajan en la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral. Ahora nos fijaremos en la bóveda del crucero.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Giros en el espacio. Simetría central en el espacio. Centro de simetría.

Desarrollo:

Continuamos en esta actividad con la bóveda calada del crucero. Para ello se adjunta como dato un dibujo de planta de los octógonos estrellados necesarios para trazar las nervaduras de la bóveda del crucero (un octógono estrellado 8/3 y dentro de él, en el octógono que se genera en las intersecciones de los lados cóncavos del octógono estrellado, otro octógono estrellado 8/3 interior que queda rotado 22,5 grados respecto al inicial), así como el propio dibujo de las nervaduras de la bóveda del crucero, y dos dibujos de los puntos de intersección de las nervaduras para que los alumnos desarrollen mediante simetrías dicha bóveda. **¿Cuántos ejes**

de simetría puedes encontrar? Dibuja los trazos necesarios del cimborrio para dibujarlo completo con una simetría. Mediante los trazos mínimos (módulo mínimo) y composición de simetrías dibuja la estrella del crucero. ¿Cuál es el módulo mínimo que utilizarás para realizarlo mediante composición de simetrías?

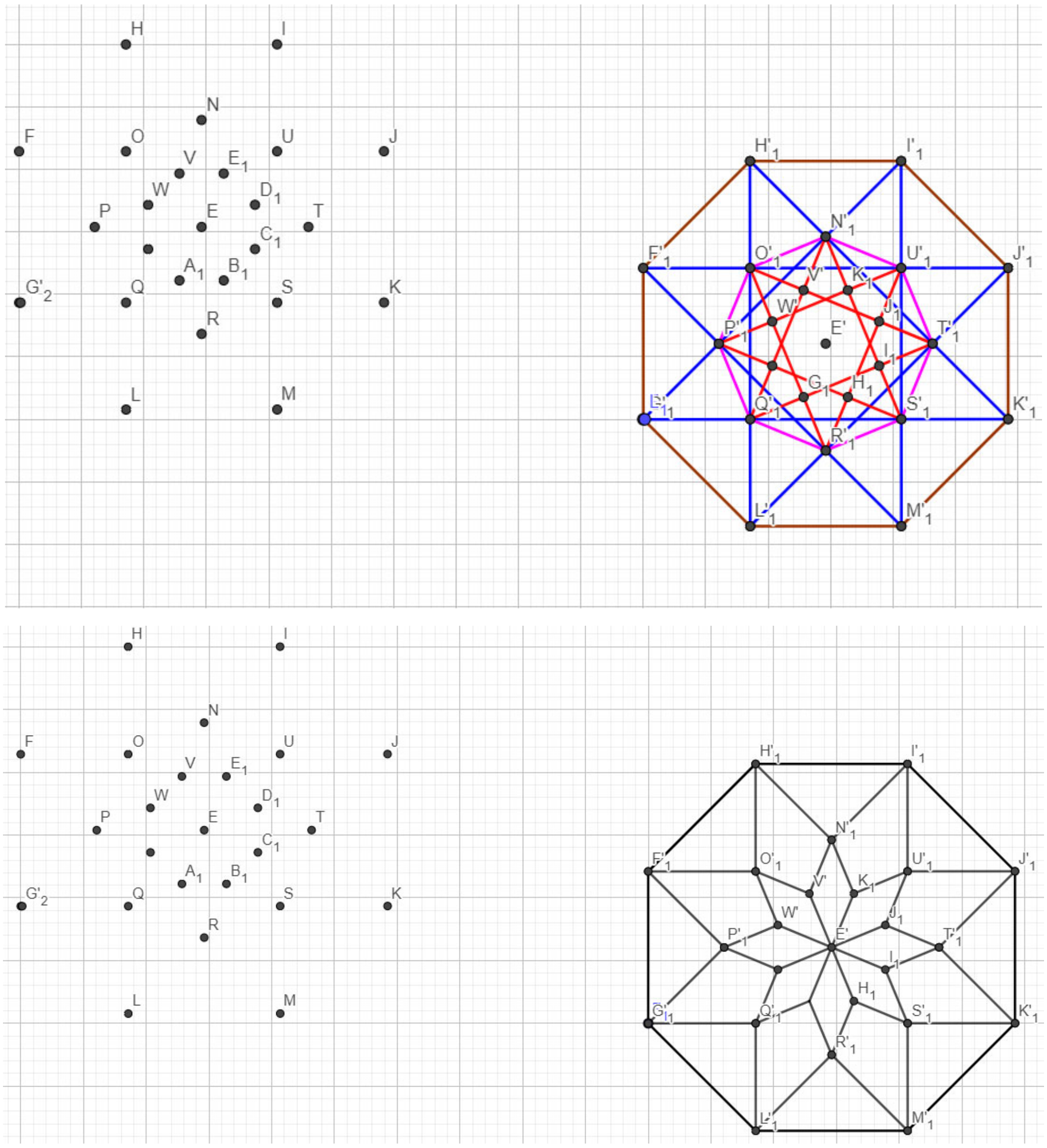


Figura 41. Actividad 14. Esquema geométrico del cimborrio de la catedral de Burgos y vertices para realización de la actividad.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

ACTIVIDAD Nº15

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 22.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre transformaciones geométricas desarrollados de manera conjunta sirven de base para desarrollar la presente actividad sobre frisos y rosetones. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora, así como un ordenador portátil del colegio para el desarrollo de la actividad con Geogebra.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

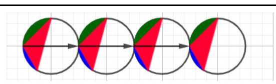
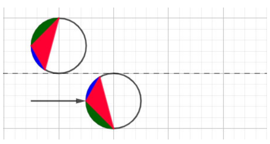
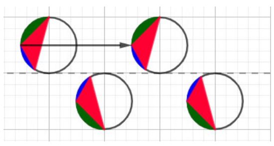
Contenidos: Frisos y rosetones.

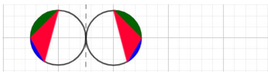
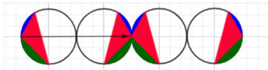
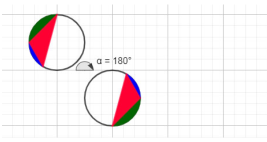
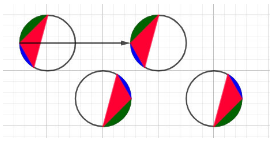
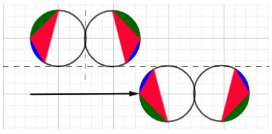
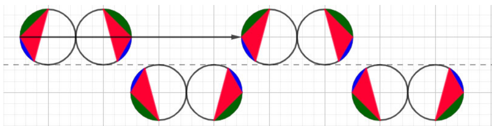
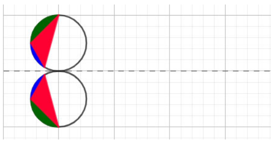
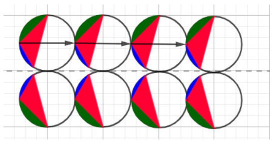
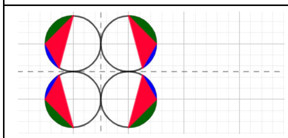
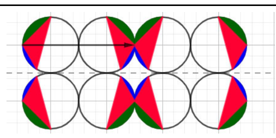
Desarrollo:

<u>Actividad 15.1</u>

En esta actividad nos fijaremos en ciertos detalles de algunos frisos de la catedral. Utilizando combinaciones de traslaciones, simetrías (axiales, centrales o giros de 180º respecto dicho punto) y deslizamientos (simetrías de eje horizontal seguidas de una traslación) podemos componer siete tipos de frisos diferentes, es decir, basándonos en isometrías se obtienen en el plano siete combinaciones posibles. Mediante un módulo mínimo al que le sometemos a las transformaciones geométricas comentadas generamos un módulo básico que es el que se traslada horizontalmente de manera periódica. Se indican a continuación los tipos de criterios para composición de frisos:

Tabla 9. Combinaciones posibles para la composición de frisos.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

TIPO	MÓDULO BÁSICO	PATRÓN REPETITIVO
TIPO 1	Modulo mínimo.	Traslación.
		
TIPO 2	Modulo mínimo sometido a simetría horizontal y desplazamiento.	Traslación.
		

TIPO 3	Modulo mínimo sometido a simetría vertical.	Traslación.
		
TIPO 4	Modulo mínimo sometido a giro de 180º.	Traslación.
		
TIPO 5	Modulo mínimo sometido a simetría vertical + simetría horizontal y desplazamiento.	Traslación.
		
TIPO 6	Simetría horizontal.	Traslación.
		
TIPO 7	Simetría horizontal y simetría vertical.	Traslación.
		

Los alumnos deberán clasificar por tipos los frisos tomados mediante fotografías por ellos en la visita a la catedral.

El alumno dibujará algunos frisos fotografiados en la visita a la catedral con Geogebra para determinar el módulo mínimo; de ahí componer el módulo básico y a partir de él

generar el friso completo por traslaciones del módulo básico. Si nos fijamos en el friso comentado en la actividad 8.2 de la capilla del Condestable tendríamos lo siguiente:

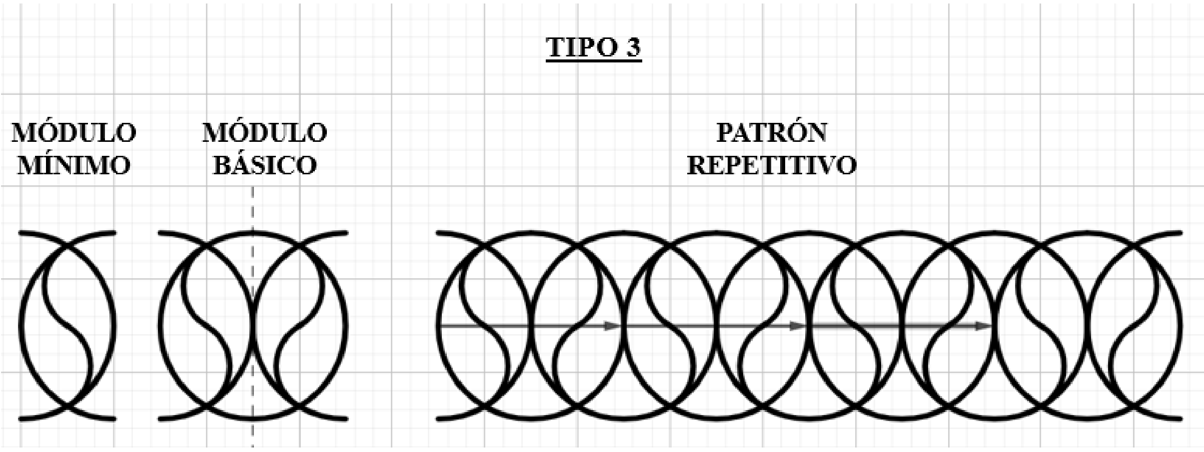


Figura 42. Actividad 15.1. Ejemplo 1 de composición de friso ubicado en escalones de Caplilla del Condestable. Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”, (2021).

También, de los escalones de la Capilla del Condestable tendríamos el siguiente friso cuya solución se muestra en la imagen siguiente:

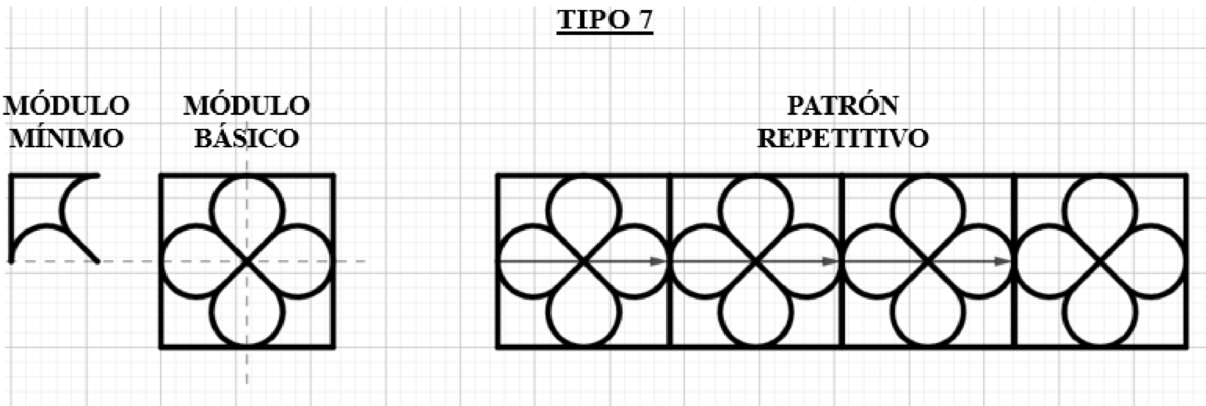


Figura 43. Actividad 15.1. Ejemplo 2 de composición de friso ubicado en escalones de Caplilla del Condestable. Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”, (2021).

Actividad 15.2

También nos fijamos ahora en el rosetón de la portada de Santa María. **El alumno dibujará el módulo mínimo a partir del cual mediante giros compondrá el rosetón. Se adjunta imagen de la actividad 9:**

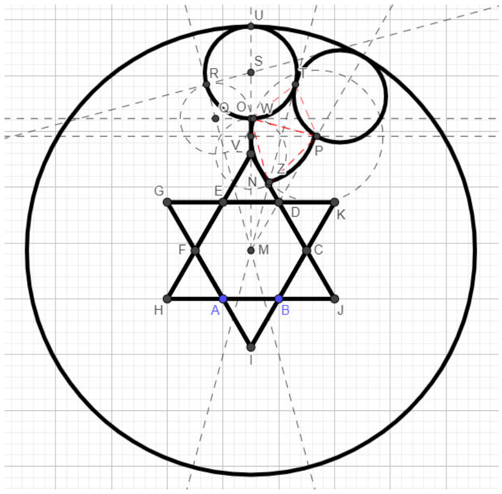


Figura 44. Actividad 15.2. Composición del rosetón de Santa María.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

ACTIVIDAD Nº16

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 25.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre perpendicularidad y paralelismo en el espacio sirven de base para desarrollar la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Perpendicularidad y paralelismo en el espacio.

Desarrollo:

Tal y como pudimos ver en la visita a la catedral el octógono es el polígono más importante en la arquitectura de la Catedral de Burgos y el cimborrio de planta octogonal es un prisma de 26 metros de altura soportado por pechinas y arcos torales. Nos centramos por tanto en el prisma octogonal del cimborrio.

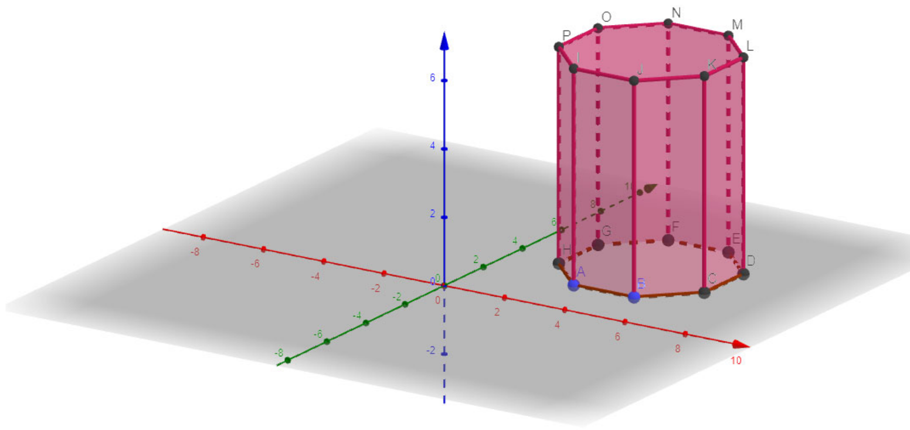


Figura 45. Actividad 16. Prisma octogonal – Cimborrio.
Fuente: Elaboración propia.

En el prisma de la figura el alumno debe indicar: planos paralelos, Planos perpendiculares, segmentos paralelos coplanarios y no coplanarios, segmentos perpendiculares coplanarios y no coplanarios, rectas y planos y planos paralelos y rectas y planos perpendiculares.

Apoyándose en las caras del prisma deberá dibujar en la base superior una recta contenida en el plano, un punto de intersección de una recta con un plano, deberá dibujar una recta paralela a un plano, deberá indicar la intersección de dos planos que formen las caras del poliedro. Deberá dibujar dos planos paralelos que formen las caras del poliedro, deberá dibujar dos rectas secantes en alguna de las caras del poliedro, deberá indicar dos rectas paralelas en alguna de las caras del poliedro, deberá dibujar dos rectas que se crucen apoyadas en las caras del poliedro y por último deberá dibujar una recta que corte a la recta ID (que no sea una arista del poliedro).

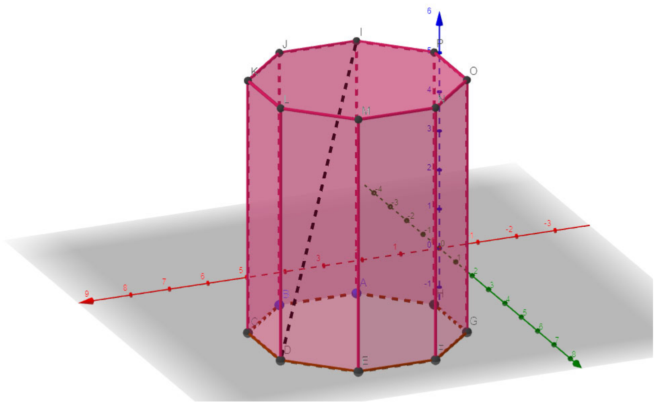


Figura 46. Actividad 16. Prisma octogonal – Cimborrio. Detalle recta ID.
Fuente: Elaboración propia.

Si dos planos paralelos (en este caso las bases del prisma) determinan segmentos iguales al cortar a dos rectas, ¿es cierto que las rectas son necesariamente paralelas?

Al alumno se le hará ver el siguiente dibujo para que visualice la respuesta.

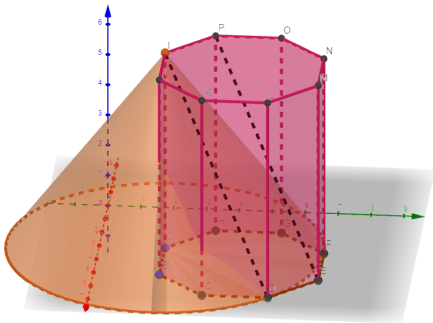


Figura 47. Actividad 16. Prisma octogonal – Cimborrio. Detalle recta ID y cono.
Fuente: Elaboración propia.

ACTIVIDAD Nº17

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 26.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre poliedros sirven de base para desarrollar la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Elementos de un poliedro. Teorema de Euler.

Desarrollo:

En esta actividad vamos a trabajar con la bóveda calada de la Capilla del Condestable. Como sabemos, esta bóveda tiene planta octogonal. Para construir un octógono a partir de un cuadrado hay que realizar las siguientes operaciones geométricas: desde cada vértice del cuadrado trazamos 4 circunferencias de radio la longitud de media diagonal del cuadrado. Los ocho puntos de corte delimitan los lados del octógono. Esta forma de trazar el octógono partiendo de un cuadrado se denomina corte sagrado (se puede apreciar en la figura 48 en la cual también se ha dibujado el polígono estrellado característico de la bóveda de la Capilla del Condestable).

También se puede dibujar el octógono a partir de la longitud de uno de sus lados (HG en figura 48). Para ello trazo la mediatriz del segmento (lado HG). Desde el punto de corte de la mediatriz con el segmento (N_2) trazo una circunferencia que pase por los bordes de dicho segmento (que pase por H y por G). Desde uno de los puntos de corte de dicha circunferencia con la mediatriz (O_2) trazo otra circunferencia que pase por los puntos de borde del segmento (que pase por H y por G), y el punto de corte de dicha circunferencia con la mediatriz (P_2) determina el centro de la circunferencia que circunscribe el octógono de lado HG. A partir de ahí trazando arcos de longitud HG determino todos los lados del octógono.

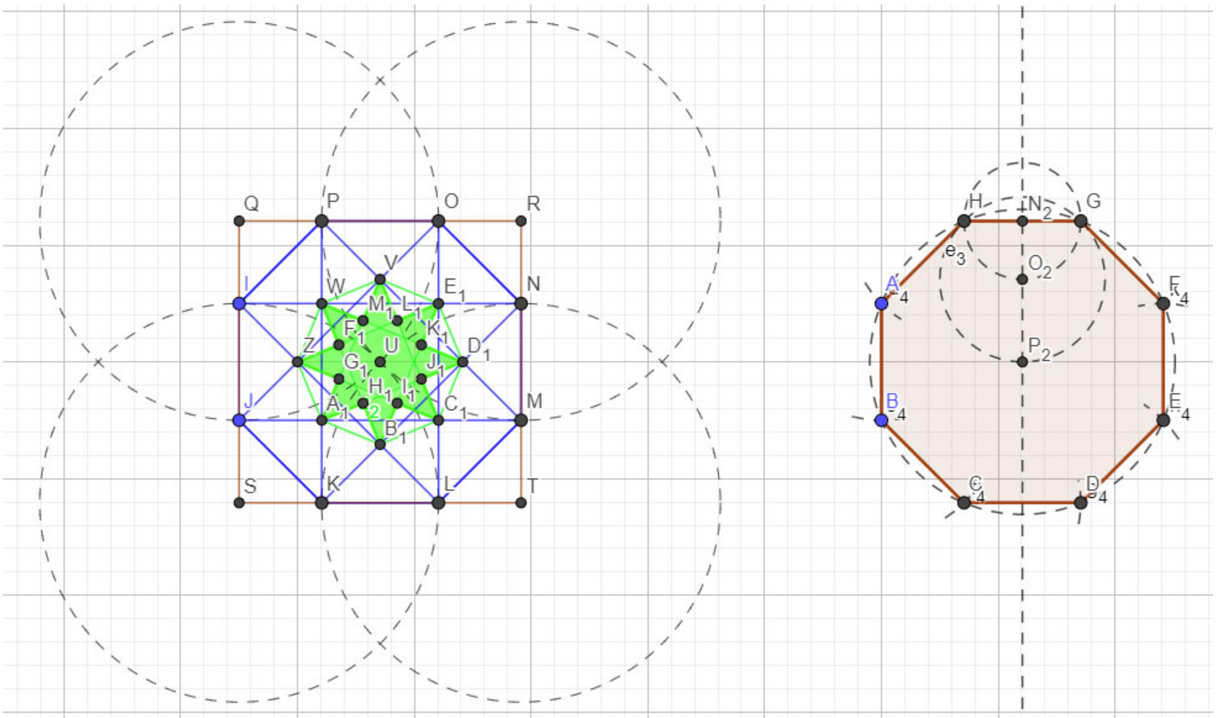


Figura 48. Actividad 17. Construcción de un octogono a partir de un cuadrado y dado su lado. Construcción de poligonos estrellados 8/3 anidados a similitud de la boveda de la Capilla del Condestable.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

La bóveda de esta capilla está calada, es decir, tiene una parte central con vidrieras para que entre la luz. Esa parte central es un polígono estrellado. Para la obtención del contorno de dicho polígono estrellado hemos de trazar desde los vértices del octógono azul (figura 49), un polígono estrellado 8/3, es decir, empezando en un vértice y saltando vértices de tres en tres hasta que cierre el polígono. Haciendo esto se obtiene el polígono estrellado color cian. A partir de él se traza el octógono interior de color rosa y desde los vértices de éste se traza el polígono estrellado 8/3 interior. Ese polígono determina la apertura vidriada de la bóveda.

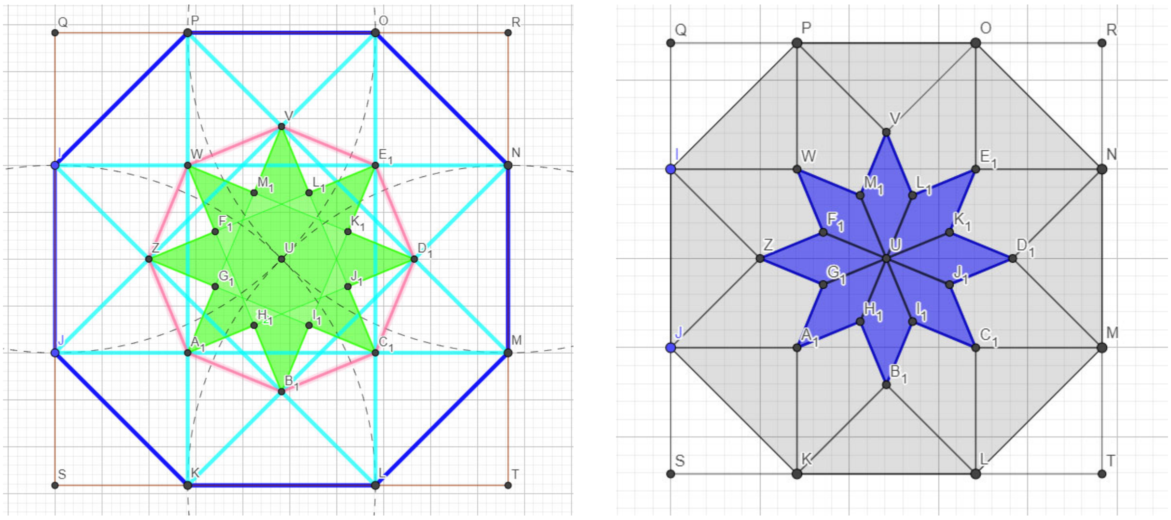


Figura 49. Actividad 17. Construcción de los poligonos estrellados 8/3 anidados característicos de la Capilla del Condestable y forma final de la zona calada y la zona opaca.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Los poliedros siguientes son el volumen que ocupa la proyección vertical de la bóveda de la Capilla del Condestable, en este caso se trata de la proyección de toda la bóveda que nos da un poliedro convexo y la proyección de la zona acristalada (haz de luz vertical) que nos da un poliedro cóncavo. **Se pide: determinar los elementos (caras, aristas, vértices, ángulos diedros, ángulos poliedros y diagonales) de los poliedros indicados. ¿Cuántas diagonales tiene el poliedro convexo? Comprobar el teorema de Euler. ¿Se cumple el teorema de Euler en el caso del poliedro cóncavo?**

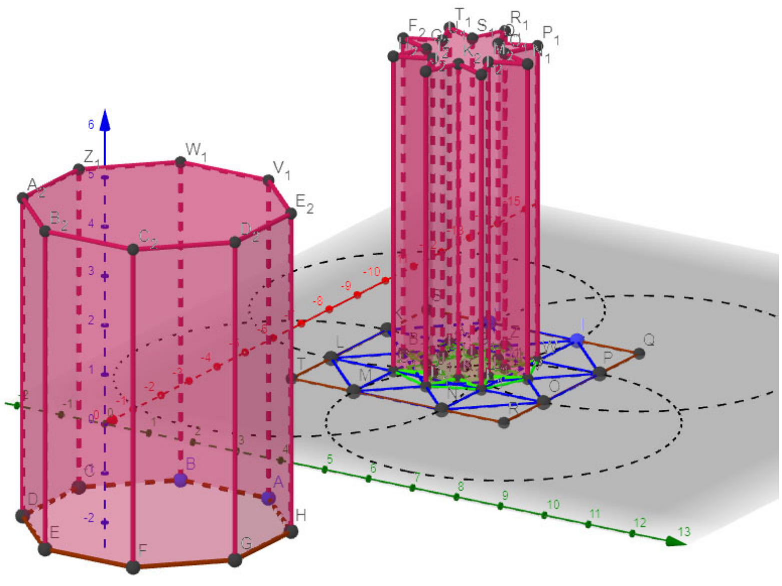


Figura 50. Actividad 17. Poliedros convexo y cóncavo característicos de la bóvede de la Capilla del Consdestable.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

ACTIVIDAD Nº18

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 27.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre poliedros sirven de base para desarrollar la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Prismas. Paralelepípedos. Teorema de Pitágoras en el espacio. Pirámides.

Desarrollo:

En esta ocasión nos vamos a fijar en los volúmenes de diferentes elementos arquitectónicos de la catedral. Por un lado, vamos pensar en el crucero de la catedral con los elementos de su parte inferior hasta la base del cimborrio (hasta el octógono). La parte inferior, en negro, es un paralelepípedo de base cuadrada de 12 m. x 12 m., y encima de él hay 4 pirámides triangulares invertidas, que son las pechinas.

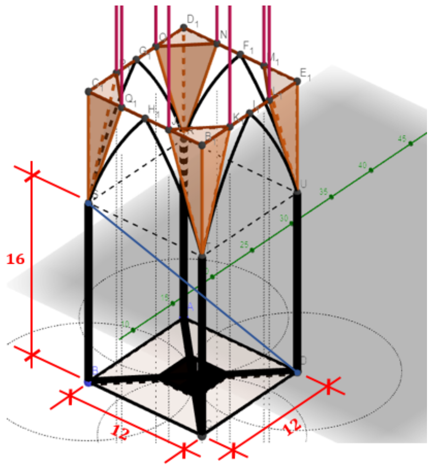


Figura 51. Actividad 18. Representación del cuerpo inferior del crucero de la catedral con cotas.
Fuente: Elaboración propia.

Se pide calcular la longitud de la diagonal azul aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio.

Nos fijamos ahora en una pechina. Se trata de una pirámide triangular invertida. **Si utilizamos su base y su altura para dibujar un prisma recto, ¿cuantas pirámides obtengo? Si corto el prisma a media altura con un plano horizontal, ¿qué puedes decir de la sección resultante de la intersección de la pechina con dicho plano? ¿Podrías calcular el área de dicha sección**

intermedia si los lados de los catetos de la base de la pechina son de 3,515 m. y la altura de la pechina es de 10 m.?

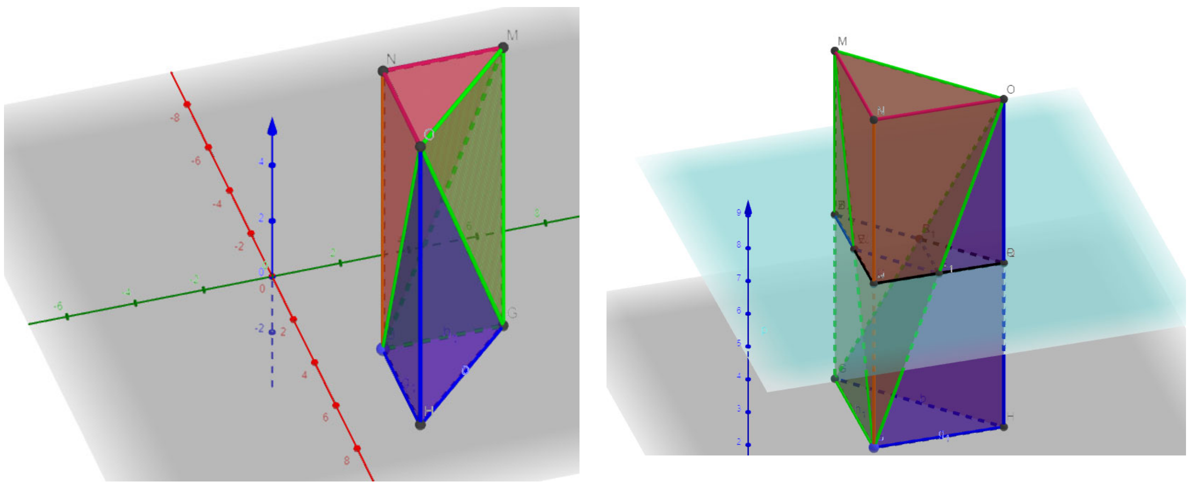


Figura 52. Actividad 18. Representación del poliedro triangular que engloba la piramide invertida triangular representativa de la pechinca del crucero de la catedral.
Fuente: Elaboración propia.

<u>ACTIVIDAD Nº18</u>

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 29.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre áreas de poliedros, prismas y pirámides sirven de base para desarrollar la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Área total de un poliedro. Áreas lateral y total de un prisma. Áreas lateral y total de una pirámide y de un tronco de pirámide.

Desarrollo:

<u>Actividad 18.1</u>

En la presente actividad nos centraremos en las agujas de la Catedral de Burgos. Como ya sabemos, las agujas son dos pirámides octogonales que describen un perfil muy similar a un triángulo de Calvimont. Vamos a considerar que es así. Teniendo en cuenta esto, **se pide: calcular la altura de las agujas. Se debe calcular la altura en dos casos diferentes: primero, si se ve frontalmente una diagonal de la base (octógono) de la pirámide (es decir, si vemos 4 caras laterales de la pirámide) o si se ve frontalmente la sección de la pirámide por la apotema del octógono (es decir, si vemos 3 caras laterales de la pirámide). Para calcular**

la altura debemos tener en cuenta la relación del triángulo de Calvimont con el número áureo. Para los dos casos se debe calcular el área lateral y total de la pirámide por el exterior y por el interior, teniendo en cuenta que las agujas son huecas por su interior y el muro de piedra que las forma tiene 55 cm. de espesor. Las medidas del octógono están en la siguiente imagen.

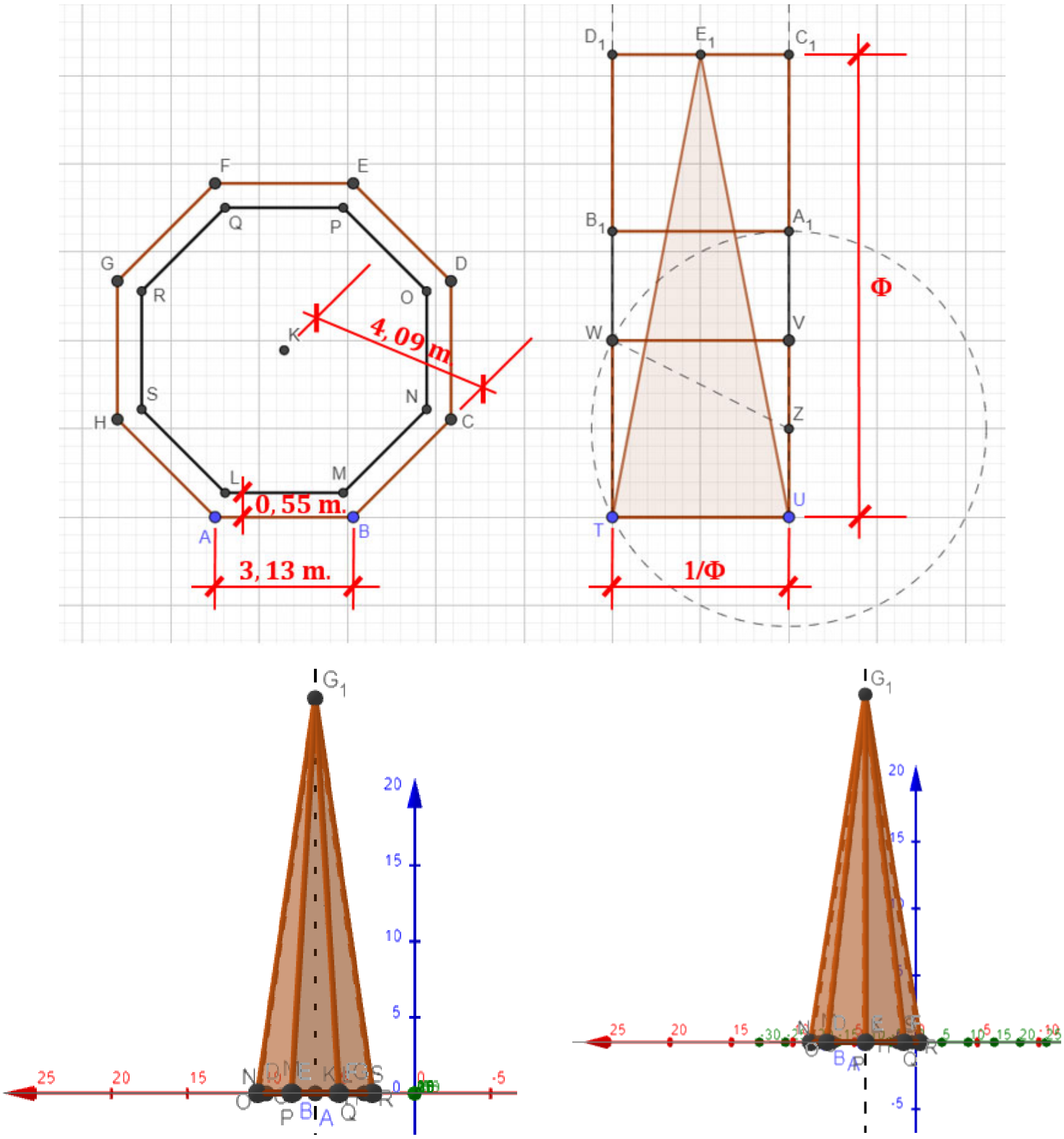


Figura 53. Actividad 18.1. Aguja de la catedral a partir de una piramide octgonal con perfil del triángulo de Calvimont. Acotado.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

<u>Actividad 18.2</u>

Para la pechina de la imagen (pirámide triangular invertida de color granate), **hallar el área lateral y total del tronco de cono superior que queda como resultado de cortar la pechina**

por un plano horizontal (paralelo a la base) a 5 metros del vértice de la pirámide. Las cotas en la imagen. Dibuja el desarrollo de la pechina a escala 1/50.

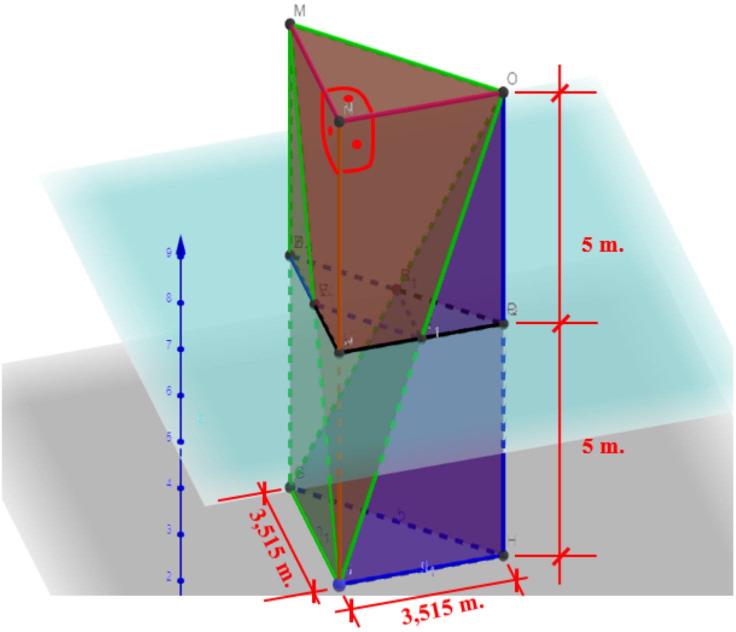


Figura 54. Actividad 18.2. Representación del poliedro triangular que engloba la piramide invertida triangular representativa de la pechinca del crucero de la catedral. Acotado.
Fuente: Elaboración propia.

<u>ACTIVIDAD Nº19</u>

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 30.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre áreas de cuerpos de revolución y poliedros sirven de base para desarrollar la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Área total de un poliedro. Áreas lateral y total de un prisma. Áreas lateral y total de una pirámide y de un tronco de pirámide.

Desarrollo:

Volvemos de nuevo a uno de los principales elementos estructurales del arte gótico: la bóveda de crucería. Como ya comentamos anteriormente, la bóveda de crucería es el elemento estructural que sirve para cubrir la intersección de dos bóvedas apuntadas de cañón. La bóveda de crucería simple se compone de dos arcos cruzados diagonalmente denominados arcos fajones y cuatro arcos formeros. En la siguiente actividad se muestra el cruce de dos bóvedas de crucería de iguales dimensiones constituidas por arcos ojivales formeros equiláteros. Para apreciar mejor los detalles se ha realizado la imagen sobre la base de prismas y solamente se ha dibujado el aire de las bóvedas en los arcos formeros. **Se pide determinar la superficie cubierta por la bóveda de crucería. De igual manera se ha realizado como base la intersección de dos prismas triangulares equiláteros. Se pide también determinar la superficie cubierta por los planos inclinados del tejado.**

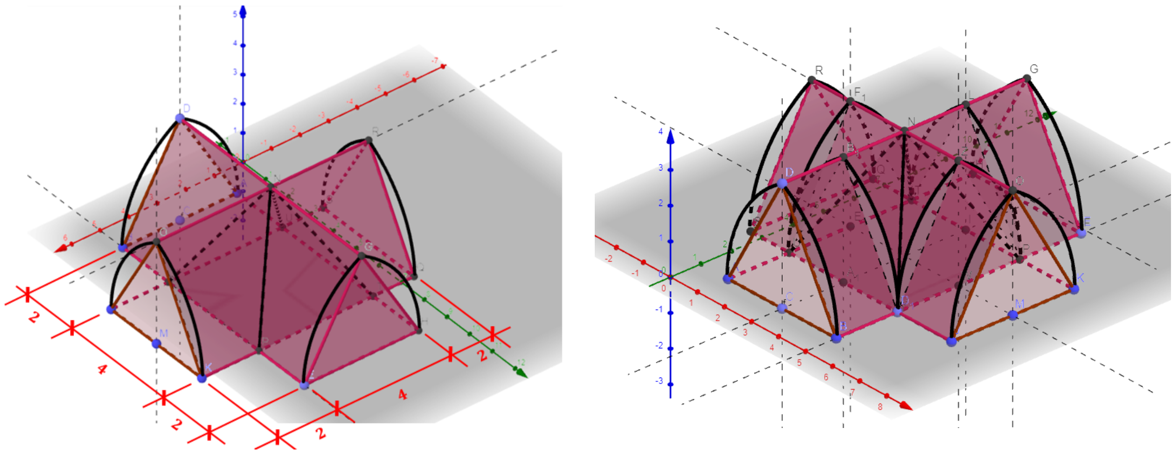


Figura 55. Actividad 19. Bóveda de crucería - Cruce de bovedas ojivales equiláteras. Acotado.
Fuente: Elaboración propia.

ACTIVIDAD Nº20

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 31.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre volúmenes de poliedros sirven de base para desarrollar la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Volumen de un prisma y volumen de una pirámide.

Desarrollo:

Actividad 20.1

La actividad que nos ocupa pretende que el alumno obtenga el volumen interior del crucero de la catedral de Burgos. Para ello se parte de las siguientes dimensiones:

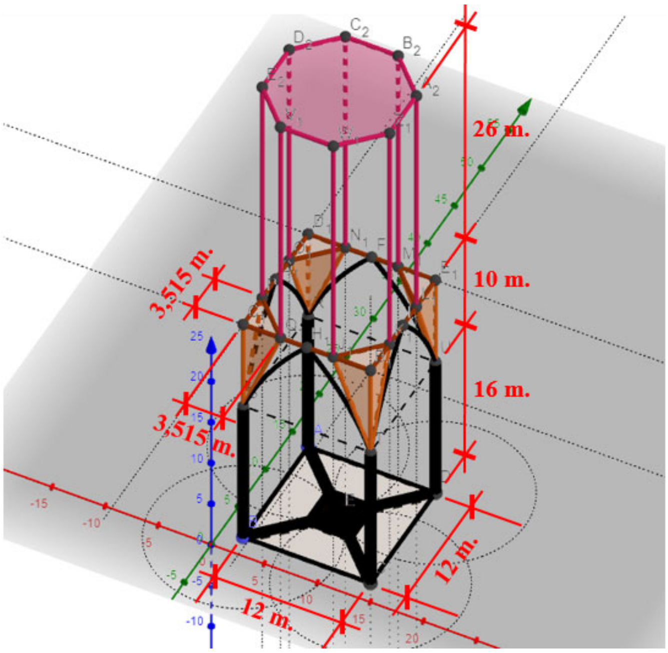


Figura 56. Actividad 20.1. Representación crucero de la Catedral de Burgos. Acotado.
Fuente: Elaboración propia.

Actividad 20.2

Volvemos a las agujas de la catedral de Burgos y a las pirámides con sección de Calvimont de la actividad 18. Para los dos casos supuestos en la actividad 18.1, **calcula el volumen que correspondería a la pared de las agujas si esta no fuera calada. Las dimensiones se reflejan en la actividad 18.1.**

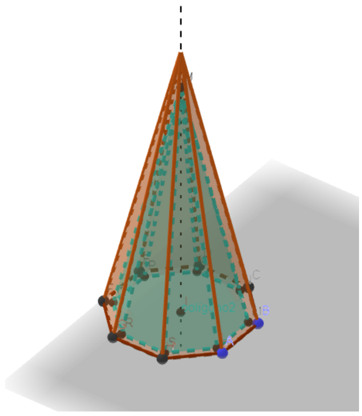


Figura 57. Actividad 20.2. Aguja de la catedral a partir de una piramide octgonal con perfil del triángulo de Calvimont.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”, (2021).

ACTIVIDAD Nº21

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 33.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre coordenadas geográficas sirven de base para desarrollar la presente actividad.

Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora, así como un ordenador portátil del colegio para el desarrollo de la actividad con Google Earth y Geogebra.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Coordenadas geográficas.

Desarrollo:

Los alumnos buscarán las coordenadas de la catedral de Burgos con ayuda de la aplicación Google Earth y con Geogebra realizarán una representación de la ubicación de la catedral de Burgos sobre una esfera a modo del siguiente dibujo. Indicarán las coordenadas geográficas. Esta actividad la irán realizando guiados del profesor ya que no tienen los conocimientos suficientes para realizarla. Se pretende con ella que interioricen geométricamente la visión espacial de los que significan las coordenadas geográficas, así como los ángulos y su posición.

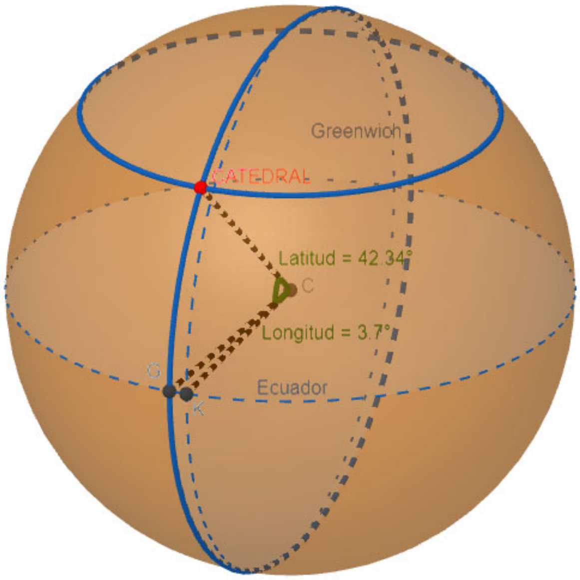


Figura 58. Actividad 21. Representación de las coordenadas geográficas de la Catedral de Burgos sobre una esfera. Fuente: Elaboración propia.

<u>ACTIVIDAD Nº22</u>

Temporalización de la actividad: Correspondiente al día 34.

Justificación: Los conocimientos recién adquiridos por los alumnos sobre geometría en el espacio sirven de base para desarrollar la presente actividad. Estos conocimientos sirven para ir introduciendo diferentes conceptos del arte gótico que se han visto durante la visita a la catedral.

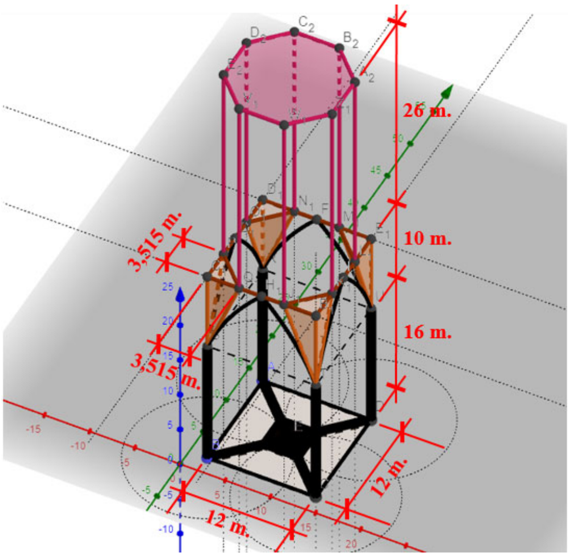
Recursos por parte del alumno para el desarrollo de la actividad: útiles de dibujo y calculadora.

Agrupamientos: Individual en el aula de clase.

Contenidos: Áreas y volúmenes.

Desarrollo:

Continuamos con el crucero de la catedral de Burgos. Como ya se ha dicho, en el crucero de planta cuadrada, se levanta un cimborrio de planta octogonal soportado por 4 grandes pilares en las esquinas del cuadrado. A estos grandes pilares les llegan las cargas de los arcos torales y las pechinas. Sin embargo, dichos pilares no terminan en las pechinas, sino que se prolongan hacia arriba a modo de grandes pináculos constituidos por un prisma y sobre él una pirámide, ambos de sección octogonal. Los pilares son de sección circular hasta la parte superior de las pechinas, sin embargo, en el exterior, sobre las pechinas, se prolongan hacia arriba a modo de prisma octogonal (un octógono circunscrito en la sección circular del pilar), y a partir de una determinada altura se convierten en una pirámide octogonal. Según las siguientes imágenes, **se pide: calcular el volumen del pilar circular, del prisma octogonal (parte prismática del pináculo) y de la pirámide octogonal (parte piramidal del pináculo), con las dimensiones indicadas. Para no enmarañar el dibujo, solamente se ha dibujado el croquis de un único pilar. También se pide calcular el volumen de la pechina (pirámide triangular invertida).**



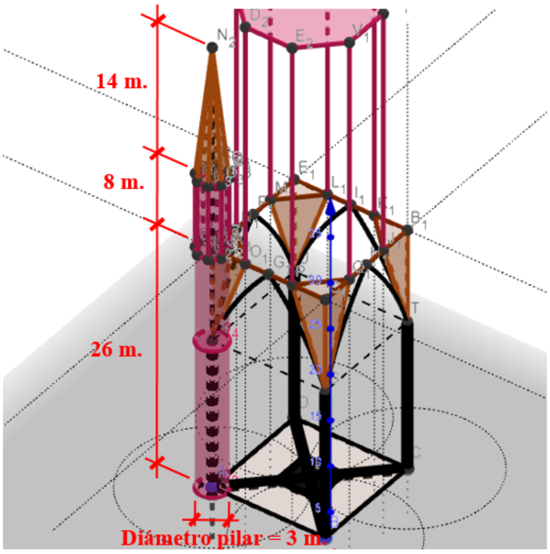


Figura 59. Actividad 22. Representación del crucero de la Catedral de Burgos así como de un pináculo sobre la pechina. Acotado.
Fuente: Elaboración propia.

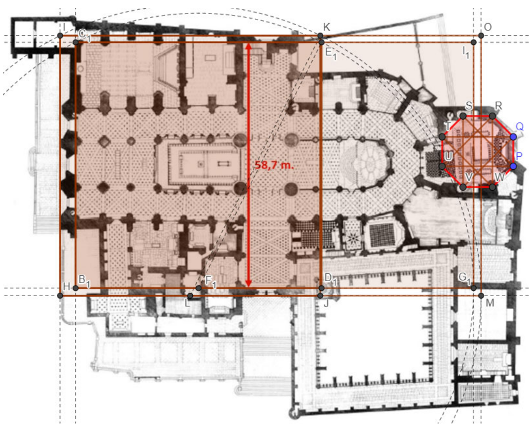
Ten en cuenta que un octógono regular se puede formar con los lados menores de un rectángulo de plata, es decir, un rectángulo en donde el cociente entre su lado mayor y su lado menor es $1 + \sqrt{2}$, rotándolo desde su centro 180º con escalas cada 45º.

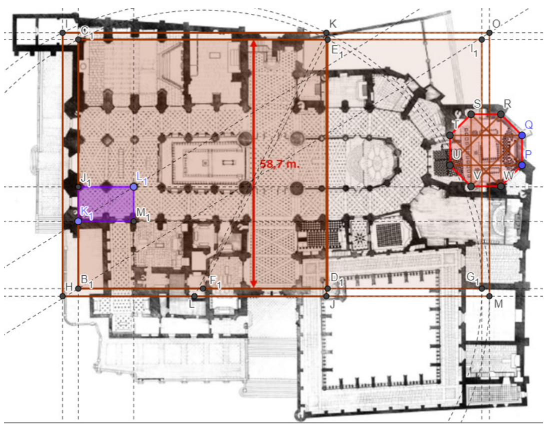
ANEXO Nº3: <u>DESARROLLO DEL PROYECTO</u>

Lo que el Ayuntamiento de la ciudad pretende obtener de los alumnos de Burgos para hacer llegar al magnate, es lo siguiente:

1. <u>Trabajo correspondiente a las sesiones 2 y 3 (correspondientes a los días 8 y 12 respectivamente)</u>: Los alumnos deben diseñar una planta original del edificio basada en las proporciones de los rectángulos áureos. Para ello, los alumnos utilizarán un formato A3, trabajarán a escala 1/200, teniendo en cuenta que la vivienda no podrá tener dimensiones superiores a una planta rectangular de 65x41 m^2 y no menores de 40x25 m^2, pudiendo ser la planta diferente a la rectangular (cruz latina, cruz griega, etc.). La distribución de la cuadricula de pilares también se pretende que guarden algún tipo de relación áurea. Los alumnos además del contorno distribuirán la malla de pilares atendiendo también a proporciones áureas mediante rectángulos verticales u horizontales. El intereje entre pilares no debe ser superior a 12 metros, que podría servir, como en el caso de la catedral de Burgos, para diseñar un cimborrio (se verá más adelante).

   Se muestra como ejemplo en la planta de la catedral (figura 60) lo que el magnate pretende para su edificio:





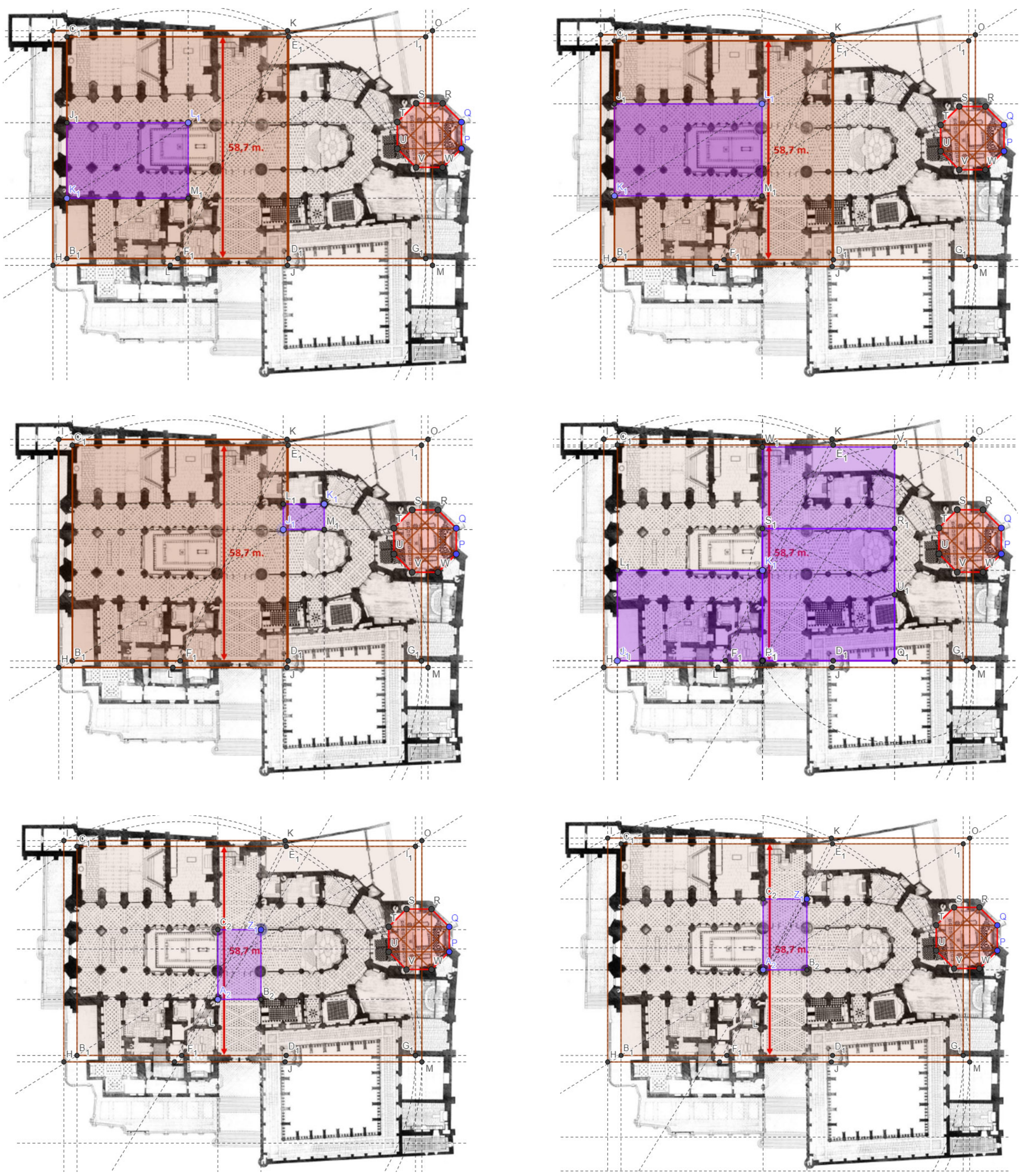


Figura 60. Apartado 1 - Desarrollo del proyecto. Ejemplo de construcción de rectángulos áureos en la planta de la catedral de Burgos sobre base de la planta general de los pavimentos de la Catedral de Burgos.
Fuente: Elaboración propia a partir de los planos del informe de levantamiento de la catedral de Burgos de Clemente y Cantera (1989), y de Grupo EsTalMat de Burgos - Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (2011).

2. <u>Trabajo correspondiente a las sesiones 4 y 5 (correspondientes a los días 16 y 20 respectivamente)</u>: Una vez diseñada la planta de la catedral, los alumnos diseñaran alguno de los elementos siguientes: Un cimborrio, para ello el alumno habrá dejado previsto en el apartado 1 una zona para ubicarlo con los pilares formando un cuadrado para ubicar el cimborrio octogonal. No es necesario que tenga dos plantas de altura como el de la catedral, pero deberá ser calado a imagen del existente en el crucero o en

la capilla del Condestable. También diseñaran una zona absidial en alguna zona del edificio basada en un semi-decágono a imagen de la zona del trasaltar-girola-capillas absidiales de la Catedral de Burgos. Los grupos diseñaran las fachadas (ventanales, puertas, etc.) de estos elementos.

En las actividades 14 y 17 se desarrollan los conceptos correspondientes a la construcción de la forma geométrica del octógono estrellado a partir de un cuadrado o del lado del octógono, así como la construcción de los polígonos estrellados 8/3 anidados. Se adjuntan imágenes a modo de recordatorio:

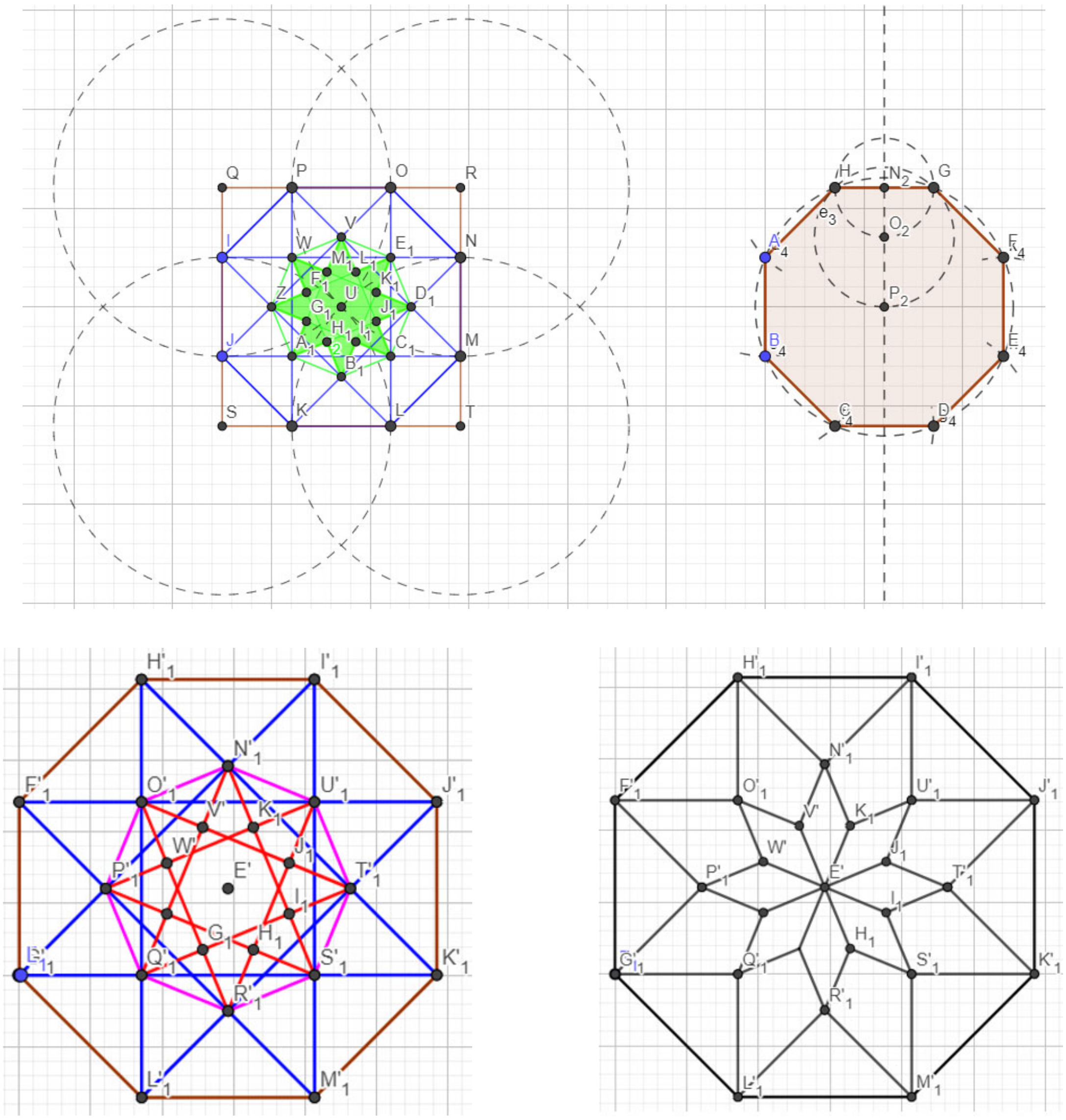


Figura 61. Apartado 2 - Desarrollo del proyecto. Construcción de un octogono a partir de un cuadrado y dado su lado. Construcción de poligonos estrellados 8/3 anidados y esquema geométrico final.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”, (2021).

En las actividades 3 y 4.1 se desarrollan los conceptos correspondientes a la construcción de la forma geométrica del semi-decágono a partir de un pentágono. Se adjuntan imágenes a modo de recordatorio:

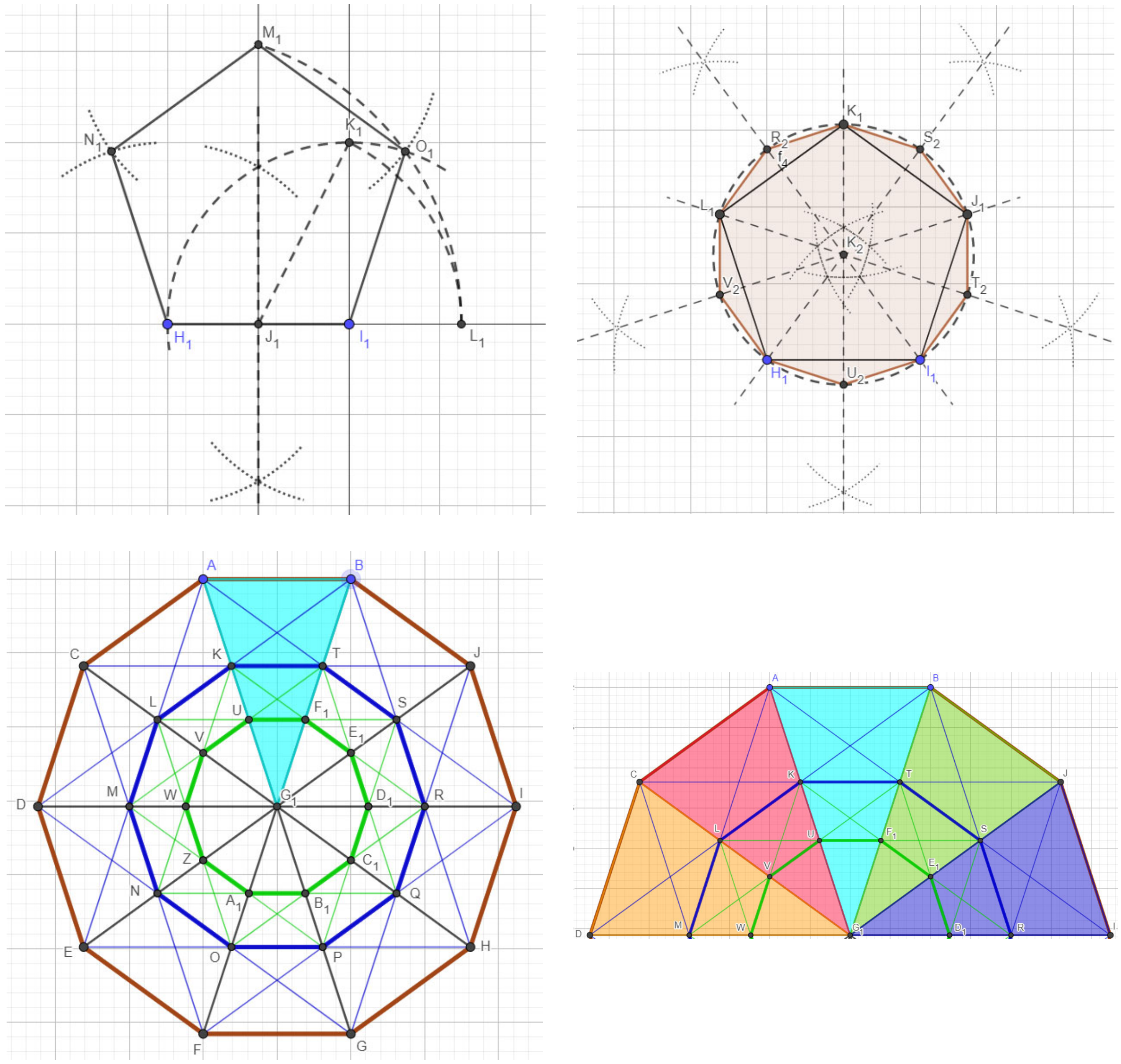
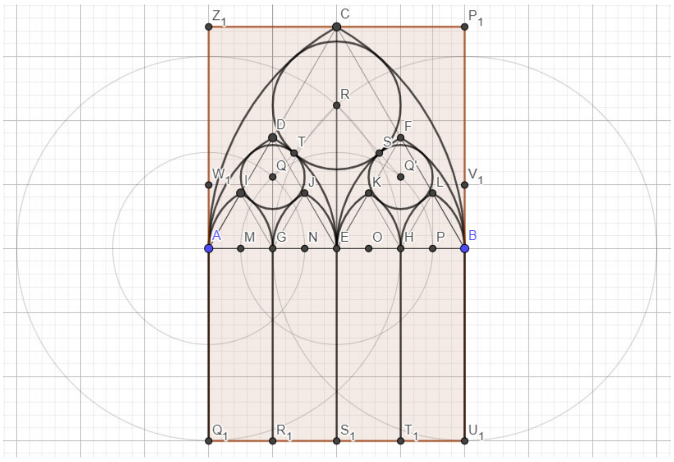


Figura 62. Apartado 2 - Desarrollo del proyecto. Construcción de un pentágono y un decágono a partir de un pentágono. Construcción de decágonos anidados a partir de poligonos estrellados 10/3. Construcción de triángulos áureos en los semi-decágonos anidados
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

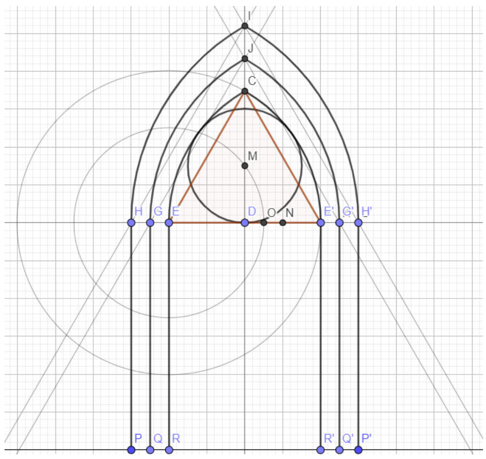
3. <u>Trabajo correspondiente a las sesiones 6 y 7 (correspondientes a los días 24 y 28 respectivamente)</u>: Una vez diseñada la planta de la catedral, los grupos de alumnos pasarán a diseñar las fachadas del edificio. Como en la actividad anterior los alumnos han realizado la malla de pilares de su planta, ese mallado habrá fijado la anchura máxima posible de los ventanales, ya que los ventanales irán entre pilares de fachada. El diseño de las fachadas se compondrá de la apertura de huecos para ventanales y

puertas de acceso. Para su diseño el alumno jugará con los diferentes estilos de arquerías, rosetones, ventanales, existentes en la catedral. La altura de las fachadas también se pretende que guarden algún tipo de relación con la dimensión áurea, es decir, los paramentos de fachada inter-pilares deberán tratar de mantener algún tipo de relación áurea. El edificio tendrá dos niveles de altura. Se recuerda a los alumnos diferentes tipologías y combinaciones de arcos que pueden utilizar, que existen en diferentes zonas de la catedral, pudiendo ellos por su cuenta introducir otros diseños diferentes existentes en el templo:

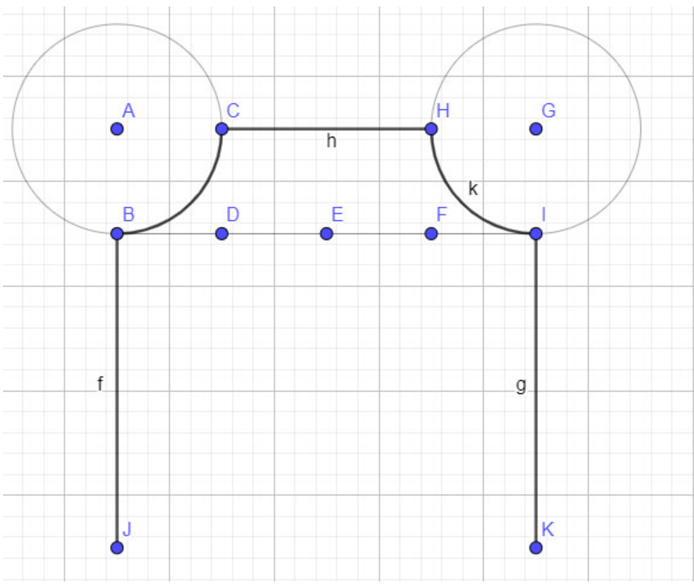
Ventanal del claustro encajado en un rectángulo áureo



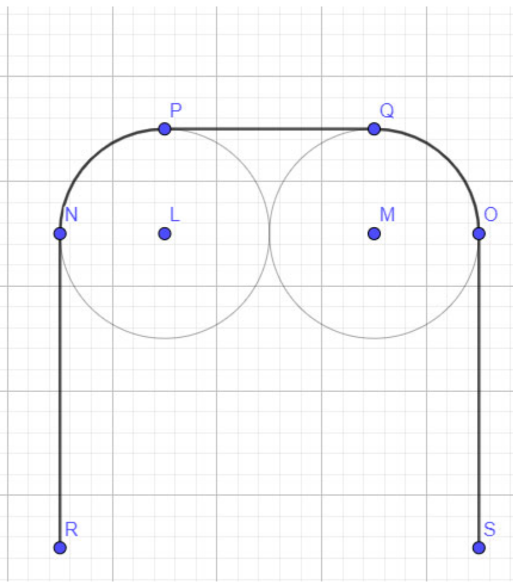
Arcos apuntado equiláteros anidados



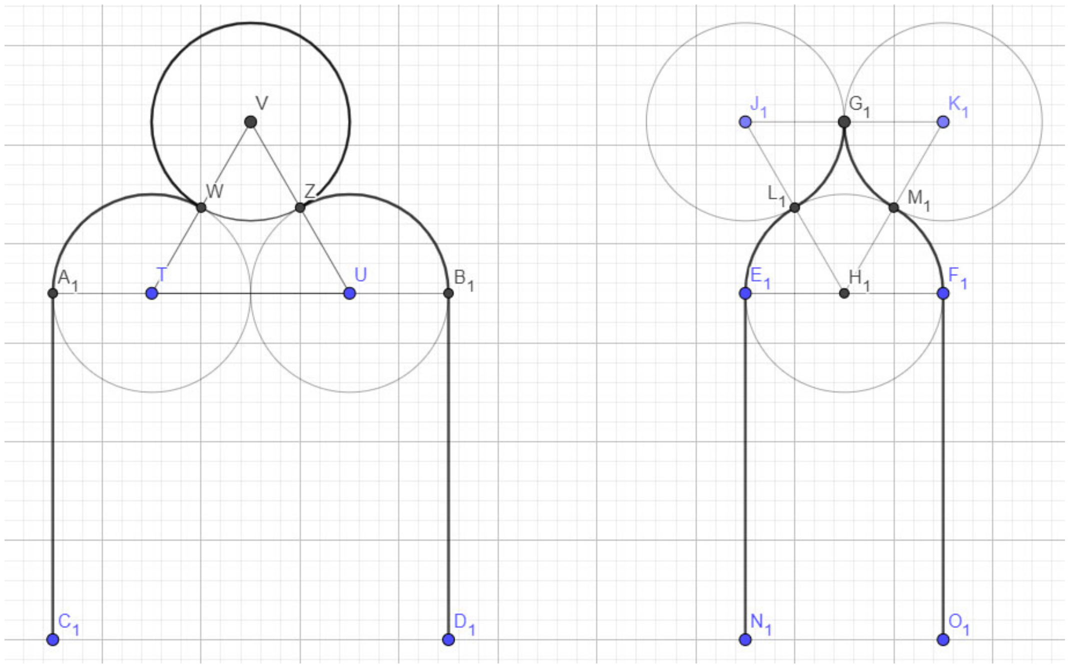
Arco deprimido convexo



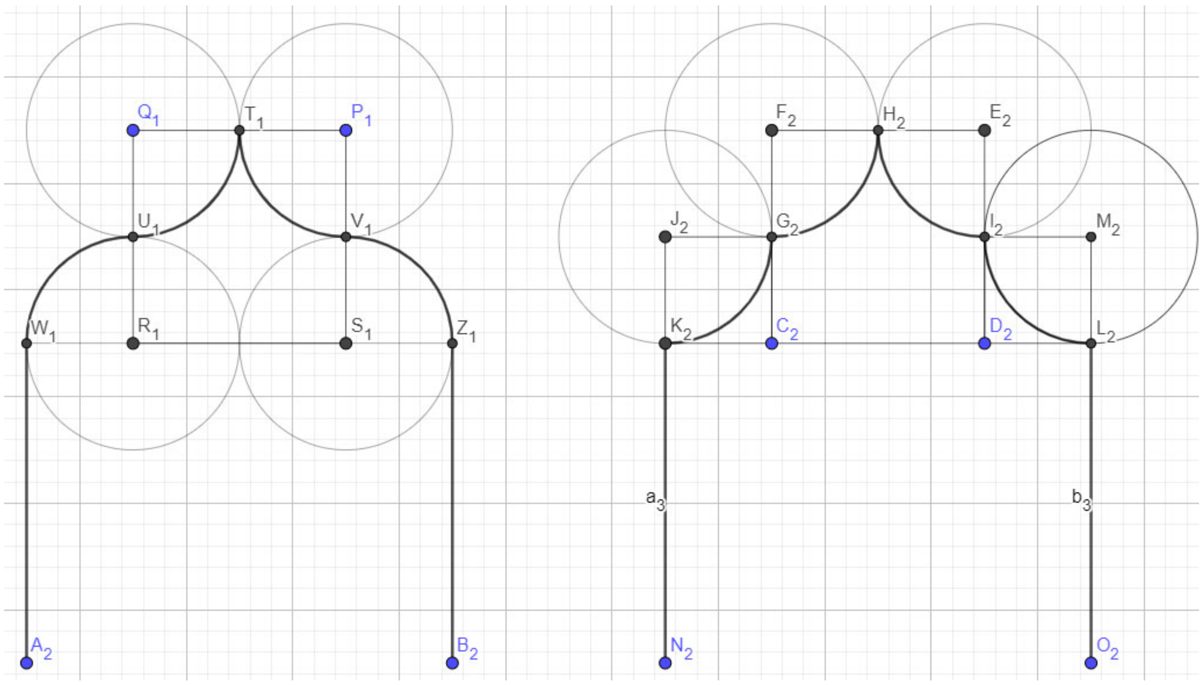
Arco deprimido cóncavo



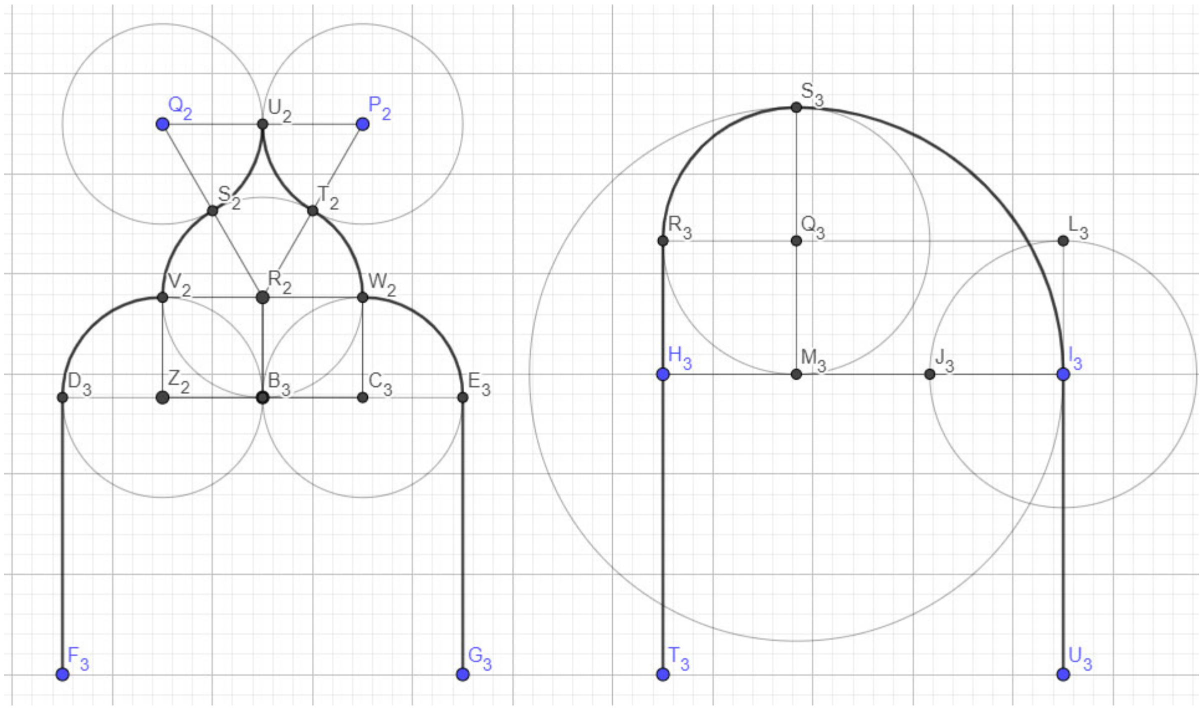
Arco trebolado **Arco conopial equilátero**



Arco conopial cuadrado **Arco festonado cóncavo**



Arco angrelado **Arco rampante**



Arcos anidados: deprimido cóncavo + conopial cuadrado + conopial cuadrado

Rosetón con polilóbulos anidados con 3, 6 y 9 pétalos

Ventanal triángulo de Releaux

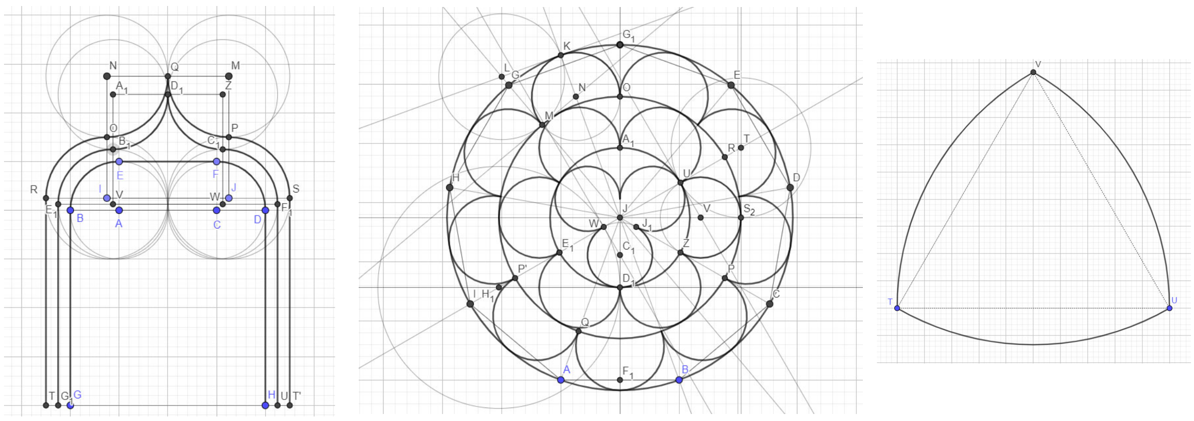


Figura 63. Apartado 3 - Desarrollo del proyecto. Ejemplo de construcción de arcos para puertas y ventanas con estílo gótico.
Fuente: Elaboración propia a partir de Grupo EsTalMat de Burgos - Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (2011).

4. <u>Trabajo correspondiente a la sesión 8 (correspondientes al día 32)</u>: Una vez diseñadas las fachadas hay que dar color a los ventanales. La manera de colorear los vitrales de las ventanas es respetando las formas geométricas utilizadas en la construcción geométrica del ventanal, así como se muestra en el ejemplo de la siguiente imagen.

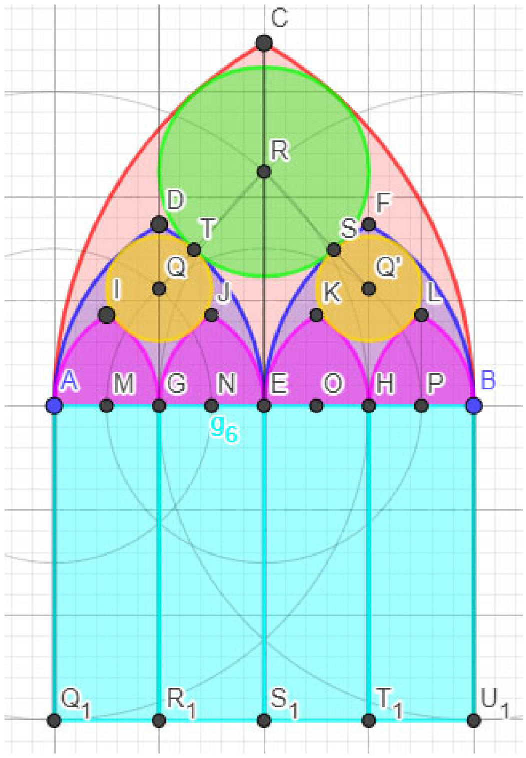


Figura 64. Apartado 4 - Desarrollo del proyecto. Color a las vidrieras de una composición geométrica de un ventanal del claustro de Burgos.
Fuente: Elaboración propia a partir de Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán", (2021).

Los grupos de alumnos deben calcular para cada ventanal las áreas de cada color, así como el volumen de cada cristal. El espesor del vidrio es 8 milímetros en todos los casos. Los grupos deben sumar la totalidad de áreas y volúmenes de cada color de todos los vitrales de su edificio.

5. Trabajo correspondiente a la sesión 9 (correspondiente al día 36): En esta sesión los grupos expondrán y mostrarán sus trabajos al resto de la clase, quedando expuestos finalmente todos juntos pegados en la pared de la clase, donde se indicará a que grupo pertenece cada uno. En los últimos minutos de la sesión los alumnos procederán a votar por puntuación el trabajo que más valoren (por ejemplo, si hay 7 grupos -clase de 28 alumnos- la máxima puntuación será 6 y la mínima puntuación será 1, no pudiendo votar a su propio grupo), para determinar cuál es el que más les ha gustado (recompensas si las hubiere). También realizarán su autoevaluación y la coevaluación.

ANEXO Nº4: <u>RUBRICAS POR CRITERIOS DE EVALUACIÓN</u>

<u>UD. 1.- GEOMETRÍA DEL PLANO:</u>

Tabla 10. Rúbrica por criterios de evaluación CE1 de la UD. 1- Geometría del plano.
Fuente: Elaboración propia.

<table>
<tr><td colspan="6">Criterio de evaluación: CE1

Indicador de logro

Se trata de valorar si el estudiante está capacitado para:

Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, y sus configuraciones geométricas</td></tr>
<tr><th>E.A.</th><th>En proceso de adquisición (< 5)</th><th>Adquirido (5 – 6)</th><th>Avanzado (7 – 8)</th><th>Excelente (9 – 10)</th><th>Calificación</th></tr>
<tr><td>EA1.1.</td><td>Desconoce las propiedades de los lugares geométricos estudiados: mediatriz y bisectriz, y no sabe dibujarlas.

Desconoce y/o no emplea la relación entre ángulo complementario y suplementario.

No sabe calcular la suma de los ángulos de un polígono (convexo).</td><td>Dibuja mediatrices y bisectrices.

Sabe calcular ángulos complementarios y suplementarios, así como el valor del ángulo cuando los lados son paralelos y perpendiculares.

Sabe calcular, aplicando directamente la fórmula, la suma de ángulos de un polígono (convexo)</td><td>Dibuja mediatrices y bisectrices explicando el procedimiento.

Calcula ángulos complementarios y suplementarios, así como el valor del ángulo cuando los lados son paralelos y perpendiculares y sabe justificar el procedimiento.

Sabe calcular la suma de los ángulos de un polígono convexo, justificando la formulación.</td><td>Dibuja mediatrices y bisectrices explicando el procedimiento. y justificando sus propiedades.

Calcula ángulos complementarios y suplementarios, así como el valor del ángulo cuando los lados son paralelos y perpendiculares y sabe justificar el procedimiento y las relaciones que se obtienen.

Sabe calcular la suma de los ángulos de un polígono convexo, justificando la</td><td></td></tr>
</table>

				formulación de manera gráfica y algebraica.	

Tabla 11. Rúbrica por criterios de evaluación CE2 de la UD. 1- Geometría del plano.
Fuente: Elaboración propia.

Criterio de evaluación: CE2 **Indicador de logro** Se trata de valorar si el estudiante está capacitado para: Utilizar el teorema de Thales y Pitágoras para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales en la resolución de problemas geométricos.					
E.A.	**En proceso de adquisición (< 5)**	**Adquirido (5 – 6)**	**Avanzado (7 – 8)**	**Excelente (9 – 10)**	**Calificación**
EA2. 1. EA2. 2. EA2. 3.	No sabe calcular perímetros y áreas de polígonos, así como de figuras circulares en problemas contextualizados por formulación directa. No sabe dividir un segmento proporcionalmente. No utiliza el teorema de	Calcula perímetros y áreas de polígonos, así como de figuras circulares en problemas contextualizados por formulación directa. Divide un segmento proporcionalmente y establece relación entre partes de segmentos	Calcula perímetros y áreas de polígonos, así como de figuras circulares en problemas contextualizados por formulación y otras técnicas. Divide un segmento proporcionalmente y establece relación entre partes de segmentos	Calcula perímetros y áreas de polígonos, así como de figuras circulares en problemas contextualizados por formulación y otras técnicas sabiendo justificar el proceso. Divide un segmento proporcionalmente y establece	

	Thales ni reconoce triángulos semejantes. No calcula longitudes indirectamente aplicando el teorema de Thales No sabe aplicar el teorema de Pitágoras.	proporcionales o polígonos semejantes. Utiliza el teorema de Thales y reconoce triángulos semejantes. Calcula longitudes indirectamente aplicando el teorema de Thales Aplica el teorema de Pitágoras para el conocimiento del valor de longitudes en la resolución de triángulos o en otros casos como en áreas de polígonos u otras formas geométricas.	proporcionales o polígonos semejantes sabiendo justificar el procedimiento. Utiliza el teorema de Thales y reconoce triángulos semejantes. Calcula longitudes indirectamente aplicando el teorema de Thales en diferentes contextos. Aplica el teorema de Pitágoras para el conocimiento del valor de longitudes en la resolución de triángulos o en otros casos como en áreas de polígonos u otras formas geométricas, en diferentes situaciones o contextos reales.	relación entre partes de segmentos proporcionales o polígonos semejantes sabiendo justificar el procedimiento. Utiliza el teorema de Thales y reconoce triángulos semejantes. Calcula longitudes indirectamente aplicando el teorema de Thales en diferentes contextos sabiendo justificar el proceso. Aplica el teorema de Pitágoras para el conocimiento del valor de longitudes en la resolución de triángulos o en otros casos como en áreas de polígonos u otras formas geométricas, en diferentes situaciones o contextos reales sabiendo justificar el proceso.	

Tabla 12. Rúbrica por criterios de evaluación CE3 de la UD. 1- Geometría del plano.
Fuente: Elaboración propia.

Criterio de evaluación: CE3 **Indicador de logro** Se trata de valorar si el estudiante está capacitado para: Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes y superficies del mundo físico, utilizando semejanza y el teorema de Pitágoras.					
E.A.	**En proceso de adquisición (< 5)**	**Adquirido (5 – 6)**	**Avanzado (7 – 8)**	**Excelente (9 – 10)**	**Calificación**
EA3.1.	No sabe calcular magnitudes de longitud y de superficie en situaciones contextualizadas de semejanza. No sabe identificar regularidades en contextos geométricos. No conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo atentamente, ponerse a trabajar y resolverlo, explicar lo que se hace en cada parte.	Calcula magnitudes de longitud y de superficie en situaciones contextualizadas de semejanza. Sabe identificar (solo lo hace con ayuda) regularidades en contextos geométricos. Emplea con ayuda las relaciones encontradas para tratar de encontrar la solución. Conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo atentamente, ponerse a trabajar y resolverlo,	Calcula magnitudes de longitud y de superficie en situaciones contextualizadas de semejanza y sabe justificar el procedimiento. Sabe identificar sin ayuda regularidades en contextos geométricos. Emplea las relaciones encontradas para tratar de encontrar la solución. Conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo atentamente, ponerse a trabajar y	Calcula magnitudes de longitud y de superficie en situaciones contextualizadas de semejanza y sabe justificar el procedimiento e interpretar la solución en su contexto. Sabe identificar sin ayuda regularidades en contextos geométricos y las emplea explicando el procedimiento para la resolución del problema. Conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo	

		explicar lo que se hace en cada parte.	resolverlo, explicar lo que se hace en cada parte ordenadamente, llegando a una solución.	atentamente, ponerse a trabajar y resolverlo, explicar lo que se hace en cada parte ordenadamente, sintetiza los datos, indica las operaciones y llega a una solución indicando su idoneidad.	

Tabla 13. Rúbrica por criterios de evaluación CE4 de la UD. 1- Geometría del plano.
Fuente: Elaboración propia.

Criterio de evaluación: CE4					
Indicador de logro Se trata de valorar si el estudiante está capacitado para: Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, para realizar cálculos, dibujos geométricos y resolución de problemas, así como utilizarlas de modo habitual en el proceso de aprendizaje.					
E.A.	**En proceso de adquisición (< 5)**	**Adquirido (5 – 6)**	**Avanzado (7 – 8)**	**Excelente (9 – 10)**	**Calificación**
EA4.1	No utiliza herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos.	Utiliza, cuando así se pide, herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos.	Utiliza asiduamente herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos.	Utiliza asiduamente y autónomamente herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos (las que mejor se ajusten en cada caso).	

UD. 2.- MOVIMIENTOS DEL PLANO:

Tabla 14. Rúbrica por criterios de evaluación CE1 de la UD. 2- Movimientos del plano.
Fuente: Elaboración propia.

<table>
<tr><th colspan="6">Criterio de evaluación: CE1

Indicador de logro

Se trata de valorar si el estudiante está capacitado para:

Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.</th></tr>
<tr><th>E.A.</th><th>En proceso de adquisición (< 5)</th><th>Adquirido (5 – 6)</th><th>Avanzado (7 – 8)</th><th>Excelente (9 – 10)</th><th>Calificación</th></tr>
<tr><td>EA1. 1.</td><td>No sabe identificar lo que es el vector de posición de un punto y su correlación con sus coordenadas.

No sabe calcular ni analíticamente ni gráficamente la suma de dos vectores.</td><td>Identifica lo que es el vector de posición de un punto y su correlación con sus coordenadas.

Calcula analíticamente y/o gráficamente la suma de dos vectores.</td><td>Identifica y asocia un vector de posición de un punto con sus coordenadas y sabe calcular su módulo.

Calcula analíticamente y/o gráficamente la suma de dos vectores y sabe explicar el procedimiento.</td><td>Asocia un vector de posición de un punto con sus coordenadas, sabe calcular su módulo y sabe explicar el concepto.

Calcula analíticamente y/o gráficamente la suma de dos vectores y sabe explicar el procedimiento y sabe explicar lo que es un vector libre.</td><td></td></tr>
<tr><td>EA1. 2.

EA1. 3.

EA1. 4.</td><td>No sabe diferenciar entre las distintas isometrías (traslación, simetría y giro) en el plano y tampoco sabe dibujar figuras utilizando estas transformaciones.</td><td>Diferencia entre las distintas isometrías (traslación, simetría y giro) en el plano y dibuja figuras utilizando sencillas transformaciones.

Reconoce con</td><td>Diferencia entre las distintas isometrías (traslación, simetría y giro) en el plano y dibuja figuras utilizando transformaciones y composición de</td><td>Diferencia entre las distintas isometrías (traslación, simetría y giro) en el plano y dibuja figuras utilizando transformaciones y composición de</td><td></td></tr>
</table>

	No reconoce transformaciones geométricas en el arte o en el mundo real. No sabe identificar los elementos que caracterizan las transformaciones geométricas en el plano como los: ejes de simetría, amplitudes de giro, centros, etc. No dibuja con corrección las transformaciones y composición de movimientos, bien a nivel gráfico como utilizando herramientas tecnológicas.	ayuda transformaciones geométricas en el arte o en el mundo real. Identifica los elementos que caracterizan las transformaciones geométricas en el plano como los: ejes de simetría, amplitudes de giro, centros, etc. Dibuja con corrección las transformaciones y composición de movimientos, bien a nivel gráfico como utilizando herramientas tecnológicas.	movimientos. Reconoce movimientos y composición de transformaciones geométricas en el arte o en el mundo real. Identifica los elementos que caracterizan las transformaciones geométricas en el plano como los: ejes de simetría, amplitudes de giro, centros, etc. y sabe cómo determinarlos. Dibuja con corrección mosaicos y frisos, bien a nivel gráfico como utilizando herramientas tecnológicas. .	movimientos y sabe justificar el procedimiento. Reconoce movimientos y composición de transformaciones geométricas en el arte o en el mundo real. Identifica los elementos que caracterizan las transformaciones geométricas en el plano como los: ejes de simetría, amplitudes de giro, centros, etc., sabe cómo determinarlos y justificar el significado matemático. Dibuja con corrección mosaicos y frisos, bien a nivel gráfico como utilizando herramientas tecnológicas.	

Tabla 15. Rúbrica por criterios de evaluación CE2 de la UD. 2- Movimientos del plano.
Fuente: Elaboración propia.

<table>
<tr><td colspan="6" align="center">Criterio de evaluación: CE2

Indicador de logro

Se trata de valorar si el estudiante está capacitado para:

Resolver problemas que conlleven transformaciones e identificación de ejes y centros de simetría de figuras planas, poliedros y cuerpos redondos.</td></tr>
<tr><th>E.A.</th><th>En proceso de adquisición (< 5)</th><th>Adquirido (5 – 6)</th><th>Avanzado (7 – 8)</th><th>Excelente (9 – 10)</th><th>Calificación</th></tr>
<tr><td>EA2.1.</td><td>No sabe identificar ejes, centros y planos de simetría en poliedros y figuras planas.

No sabe identificar regularidades en contextos geométricos.

No conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo atentamente, ponerse a trabajar y resolverlo, explicar lo que se hace en cada parte.</td><td>Identifica ejes, centros y planos de simetría en poliedros y figuras planas.

Sabe identificar (solo lo hace con ayuda) regularidades en contextos geométricos. Emplea con ayuda las relaciones encontradas para tratar de encontrar la solución.

Conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo atentamente, ponerse a trabajar y</td><td>Identifica ejes, centros y planos de simetría en poliedros y figuras planas justificando el procedimiento.

Sabe identificar sin ayuda regularidades en contextos geométricos. Emplea las relaciones encontradas para tratar de encontrar la solución.

Conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo atentamente, ponerse a trabajar y resolverlo, explicar lo que</td><td>Identifica ejes, centros y planos de simetría en poliedros y figuras planas justificando el procedimiento, lo sabe identificar y justificar en el arte o en el mundo real.

Sabe identificar sin ayuda regularidades en contextos geométricos y las emplea explicando el procedimiento para la resolución del problema.

Conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo</td><td></td></tr>
</table>

		resolverlo, explicar lo que se hace en cada parte.	se hace en cada parte ordenadamente, llegando a una solución.	atentamente, ponerse a trabajar y resolverlo, explicar lo que se hace en cada parte ordenadamente, sintetiza los datos, indica las operaciones y llega a una solución indicando su idoneidad.	

Tabla 16. Rúbrica por criterios de evaluación CE3 de la UD. 2- Movimientos del plano.
Fuente: Elaboración propia.

Criterio de evaluación: CE3

Indicador de logro

Se trata de valorar si el estudiante está capacitado para:

Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, para realizar cálculos, dibujos geométricos y resolución de problemas, así como utilizarlas de modo habitual en el proceso de aprendizaje.

E.A.	**En proceso de adquisición (< 5)**	**Adquirido (5 – 6)**	**Avanzado (7 – 8)**	**Excelente (9 – 10)**	**Calificación**
EA3.1	No utiliza herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos.	Utiliza, cuando así se pide, herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos.	Utiliza asiduamente herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos.	Utiliza asiduamente y autónomamente herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos (las que mejor se ajusten en cada caso).	

UD. 3.- GEOMETRÍA DEL ESPACIO:

Tabla 17. Rúbrica por criterios de evaluación CE1 de la UD. 3- Geometría del espacio.
Fuente: Elaboración propia.

Criterio de evaluación: CE1 **Indicador de logro** Se trata de valorar si el estudiante está capacitado para: Utilizar las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.					
E.A.	**En proceso de adquisición (< 5)**	**Adquirido (5 – 6)**	**Avanzado (7 – 8)**	**Excelente (9 – 10)**	**Calificación**
EA1.1. EA1.2. EA1.3.	No sabe identificar ni clasificar los cuerpos de revolución estudiados y los poliedros ni utiliza el lenguaje correcto o la terminología adecuada para nombrar sus elementos constitutivos. No sabe calcular volúmenes ni áreas de cuerpos de revolución o poliedros aplicando la formulación correspondiente.	Clasifica e identifica los cuerpos de revolución estudiados y los poliedros. Utiliza el lenguaje correcto o la terminología adecuada para nombrar sus elementos constitutivos. Calcula volúmenes y áreas de de cuerpos de revolución o poliedros aplicando la formulación correspondiente.	Dibuja, clasifica e identifica los cuerpos de revolución estudiados y los poliedros. Utiliza el lenguaje correcto o la terminología adecuada para nombrar sus elementos constitutivos. Calcula volúmenes y áreas de de cuerpos de revolución o poliedros aplicando la formulación correspondiente, justificando los cálculos a través de sus desarrollos planos.	Dibuja, clasifica e identifica los cuerpos de revolución estudiados y los poliedros. Utiliza el lenguaje correcto o la terminología adecuada para nombrar sus elementos constitutivos, así como el teorema de Euler Calcula volúmenes y áreas de de cuerpos de revolución o poliedros aplicando la formulación correspondiente, justificando los cálculos a través de sus desarrollos planos y	

				sabiendo explicar el procedimiento utilizado con corrección.	

Tabla 18 Rúbrica por criterios de evaluación CE2 de la UD. 3- Geometría del espacio.
Fuente: Elaboración propia.

Criterio de evaluación: CE2 **Indicador de logro** Se trata de valorar si el estudiante está capacitado para: Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.					
E.A.	**En proceso de adquisición (< 5)**	**Adquirido (5 – 6)**	**Avanzado (7 – 8)**	**Excelente (9 – 10)**	**Calificación**
EA2.1.	No sabe ubicar en el globo terráqueo ni el ecuador, los polos, los meridianos y paralelos, ni tampoco situar un punto sabiendo la latitud y la longitud.	Ubica en el globo terráqueo el ecuador, los polos, los meridianos y paralelos, y sitúa un punto sabiendo la latitud y la longitud.	Ubica en el globo terráqueo el ecuador, los polos, los meridianos y paralelos, y sitúa un punto sabiendo la latitud y la longitud y sabe dibujar gráficamente un punto según sus coordenadas o por husos horarios.	Ubica en el globo terráqueo el ecuador, los polos, los meridianos y paralelos, y sitúa un punto sabiendo la latitud y la longitud y sabe dibujar un punto según sus coordenadas o por husos horarios conociendo el concepto y su significado sobre las horas.	

Tabla 19 Rúbrica por criterios de evaluación CE3 de la UD. 3- Geometría del espacio.
Fuente: Elaboración propia.

Criterio de evaluación: CE3					
Indicador de logro Se trata de valorar si el estudiante está capacitado para: Resolver problemas geométricos que conlleven el cálculo de áreas y volúmenes del mundo físico.					
E.A.	**En proceso de adquisición (< 5)**	**Adquirido (5 – 6)**	**Avanzado (7 – 8)**	**Excelente (9 – 10)**	**Calificación**
EA3.1.	No sabe resolver problemas basados em cuerpos en el espacio contextualizando situaciones reales. No sabe identificar regularidades en contextos geométricos. No conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo atentamente, ponerse a trabajar y resolverlo, explicar lo que se hace en cada parte.	Resuelve problemas con escasa complicación basados en cuerpos em el espacio contextualizando situaciones reales. Sabe identificar (solo lo hace con ayuda) regularidades en contextos geométricos. Emplea con ayuda las relaciones encontradas para tratar de encontrar la solución. Conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo atentamente,	Resuelve problemas basados en cuerpos em el espacio contextualizando situaciones reales y justificando el procedimento. Sabe identificar sin ayuda regularidades en contextos geométricos. Emplea las relaciones encontradas para tratar de encontrar la solución. Conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo atentamente, ponerse a trabajar y	Resuelve problemas basados en cuerpos em el espacio contextualizando situaciones reales y justificando el procedimento e interpretando la solución. Sabe identificar sin ayuda regularidades en contextos geométricos y las emplea explicando el procedimiento para la resolución del problema. Conoce los pasos de resolución de un problema u actividad: leerlo atentamente,	

		ponerse a trabajar y resolverlo, explicar lo que se hace en cada parte.	resolverlo, explicar lo que se hace en cada parte ordenadamente, llegando a una solución.	ponerse a trabajar y resolverlo, explicar lo que se hace en cada parte ordenadamente, sintetiza los datos, indica las operaciones y llega a una solución indicando su idoneidad.	

Tabla 20 Rúbrica por criterios de evaluación CE4 de la UD. 3- Geometría del espacio.
Fuente: Elaboración propia.

Criterio de evaluación: CE4					
Indicador de logro Se trata de valorar si el estudiante está capacitado para: Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, para realizar cálculos, dibujos geométricos y resolución de problemas, así como utilizarlas de modo habitual en el proceso de aprendizaje.					
E.A.	**En proceso de adquisición (< 5)**	**Adquirido (5 – 6)**	**Avanzado (7 – 8)**	**Excelente (9 – 10)**	**Calificación**
EA4.1	No utiliza herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos.	Utiliza, cuando así se pide, herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos.	Utiliza asiduamente herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos.	Utiliza asiduamente y autónomamente herramientas tecnológicas como soporte para la realización de tareas o trabajos (las que mejor se ajusten en cada caso).	

ANEXO Nº5: CUESTIONARIOS DE EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA ALUMNOS Y DOCENTES

Siguiente página.

Tabla 21 Cuestionario de evaluación de la propuesta por los alumnos.
Fuente: Elaboración propia.

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA		**ALUMNADO**			
	Rodea con un circulo la opción elegida				
	TD	PD	N	PA	TA
Mi interés ha aumentado al trabajar las matemáticas desde la perspectiva de la Catedral de Burgos.					
He aprendido conceptos matemáticos directamente relacionados con el arte gótico de la Catedral de Burgos.					
La utilización en las actividades de ejemplos tomados de un entorno conocido como el de la catedral la Catedral de Burgos me ha ayudado a la hora de comprender los conceptos estudiados.					
He aprendido a utilizar el software de Geogebra que me ha resultado util para afianzar los conceptos geometricos expuestos en las unidades didácticas.					
Me ha resultado interesante utilizar otros programas como Google Earth.					
He aprendido a buscar información en internet para la realización del proyecto, contrastandola con diferentes fuentes.					
Trabajar con mis compañeros en equipo en el proyecto me ha facilitado la comprensión de los conceptos matemáticos trabajados y me parece menos dificultoso que cuando trabajo individualmente.					
El trabajo en equipo me ha gustado y me ha ayudado a ser más autónomo ya que cuando no sabía algo me explicaban y ayudaban mis compañeros.					
El tiempo empleado para las actividades y el proyecto ha sido el adecuado.					
Prefiero que me enseñen a través de ejemplos que conozca como los utilizados de la Catedral de Burgos.					
Puedes comentar o explicar alguna de las respuestas dadas anteriormente para matizarlas.					
Puedes hacer sugerencias sobre lo que menos te haya gustado.					
Puedes aportar alguna idea que creas para mejorar las actividades o el proyecto.					
TD: Totalmente en desacuerdo; PD: Parcialmente en desacuerdo; N: Neutro; PA: Parcialmente de acuerdo; TA: Totalmente de acuerdo					

Tabla 22 Cuestionario de evaluación de la propuesta por los docentes.
Fuente: Elaboración propia.

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA	**DOCENTES**				
	Rodea con un circulo la opción elegida				
	TD	PD	N	PA	TA
Los alumnos están más motivados e interesados con este nuevo planteamiento basado en la propuesta didáctica que nos ocupa.					
Los alumnos se muestran mas activos y participativos con esta nueva metodología contextualizada en la atedral de Burgos.					
Los alumnos han alcanzado niveles de aprendizaje superiores a los que hubieran obtenido con la metodología anterior.					
Los resultados de evaluación de los alumnos han mejorado respecto a los que obtenían con la anterior metodología.					
Las actividades desarrolladas sobre la catedral de Burgos han sido un éxito.					
El proyecto desarrollado sobre la vivienda gótica ha sido un éxito .					
Cree que merece la pena continuar con este nuevo planteamiento para la impartición del bloque de geometría de 3º de la ESO.					
No ha habido problemas en la coordinación de los recursos del centro con otros departamentos o en la asignación de otras aulas en caso de haber sido necesario.					
No he tenido problemas a la hora de relacionar los conceptos matemáticas con aspectos relativos al arte gótico.					
Puedes comentar o explicar alguna de las respuestas dadas anteriormente para matizarlas.					
Explique las dificultades con las que se ha encontrado a la hora de impartir la propuesta didáctica.					
Puedes hacer sugerencias sobre lo que menos te haya gustado.					
Puedes aportar alguna idea que creas para mejorar las actividades o el proyecto.					
TD: Totalmente en desacuerdo; PD: Parcialmente en desacuerdo; N: Neutro; PA: Parcialmente de acuerdo; TA: Totalmente de acuerdo					