



UNIVERSIDAD DE BURGOS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTROMECÁNICA

**UNA NUEVA APROXIMACIÓN A LA MULTIRRESOLUCIÓN EN
EL DOMINIO DEL TIEMPO (MRTD) BASADA EN LA
TRANSFORMADA DISCRETA EN WAVELETS**

Tesis Doctoral
César Represa Pérez
Junio 2002



Memoria presentada por
D. César Represa Pérez para optar al
grado de Doctor en Ciencias Físicas

Certificado de los directores de la tesis

Dña. María del Carmen Pereira Fuentes, Profesora Titular de Electromagnetismo de la Universidad de Burgos, y

D. Ismael Barba García, Profesor Titular de Electromagnetismo de la Universidad de Valladolid

HACEN CONSTAR:

Que el trabajo titulado "**Una nueva aproximación a la multirresolución en el dominio del tiempo (MRTD) basada en la transformada discreta en wavelets**" ha sido realizado por D. César Represa Pérez en el Departamento de Ingeniería Electromecánica de la Universidad de Burgos bajo nuestra dirección, y que reúne las condiciones exigidas a los trabajos de doctorado.

Burgos, Junio 2002

Fdo. María del Carmen Pereira Fuentes

Fdo. Ismael Barba García

A Carmen

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a Ismael Barba García, por sus ánimos y por el esfuerzo y tiempo que me ha dedicado. También quiero dar las gracias a Carmen Pereira Fuentes y a José Represa Fernández, por el apoyo recibido durante la realización de este trabajo, y cómo no, también a Carmen, Jesús, Concesa, Jesús Fernando, Fernando ... A todos vosotros, sin excepción, muchas gracias.

ÍNDICE

Capítulo I. <i>Introducción</i>	1
1.1. Introducción.....	3
1.2. Estructura de la tesis	10
Capítulo II. <i>Análisis en Multirresolución</i>	13
2.1. Introducción.....	15
2.2. Análisis en Multirresolución	16
2.2.1 Familia de Wavelets de Daubechies	27
2.3. Transformada Discreta en Wavelets (<i>DWT</i>).....	31
2.3.1 Transformada Discreta en Wavelets 2D	39
2.3.2 Transformada Discreta en Wavelets 3D	45
Capítulo III. <i>Formulación</i>	51
3.1. Introducción.....	53
3.2. Formulación 1D	55
3.2.1 Operador derivada en una base de Wavelets	58
3.2.2 Desarrollo del algoritmo con funciones de escala	71
3.2.3 Desarrollo del algoritmo con funciones de escala y de wavelet.....	72
3.2.4 Ejemplo de aplicación del algoritmo en multirresolución	73
3.3. Formulación 2D.....	76
3.3.1 Desarrollo del algoritmo con funciones de escala	81
3.3.2 Desarrollo del algoritmo con funciones de escala y de wavelet.....	83
3.4. Formulación 3D	90
3.4.1 Desarrollo del algoritmo con funciones de escala	92

3.4.2 Desarrollo incluyendo funciones de wavelet	95
3.5. Condiciones de Contorno	99
3.5.1 Condiciones de Contorno 2D y 3D.....	103
3.6. Condiciones Absorbentes “PML”	105
3.6.1 Condiciones Absorbentes “PML” en 2D	106
3.6.2 Condiciones Absorbentes “PML” en 3D.....	112
3.6.3 Factor de Reflexión en un medio “PML”	114
3.6.4 Paso de tiempo exponencial.....	115
3.6.5 Implementación de las condiciones “PML”: ejemplo	117

Capítulo IV. Características Numéricas del Algoritmo 123

4.1. Introducción.....	125
4.2. Estabilidad Numérica	126
4.2.1 Estabilidad Numérica en 1D.....	127
4.2.2 Estabilidad Numérica en 2D.....	144
4.2.3 Estabilidad Numérica en 3D.....	148
4.3. Características de Dispersión.....	151
4.3.1 Dispersión Numérica en 1D.....	151
4.3.2 Dispersión Numérica en 2D.....	168
4.3.3 Dispersión Numérica en 3D.....	170
4.3.4 Análisis cuantitativo en 2D.....	172

Capítulo V. Resultados 183

5.1. Introducción.....	185
5.2. Excitación del Campo.....	186
5.2.1 Excitación en 1D.....	195
5.2.2 Excitación en 2D.....	198
5.3. Aplicación de la técnica MRTD 1D	202
5.3.1 Propagación de un pulso gaussiano	202

5.3.2 Resonador unidimensional.....	214
5.4. Aplicación de la técnica MRTD 2D	217
5.4.1 Frecuencias de corte en una guía WR28.....	217
5.4.2 Propagación de un modo TE ₁₀ en una guía WR28	228
5.4.3 Parámetros de <i>Scattering</i> de una unión T en el plano H.....	231
5.5. Aplicación de la técnica MRTD 3D	241
5.5.1 Cavidades resonantes	241
5.5.2 Propagación en una guía de ondas rectangular WR90	250
Conclusiones.....	255
Apéndice. Estructura de la Simulación	261
A.1. Estructura de la simulación.....	261
A.1.1 Definición del Sistema Físico	261
A.1.2 Condiciones de la Simulación.....	262
A.1.3 Iteración del Algoritmo.....	263
A.1.4 Salida del Algoritmo: Análisis de Resultados	263
Bibliografía.....	267

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

1.1.- INTRODUCCIÓN

El auge de las nuevas tecnologías experimentado en nuestra sociedad actual ha dado lugar a que el Electromagnetismo sea un área presente cada día para poder comprender, explicar y mejorar el funcionamiento de muchos dispositivos cotidianos. Fue en 1870 cuando James C. Maxwell unificó las teorías de la Electricidad y el Magnetismo sobre la base de cuatro ecuaciones representativas, dando cuenta de las leyes fundamentales que rigen los fenómenos electromagnéticos. Desde entonces, esta teoría ha jugado un papel fundamental y ha sido responsable del desarrollo de múltiples aplicaciones tecnológicas, desde la radio hasta llegar a la generación de calor por microondas, la detección remota y las comunicaciones móviles. Todo este desarrollo experimental nos indica que los fenómenos electromagnéticos macroscópicos están gobernados por las ecuaciones de Maxwell.

Una posible formulación de las ecuaciones de Maxwell consiste en expresar las relaciones entre los campos mediante un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, donde para su resolución se necesita conocer, además, la dependencia espacial y temporal de las propiedades eléctricas y magnéticas de los elementos que intervienen. Esta información adicional constituye lo que se denomina, en sentido amplio, condiciones de contorno. El valor de los campos electromagnéticos se puede obtener como solución de las ecuaciones de Maxwell sujetas a estas condiciones de contorno. Sin embargo, salvo en situaciones concretas, el conjunto formado por las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de contorno del problema particular no permiten obtener de manera sencilla una solución analítica exacta, por lo que es necesario realizar ciertos procesos de aproximación.

Las ondas electromagnéticas se pueden clasificar, atendiendo a su frecuencia, en ondas de radio, microondas, infrarrojos, luz visible, ultravioletas, rayos X, rayos γ y rayos cósmicos, constituyendo todas ellas el denominado “espectro electromagnético”. Las ondas electromagnéticas cuya frecuencia se encuentran entre, aproximadamente, 3×10^8 Hz y 3×10^{11} Hz, se conocen con el nombre de microondas. Una característica

importante que distingue a las microondas del resto de las ondas electromagnéticas es que su longitud de onda es del mismo orden de magnitud que los componentes en que se utilizan, lo que hace inaplicables tanto las aproximaciones utilizadas en la óptica geométrica como las utilizadas en la teoría de circuitos de baja frecuencia. Así, para caracterizar una estructura o un dispositivo de microondas desde un punto de vista electromagnético es necesario resolver las ecuaciones de Maxwell junto a las condiciones de contorno del problema particular. Existen algunas situaciones concretas en las que es posible resolver estas ecuaciones de forma analítica, sin embargo, en la mayoría de los casos que nos interesan será necesario resolver dichas ecuaciones mediante métodos numéricos.

Existe una gran variedad de métodos numéricos utilizados para la resolución de los problemas de microondas. Estos métodos se pueden clasificar en dos grandes grupos, por un lado aquellos que requieren para su formulación un estudio analítico previo del comportamiento del campo electromagnético en una estructura concreta, y por otro lado aquellos métodos utilizados para situaciones más generales que no requieren dicho estudio. Dentro del primer grupo se encuentra el método de los momentos, el de resonancia transversal, el de la ecuación integral y el de adaptación modal. Entre los métodos pertenecientes al segundo grupo podemos mencionar el de elementos finitos, el de diferencias finitas, el de elementos de contorno y el de la matriz de líneas de transmisión. Esta clasificación suele estar relacionada a su vez con el dominio de aplicación de cada método. Así, los métodos del primer grupo, generalmente, trabajan en el dominio de la frecuencia, mientras que los métodos del segundo grupo lo hacen en el dominio del tiempo.

Para resolver un problema particular, los métodos numéricos del primer grupo son más específicos y pueden resultar más eficaces, ya que sus exigencias de tiempo de computación y memoria son menores. Sin embargo, los métodos del segundo grupo, debido a su sencillez y amplio rango de aplicación, y gracias a la gran potencia de cálculo de los ordenadores actuales, son cada vez más utilizados. De hecho, cuando los ordenadores eran más limitados, se hacía prácticamente imprescindible un procesamiento analítico previo con el objeto de reducir la carga computacional del método. Hoy en día este aspecto no es tan crítico, con lo cual los primeros han perdido en parte su ventaja. Además, los métodos numéricos en el dominio del tiempo presentan

otras ventajas, como son la posibilidad de tratar directamente con elementos o medios no lineales, la obtención de información en un amplio rango de frecuencias (mediante la Transformada de Fourier), se pueden analizar propiedades que varían con el tiempo (calentamiento), y todo ello sin olvidar que la naturaleza funciona en el dominio del tiempo, lo que hace más fácil interpretar los resultados de una forma intuitiva, e incluso con vistas a fines educativos.

Uno de los métodos más utilizados de este segundo grupo es el de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), introducido por K.S. Yee en 1966 [88], pero que tuvo que pasar más de una década hasta que empezó a emplearse y desarrollarse ampliamente por nuevos investigadores en otros trabajos [74]. Este método se basa en la discretización, tanto espacial como temporal, de los campos electromagnéticos y la aproximación de las derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones rotacionales de Maxwell por cocientes de diferencias finitas. De esta forma se obtiene un esquema explícito de ecuaciones algebraicas que permite ir calculando, en instantes sucesivos, el valor del campo electromagnético en cada punto del espacio a partir del valor del campo en el mismo punto y en los circundantes en instantes anteriores. El método FDTD permite introducir una excitación en la estructura y simular la evolución temporal del campo electromagnético en la región de interés. Además, por tratarse de una técnica formulada en el dominio del tiempo, permite obtener en una única simulación la respuesta en frecuencia de la estructura en un amplio ancho de banda (únicamente limitado por la discretización temporal), mediante un análisis en frecuencia de los campos calculados en el dominio del tiempo. El método FDTD presenta además otras ventajas destacables, como son la posibilidad de trabajar con diferentes tipos de materiales, ya sean homogéneos o heterogéneos, lineales o no lineales, dispersivos o no dispersivos e isótropos o anisótropos [75]. Además, este método puede ser formulado en cualquier sistema de coordenadas: desde sistemas de coordenadas ortogonales como los cartesianos, cilíndricos y esféricos, a los sistemas no ortogonales de coordenadas curvilíneas. Una característica fundamental de todos los métodos numéricos es que deben tratar con un número finito de datos, lo implica que el dominio numérico, tanto espacial como temporal, donde se simula el problema estudiado, ha de estar limitado.

A pesar de sus ventajas, el método FDTD también posee sus desventajas. La más importante se refiere a las limitaciones en la memoria requerida para almacenar la

estructura que se quiere analizar, así como el tiempo computacional necesario para resolverla. Estos motivos han provocado que nuevas técnicas hayan surgido intentando resolver estas desventajas. La más reciente es la técnica conocida como “multirresolución en el dominio del tiempo” (MRTD), basada en el análisis en *wavelets*, y en cuyo marco se encuentra el presente trabajo.

El análisis en *wavelets* ha sido ampliamente estudiado en el campo de las matemáticas [4, 23, 52, 53, 54], y aunque su principal aplicación se ha encontrado en el campo del procesamiento de señales [83] o en la compresión de imágenes [70], recientemente está siendo aplicado a la resolución de ecuaciones diferenciales en virtud de las propiedades de ortogonalidad que presentan las *wavelets* [1, 9, 10].

En el campo de la ingeniería de microondas, las *wavelets* han sido incorporadas, en primer lugar, como funciones base utilizadas en el método de los momentos [39], donde la aplicación de estas técnicas ha dado ya muestras de su eficiencia computacional a la hora de analizar problemas electromagnéticos en el dominio de la frecuencia [2, 30, 67, 71].

En el contexto de los métodos numéricos en el dominio del tiempo, su aplicación es todavía reciente, y los primeros trabajos realizados se han encaminado hacia la búsqueda de una mejora en la eficiencia computacional. En esta línea se encuentran los realizados por Krumpholz y Katehi [49, 50], quienes desarrollaron técnicas basadas en funciones *wavelet* del tipo Battle-Lemarié, a las que denominaron técnicas de *multirresolución* en el *dominio del tiempo* (MRTD). Este nuevo concepto de *multirresolución* tiene su origen en la existencia de dos tipos de funciones, denominadas función de *escala* y función de *wavelet*, las cuales permiten describir una función con mayor o menor precisión dependiendo del número de términos de *escala* y de *wavelet* empleados. De esta manera, partiendo de un desarrollo formado únicamente por funciones de *escala* se puede obtener un resultado más preciso, esto es, aumentar su *resolución*, sin más que añadir funciones de *wavelet* de diferentes niveles al desarrollo y sólo en aquellas zonas donde se necesite. Este tipo de algoritmos proporciona de una forma natural un método para obtener mallados no uniformes con los que se puede describir zonas específicas con diferentes grados de *resolución*, aplicando, por ejemplo, un mallado fino, allí donde el campo electromagnético varíe con rapidez, y un mallado

más grueso en el resto con el fin de conservar recursos computacionales. Este mallado podría llegar incluso a hacerse adaptativo, de forma que su refinamiento se produzca en la zona del espacio donde se encuentra el pulso y en el intervalo temporal en que se necesita.

Estas técnicas en el dominio del tiempo basadas en wavelets reducen considerablemente el esfuerzo computacional debido a que se pueden emplear mallados más gruesos para los mismos niveles de precisión, y además, con un mallado adaptativo se puede conseguir una alta resolución solamente allí donde se necesita. A diferencia del método FDTD que necesita un discretizado de al menos diez puntos por longitud de onda, estos métodos pueden llegar a utilizar discretizaciones cercanas a los dos puntos por longitud de onda para lograr resultados satisfactorios. Además, la descomposición en wavelets, o desarrollo ortogonal en funciones wavelet, permite aplicar una técnica denominada *thresholding*, y que consiste en eliminar cierto número de coeficientes del desarrollo que no alcanzan un valor umbral fijado de antemano sin degradar la precisión del cálculo. Esta técnica proporciona automáticamente el mallado adaptativo del dominio [31, 32, 33].

Con el método FDTD también se puede realizar un mallado fino en determinadas regiones del espacio, pero dado que el algoritmo necesita, para calcular el valor del campo en un punto, conocer el valor en las posiciones adyacentes, en las zonas frontera entre el mallado fino y el grueso no se tienen estos valores y debemos recurrir a técnicas de estimación para calcularlos, además de requerir una disminución en la discretización temporal debido a su menor rango de estabilidad. Sin embargo, las técnicas MRTD no requieren subdividir la región original para aumentar la resolución en una zona determinada. En vez de eso, para una resolución original obtenida utilizando funciones de escala, el aumento de resolución se consigue añadiendo más funciones base al desarrollo, esto es, añadiendo más funciones de wavelet de orden superior a las funciones de escala iniciales. En este caso también es necesario, para conocer el valor de los coeficientes del desarrollo en un punto, el conocer el valor de los coeficientes en los puntos adyacentes. Sin embargo, en las regiones donde los términos de wavelet de orden superior no son necesarios para describir los campos, sus coeficientes son suficientemente pequeños como para ser despreciados sin afectar al cálculo de los coeficientes en la zona de alta precisión, y esos términos no son

necesarios precisamente porque son suficientemente pequeños para ser despreciados. De esta forma, la técnica MRTD proporciona un método riguroso para terminar las zonas de alta resolución localizadas. Los coeficientes de wavelet, por sí mismos, también aportan información acerca del nivel de resolución necesario. A medida que su valor aumenta se pueden incluir más niveles para mejorar los resultados, y a medida que se hacen más pequeños se pueden despreciar. Así, el procedimiento utilizado para aumentar la resolución en el método FDTD es diferente del utilizado en el método MRTD. En el método FDTD, la resolución espacial del mallado se determina a partir de la característica más pequeña que posea la estructura a analizar. En la técnica MRTD las funciones de escala se pueden interpretar mediante filtros pasa-baja y las funciones de wavelet mediante filtros pasa-alta, y por lo tanto es la función de escala la que debe fijar el orden de resolución inferior que se quiere resolver, las altas resoluciones son proporcionadas por las funciones de wavelet.

Estas técnicas MRTD han sido satisfactoriamente aplicadas a una gran variedad de problemas electromagnéticos, demostrando sus grandes cualidades en cuanto a la reducción de memoria y tiempo computacional [31, 32, 33, 49, 50]. Todas ellas se obtienen aplicando a la discretización de las ecuaciones de Maxwell un análisis en multiresolución basado en las wavelets del tipo Battle-Lemarié [4, 52]. Las funciones de escala y de wavelet que se emplean en este tipo de esquemas tienen la cualidad de poseer una expresión cerrada en el dominio de la frecuencia, lo cual nos permite diseñar la función de escala y la función de wavelet a partir de las propiedades que poseen como filtro pasa-baja y filtro pasa-alta respectivamente. El problema surge al pasar estas funciones al dominio espacial ya que las expresiones resultantes se extienden indefinidamente por el espacio, teniendo que truncar el desarrollo para hacer factible su formulación. Debido a la característica de decaimiento exponencial que presentan las wavelets tipo Battle-Lemarié, se puede realizar este truncamiento de los desarrollos a partir de un determinado número de coeficientes, sin que se vea grandemente afectada su precisión. De esta forma se puede tomar únicamente un número finito de términos (generalmente 18 coeficientes suelen ser suficientes) para completar la descripción de los campos.

La necesidad de truncar los desarrollos ha dado lugar a la aparición de nuevas técnicas que utilicen funciones compactas para desarrollar los campos, y que estén

definidas en un intervalo cerrado pero conservando todas las propiedades de multirresolución. Una de estas técnicas es la técnica Haar-MRTD [26], que emplea como funciones base un tipo de wavelets denominadas wavelets de Haar [38], y que por su sencillez la hace muy atractiva para su utilización en los esquemas multirresolución. De hecho, los algoritmos obtenidos de esta forma son idénticos a los utilizados en el método FDTD.

En esta línea se encuentran los objetivos de la presente tesis. En ella se pretende desarrollar una nueva técnica MRTD que utilice como funciones base para los desarrollos unas funciones wavelet de soporte compacto, es decir, que no se extiendan en todo el dominio y que por lo tanto no sea necesario realizar un truncamiento. Las funciones que hemos elegido, y que cumplen la condición deseada son las wavelets de tipo Daubechies [23]. De esta forma se van a discretizar las ecuaciones de Maxwell utilizando wavelets para desarrollar los campos en la variable espacial, junto con funciones pulso en la variable temporal. La técnica desarrollada permitirá utilizar de manera indistinta cualquier función wavelet de Daubechies, a diferencia de los esquemas anteriores limitados a un sólo tipo de función. Otra característica que permite dar una mayor sencillez a los planteamientos es el uso de la Transformada Discreta en Wavelets (DWT) [9, 20, 21, 54, 63] para descomponer y recomponer los campos a partir de los coeficientes de sus desarrollos. Una de las ventajas presentadas será la posibilidad de aumentar la resolución de la solución obtenida sin necesidad de modificar los algoritmos cada vez que se quiera introducir un nivel nuevo de resolución, alcanzando de esta manera una multirresolución efectiva. Esto se va a conseguir introduciendo el concepto de matriz derivativa [10] para calcular los coeficientes del desarrollo pertenecientes a la derivada de una función. Con todo esto estudiaremos con detenimiento las condiciones de estabilidad numérica que presenta el algoritmo, así como sus características de dispersión inherentes a la discretización del problema. Todo ello será validado presentando una serie de ejemplos en los que compararemos los resultados obtenidos con la solución teórica y a su vez con las soluciones proporcionadas por otras técnicas numéricas.

1.2.- ESTRUCTURA DE LA TESIS

Para alcanzar los objetivos propuestos, esta memoria se ha dividido en seis capítulos organizados de la siguiente forma:

- En el capítulo primero se encuentra la presente introducción.
- En el capítulo segundo se ha realizado un estudio de lo que se conoce como *análisis en multirresolución*. En él se describen las principales propiedades que presentan las wavelets y que dan lugar a los esquemas en multirresolución. También se presenta la Transformada Discreta en Wavelets (DWT), la cual permite interpretar la multirresolución como un proceso de filtrado en el que los contenidos de baja frecuencia (baja resolución) están expresados por las funciones de escala y los contenidos de alta frecuencia (altas resoluciones) se desarrollan en términos de las funciones de wavelet.
- En el capítulo tercero se aborda la descripción de los algoritmos que dan lugar a los esquemas MRTD propuestos mediante la discretización de las ecuaciones de Maxwell. En primer lugar se desarrolla el esquema unidimensional y se hace un estudio detallado del modo en que se construye la matriz derivativa. También se hace un estudio de la forma de introducir las condiciones de contorno dentro del algoritmo. Debido a que las wavelets de Daubechies no están localizadas en un único intervalo (excepto las wavelets de Haar o D_1) se recurre al método de las imágenes para modelar condiciones de contorno “duras” (paredes eléctricas –PEC– y paredes magnéticas –PMC–). También se describen las condiciones de contorno absorbentes “PML” [7], y la forma de incorporarlas en nuestros esquemas MRTD. Después se hace una extensión del algoritmo unidimensional a los casos de dos y tres dimensiones.

- El capítulo cuarto trata el tema de las características numéricas del algoritmo, como son sus propiedades de estabilidad y dispersión. En él se hace un análisis riguroso de las condiciones que deben cumplir los distintos esquemas para que sean numéricamente estables durante la simulación dependiendo del tipo de wavelet empleado para el desarrollo de los campos. También se analizan las características de dispersión que presentan y que son producto de la discretización de las ecuaciones. Se realiza un estudio comparativo entre los diferentes tipos de wavelets usados.
- En el capítulo quinto se procede a la validación de los esquemas propuestos analizando diferentes ejemplos canónicos que permiten comparar los resultados proporcionados por nuestros esquemas con el valor teórico que debe obtenerse. Los ejemplos están divididos en tres apartados, correspondientes a los tres esquemas propuestos, unidimensional, bidimensional y tridimensional respectivamente.
- Finalmente se introduce un apéndice en el que se describe la estructura del algoritmo.

Capítulo II

ANÁLISIS EN MULTIRRESOLUCIÓN

2.1.- INTRODUCCIÓN

Aunque el desarrollo e interés por esta materia tiene una historia de sólo unos pocos años, el verdadero origen se puede situar en 1910 con el trabajo del matemático alemán Alfred Haar [38] en el que proponía que cualquier función continua podía ser aproximada por un desarrollo de funciones ortonormales. Los conceptos introducidos por A. Haar son retomados nuevamente en los años 80 por un equipo del Centro de Física Teórica de Marsella (Francia) [14] dirigido por Alex Grossmann y que contaba con la colaboración de los investigadores J. Morlet, Y. Meyer, S. Mallat, G. Battle y P. Lemarié entre otros. Fueron ellos quienes establecieron el concepto de *wavelet* (del francés *ondelette*) en su forma teórica actual. Los métodos de análisis basados en wavelets fueron desarrollados principalmente por Y. Meyer [56, 57] y S. Mallat [53, 54] hasta que en 1988 el trabajo realizado por Ingrid Daubechies [22] relanzó el interés sobre las *wavelets* como herramienta para el procesamiento de señales, la compresión de datos y el análisis numérico [1, 5, 15, 44, 70, 83].

Una de las principales razones de la gran popularidad de las técnicas basadas en *wavelets* son que, a diferencia del análisis de Fourier, que usa como base funciones no localizadas *seno* y *coseno*, el análisis con wavelets tiene como base funciones localizadas en tiempo y frecuencia (figura 2.1), dando como resultado una representación más compacta y más fácil de implementar.

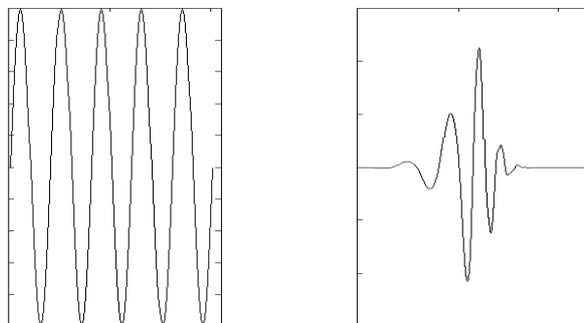


Figura 2.1.: *Función $\sin(x)$ y función de wavelet ψ_{D5}*

2.2.- ANÁLISIS EN MULTIRRESOLUCIÓN

El concepto de análisis en multirresolución fue desarrollado por Meyer [57] y Mallat [54], y como su nombre sugiere, aplicando este tipo de análisis podemos descomponer una función complicada en diferentes funciones más simples y estudiarlas separadamente. Para entender mejor la noción de análisis en multirresolución, consideremos una función como la representada en la figura 2.2.a.

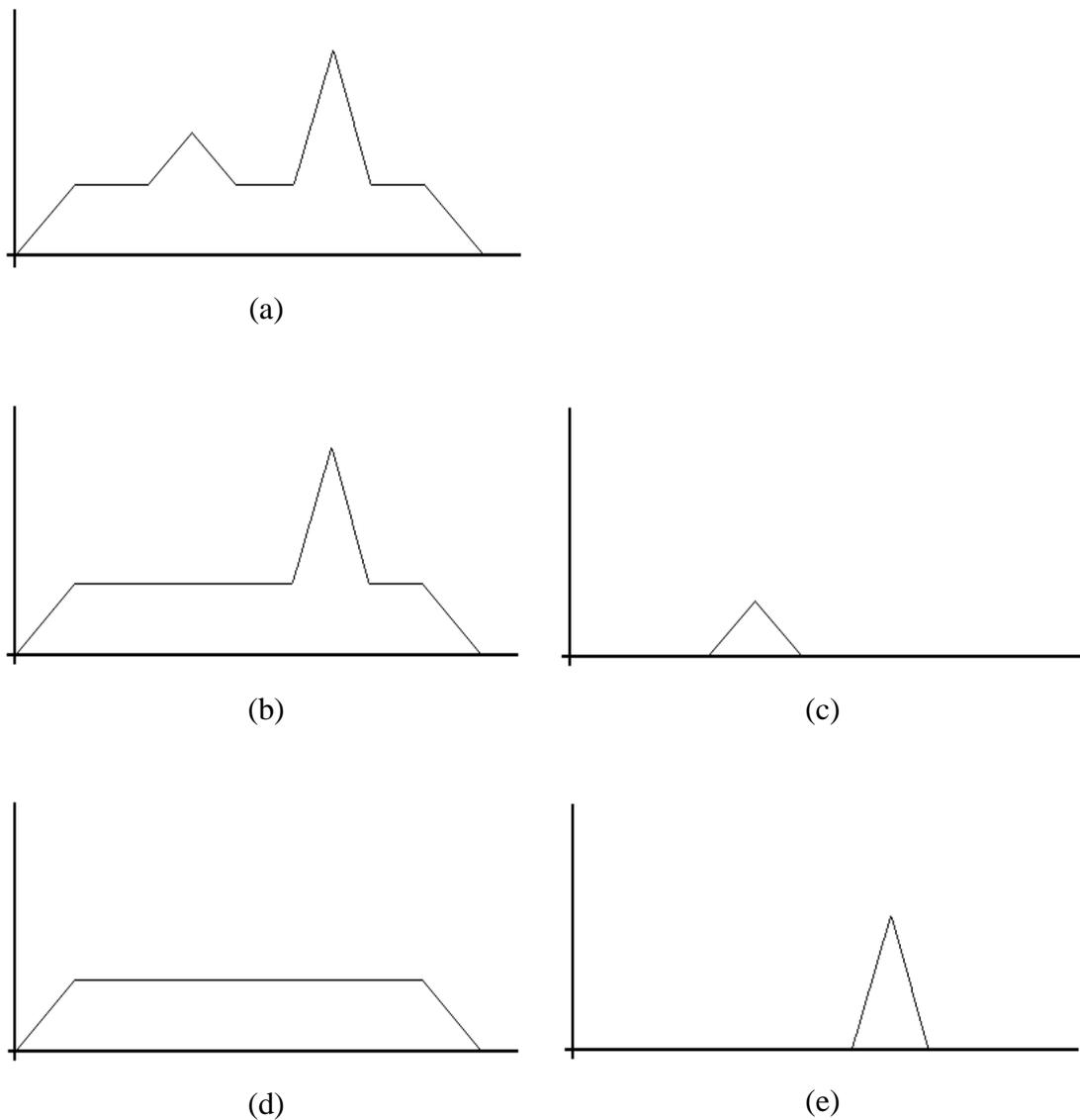


Figura 2.2.: Representación multinivel de una función.

Esta función se puede representar de una forma más gruesa si eliminamos ciertas características. El resultado es el representado en la figura 2.2.b, donde la figura 2.2.c representa el “trozo” que hemos suprimido de la función original. Esta *aproximación* de la función original se puede a su vez dividir en dos partes, eliminando aún más detalles. El resultado se encuentra en la figura 2.2.d, siendo la figura 2.2.e los detalles que hemos eliminado. Este proceso de ir eliminando detalles de la función original sería lo que se conoce como proceso de descomposición dentro del análisis en multirresolución. Observando la figura 2.2 vemos que la función original puede ser nuevamente recuperada si vamos añadiendo a la última aproximación obtenida todos los detalles que hemos ido eliminando. Esto sería lo que se conoce como proceso de reconstrucción.

Este análisis en multirresolución se puede llevar a cabo utilizando un tipo de funciones, denominadas *wavelets* [4, 52], cuyas propiedades particulares van a permitir realizar la descomposición de una función en otras funciones más simples. El término *wavelet* se utiliza para describir una función localizada espacialmente, es decir, una función cuya amplitud es distinta de cero únicamente dentro de un intervalo, o en un sentido más amplio, que su amplitud decae exponencialmente fuera de ese intervalo. Estas funciones pueden además poseer la propiedad de ortonormalidad, dando lugar a una base ortonormal similar a la formada por las funciones *seno* y *coseno* en el análisis de Fourier. Dentro de este conjunto de funciones ortonormales se encuentran las funciones wavelet de Meyer [57], de Battle-Lemarié [4, 52] y de Daubechies [23].

En este apartado vamos a exponer los conceptos básicos y la terminología que dan lugar al análisis en multirresolución basado en funciones wavelet ortonormales y que forma parte fundamental en el desarrollo de este trabajo. Una descripción más precisa y detallada puede encontrarse en las referencias [11, 20, 21, 45], donde se hace un compendio y un análisis exhaustivo de los trabajos originales desarrollados por Meyer, Mallat y Daubechies. El objetivo será, por tanto, establecer las propiedades de estas funciones wavelet y que permiten realizar un análisis en multirresolución de aquellas funciones, que en nuestro caso corresponderán a las componentes del campo electromagnético, desarrolladas como combinación lineal de éstas.

Funciones de escala

Consideremos el espacio formado por las funciones de cuadrado integrable de variable real $L^2(\mathbf{R})$ cuyo producto interior viene representado por la siguiente expresión:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \langle g(x), f(x) \rangle = \int f(x) \cdot g(x) \cdot dx \quad (2-1)$$

Se define como *función de escala* a una función $\mathbf{f}(x)$ perteneciente a dicho espacio que cumple las siguientes propiedades [23]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x) dx = 1 \quad (2-2.1)$$

$$\|\mathbf{f}(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{f}(x)|^2 dx = 1 \quad (2-2.2)$$

$$\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{f}(x-n) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{f}(x-n) dx = \mathbf{d}(n) \quad (2-2.3)$$

Al subespacio de $L^2(\mathbf{R})$ cuya base está formada por el conjunto de funciones de escala trasladadas en el espacio lo llamaremos S^0 y se representa como

$$S^0 = \{ \mathbf{f}_k(x) \}_{k \in \mathbf{Z}} \quad (2-3)$$

donde

$$\mathbf{f}_k(x) = \mathbf{f}(x - k), \quad \text{para } k \in \mathbf{Z} \quad (2-4)$$

De esta manera, cualquier función perteneciente a dicho subespacio se puede poner como combinación lineal de las funciones base. Dicho de otra forma, una función $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ se puede proyectar sobre el subespacio S^0 de manera que el desarrollo de esa proyección en términos de las funciones de escala $\mathbf{f}_k(x)$ constituye una aproximación $f^0(x)$ de dicha función:

$$f^0(x) \in S^0 \Rightarrow f^0(x) = \sum_k a_k \mathbf{f}_k(x) \quad (2-5)$$

donde, debido a la ortogonalidad de la función de escala:

$$a_k = \langle f(x), \mathbf{f}_k(x) \rangle \quad (2-6)$$

Este proceso de aproximación de una función lo podemos representar de forma esquemática como se indica en la figura 2.3. Aquí vemos cómo la función de escala $\mathbf{f}(x)$ se va desplazando a lo largo de todo el dominio de la función original $f(x)$ obteniendo su aproximación en el subespacio S^0 .

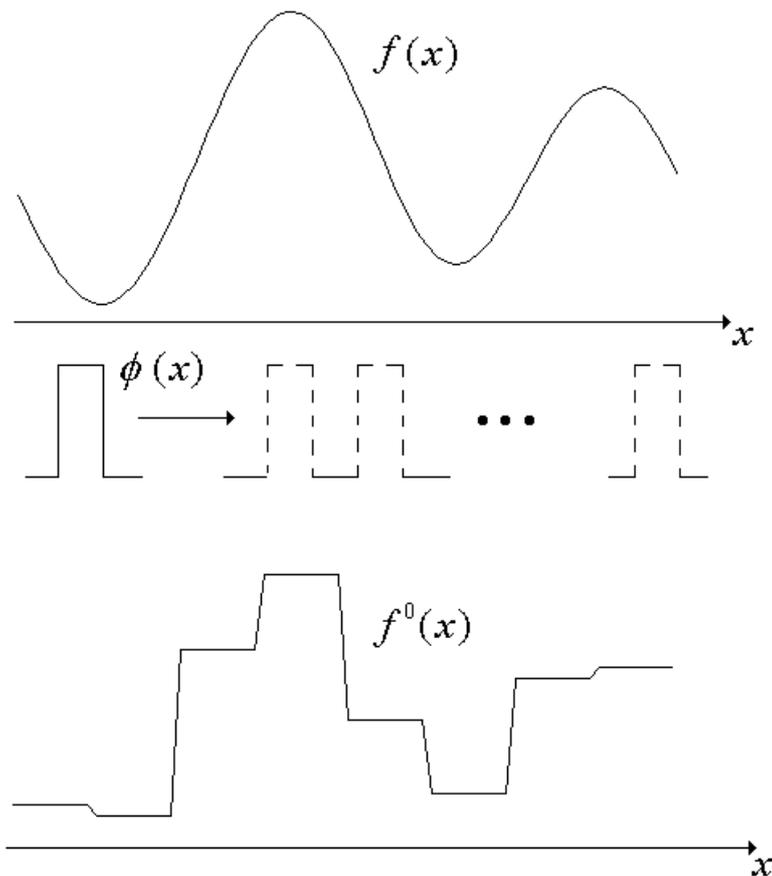


Figura 2.3.: Proyección de una función $f(x)$ sobre el subespacio S^0 .

El subespacio S^0 se puede hacer mayor o menor cambiando la escala de las funciones base. De esta manera podemos generar una familia bidimensional mediante

sucesivas traslaciones y escalados de la función de escala base. Al conjunto formado por las sucesivas traslaciones en cada escala lo llamaremos S^j y se representa como:

$$S^j = \{\mathbf{f}_k^j(x)\}_{k \in \mathbf{Z}} \quad (2-7)$$

donde

$$\mathbf{f}_k^j(x) = 2^{\frac{j}{2}} \mathbf{f}(2^j x - k), \quad \text{para } k, j \in \mathbf{Z} \quad (2-8)$$

Por lo tanto, si una función pertenece al subespacio S^j , ésta se puede poner como combinación lineal de las funciones base $\mathbf{f}_k^j(x)$, o lo que es lo mismo, una función $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ se puede proyectar sobre el subespacio S^j de manera que el desarrollo formado por las funciones de escala $\mathbf{f}_k^j(x)$ constituyen una aproximación $f^j(x)$ de dicha función:

$$f^j(x) \in S^j \Rightarrow f^j(x) = \sum_k a_k \mathbf{f}_k^j(x) \quad (2-10)$$

y donde, debido a la propiedad de ortogonalidad de la función de escala, los coeficientes del desarrollo se calculan como:

$$a_k = \langle f(x), \mathbf{f}_k^j(x) \rangle \quad (2-11)$$

En la figura 2.4 se ha representado una aproximación en el subespacio S^j de la misma función $f(x)$ mostrada en la figura 2.3. Ahora la función de escala $\mathbf{f}^j(x)$ es más pequeña y por lo tanto podemos apreciar más detalles de la función original que antes se perdían. El inconveniente es que ahora necesitamos desplazar más veces la función de escala para recorrer todo el dominio de la función $f(x)$. Esto se traduce en que necesitaremos más coeficientes para desarrollar la función en este subespacio.

La figura 2.5 muestra el efecto que provoca sobre la función de escala la variación de los índices k y j : La variación del índice k produce una traslación de la función de escala a lo largo del espacio, mientras que el índice j cambia el tamaño de la

función de escala, produciendo un “estiramiento” (si j disminuye) o una “contracción” (si j aumenta) de la misma.

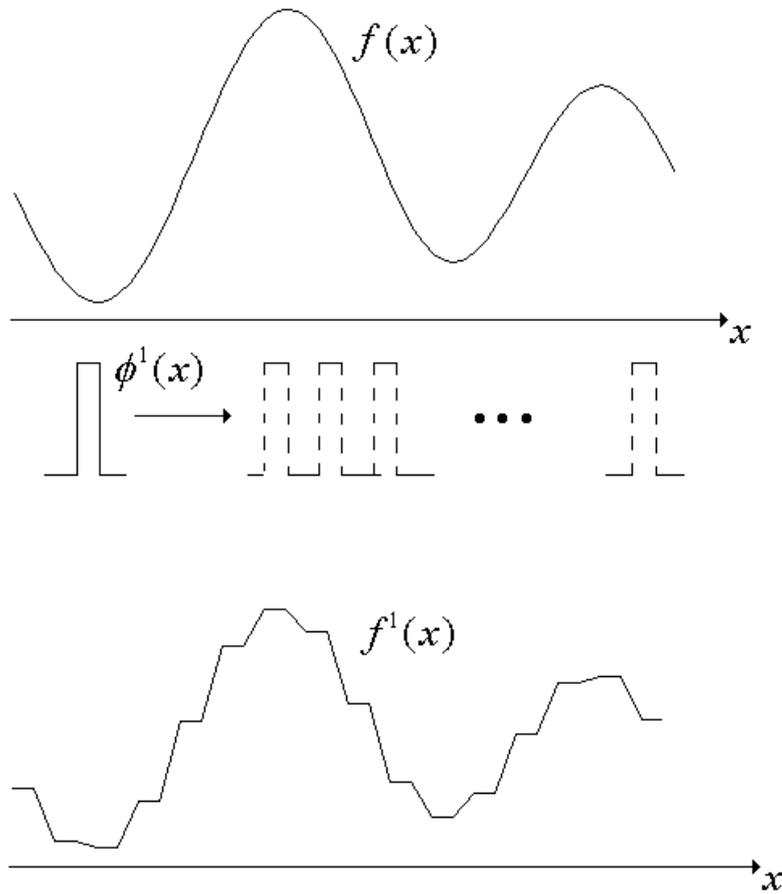


Figura 2.4.: Proyección de una función $f(x)$ sobre el subespacio S^1 .



Figura 2.5.: Escalado y translación de una función wavelet $(k, j \in \mathbb{Z})$.

Con todo esto se puede decir que el conjunto de subespacios $\{S^j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ representa una aproximación en multirresolución del espacio $L^2(\mathbf{R})$ si cumple las propiedades siguientes [54]:

$$\dots \subset S^{-2} \subset S^{-1} \subset S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \dots \subset L^2 \quad (2-12.1)$$

$$S^j \subset S^{j+1} \quad \text{para todo } j \in \mathbf{Z} \quad (2-12.2)$$

$$S^{\mathbf{Y}} = L^2 \quad (2-12.3)$$

$$S^{-\mathbf{Y}} = \{\emptyset\} \quad (2-12.4)$$

Esta definición de los subespacios S^j , nos lleva a que se debe satisfacer la siguiente condición [54]:

$$f(x) \in S^j \quad \Leftrightarrow \quad f(2x) \in S^{j+1}$$

Esto significa que la función de escala $\mathbf{f}(x)$ se puede expresar como combinación de las funciones de escala $\mathbf{f}(2x)$:

$$\mathbf{f}(x) = \sum_n \mathbf{L}(n) \sqrt{2} \mathbf{f}(2x - n), n \in \mathbf{Z} \quad (2-13)$$

donde los coeficientes $\mathbf{L}(n)$ se denominan “coeficientes de la función de escala”. Esta ecuación se suele denominar como *ecuación de refinamiento* o también *ecuación de dilatación*. En ella vemos que la función $\mathbf{f}(x)$ se representa como una superposición de versiones trasladadas y escaladas de ella misma, de ahí que se denomine *función de escala*. Los coeficientes de la función de escala $\mathbf{L}(n)$ cumplen además la siguiente propiedad [23]:

$$\sum_n (-1)^n \mathbf{L}(n) = 0 \quad (2-14)$$

Función de wavelet

Al proyectar una función $f(x)$ sobre el subespacio S^j estamos perdiendo cierta información correspondiente a los detalles de esa función. Sería pues deseable poder describir la función $f(x)$ en términos de su aproximación en la resolución j y los restantes términos *ortogonales* que contienen los detalles más finos. Esto se puede hacer considerando un subespacio W^j definido como el complemento ortogonal de S^j en S^{j+1} y que se representa como:

$$W^j = \{\mathbf{y}_k^j(x)\}_{k \in \mathbf{Z}} \quad (2-15)$$

donde las funciones

$$\mathbf{y}_k^j(x) = 2^{\frac{j}{2}} \mathbf{y}(2^j x - k) \quad (2-16)$$

constituyen la base del subespacio.

La función $\mathbf{y}(x)$ se denominada *función de wavelet* propiamente dicha, y satisface las siguientes propiedades [23]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{y}(x) dx = 0 \quad (2-17.1)$$

$$\|\mathbf{y}(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{y}(x)|^2 dx = 1 \quad (2-17.2)$$

$$\langle \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(x-n) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{y}(x) \cdot \mathbf{y}(x-n) dx = \mathbf{d}(n) \quad (2-17.3)$$

$$\langle \mathbf{y}(x), \mathbf{f}(x-n) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{y}(x) \cdot \mathbf{f}(x-n) dx = 0 \quad (2-17.4)$$

La relación entre los diferentes subespacios se puede expresar de la siguiente forma [54]:

$$S^j \cap W^j = \{0\} \quad (2-18.1)$$

$$S^{j+1} = S^j \oplus W^j \quad (2-18.2)$$

$$W^{-\infty} \oplus \dots \oplus W^{-1} = S^0 \quad (2-18.3)$$

$$L^2 = S^0 \oplus W^0 \oplus W^1 \oplus W^2 \oplus \dots \quad (2-18.4)$$

$$L^2 = \dots \oplus W^{-2} \oplus W^{-1} \oplus W^0 \oplus W^1 \oplus W^2 \oplus \dots \quad (2-18.5)$$

En la figura 2.6 se ha representado un esquema con lo que sería una descomposición en multirresolución del espacio $L^2(\mathbf{R})$, y en ella se puede observar cómo cada subespacio S^j está incluido en el subespacio S^{j+1} , como indica la propiedad 2-12.1 y cómo la diferencia entre ambos es el subespacio W^j , como indica la propiedad 2-18.2.

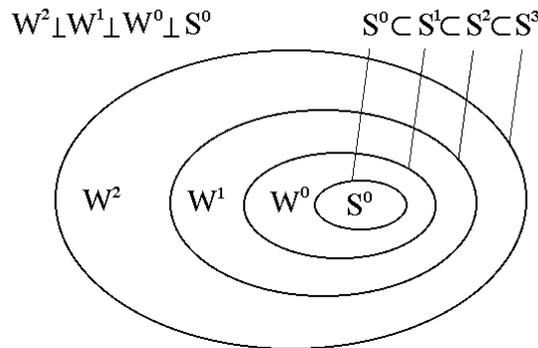


Figura 2.6.: Representación de los subespacios S^j y W^j que dan lugar a la representación en multirresolución del espacio $L^2(\mathbf{R})$.

El conjunto formado por las funciones $\{\mathbf{y}^j_k(x)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ constituye una base ortogonal del subespacio W^j , por lo tanto, cualquier función $f(x)$ que pertenece a dicho subespacio se puede poner como una combinación lineal de las funciones base de la siguiente forma:

$$f(x) \in W^j \Rightarrow f(x) = \sum_k b_k^j \mathbf{y}_k^j(x) \quad (2-19)$$

y donde, debido a la propiedad de ortogonalidad de la función de wavelet, los coeficientes del desarrollo se calculan como:

$$b_k^j = \langle f(x), \mathbf{y}_k^j(x) \rangle \quad (2-20)$$

Pero como W^j está incluido en el subespacio S^{j+1} (propiedad 2-18.2 y figura 2.6), las funciones base de W^j se pueden poner como combinación lineal de las funciones base del subespacio S^{j+1} , con lo que obtenemos la siguiente *ecuación de refinamiento* para las funciones de wavelet:

$$y(x) = \sum_n \mathbf{H}(n) \sqrt{2} f(2x-n), n \in \mathbf{Z} \quad (2-21)$$

donde los coeficientes $\mathbf{H}(n)$ se denominan “coeficientes de la función de wavelet”. Debido a la relación de ortogonalidad entre los subespacios W^j y S^j , existe una relación entre los coeficientes de la función de escala $\mathbf{L}(n)$ y los coeficientes de la función de wavelet $\mathbf{H}(n)$ [23]:

$$\mathbf{H}(n) = (-1)^n \mathbf{L}(1-n) \quad (2-22)$$

La mayoría de las funciones de escala y de wavelet utilizadas no poseen una descripción analítica exacta. Sólo en algunos casos, como son las funciones wavelet de Haar, Meyer, Shannon, etc. [63], se define una expresión analítica que las describa. Sin embargo, en muchas aplicaciones sólo es necesario conocer los coeficientes de escala $\mathbf{L}(n)$ y de wavelet $\mathbf{H}(n)$ de sus ecuaciones de refinamiento. Además, estos coeficientes se pueden interpretar como “filtros”, de tal manera que el análisis en multirresolución de una función se puede ver como diferentes etapas de “filtrado” de la misma [72].

Propiedades

Las propiedades más importantes de las funciones de escala y de wavelet, y que definen un análisis en multirresolución, pueden resumirse en los siguientes puntos:

1. Las funciones de escala de un nivel de resolución j son ortonormales a las funciones de escala del mismo nivel de resolución, pero no lo son a otras de diferente nivel de resolución:

$$\langle \mathbf{f}_n^j, \mathbf{f}_m^j \rangle = \mathbf{d}_{n,m} \quad (2-23)$$

Esto implica que, cuando se utilicen funciones de escala para desarrollar una función, no se pueden mezclar diferentes niveles de resolución.

2. Las funciones de escala son ortogonales a cualquier función de wavelet de un nivel de resolución superior, mientras que las funciones de wavelet son ortonormales a todas las demás funciones de wavelet, de cualquier nivel de resolución:

$$\langle \mathbf{f}_n^j, \mathbf{y}_m^k \rangle = 0 \quad j \leq k \quad (2-24.1)$$

$$\langle \mathbf{y}_n^j, \mathbf{y}_m^k \rangle = \mathbf{d}_{j,k} \mathbf{d}_{n,m} \quad (2-24.2)$$

Estas dos propiedades nos permiten utilizar funciones de escala de un nivel de resolución junto con funciones de wavelet de mayor o igual resolución.

3. Cualquier función de escala de nivel j_0 se puede desarrollar como combinación de funciones de wavelet de todos los niveles de resolución inferior:

$$\mathbf{f}_n^{j_0}(x) = \sum_{j=-\infty}^{j_0-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n,m}^{j_0,j} \mathbf{y}_m^j(x) \quad (2-25)$$

4. Cualquier función $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ se puede expresar como suma de series convergentes de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{j_0} \mathbf{f}_n^{j_0}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^j \mathbf{y}_n^j(x) \quad (2-26)$$

donde, debido a la ortonormalidad de las funciones de escala y de wavelet, los coeficientes de los desarrollos se calculan como:

$$a_n^{j_0} = \langle f(x), \mathbf{f}_n^{j_0}(x) \rangle \quad (2-27.1)$$

$$b_n^j = \langle f(x), \mathbf{y}_n^j(x) \rangle \quad (2-27.2)$$

5. La transformada de Fourier de la función de escala es una función pasa-baja, mientras que la transformada de Fourier de la función de wavelet es una función pasa-banda. Esto implica que, en un desarrollo en multirresolución como el expresado en (2-26), las funciones de escala se pueden utilizar para representar el contenido de baja frecuencia de una señal, mientras que las funciones de wavelet representan el contenido de frecuencias superiores.
6. Para toda función de wavelet $\mathbf{y}(x)$, existe un número natural M tal que $\mathbf{y}(x)$ es ortogonal a todos los polinomios de grado $k \leq M - 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \mathbf{y}(x) dx = 0 \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2-28)$$

Se dice entonces que la función de wavelet $\mathbf{y}(x)$ posee M *momentos evanescentes* [23]. Esta propiedad es la responsable de la capacidad de los desarrollos en wavelets para representar las variaciones abruptas del campo electromagnético y almacenar esta información en los coeficientes de wavelet. Esto implica que, si desarrollamos un campo de la forma indicada en la expresión (2-26), utilizando a la vez funciones de escala y de wavelet, entonces los coeficientes de escala a serán más significativos que los coeficientes de wavelet b , a menos que el campo experimente variaciones abruptas. De esta forma se puede realizar un algoritmo adaptativo utilizando como criterio para justificar un aumento o disminución de la resolución el valor de los coeficientes de wavelet.

2.2.1.- Familia de wavelets de Daubechies

Existen diferentes wavelets que dan lugar a un análisis en multirresolución ortonormal, siendo las más utilizadas las wavelets de Meyer, de Battle-Lemarié y de Daubechies. Las dos primeras corresponden a funciones cuyo soporte no es compacto,

es decir, su dominio de existencia se extiende hasta el infinito. Esto hace que el número de coeficientes de escala y de wavelet utilizados en las ecuaciones de refinamiento (2-13) y (2-21) sea infinito. Sin embargo, ambas poseen la propiedad de un decaimiento exponencial fuera de cierto intervalo [4, 50, 55], lo que permite tomar un número finito de coeficientes para poder representarlas de forma bastante aproximada. Por el contrario, las wavelets de Daubechies presentan un soporte compacto, esto es, están definidas en un intervalo cerrado, de manera que sólo existe un número finito de coeficientes de escala y de wavelet en las ecuaciones (2-13) y (2-21). Por esta razón se ha decidido utilizar en este trabajo las funciones wavelet de Daubechies como base para el desarrollo de los campos de la forma indicada en (2-26).

Las wavelets de Daubechies están definidas en el intervalo $[0, 2M-1]$, donde M representa el número de momentos evanescentes definido en (2-28). Las principales propiedades de estas funciones, como pueden ser su continuidad, derivabilidad, simetría, etc., están relacionadas con este valor [23]. Por este motivo, las wavelets de Daubechies se clasifican de acuerdo con este número y se denotan como D_M , siendo la función de orden inferior la wavelet D_1 , también conocida como wavelet de Haar.

El soporte compacto de estas funciones implica que el número N de coeficientes de escala $L(n)$ y de wavelet $H(n)$ sea finito. Este número está relacionado con el número de momentos evanescentes M de la siguiente forma:

$$N = 2M \quad (2-29)$$

Además, la relación entre los coeficientes de escala y de wavelet resulta ser para este tipo de funciones la siguiente:

$$\mathbf{H}(n) = (-1)^n \mathbf{L}(N - 1 - n), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2-30)$$

En la figura 2.7 hemos representado diferentes funciones de escala y de wavelet de Daubechies para $M = 1, 2, 3$ y 4 . Se puede observar el intervalo de existencia de cada una y además se puede apreciar cómo la “suavidad” de las funciones va aumentando a

medida que se incrementa el valor de M , cambiando por lo tanto sus propiedades de continuidad, diferenciabilidad, etc. [23].

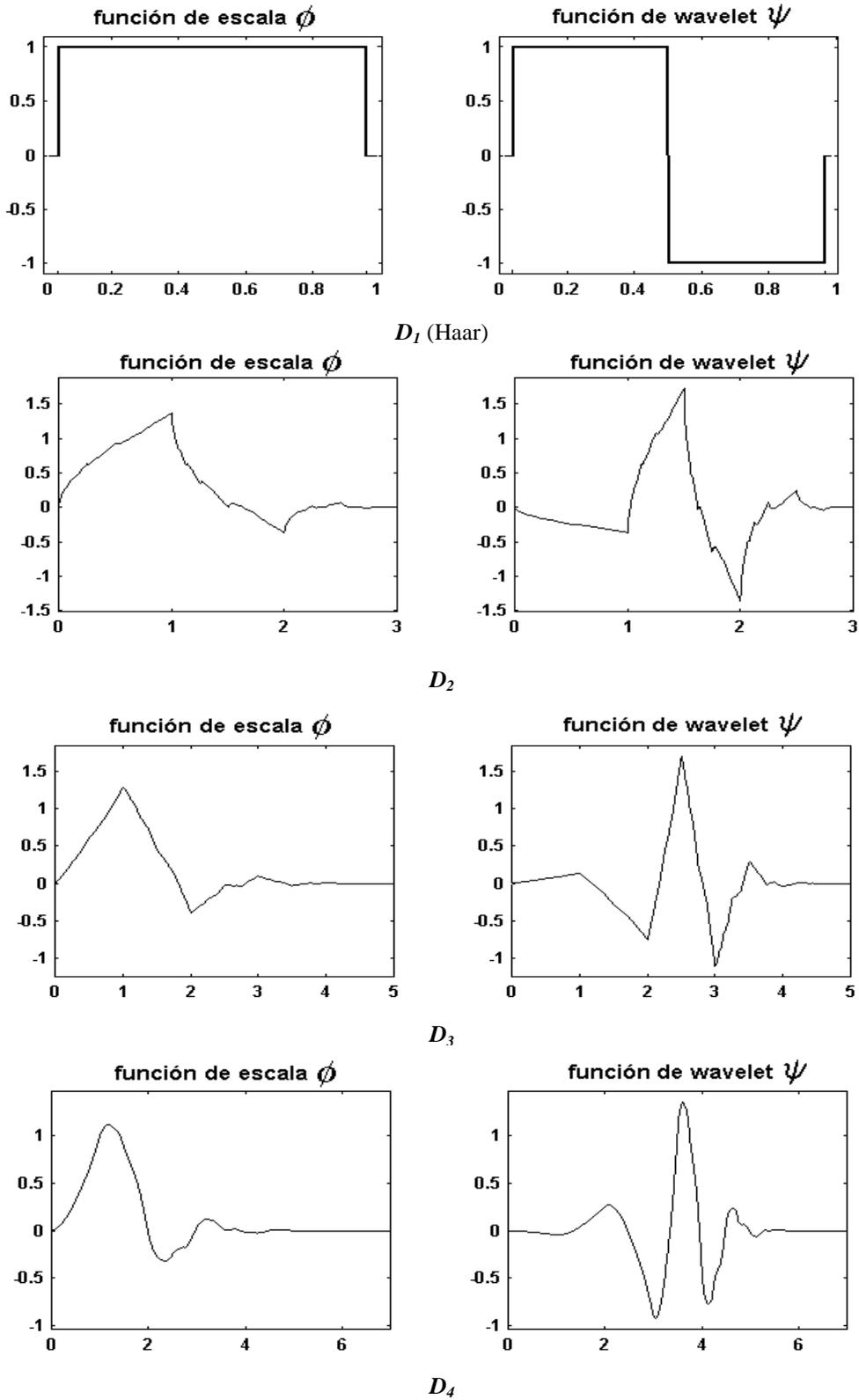


Figura 2.7.: Diferentes funciones de escala f y de wavelet y de Daubechies para $M = 1, 2, 3$ y 4 .

Dentro de las principales propiedades que poseen las funciones de escala y de wavelet están sus características espectrales, esto es, la transformada de Fourier de la función de escala tiene características de un filtro pasa-baja, mientras que la transformada de Fourier de la función de wavelet se asemeja a un filtro pasa-banda. Estas características se pueden observar en la figura 2.8, donde se ha realizado una transformada de Fourier de la función de escala y de wavelet D_{10} .

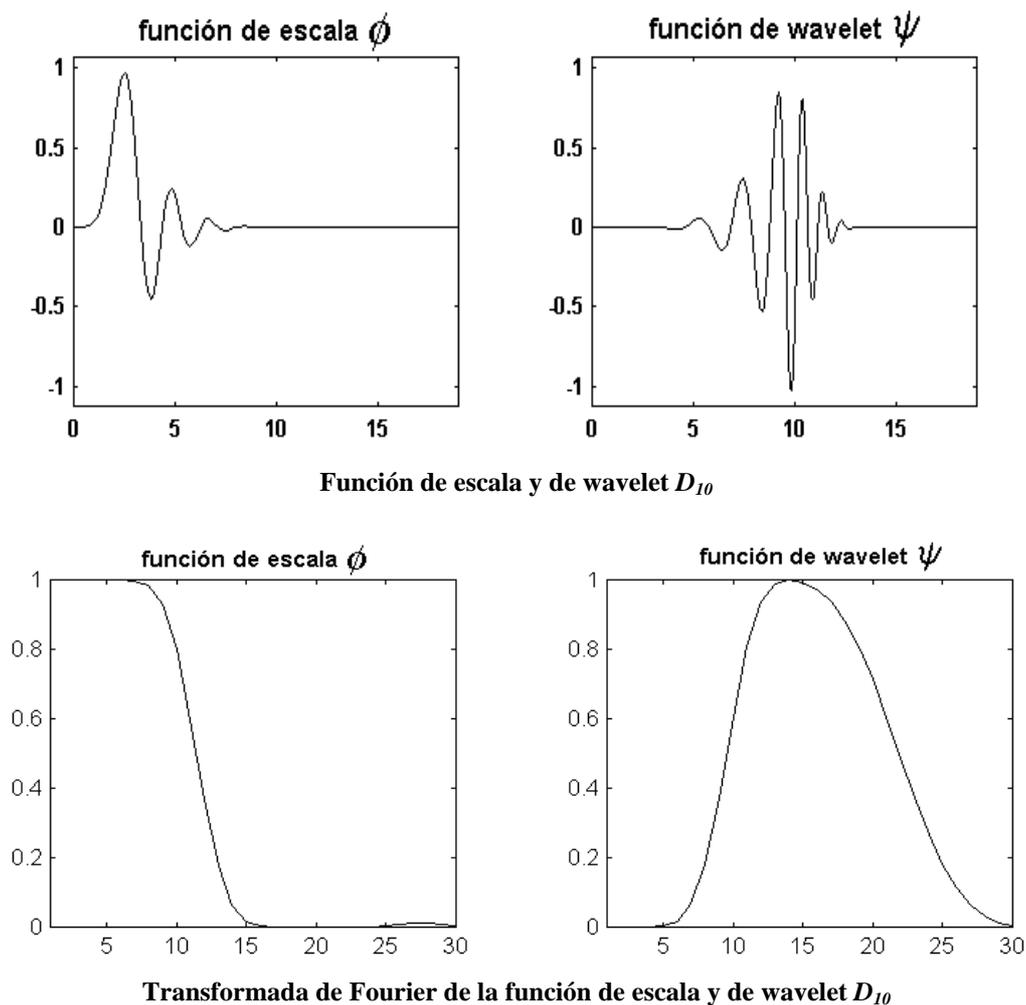
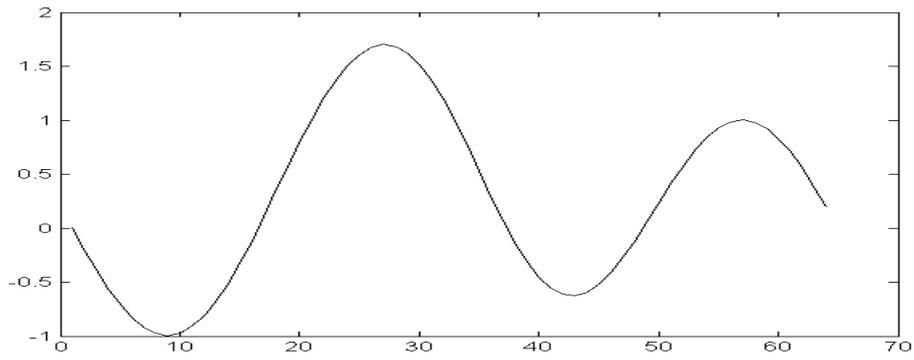


Figura 2.8.: Wavelets D_{10} y sus correspondientes espectros en frecuencia.

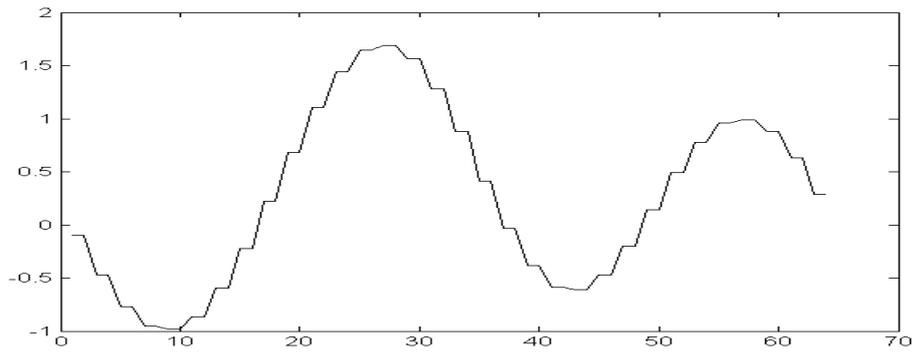
La propiedad expresada en la ecuación (2-28) estaba relacionada con la capacidad de los desarrollos en wavelets para representar las variaciones abruptas del campo electromagnético y almacenar esta información en los coeficientes de wavelet. Esto significa que el valor de M da una idea del grado de precisión obtenido al realizar la aproximación de una función utilizando únicamente funciones de escala, es decir, cuanto mayor sea M , mayor será la información almacenada en los coeficientes de escala y más pequeño el contenido de detalles almacenado en los coeficientes de wavelet. Esta propiedad la hemos reflejado en el ejemplo de la figura 2.9. En ella se ha considerado una función arbitraria $f(x)$ y se han realizado tres aproximaciones distintas utilizando tres funciones wavelet de Daubechies: D_1 , D_2 y D_3 . En esta figura se pueden comprobar claramente los tres grados de aproximación obtenidos. Para las funciones D_1 se tiene que $M = 1$, por lo que según la propiedad (2-28), las funciones de wavelet son ortogonales a los polinomios de orden $k = M - 1 = 0$, y la aproximación es equivalente a utilizar funciones escalón. Para las funciones D_2 tenemos $M = 2$ y por lo tanto las funciones de wavelet son ortogonales a los polinomios de orden $k = 1$, es decir, se tiene una aproximación lineal mucho más acertada que la primera. Para las funciones D_3 tenemos $M = 3$ y por lo tanto las funciones de wavelet son ortogonales a los polinomios de orden $k = 2$, lo que significa que la aproximación realizada utilizando funciones de escala es exacta hasta los términos de segundo orden. Comparando la figura 2.9.(a) y 2.9.(d) se puede apreciar la gran similitud que existe entre la función original $f(x)$ y su aproximación utilizando funciones D_3 .

2.3.- TRANSFORMADA DISCRETA EN WAVELETS (DWT)

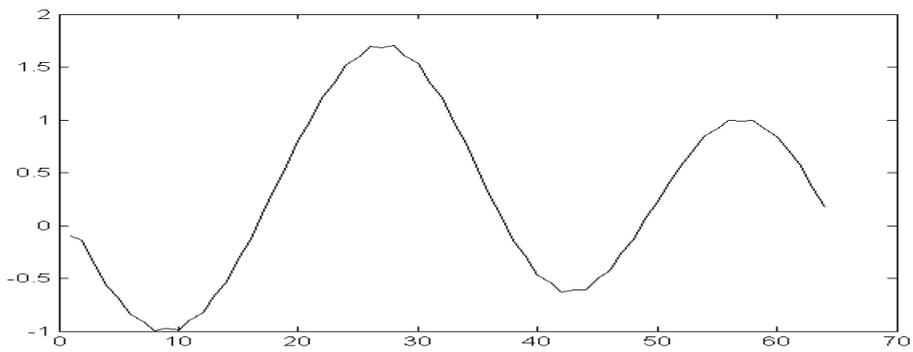
En la sección anterior se han descrito las dos ecuaciones de refinamiento correspondientes a la función de escala y a la función de wavelet. Estas ecuaciones nos van a permitir trabajar con las funciones de escala y de wavelet utilizando únicamente sus respectivos coeficientes $L(n)$ y $H(n)$. Con este fin, Mallat desarrolló un algoritmo, denominado *algoritmo piramidal* o *en cascada* [54], con el que podía obtener los coeficientes de escala y de wavelet de una función $f(x)$ en un nivel de resolución,



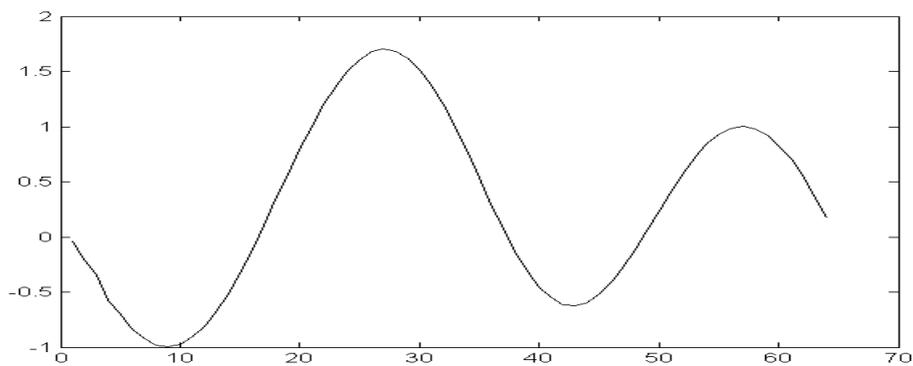
(a) Función original $f(x)$



(b) Aproximación utilizando wavelets de Haar (D_1)



(c) Aproximación utilizando wavelets D_2



(d) Aproximación utilizando wavelets D_3

Figura 2.9.: Aproximación de una función $f(x)$ utilizando tres funciones wavelet de Daubechies distintas: D_1 , D_2 y D_3 .

mediante sucesivas convoluciones entre los coeficientes $L(n)$ y $H(n)$ y los coeficientes de escala de un nivel superior. Al conjunto de coeficientes resultante de este proceso se le conoce como *coeficientes de la Transformada Discreta en Wavelets (DWT)* de la función $f(x)$.

Vamos ahora a describir los algoritmos que dan lugar a la obtención de la *DWT* de una función. Como se vio en la sección anterior, de acuerdo con las propiedades (2-25) y (2-26), una función $f(x)$ se puede representar mediante un desarrollo en serie, compuesto por infinitos términos de funciones de wavelet, de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^j \mathbf{y}_n^j(x) \quad (2-31)$$

El sumatorio anterior se puede truncar a partir de cierto término, obteniendo una aproximación de la función $f(x)$. Así, podemos llamar $f^J(x)$ a la aproximación de nivel J que se obtiene de considerar todas las funciones de wavelet hasta la resolución $J-1$, o de acuerdo con (2-25), utilizando como base del desarrollo funciones de escala de nivel J :

$$f(x) \approx f^J(x) = \sum_{j=-\infty}^{J-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^j \mathbf{y}_n^j(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^J \mathbf{f}_n^J(x) \quad (2-32)$$

Esta aproximación será más ajustada, cuanto mayor sea el orden de resolución de la misma. Entonces, una aproximación de nivel $J+1$ de la función $f(x)$ se podrá obtener de (2-32) añadiendo más términos de wavelet, o bien, de acuerdo con (2-18.2), utilizando funciones de escala de orden superior:

$$f^{J+1}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^J \mathbf{f}_n^J(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^J \mathbf{y}_n^J(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{J+1} \mathbf{f}_n^{J+1}(x) \quad (2-33)$$

Esto último pone de manifiesto que, si disponemos de los coeficientes $\{a^J\}$ pertenecientes a la aproximación $f^J(x)$ de una función, podremos obtener los coeficientes $\{a^j\}$ y $\{b^j\}$ correspondientes al desarrollo en términos de menor resolución ($j < J$). Este proceso de obtención de los términos de menor resolución a partir de los

términos de mayor resolución recibe el nombre de *Transformada Discreta en Wavelets*. Utilizando las ecuaciones de refinamiento (2-13) y (2-21) se llega a que la relación entre los coeficientes de escala de orden superior y los coeficientes de escala y de wavelet de orden inferior es la siguiente [23]:

$$a^{J-1}(k) = \sum_n \mathbf{L}(n-2k) a^J(n) \quad (2-34.1)$$

$$b^{J-1}(k) = \sum_n \mathbf{H}(n-2k) a^J(n) \quad (2-34.2)$$

Como es lógico esperar, la reconstrucción de los coeficientes de la función original en la escala más fina J se puede llevar a cabo a partir de los coeficientes de escala y de wavelet de una escala más gruesa $J-1$. Este proceso recibe el nombre de *Transformada Inversa en Wavelets (IDWT)*. Del mismo modo en que a partir de las ecuaciones de refinamiento se obtienen las ecuaciones (2-34) para la descomposición, se llega a la expresión siguiente para la reconstrucción [23]:

$$a^J(n) = \sum_k a^{J-1}(k) \mathbf{L}(n-2k) + \sum_k b^{J-1}(k) \mathbf{H}(n-2k) \quad (2-35)$$

Estas operaciones descritas en las ecuaciones (2-34) y (2-35) pueden ser interpretadas como *convoluciones*, pero van asociadas, respectivamente, a una operación adicional de “diezmado” o “down_samplng”, o bien a una operación de “estiramiento” o “up_samplng”. La operación de “diezmado” o “down_samplng” consiste en mantener únicamente los elementos pares del vector de la salida (figura 2.10), mientras que la operación de “estiramiento” o “up_samplng” consiste en insertar ceros entre los valores del vector de entrada (figura 2.11).

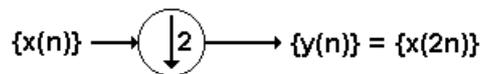


Figura 2.10.: Operación de “diezmado” o “down_samplng”.

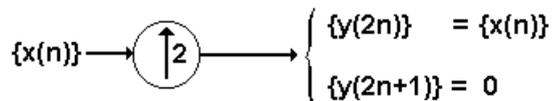


Figura 2.11.: Operación de “estiramiento” o “up_samplng”.

Vamos a ver, entonces, que las operaciones descritas en (2-34) representan una operación de convolución seguida de una operación de “diezmado”, y que se pueden expresar del siguiente modo:

$$a^{J-1}(k) = \{\mathbf{L}'(k) * a^J(k)\} \downarrow 2 \quad (2-36.1)$$

$$b^{J-1}(k) = \{\mathbf{H}'(k) * a^J(k)\} \downarrow 2 \quad (2-36.2)$$

donde el símbolo $\downarrow 2$ representa la operación de “diezmado”, y se representa esquemáticamente como se indica en la figura 2.12.

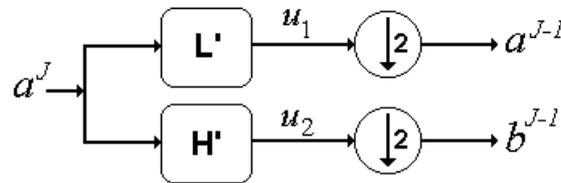


Figura 2.12.: Descomposición de los coeficientes de escala de nivel J en los coeficientes de escala y de wavelet de nivel $J-1$.

De acuerdo con el diagrama de la figura 2.12, la salida intermedia $u_1(k)$ es la convolución entre los coeficientes $a^J(k)$ y el filtro $\mathbf{L}'(k)$, y está dada por:

$$u_1(k) = \sum_n a^J(n) \mathbf{L}'(k-n)$$

que tras el proceso de “diezmado” se convierte en:

$$a^{J-1}(k) = u_1(2k) = \sum_n a^J(n) \mathbf{L}'(2k-n)$$

y que es, precisamente, la expresión (2-34.1) con $\mathbf{L}'(k) = \mathbf{L}(-k)$, donde los coeficientes de $\mathbf{L}(-k)$ corresponden a los coeficientes de $\mathbf{L}(k)$ invirtiendo su orden. Teniendo en cuenta que los “filtros” $\mathbf{L}(n)$ y $\mathbf{H}(n)$ son finitos y están formados por un número N de coeficientes, los “filtros” $\mathbf{L}'(n)$ y $\mathbf{H}'(n)$ se pueden expresar en función de $\mathbf{L}(n)$ y $\mathbf{H}(n)$ de la siguiente forma [11]:

$$\mathbf{L}'(n) = \mathbf{L}(N-1-n) \quad (2-37.1)$$

$$\mathbf{H}'(n) = \mathbf{H}(N-1-n) \quad (2-37.2)$$

Así, si por ejemplo tenemos $N = 4$, los coeficientes de $\mathbf{L}'(n)$ serán $\mathbf{L}'(0)=\mathbf{L}(3)$, $\mathbf{L}'(1)=\mathbf{L}(2)$, $\mathbf{L}'(2)=\mathbf{L}(1)$, y $\mathbf{L}'(3)=\mathbf{L}(0)$.

Por otro lado, vamos a ver que los dos sumatorios que aparecen en la expresión (2-35) representan cada uno una convolución, pero en este caso lo que sucede primero es una operación de “estiramiento” o “up_sampling”, y que el resultado se convoluciona con los coeficientes del “filtro” correspondiente. Esta otra operación se expresa de la siguiente forma:

$$a^J(n) = \{\mathbf{L}(n) * [a^{J-1}(n)] \uparrow 2\} + \{\mathbf{H}(n) * [b^{J-1}(n)] \uparrow 2\} \quad (2-38)$$

donde el símbolo $\uparrow 2$ representa la operación de “estiramiento” previa a la convolución, y que se puede representar como se indica en la figura 2.13.

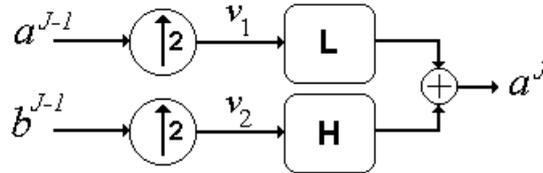


Figura 2.13.: Reconstrucción de los coeficientes de escala de nivel J a partir de los coeficientes de escala y de wavelet de nivel $J-1$.

En este caso, las dos entradas intermedias $v_1(n)$ y $v_2(n)$ se convolucionan con los filtros $\mathbf{L}(n)$ y $\mathbf{H}(n)$ respectivamente, es decir,

$$a^J(n) = \sum_l v_1(l) \mathbf{L}(n-l) + \sum_l v_2(l) \mathbf{H}(n-l)$$

donde v_1 y v_2 son los valores de a^{J-1} y b^{J-1} , respectivamente, después de duplicarlos, insertando nuevos valores en las posiciones intermedias, es decir, $v_1(l) = a^{J-1}(l/2)$ y $v_2(l)$

$= b^{J-1}(l/2)$ para cada l par, por ser la salida del proceso de “estiramiento”. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} a^J(n) &= \sum_{l \text{ par}} a^{J-1}(l/2)\mathbf{L}(n-l) + \sum_{l \text{ par}} b^{J-1}(l/2)\mathbf{H}(n-l) = \\ &= \sum_k a^{J-1}(k)\mathbf{L}(n-2k) + \sum_k b^{J-1}(k)\mathbf{H}(n-2k) \end{aligned}$$

que es, precisamente, la expresión (2-35).

Una forma habitual de realizar estas operaciones de convolución consiste en considerar la señal de entrada como periódica, para lo cual se debe replicar la señal en los contornos consiguiendo una secuencia de entrada periódica de periodo N , como se muestra en la figura 2.14. Esto se conoce como transformada *periódica* o *circular* [46, 63, 70].

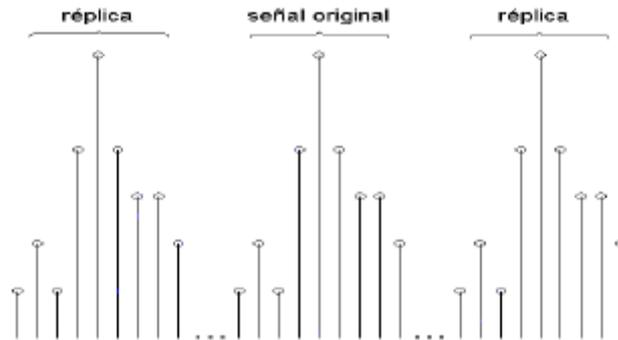


Figura 2.14.: Replicado periódico de una señal.

De esta manera se consigue que, si inicialmente hay N coeficientes a^J , el resultado obtenido tras realizar las operaciones de convolución indicadas en (2-36) con los “filtros” \mathbf{L} y \mathbf{H} , y después de la operación de “diezmado”, sean dos secuencias periódicas de coeficientes a^{J-1} y coeficientes b^{J-1} con periodo $N/2$. Entonces, sólo se necesita guardar $N/2$ coeficientes a^{J-1} y $N/2$ coeficientes b^{J-1} , manteniéndose el número total de coeficientes ($N = N/2 + N/2$). Si volvemos a aplicar el mismo proceso a los coeficientes a^{J-1} , obtendremos $N/4$ coeficientes a^{J-2} y $N/4$ coeficientes b^{J-2} . Si $N=2^J$, este proceso podría repetirse J veces. Para el proceso inverso, si disponemos de N coeficientes a^J y N coeficientes b^J , para recomponer el nivel superior, replicamos dichos

coeficientes antes de realizar el “up-sampling” y después de la convolución podemos obtener los $2N$ coeficientes a^{J+1} .

En la figura 2.15 está representada la posición relativa de los coeficientes de escala pertenecientes a cada nivel de resolución. Cada coeficiente de escala representa, o da una idea, del valor del campo dentro del intervalo al que pertenece. En dicha figura se puede apreciar la separación entre cada coeficiente del mismo nivel de resolución así como la posición que cada uno de ellos ocupa en el espacio dentro del nivel de resolución que representa. Vemos que, a medida que aumenta la resolución, la separación entre coeficientes disminuye. Si la separación entre los coeficientes de resolución J es Δ , la distancia entre los coeficientes de nivel $J+3$ será ocho veces más pequeña, esto es, $\Delta/2^3$. Así, cuanto mayor es el nivel de resolución, más coeficientes tenemos, que representan el campo en puntos más cercanos unos de otros.

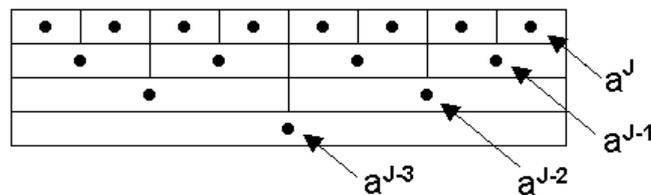


Figura 2.15.: Situación espacial relativa de los coeficientes.

En la ecuación (2-27.1) se vio que los coeficientes a^J correspondientes a la aproximación de nivel J de una función $f(x)$ se obtenían a partir del producto interior entre la función $f(x)$ y la función de escala de resolución J , $\mathbf{f}^J(x)$:

$$a_n^J = \langle f(x), \mathbf{f}_n^J(x) \rangle \quad (2-27.1)$$

Si el nivel de resolución J es suficientemente grande, la función de escala se puede aproximar como si actuara como una función delta, de forma que el producto (2-27.1) es simplemente un muestreo de la función $f(x)$ [11]:

$$a_n^J = \langle f(x), \mathbf{f}_n^J(x) \rangle \approx 2^{-J/2} f(x - 2^{-J}(m_1 + n)) \quad (2-39)$$

donde

$$m_l = \int x^l f(x) \cdot dx \quad (2-40)$$

se define como “momento de orden l de la función de escala”. Esta aproximación es especialmente buena si los momentos de la función de escala $m(l)$ son cero o pequeños como se ve en la ecuación (2-39).

Con todo esto, el análisis en multirresolución, visto desde la perspectiva de la Transformada Discreta en Wavelets, se puede interpretar como un proceso de filtrado digital en el que una señal se descompone en dos partes: una que contiene las bajas frecuencias y que viene dada por las funciones de escala (\mathbf{f}), y otra que contiene las altas frecuencias y que viene dada por las funciones de wavelet (\mathbf{y}). Los coeficientes a^j y b^j de la representación en multirresolución se obtienen a partir de sucesivas etapas de filtrado, que contienen cada una un filtro pasa-baja y un filtro pasa-alta descritos por los coeficientes de su respuesta impulsional $L'(n)$ y $H'(n)$. El proceso inverso de reconstrucción está formado igualmente por sucesivas etapas de filtrado donde los filtros están dados por los coeficientes $L(n)$ y $H(n)$.

Todo este proceso de descomposición y de reconstrucción se encuentra representado en la figura 2.16.

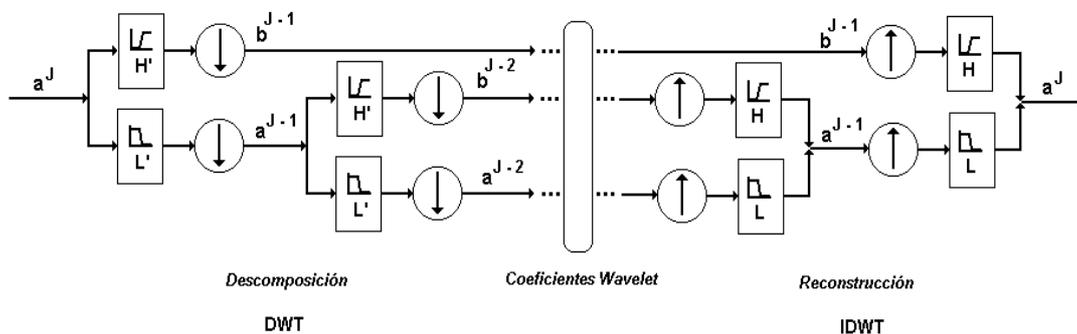


Figura 2.16.: Representación de la Transformada Directa en Wavelets y de la Transformada Inversa en Wavelets.

En la tabla I están representados los valores de los coeficientes de los filtros de reconstrucción pasa-baja $L(n)$ y pasa-alta $H(n)$ para diferentes wavelets de Daubechies. Como ya se ha mencionado anteriormente, las wavelets D_I también se denominan *wavelets de Haar*.

Tabla I						
Coeficientes de los filtros pasa-baja [f] y pasa-alta [y]						
	D_1		D_2		D_3	
n	$L(n)$	$H(n)$	$L(n)$	$H(n)$	$L(n)$	$H(n)$
0	0,70710678	0,70710678	0,48296291	-0,12940952	0,33267055	0,03522629
1	0,70710678	-0,70710678	0,83651630	-0,22414386	0,80689150	0,08544127
2			0,22414386	0,83651630	0,45987750	-0,13501102
3			-0,12940952	-0,48296291	-0,13501102	-0,45987750
4					-0,08544127	0,80689150
5					0,03522629	-0,33267055
	D_4		D_5		D_6	
n	$L(n)$	$H(n)$	$L(n)$	$H(n)$	$L(n)$	$H(n)$
0	0,23037781	-0,01059740	0,16010240	0,00333573	0,11154074	-0,00107730
1	0,71484657	-0,03288301	0,60382927	0,01258075	0,49462389	-0,00477726
2	0,63088077	0,03084138	0,72430853	-0,00624149	0,75113391	0,00055384
3	-0,02798377	0,18703481	0,13842815	-0,07757149	0,31525035	0,03158220
4	-0,18703481	-0,02798377	-0,24229489	-0,03224487	-0,22626469	0,02752287
5	0,03084138	-0,63088077	-0,03224487	0,24229489	-0,12976687	-0,09750161
6	0,03288301	0,71484657	0,07757149	0,13842815	0,09750161	0,12976687
7	-0,01059740	-0,23037781	-0,00624149	-0,72430853	0,02752287	0,22626469
8			-0,01258075	0,60382927	-0,03158220	0,31525035
9			0,00333573	-0,16010240	0,00055384	-0,75113391
10					0,00477726	0,49462389
11					-0,00107730	-0,11154074

2.3.1.- Transformada Discreta en Wavelets en dos dimensiones

El proceso que acabamos de estudiar se puede generalizar para funciones definidas en varias dimensiones espaciales, para lo cual se desarrollan utilizando un conjunto de funciones de escala y de wavelet $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} = x, y$.

Consideremos una función $f(x,y)$ perteneciente al espacio de funciones de cuadrado integrable y de variable real $L^2(\mathbf{R}^2)$. Una aproximación de dicha función consistirá en la proyección sobre el subespacio S^0 definido como un producto tensorial de la siguiente forma [54]:

$$S^0 = S_{1D}^0 \otimes S_{1D}^0 \quad (2-41)$$

donde S_{1D}^0 representa el subespacio de $L^2(\mathbf{R})$ definido en la sección anterior. De esta forma, la aproximación de orden $j = 0$ de la función $f(x,y)$, y que llamaremos $f^0(x,y)$, se obtendrá como desarrollo de las funciones de escala bidimensionales

$$s_{ff}^0(x, y) = \mathbf{f}^0(x) \cdot \mathbf{f}^0(y) \quad (2-42)$$

donde cada $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se corresponde con la función de escala de una variable definida anteriormente:

$$f^0(x, y) = \sum_k \sum_l a_{k,l}^0 \mathbf{f}_k^0(x) \mathbf{f}_l^0(y) \quad (2-43)$$

y donde los coeficientes $a_{k,l}^0$ se obtienen a partir del producto interior

$$a_{k,l}^0 = \langle f(x, y), \mathbf{f}_k^0(x) \mathbf{f}_l^0(y) \rangle \quad (2-44)$$

Si queremos aumentar la resolución de esta aproximación podemos utilizar para el desarrollo funciones de escala de orden superior, o bien añadir funciones de wavelet. Como ahora la función posee dos variables, este incremento de resolución podría realizarse en cualquiera de las dos. Si aumentamos la resolución en las dos variables

simultáneamente, de acuerdo con la definición (2-41) y con la propiedad (2-18.2), el subespacio S^l será

$$S^1 = S_{1D}^1 \otimes S_{1D}^1 = (S_{1D}^0 \oplus W_{1D}^0) \otimes (S_{1D}^0 \oplus W_{1D}^0) \quad (2-45)$$

Una base de ese subespacio estará formada por la combinación de las bases de los subespacios unidimensionales ($S_{1D}^0(x)$, $S_{1D}^0(y)$, $W_{1D}^0(x)$, $W_{1D}^0(y)$...) que lo forman, como se indica en la ecuación 2-45. Aplicando la propiedad distributiva a ese resultado, obtenemos que las funciones que componen la base que estamos buscando pueden ser

$$s_{fy}^0(x, y) = \mathbf{f}^0(x) \cdot \mathbf{y}^0(y) \quad (2-46.1)$$

$$s_{yf}^0(x, y) = \mathbf{y}^0(x) \cdot \mathbf{f}^0(y) \quad (2-46.2)$$

$$s_{yy}^0(x, y) = \mathbf{y}^0(x) \cdot \mathbf{y}^0(y) \quad (2-46.3)$$

junto con la función definida en (2-42) [54]. Entonces, la aproximación de orden $j = 1$, $f^1(x, y)$, se puede expresar como una combinación lineal de estas funciones base, es decir:

$$\begin{aligned} f^1(x, y) &= \sum_k \sum_l a_{k,l}^1 s_{ff}^1(x-k, y-l) = \\ &= \sum_k \sum_l a_{k,l}^0 s_{ff}^0(x-k, y-l) + \\ &\quad + \sum_k \sum_l b_{k,l}^0 s_{fy}^0(x-k, y-l) + \\ &\quad + \sum_k \sum_l c_{k,l}^0 s_{yf}^0(x-k, y-l) + \\ &\quad + \sum_k \sum_l d_{k,l}^0 s_{yy}^0(x-k, y-l) \end{aligned} \quad (2-47)$$

o bien:

$$\begin{aligned}
f^1(x, y) &= \sum_k \sum_l a_{k,l}^1 \mathbf{f}_k^1(x) \mathbf{f}_l^1(y) = \\
&= \sum_k \sum_l a_{k,l}^0 \mathbf{f}_k^0(x) \mathbf{f}_l^0(y) + \\
&+ \sum_k \sum_l b_{k,l}^0 \mathbf{f}_k^0(x) \mathbf{y}_l^0(y) + \\
&+ \sum_k \sum_l c_{k,l}^0 \mathbf{y}_k^0(x) \mathbf{f}_l^0(y) + \\
&+ \sum_k \sum_l d_{k,l}^0 \mathbf{y}_k^0(x) \mathbf{y}_l^0(y)
\end{aligned} \tag{2-48}$$

En general, cualquier función $f(x, y) \in L^2(\mathbf{R}^2)$ se puede expresar como suma de series convergentes de la forma:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \sum_k \sum_l a_{k,l}^{j_0} \mathbf{f}_k^{j_0}(x) \mathbf{f}_l^{j_0}(y) + \\
&+ \sum_{p=j_0}^{\infty} \sum_{q=j_0}^{\infty} \sum_k \sum_l b_{k,l}^{p,q} \mathbf{f}_k^p(x) \mathbf{y}_l^q(y) + \\
&+ \sum_{p=j_0}^{\infty} \sum_{q=j_0}^{\infty} \sum_k \sum_l c_{k,l}^{p,q} \mathbf{y}_k^p(x) \mathbf{f}_l^q(y) + \\
&+ \sum_{p=j_0}^{\infty} \sum_{q=j_0}^{\infty} \sum_k \sum_l d_{k,l}^{p,q} \mathbf{y}_k^p(x) \mathbf{y}_l^q(y)
\end{aligned} \tag{2-49}$$

El algoritmo correspondiente a la *Transformada Discreta en Wavelets en 2D* (DWT_{2D}) se obtiene a partir de una generalización del desarrollado en 1D. El procedimiento a seguir es el siguiente: sobre los coeficientes de escala de nivel superior, distribuidos en una matriz (por ejemplo, $M \times N$) como la indicada en la figura 2.17, se aplica la DWT_{1D} sobre las filas, obteniendo dos matrices $M \times N/2$, y sobre las columnas de estas dos matrices se vuelve a aplicar la DWT_{1D} , dando como resultado cuatro matrices de dimensiones $M/2 \times N/2$. Este proceso de descomposición lo tenemos representado en la figura 2.18 [54]. El proceso inverso nos permitiría obtener la función original a partir de estos coeficientes.

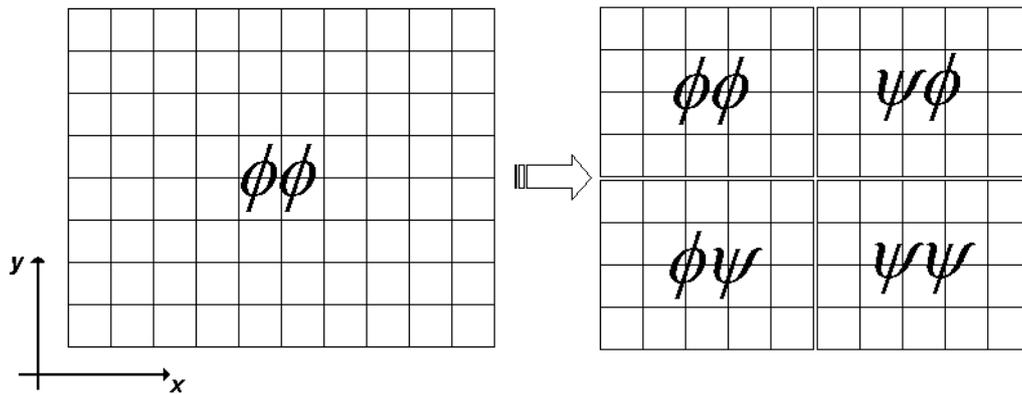


Figura 2.17.: Organización de los coeficientes tras un nivel de descomposición.

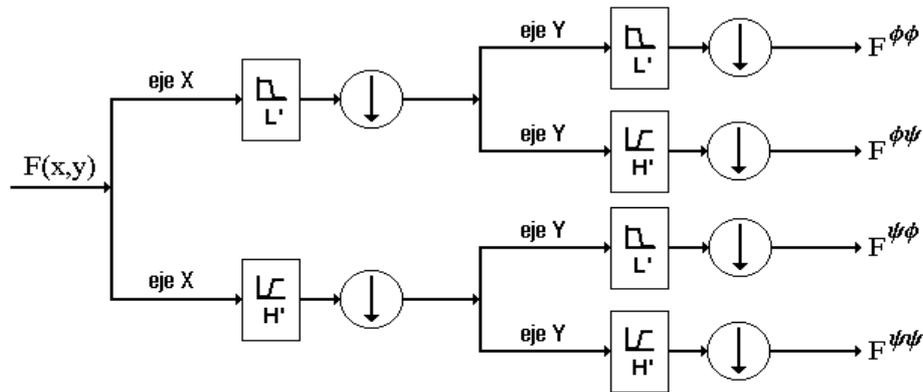


Figura 2.18.: Representación de la Transformada en Wavelets en 2 dimensiones.

La distribución espacial de los coeficientes de escala para dos niveles de resolución consecutivos se encuentra representada en la figura 2.19. Los coeficientes de escala del nivel inferior a^{J-1} representan el valor del campo dentro del intervalo rectangular al que pertenecen. Al aumentar la resolución en las dos direcciones del espacio, cada intervalo se divide en cuatro subintervalos de manera que se obtienen más coeficientes a^J situados en posiciones más próximas unos de otros (la distancia entre cada punto se ha reducido a la mitad en las dos coordenadas).

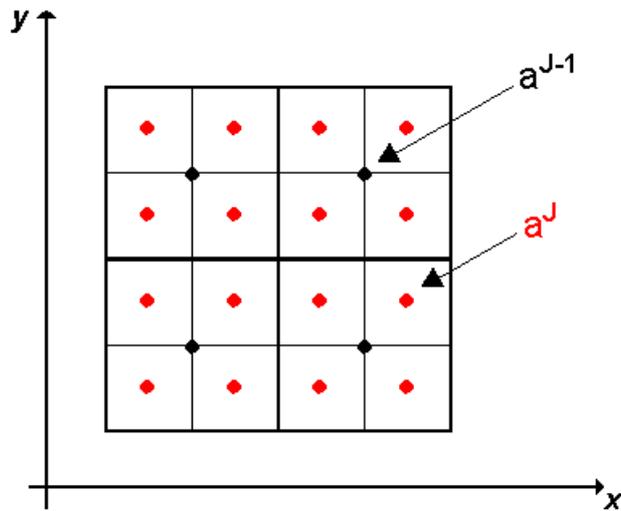


Figura 2.19.: Situación relativa de los coeficientes de escala entre dos niveles consecutivos.

En la figura 2.20 se han representado las funciones bidimensionales de escala y wavelet D_4 para el nivel de resolución $j = 0$. Estas funciones se construyen a partir de las funciones D_4 definidas en una dimensión, y por lo tanto su dominio de existencia será el intervalo $[0, 7] \times [0, 7]$.

2.3.2.- Transformada Discreta en Wavelets en tres dimensiones

De manera similar a la operación realizada en 2D, la Transformada Discreta en Wavelets en 3D consiste en desarrollar una función de tres variables $f(x,y,z)$ en términos de funciones de escala y de wavelet, construidas a partir de las funciones de escala y de wavelet unidimensionales. Una aproximación de $f(x,y,z)$ consistirá en la proyección sobre el subespacio S^0 definido de la siguiente forma:

$$S^0 = S_{1D}^0 \otimes S_{1D}^0 \otimes S_{1D}^0 \quad (2-50)$$

donde S_{1D}^0 representa el subespacio de $L^2(\mathbf{R})$ estudiado anteriormente.

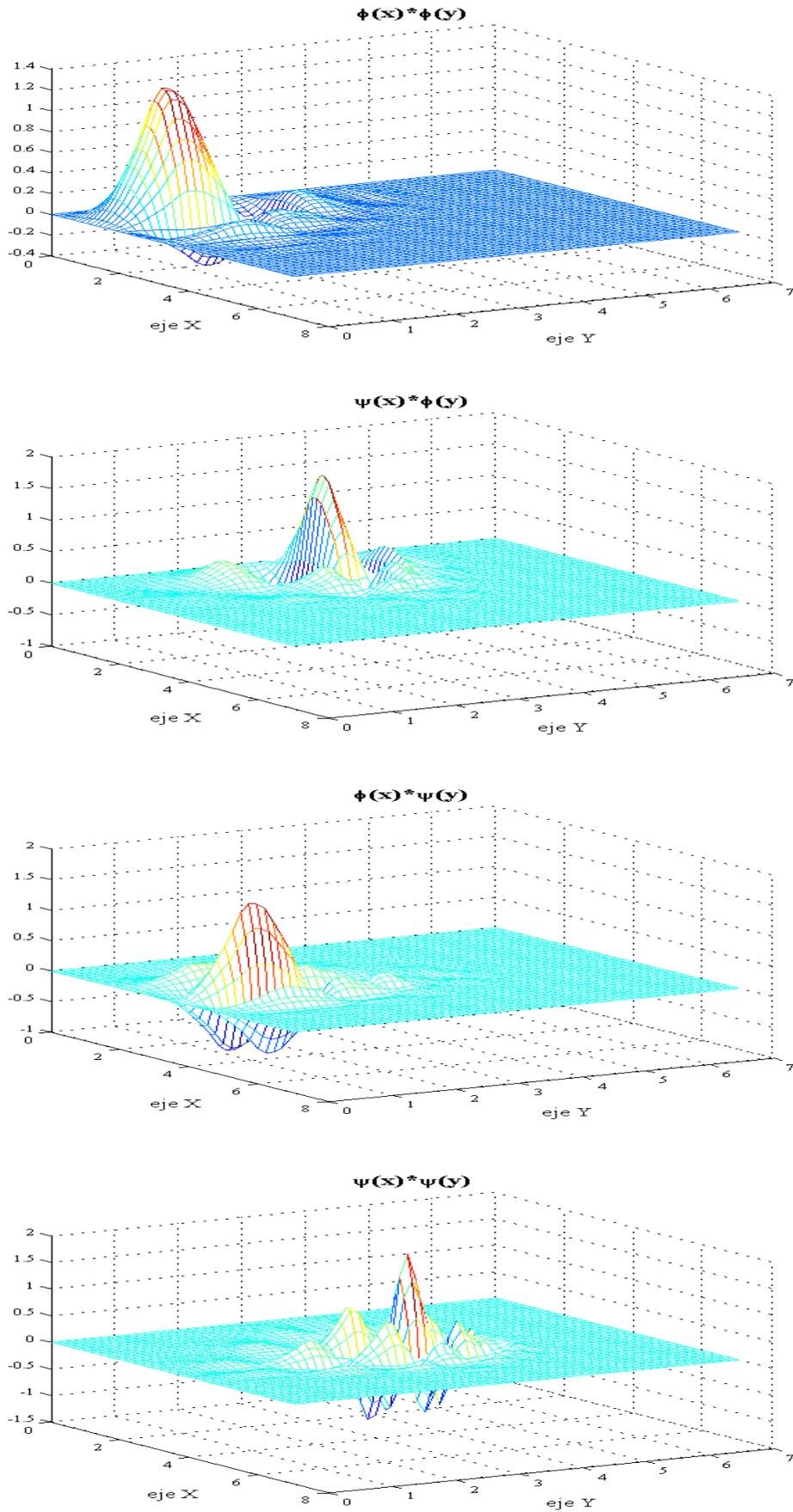


Figura 2.20.: Funciones de escala y de wavelet D_4 en dos dimensiones.

La base de este subespacio S^0 estará formada por las funciones de escala correspondientes a los tres ejes de coordenadas, es decir:

$$s_{fff}^0(x, y, z) = \mathbf{f}^0(x) \cdot \mathbf{f}^0(y) \cdot \mathbf{f}^0(z) \quad (2-51)$$

De esta forma, la aproximación de orden $j = 0$ de la función $f(x, y, z)$ consistirá en un desarrollo en serie utilizando como funciones base las funciones de escala s_{fff}^0 :

$$f^0(x, y, z) = \sum_k \sum_l \sum_m a_{k,l,m}^0 \mathbf{f}_k^0(x) \mathbf{f}_l^0(y) \mathbf{f}_m^0(z) \quad (2-52)$$

Si queremos aumentar la resolución a un orden superior, podemos utilizar funciones de escala de orden superior, o bien añadir funciones de wavelet al desarrollo. Como la función a representar depende de tres variables, este aumento de resolución puede realizarse, en principio, en cualquiera de ellas. Si aumentamos la resolución en las tres variables, teniendo en cuenta la definición (2-50) y la propiedad (2-18.2), el subespacio de nivel superior será el siguiente:

$$S^1 = S_{1D}^1 \otimes S_{1D}^1 \otimes S_{1D}^1 = (S_{1D}^0 \oplus W_{1D}^0) \otimes (S_{1D}^0 \oplus W_{1D}^0) \otimes (S_{1D}^0 \oplus W_{1D}^0) \quad (2-53)$$

De la misma manera que en dos dimensiones, la base de ese subespacio estará formada por una combinación de las bases (funciones de escala y de wavelet) de cada uno de los subespacios unidimensionales, que se combinan en la ecuación 2-53. Una aplicación de la propiedad distributiva a esa combinación nos dará que esa base está compuesta por las funciones::

$$s_{ffy}^0(x, y, z) = \mathbf{f}^0(x) \cdot \mathbf{f}^0(y) \cdot \mathbf{y}^0(z) \quad (2-54.1)$$

$$s_{fyf}^0(x, y, z) = \mathbf{f}^0(x) \cdot \mathbf{y}^0(y) \cdot \mathbf{f}^0(z) \quad (2-54.2)$$

$$s_{fyy}^0(x, y, z) = \mathbf{f}^0(x) \cdot \mathbf{y}^0(y) \cdot \mathbf{y}^0(z) \quad (2-54.3)$$

$$s_{yff}^0(x, y, z) = \mathbf{y}^0(x) \cdot \mathbf{f}^0(y) \cdot \mathbf{f}^0(z) \quad (2-54.4)$$

$$s_{yfy}^0(x, y, z) = \mathbf{y}^0(x) \cdot \mathbf{f}^0(y) \cdot \mathbf{y}^0(z) \quad (2-54.5)$$

$$s_{yyf}^0(x, y, z) = \mathbf{y}^0(x) \cdot \mathbf{y}^0(y) \cdot \mathbf{f}^0(z) \quad (2-54.6)$$

$$s_{yyy}^0(x, y, z) = \mathbf{y}^0(x) \cdot \mathbf{y}^0(y) \cdot \mathbf{y}^0(z) \quad (2-54.7)$$

más la función (2-51). La aproximación de nivel $j=1$ de $f(x, y, z)$, $f^1(x, y, z)$, en función de esta base, vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f^1(x, y, z) &= \sum_k \sum_l \sum_m a_{k,l,m}^1 \mathbf{f}_k^1(x) \mathbf{f}_l^1(y) \mathbf{f}_m^1(z) = \\ &= \sum_k \sum_l \sum_m a_{k,l,m}^0 \mathbf{f}_k^0(x) \mathbf{f}_l^0(y) \mathbf{f}_m^0(z) + \\ &+ \sum_k \sum_l \sum_m b_{k,l,m}^0 \mathbf{f}_k^0(x) \mathbf{f}_l^0(y) \mathbf{y}_m^0(z) + \\ &+ \sum_k \sum_l \sum_m c_{k,l,m}^0 \mathbf{f}_k^0(x) \mathbf{y}_l^0(y) \mathbf{f}_m^0(z) + \\ &+ \sum_k \sum_l \sum_m d_{k,l,m}^0 \mathbf{f}_k^0(x) \mathbf{y}_l^0(y) \mathbf{y}_m^0(z) + \\ &+ \sum_k \sum_l \sum_m e_{k,l,m}^0 \mathbf{y}_k^0(x) \mathbf{f}_l^0(y) \mathbf{f}_m^0(z) + \\ &+ \sum_k \sum_l \sum_m f_{k,l,m}^0 \mathbf{y}_k^0(x) \mathbf{f}_l^0(y) \mathbf{y}_m^0(z) + \\ &+ \sum_k \sum_l \sum_m g_{k,l,m}^0 \mathbf{y}_k^0(x) \mathbf{y}_l^0(y) \mathbf{f}_m^0(z) + \\ &+ \sum_k \sum_l \sum_m h_{k,l,m}^0 \mathbf{y}_k^0(x) \mathbf{y}_l^0(y) \mathbf{y}_m^0(z) + \end{aligned} \quad (2-55)$$

El algoritmo que da lugar a la *Transformada Discreta en Wavelets en 3D* (DWT_{3D}) sigue la misma pauta que el desarrollado en 2D. Ahora, para obtener los coeficientes de escala y de wavelet de un nivel inferior a partir de los coeficientes de escala del nivel superior, aplicamos de forma sucesiva los algoritmos correspondientes a la DWT en 1D en las tres direcciones del espacio. En la figura 2.21 está representado de forma esquemática este proceso de obtención de los coeficientes del desarrollo en escala y wavelets para una función $F(x, y, z)$. El proceso inverso nos permitiría obtener la función original a partir de dichos coeficientes.

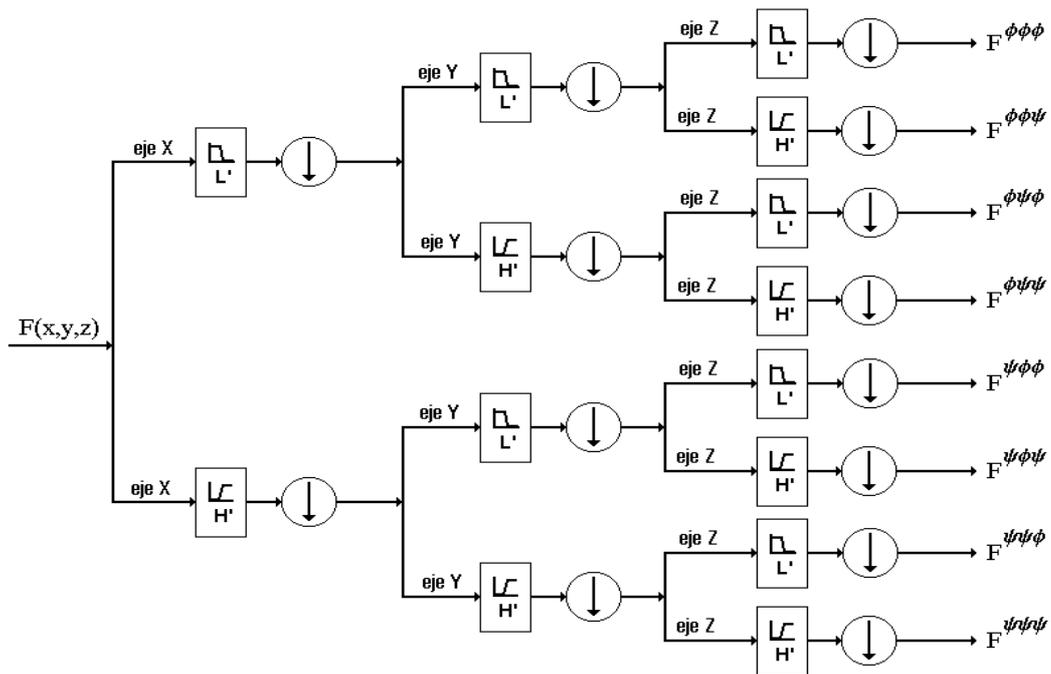


Figura 2.21.: Representación de la Transformada en Wavelets en 3 dimensiones.

Los coeficientes resultantes de aplicar la DWT en 3D se pueden distribuir de la forma mostrada en la figura 2.22

Así, cada coeficiente de cada uno de los ocho “cubos” resultantes contribuye a la reconstrucción de su correspondiente coeficiente de escala de nivel superior. El coeficiente de escala a^J se reconstruye a partir de los coeficientes $(a^{J-1}, b^{J-1}, c^{J-1}, d^{J-1}, e^{J-1}, f^{J-1}, g^{J-1}, h^{J-1})$. En la figura 2.23 hemos representado esta distribución espacial de los coeficientes de escala para dos niveles de resolución consecutivos. Si para un nivel de resolución $J-1$ los coeficientes se encuentran situados en el centro de un “cubo”, los coeficientes de un nivel superior J se encuentran en el centro de los ocho “cubos” resultantes de haber dividido el anterior. De esta forma, al aumentar la resolución se obtienen más coeficientes situados en posiciones más cercanas unos de otros.

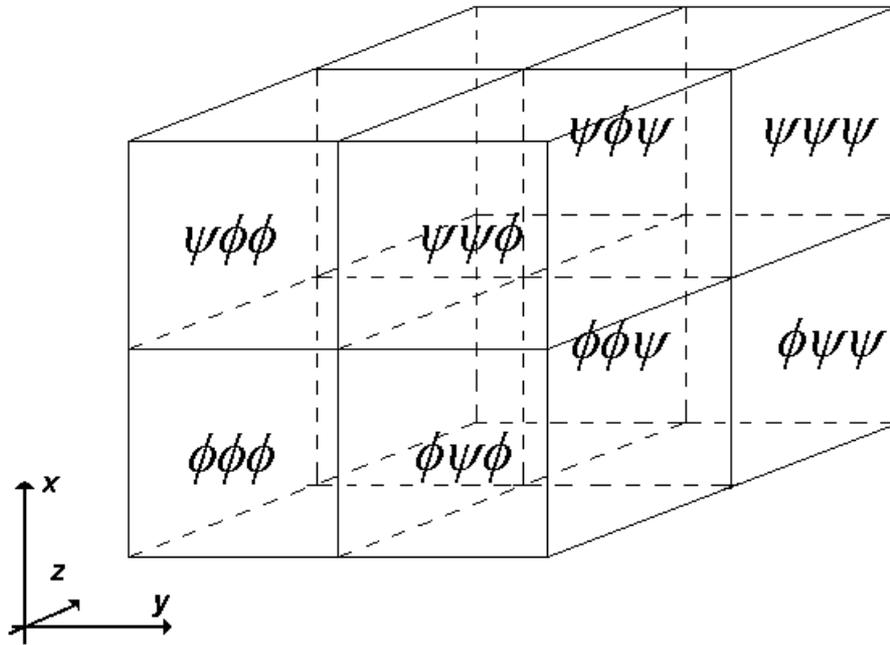


Figura 2.22.: Distribución de los coeficientes correspondientes a un nivel de descomposición.

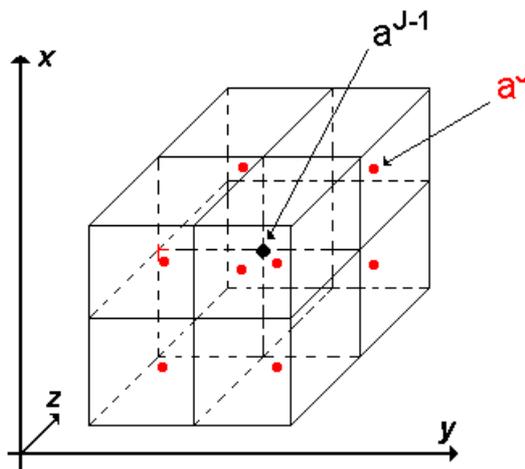


Figura 2.23.: Distribución espacial relativa de los coeficientes de escala entre dos niveles de resolución consecutivos.

Capítulo III

FORMULACIÓN

3.1.- INTRODUCCIÓN

Para analizar el comportamiento de un campo electromagnético podemos resolver las ecuaciones de Maxwell en la región del espacio que nos interesa, sujetas a unas condiciones de contorno en la frontera de esa región. Si nos encontramos en un medio lineal, homogéneo, isótropo y no dispersivo, dentro de una región sin fuentes, las ecuaciones a resolver serían:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{m} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3-1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{e} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3-1.2)$$

imponiendo a la solución obtenida las condiciones de frontera particulares al problema que estamos analizando.

En un sistema de coordenadas rectangulares estas ecuaciones pueden dividirse en seis ecuaciones escalares en términos de las componentes de \mathbf{E} y \mathbf{H} :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mathbf{m} \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (3-2.1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mathbf{m} \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (3-2.2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mathbf{m} \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (3-2.3)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \mathbf{e} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (3-2.4)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \mathbf{e} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (3-2.5)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \mathbf{e} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (3-2.6)$$

Sin embargo, la solución analítica del problema es difícil de obtener, salvo en situaciones muy concretas, correspondientes a situaciones en las que la especial simetría del problema nos permite hacer ciertas simplificaciones, por lo que nos vemos obligados a buscar una solución de forma aproximada. Estas soluciones se obtienen resolviendo numéricamente el problema con la ayuda del computador. Para ello es necesario discretizar las ecuaciones de tal manera que la solución nos proporcione el valor de los campos en determinadas posiciones del espacio y en determinados instantes de tiempo. La precisión de la solución así obtenida y la viabilidad para obtenerla dependerán de la forma en que se realice la discretización del problema.

Para realizar dicha discretización, los campos se pueden desarrollar en serie, utilizando como funciones base un conjunto de funciones ortonormales. Aplicando el método de los momentos [38] conseguimos un conjunto de ecuaciones algebraicas cuya solución se puede calcular a partir de determinadas condiciones iniciales y considerando ciertas condiciones límite o de contorno.

En este trabajo, el conjunto de funciones ortonormales utilizado ha sido las denominadas wavelets de Daubechies [23], que han sido estudiadas en el capítulo anterior. Las características de estas wavelets han dado lugar a las técnicas Multi-Resolución en el Dominio del Tiempo (MRTD). Estas técnicas se basan en la posibilidad de incrementar la resolución de una señal, desde un nivel grueso a otro más fino, utilizando funciones de baja resolución (funciones de escala) en combinación con otras funciones de mayor resolución (funciones de wavelet). Esto quiere decir, según lo estudiado en el capítulo anterior, que la densidad de puntos obtenidos depende del número de funciones de escala y de wavelet que hayamos utilizado. Además, podemos modificar localmente en el espacio este número de funciones de manera que podemos aumentar la resolución de la solución buscada en las regiones del espacio que más nos interesen.

Con el fin de mostrar claramente el fundamento de esta técnica, se ha comenzado desarrollando el algoritmo en una dimensión, y, posteriormente, se ha generalizado el mismo, en dos y tres dimensiones. Debido a que el desarrollo en las coordenadas espaciales de los campos se realiza utilizando funciones de escala y de wavelet, el punto esencial del planteamiento consistirá en la obtención del operador

rotacional (ecuaciones 3.1) en la base constituida por dichas funciones. Este operador derivativo lo vamos a construir de forma matricial, de manera que, aplicado a los coeficientes del desarrollo en serie de los campos, nos proporcione la derivada espacial de los mismos.

3.2.- FORMULACIÓN 1D

Consideremos la propagación de una onda TEM en un medio homogéneo, lineal, isótropo y no dispersivo, cuyos campos eléctrico y magnético dependen únicamente de la coordenada z , y son perpendiculares a la misma, de tal forma que $\mathbf{E} = E_x$ y $\mathbf{H} = H_y$. En este caso, de las seis ecuaciones escalares, sólo necesitamos las dos que relacionan ambas componentes, reduciéndose el problema uno en una sola dimensión:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mathbf{m} \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (3-3.1)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\mathbf{e} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (3-3.2)$$

Con el fin de conseguir un conjunto de ecuaciones explícitas resolubles de forma algebraica, vamos a desarrollar los campos como una combinación lineal de funciones ortonormales $\mathbf{f}_k^j(z)$ y $\mathbf{y}_k^j(z)$, denominadas función de escala y de wavelet de Daubechies respectivamente, y que representan la dependencia espacial de estos campos, y funciones pulso $h_n(t)$ que dan cuenta de su evolución temporal, definidas como:

$$\mathbf{f}_k^j(z) = 2^{\frac{j}{2}} \mathbf{f}(2^j \frac{z}{\Delta z} - k) \quad (3-4.1)$$

$$\mathbf{y}_k^j(z) = 2^{\frac{j}{2}} \mathbf{y}(2^j \frac{z}{\Delta z} - k) \quad (3-4.2)$$

$$h_n(t) = h(\frac{t}{\Delta t} - n) \quad (3-4.3)$$

donde el índice j indica el nivel de resolución de las funciones de escala y de wavelet, y los índices k y n se corresponden con las coordenadas espacial y temporal mediante

$z = k \cdot \Delta z$ y $t = n \cdot \Delta t$, siendo Δz y Δt los intervalos de discretización espacial y temporal respectivamente.

De esta forma, teniendo en cuenta la propiedad de las funciones de escala y de wavelet, expresada en la ecuación (2-26), las componentes E_x y H_y del campo electromagnético se pueden expresar como:

$$E_x(z, t) = \sum_n \left[\sum_k {}^n E_k^{f^0} \mathbf{f}_k^0(z) + \sum_k \sum_{j=0}^{\infty} {}^n E_k^{y^j} \mathbf{y}_k^j(z) \right] \cdot h_n(t) \quad (3-5.1)$$

$$H_y(z, t) = \sum_n \left[\sum_k {}^{n+\frac{1}{2}} H_k^{f^0} \mathbf{f}_k^0(z) + \sum_k \sum_{j=0}^{\infty} {}^{n+\frac{1}{2}} H_k^{y^j} \mathbf{y}_k^j(z) \right] \cdot h_{n+\frac{1}{2}}(t) \quad (3-5.2)$$

Introduciendo estas expresiones en (3-3.1)-(3-3.2) y muestreando con $h_n(t)$ y $h_{n+1/2}(t)$ respectivamente, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones explícitas en el tiempo:

$$\begin{aligned} & \sum_k {}^{n+\frac{1}{2}} H_k^{f^0} \mathbf{f}_k^0(z) + \sum_k \sum_{j=0}^{\infty} {}^{n+\frac{1}{2}} H_k^{y^j} \mathbf{y}_k^j(z) = \\ & = \sum_k {}^{n-\frac{1}{2}} H_k^{f^0} \mathbf{f}_k^0(z) + \sum_k \sum_{j=0}^{\infty} {}^{n-\frac{1}{2}} H_k^{y^j} \mathbf{y}_k^j(z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_k {}^n E_k^{f^0} \mathbf{f}_k^0(z) + \sum_k \sum_{j=0}^{\infty} {}^n E_k^{y^j} \mathbf{y}_k^j(z) \right) \end{aligned} \quad (3-6.1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_k {}^{n+1} E_k^{f^0} \mathbf{f}_k^0(z) + \sum_k \sum_{j=0}^{\infty} {}^{n+1} E_k^{y^j} \mathbf{y}_k^j(z) = \\ & = \sum_k {}^n E_k^{f^0} \mathbf{f}_k^0(z) + \sum_k \sum_{j=0}^{\infty} {}^n E_k^{y^j} \mathbf{y}_k^j(z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_k {}^{n+\frac{1}{2}} H_k^{f^0} \mathbf{f}_k^0(z) + \sum_k \sum_{j=0}^{\infty} {}^{n+\frac{1}{2}} H_k^{y^j} \mathbf{y}_k^j(z) \right) \end{aligned} \quad (3-6.2)$$

Estas ecuaciones se puede escribir de forma abreviada como:

$${}^{n+\frac{1}{2}} H(z) = {}^{n-\frac{1}{2}} H(z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial z} {}^n E(z) \quad (3-7.1)$$

$${}^{n+1} E(z) = {}^n E(z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}} H(z) \quad (3-7.2)$$

Si en las expresiones anteriores truncamos el sumatorio que involucra a las funciones de wavelet tomando un número finito de términos desde $j = 0$ hasta $j = J-1$, lo que obtenemos es una aproximación de los campos de nivel J . Entonces, las ecuaciones (3-7) se pueden poner como:

$${}^{n+\frac{1}{2}}H^J(z) = {}^{n-\frac{1}{2}}H^J(z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial z} {}^n E^J(z) \quad (3-8.1)$$

$${}^{n+1}E^J(z) = {}^n E^J(z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}H^J(z) \quad (3-8.2)$$

donde \mathbf{E}^J y \mathbf{H}^J representan la aproximación de resolución J de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} . Estas ecuaciones permiten calcular de forma iterativa en todo el espacio y con resolución J el campo \mathbf{E} (o el campo \mathbf{H}) en un instante de tiempo t en función de su valor en un instante Dt anterior y del valor del otro campo en un instante $Dt/2$ anterior, y en puntos contiguos del espacio.

La resolución espacial de esta aproximación dependerá del número de términos de wavelet que se hayan tomado en los desarrollos (3.8), y por lo tanto se podrá mejorar añadiendo más términos de wavelet en el cálculo, es decir, aumentando el valor de J . Las ecuaciones (3-8) se pueden representar de la siguiente forma:

$${}^{n+\frac{1}{2}}[H]_w^J = {}^{n-\frac{1}{2}}[H]_w^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial z} {}^n [E]_w^J \quad (3-9.1)$$

$${}^{n+1}[E]_w^J = {}^n [E]_w^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}[H]_w^J \quad (3-9.2)$$

donde ${}^n[F]_w^J$ representa el conjunto de coeficientes de escala y de wavelet necesarios para desarrollar la componente F del campo (E_x o H_y) con una resolución J en el instante de tiempo $t = n\Delta t$. A este conjunto de coeficientes lo llamaremos *coeficientes de la DWT* del campo \mathbf{F} . De esta forma se observa cómo el operador derivada espacial actúa sobre la descomposición en wavelets de los campos. Esta derivada se puede desarrollar a su vez utilizando funciones wavelet de resolución J con el fin de establecer una relación entre los coeficientes de la *DWT* de los dos campos (\mathbf{E} y \mathbf{H}) y conseguir de esta forma un algoritmo explícito que permita calcular en cada instante de tiempo los

coeficientes del desarrollo de los campos. Una vez conocidos todos los coeficientes se puede reconstruir los campos utilizando la *IDWT*. Este algoritmo se puede expresar de forma matricial del siguiente modo:

$${}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^{f^0} \\ H^{y^j} \end{bmatrix}^J = {}^{n-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^{f^0} \\ H^{y^j} \end{bmatrix}^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \mathbf{D}_z^J \begin{bmatrix} E^{f^0} \\ E^{y^j} \end{bmatrix}^J \quad (3-10.1)$$

$${}^{n+1} \begin{bmatrix} E^{f^0} \\ E^{y^j} \end{bmatrix}^J = \begin{bmatrix} E^{f^0} \\ E^{y^j} \end{bmatrix}^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \mathbf{D}_z^J \begin{bmatrix} H^{f^0} \\ H^{y^j} \end{bmatrix}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3-10.2)$$

donde \mathbf{D}_z^J representaría la aproximación del operador derivada respecto de z de orden J construido en una base de wavelets y que actuaría sobre la descomposición en wavelets de un campo \mathbf{F} .

3.2.1.- Operador derivada en una base de wavelets

El objetivo propuesto en este apartado es obtener una expresión matricial para el operador derivada espacial \mathbf{D}^J que permita calcular los coeficientes de la *DWT* correspondientes a la derivada de la componente F de un campo. Para ello, consideremos una aproximación de nivel J de una función $f(x)$, desarrollada en términos de funciones de escala de nivel J , $\mathbf{f}^J(x)$, y a la cual vamos a llamar $f^J(x)$:

$$f(x) \approx f^J(x) = \sum_k a_k^J \mathbf{f}_k^J(x) \quad (3-11)$$

donde, debido a la ortogonalidad de las funciones de escala, los coeficientes a_k^J se calculan como:

$$a_k^J = \langle f(x), \mathbf{f}_k^J \rangle \quad (3-12)$$

La derivada espacial de esta función $f^J(x)$ será:

$$\frac{\partial}{\partial x} f^J(x) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_k a_k^J \mathbf{f}_k^J(x) = \sum_k a_k^J \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}_k^J(x) = \sum_k a_k^J \mathbf{f}_k^{\prime J}(x) \quad (3-13)$$

Esta derivada se puede a su vez aproximar representándola mediante un desarrollo de funciones de escala de nivel J de la siguiente forma:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|^J f^J(x) = \sum_k a_k^{\prime J} \mathbf{f}_k^J(x) \quad (3-14)$$

donde $a_k^{\prime J}$ son los coeficientes de la *DWT* que estamos buscando, correspondientes a la derivada de la función $f^J(x)$, y que podemos obtener a partir del producto interior entre la función de escala \mathbf{f} y la derivada de la función $f^J(x)$:

$$a_k^{\prime J} = \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|^J f^J(x), \mathbf{f}_k^J(x) \right\rangle \quad (3-15)$$

Introduciendo en la expresión (3-15) el desarrollo dado en (3-13), podemos obtener los coeficientes $a_k^{\prime J}$ del desarrollo (3-14):

$$a_k^{\prime J} = \left\langle \sum_l a_l^J \mathbf{f}_l^{\prime J}, \mathbf{f}_k^J \right\rangle = \sum_l a_l^J \langle \mathbf{f}_l^{\prime J}, \mathbf{f}_k^J \rangle \quad (3-16)$$

Por lo tanto, la aproximación de nivel J de la derivada de una función $f^J(x)$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|^J f^J(x) = \sum_k \sum_l a_l^J \langle \mathbf{f}_l^{\prime J}, \mathbf{f}_k^J \rangle \cdot \mathbf{f}_k^J(x) \quad (3-17)$$

Debido a la relación que existe entre los subespacios formados por las funciones de escala y de wavelet, indicada en las ecuaciones (2-18), una aproximación de nivel J se puede poner como desarrollo de funciones de escala y de wavelet de resolución $J-1$. De esta forma, podemos encontrar la relación que existe entre los coeficientes de escala y de wavelet de una función y los de su derivada. Para ello representamos la

aproximación $f^J(x)$ como una combinación de funciones de escala y de wavelet de resolución $J-1$:

$$f^J(x) = \sum_k a_k^J \mathbf{f}_k^J(x) = \sum_m a_m^{J-1} \mathbf{f}_m^{J-1}(x) + \sum_m b_m^{J-1} \mathbf{y}_m^{J-1}(x) \quad (3-18)$$

Del mismo modo que en la expresión (3-13), la derivada de $f^J(x)$ desarrollada en (3-18) se puede poner como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f^J(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_m a_m^{J-1} \mathbf{f}_m^{J-1}(x) + \sum_m b_m^{J-1} \mathbf{y}_m^{J-1}(x) \right] = \\ &= \sum_m a_m^{J-1} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}_m^{J-1}(x) + \sum_m b_m^{J-1} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{y}_m^{J-1}(x) = \\ &= \sum_m a_m^{J-1} \mathbf{f}_m^{\prime J-1}(x) + \sum_m b_m^{J-1} \mathbf{y}_m^{\prime J-1}(x) \end{aligned} \quad (3-19)$$

Procediendo de la misma forma que hicimos para obtener la expresión (3-14), se puede calcular la aproximación de nivel J de la derivada de $f^J(x)$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|^J f^J(x) = \sum_m a_m^{\prime J-1} \mathbf{f}_m^{J-1}(x) + \sum_m b_m^{\prime J-1} \mathbf{y}_m^{J-1}(x) \quad (3-20)$$

donde los coeficientes del desarrollo se calculan a partir de las expresiones:

$$a_m^{\prime J-1} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f^J(x), \mathbf{f}_m^{J-1}(x) \right\rangle \quad (3-21.1)$$

$$b_m^{\prime J-1} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f^J(x), \mathbf{y}_m^{J-1}(x) \right\rangle \quad (3-21.1)$$

Llevando la expresión (3-19) a las ecuaciones (3-20) podemos obtener los coeficientes correspondientes a la *DWT* de la derivada de $f^J(x)$:

$$\begin{aligned}
 a_m'^{J-1} &= \left\langle \sum_l a_l^{J-1} \mathbf{f}_l^{J-1} + \sum_l b_l^{J-1} \mathbf{y}_l'^{J-1}, \mathbf{f}_m^{J-1} \right\rangle = \\
 &= \sum_l a_l^{J-1} \langle \mathbf{f}_l^{J-1}, \mathbf{f}_m^{J-1} \rangle + \sum_l b_l^{J-1} \langle \mathbf{y}_l'^{J-1}, \mathbf{f}_m^{J-1} \rangle
 \end{aligned} \tag{3-22.1}$$

$$\begin{aligned}
 b_m'^{J-1} &= \left\langle \sum_l a_l^{J-1} \mathbf{f}_l^{J-1} + \sum_l b_l^{J-1} \mathbf{y}_l'^{J-1}, \mathbf{y}_m^{J-1} \right\rangle = \\
 &= \sum_l a_l^{J-1} \langle \mathbf{f}_l^{J-1}, \mathbf{y}_m^{J-1} \rangle + \sum_l b_l^{J-1} \langle \mathbf{y}_l'^{J-1}, \mathbf{y}_m^{J-1} \rangle
 \end{aligned} \tag{3-22.2}$$

Estas ecuaciones se pueden expresar en forma matricial del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} a_m'^{J-1} \\ b_m'^{J-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_m^{J-1}, \mathbf{f}_l^{J-1} \rangle & \langle \mathbf{f}_m^{J-1}, \mathbf{y}_l'^{J-1} \rangle \\ \langle \mathbf{y}_m^{J-1}, \mathbf{f}_l^{J-1} \rangle & \langle \mathbf{y}_m^{J-1}, \mathbf{y}_l'^{J-1} \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_l^{J-1} \\ b_l^{J-1} \end{bmatrix} \tag{3-23.1}$$

o bien

$$[\mathbf{v}']^t = [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{v}]^t \tag{3-23.2}$$

donde $[\mathbf{v}]$ representa el vector formado por los coeficientes de la *DWT* de la aproximación $f^J(x)$, ordenados como se muestra en (3-23.1), es decir, en primer lugar se colocan los coeficientes de escala y después los coeficientes de wavelet.

La dimensión de estas matrices dependerá del número de puntos en los que se haya discretizado el espacio y del nivel de resolución utilizado. Por ejemplo, si discretizamos el espacio en n_z puntos y consideramos un nivel de resolución $J=1$, entonces los subíndices l y m recorrerán el conjunto de valores $l, m = 1, \dots, n_z$, y, por consiguiente, las dimensiones de las matrices involucradas en la derivada (3-23) serán las siguientes: $[\mathbf{v}']^t \equiv [2n_z \times 1]$, $[\mathbf{D}] \equiv [2n_z \times 2n_z]$ y $[\mathbf{v}]^t \equiv [2n_z \times 1]$.

La distancia entre los puntos de muestreo dependerá del nivel de resolución. Así, si en el nivel de resolución $j = 0$ hemos discretizado el espacio dividiéndolo en n_z puntos separados una distancia Δz , en el nivel de resolución siguiente $j = 1$ tendremos $2n_z$ puntos separados $\Delta z/2$, y en el nivel $j = 2$ habrá $4n_z$ puntos con una distancia de $\Delta z/4$

entre ellos. Si el desarrollo se ha realizado utilizando únicamente funciones de escala, el valor real de los campos vendrá dado por los mismos coeficientes de escala, mientras que si el desarrollo incluye funciones de wavelet, es necesario aplicar las *IDWT* para reconstruir los campos.

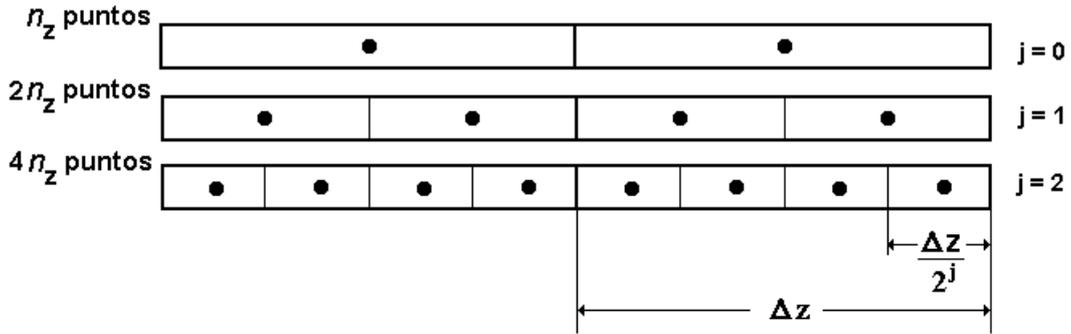


Figura 3.1.: Representación de la distancia entre puntos de muestreo para diferentes niveles de resolución.

De esta manera hemos conseguido representar en forma matricial la aproximación de nivel J del operador derivada. Los elementos de esta matriz están constituidos por los productos interiores de las funciones de escala y de wavelet y sus respectivas derivadas:

$$\mathbf{D}_z^J = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_m^{J-1}, \mathbf{f}_l^{J-1} \rangle & \langle \mathbf{f}_m^{J-1}, \mathbf{y}_l^{J-1} \rangle \\ \langle \mathbf{y}_m^{J-1}, \mathbf{f}_l^{J-1} \rangle & \langle \mathbf{y}_m^{J-1}, \mathbf{y}_l^{J-1} \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} d_{m,l}^{J-1} & \mathbf{g}_{m,l}^{J-1} \\ \mathbf{b}_{m,l}^{J-1} & \mathbf{a}_{m,l}^{J-1} \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

donde [10]:

$$d_{ml}^j = 2^j \int \mathbf{f}(2^j z - m) \cdot \frac{d}{dz} \mathbf{f}(2^j z - l) \cdot dz = 2^j d_{m-l} \quad (3-25.1)$$

$$\mathbf{a}_{ml}^j = 2^j \int \mathbf{y}(2^j z - m) \cdot \frac{d}{dz} \mathbf{y}(2^j z - l) \cdot dz = 2^j \mathbf{a}_{m-l} \quad (3-25.2)$$

$$\mathbf{b}_{ml}^j = 2^j \int \mathbf{y}(2^j z - m) \cdot \frac{d}{dz} \mathbf{f}(2^j z - l) \cdot dz = 2^j \mathbf{b}_{m-l} \quad (3-25.3)$$

$$\mathbf{g}_{ml}^j = 2^j \int \mathbf{f}(2^j z - m) \cdot \frac{d}{dz} \mathbf{y}(2^j z - l) \cdot dz = 2^j \mathbf{g}_{m-l} \quad (3-25.4)$$

y donde:

$$d_m = \int \mathbf{f}(z-m) \cdot \frac{d}{dz} \mathbf{f}(z) \cdot dz \quad (3-26.1)$$

$$\mathbf{a}_m = \int \mathbf{y}(z-m) \cdot \frac{d}{dz} \mathbf{y}(z) \cdot dz \quad (3-26.1)$$

$$\mathbf{b}_m = \int \mathbf{y}(z-m) \cdot \frac{d}{dz} \mathbf{f}(z) \cdot dz \quad (3-26.1)$$

$$\mathbf{g}_m = \int \mathbf{f}(z-m) \cdot \frac{d}{dz} \mathbf{y}(z) \cdot dz \quad (3-26.1)$$

Utilizando las ecuaciones de refinamiento (2-13) y (2-21), vistas en el capítulo anterior, estos coeficientes se pueden calcular de la siguiente forma [10]:

$$d_m = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} \mathbf{L}(k) \mathbf{L}(k') d_{2m+k-k'} \quad (3-27.1)$$

$$\mathbf{a}_m = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} \mathbf{H}(k) \mathbf{H}(k') d_{2m+k-k'} \quad (3-27.2)$$

$$\mathbf{b}_m = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} \mathbf{L}(k) \mathbf{H}(k') d_{2m+k-k'} \quad (3-27.3)$$

$$\mathbf{g}_m = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} \mathbf{H}(k) \mathbf{L}(k') d_{2m+k-k'} \quad (3-27.4)$$

siendo N el número de coeficientes de escala $\mathbf{L}(n)$ y de wavelet $\mathbf{H}(n)$ dado por la expresión (2-29).

Vemos que todos los coeficientes se obtienen a partir de d_m , de manera que conociendo éstos los demás están ya determinados. Estos coeficientes se pueden calcular de forma iterativa a partir de las siguientes expresiones [10]:

$$d_m = 2 \left[d_{2m} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N/2} a_{2k-1} \cdot (d_{2m-2k+1} + d_{2m+2k-1}) \right] \quad (3-28)$$

$$\sum_m m \cdot d_m = -1 \quad (3-29)$$

$$d_m = -d_{-m} \quad (3-30)$$

tomando como valores iniciales $d_1 = -1/2$ y $d_{-1} = 1/2$, y donde

$$a_n = 2 \sum_{i=0}^{N-1-n} \mathbf{L}(i)\mathbf{L}(i+n), n = 1, \dots, N-1 \quad (3-31)$$

En la tabla II aparecen los coeficientes derivativos $\{d_m, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m, \mathbf{g}_m\}$ correspondientes a diferentes funciones wavelet de Daubechies. Se puede observar cómo el número de coeficientes aumenta con el orden de la función wavelet empleada, esto es, con el número M de momentos evanescentes definido en (2-28). El rango del subíndice m correspondiente al número de coeficientes derivativos distintos de cero es:

$$-N + 2 \leq m \leq N - 2 \quad (3-32)$$

Para las funciones wavelet de Haar (D_1) este rango es:

$$-1 \leq m \leq 1 \quad (3-33)$$

De acuerdo con las propiedades de los subespacios S^j y W^j establecidas en las ecuaciones (2-18), la matriz \mathbf{D}_z^j definida en (3-24) se puede seguir descomponiendo en otras submatrices hasta llegar al nivel de resolución inferior $j = 0$. Por ejemplo, si consideramos un espacio discretizado en n_z puntos y un nivel de resolución $J = 2$, la matriz derivativa \mathbf{D}_z^2 se podrá descomponer de la siguiente forma [9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_z^2 &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_{k_2}, \mathbf{f}_{l_2}^2 \rangle \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_{k_1}, \mathbf{f}_{l_1}^1 \rangle & \langle \mathbf{f}_{k_1}, \mathbf{y}_{l_1}^1 \rangle \\ \langle \mathbf{y}_{k_1}^1, \mathbf{f}_{l_1}^1 \rangle & \langle \mathbf{y}_{k_1}^1, \mathbf{y}_{l_1}^1 \rangle \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_{k_0}, \mathbf{f}_{l_0}^0 \rangle & \langle \mathbf{f}_{k_0}, \mathbf{y}_{l_0}^0 \rangle & & \\ \langle \mathbf{y}_{k_0}^0, \mathbf{f}_{l_0}^0 \rangle & \langle \mathbf{y}_{k_0}^0, \mathbf{y}_{l_0}^0 \rangle & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \langle \mathbf{f}_{k_1}, \mathbf{y}_{l_1}^1 \rangle \\ & \mathbf{0} & & \langle \mathbf{y}_{k_1}^1, \mathbf{f}_{l_1}^1 \rangle \\ & & & \langle \mathbf{y}_{k_1}^1, \mathbf{y}_{l_1}^1 \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-34)$$

Tabla II				
Coefficientes derivativos				
D_1				
m	d_m	a_m	b_m	g_n
+1	-0,5	+0,5	-0,5	+0,5
0	0	0	+1	-1
-1	+0,5	-0,5	-0,5	+0,5
D_2				
+2	+0,08333333	-0,08333333	+0,31100420	-0,02232910
+1	-0,66666660	+1	-0,95534180	+0,37799150
0	0	0	+1	-1
-1	+0,66666660	-1	-0,37799150	+0,95534180
-2	-0,08333333	+0,08333333	+0,02232910	-0,31100420
D_3				
+4	-0,00034243	+0,00034243	+0,00323383	-0,00003626
+3	-0,01461027	+0,01461027	+0,15484130	-0,00135798
+2	+0,14518960	-0,14655930	-0,66832240	+0,02241336
+1	-0,74512390	+1,32588200	+1,06170300	-0,24312510
0	0	0	-0,77356160	+0,77356150
-1	+0,74512390	-1,32588200	+0,24312510	-1,06170300
-2	-0,14518960	+0,14655930	-0,02241336	+0,66832230
-3	+0,01461027	-0,01461027	+0,00135798	-0,15484130
-4	+0,00034243	-0,00034243	+0,00003626	-0,00323383
D_4				
+6	-0,00000084	0,00000084	-0,00001828	0,00000004
+5	0,00017221	-0,00017221	0,00364039	-0,00000814
+4	0,00222407	-0,00222407	0,06925882	-0,00005683
+3	-0,03358057	0,03357721	-0,40989710	0,00196786
+2	0,19200100	-0,18310480	0,88603190	-0,01834161
+1	-0,79301810	1,56102200	-0,95838360	0,15193070
0	0	0	0,54485980	-0,54485980
-1	0,79301810	-1,56102200	-0,15193070	0,95838360
-2	-0,19200100	0,18310480	0,01834161	-0,88603170
-3	0,03358057	-0,03357720	-0,00196786	0,40989700
-4	-0,00222407	0,00222407	0,00005683	-0,06925883
-5	-0,00017221	0,00017221	0,00000814	-0,00364039
-6	0,00000084	-0,00000084	-0,00000004	0,00001828

donde los subíndices de cada una de las submatrices recorrerán los siguientes conjuntos de valores: $k_2, l_2 = 1, \dots, 4n_z$, $k_1, l_1 = 1, \dots, 2n_z$, y $k_0, l_0 = 1, \dots, n_z$.

El vector $[\mathbf{v}]$, compuesto por los coeficientes de la *DWT* de la función $f(x)$ que queremos derivar, sobre el que actúa la matriz \mathbf{D}_z^2 tendrá sus elementos distribuidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{v}] &= [a_1^2, a_2^2, \dots, a_{4n_z-1}^2, a_{4n_z}^2] \\
 &\equiv [a_1^1, a_2^1, \dots, a_{2n_z-1}^1, a_{2n_z}^1 \mid b_1^1, b_2^1, \dots, b_{2n_z-1}^1, b_{2n_z}^1] \\
 &\equiv [a_1^0, a_2^0, \dots, a_{n_z-1}^0, a_{n_z}^0 \mid b_1^0, b_2^0, \dots, b_{n_z-1}^0, b_{n_z}^0 \mid a_1^1, a_2^1, \dots, a_{2n_z-1}^1, a_{2n_z}^1 \mid b_1^1, b_2^1, \dots, b_{2n_z-1}^1, b_{2n_z}^1]
 \end{aligned}
 \tag{3-35}$$

El aspecto o apariencia que toma esta matriz lo hemos representado en la figura 3.2, donde sólo se han dibujado los elementos distintos de cero, cuyo número depende del tipo de función wavelet que estemos utilizando, tal como indicaba la expresión (3-32). A medida que aumenta el orden de la función wavelet (es decir, el número de momentos evanescentes M) aumenta el número de coeficientes distintos de cero, lo que produce que las “bandas” sobre las que se sitúan dichos elementos sean más anchas. En la misma figura se ha representado la matriz derivativa de nivel $J = 2$ utilizando wavelets de Haar donde se puede observar que las bandas tienen tres elementos distintos de cero, como indicaba la expresión (3-33).

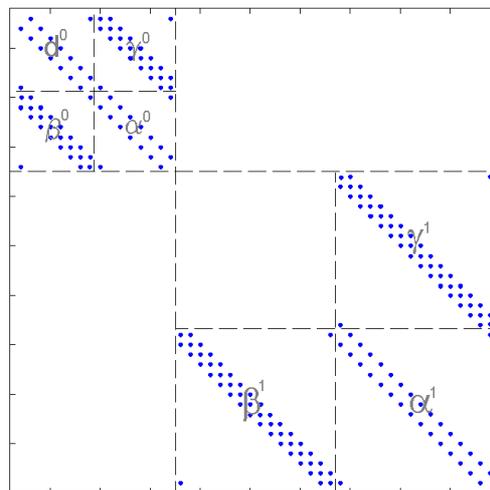


Figura 3.2.: Aspecto de la matriz derivativa de orden $J = 2$, utilizando funciones wavelet de Haar.

Aunque esta forma de representar la matriz derivativa resulta muy sencilla de construir, independientemente del nivel de resolución que deseemos, presenta, sin embargo, dos grandes inconvenientes. El primero se refiere a su tamaño. Debido a la disposición de las submatrices que constituyen la matriz derivativa \mathbf{D}^J , a medida que aumenta el nivel de resolución J , sus dimensiones aumentan considerablemente. Si en el nivel de resolución $j = 0$ tenemos n_z coeficientes, para un nivel de resolución $J \geq 1$ la dimensión de la matriz \mathbf{D}^J será $[(2^{J+1} - 2) \cdot n_z] \times [(2^{J+1} - 2) \cdot n_z]$

El segundo problema y más importante se refiere a la disposición de los coeficientes de la *DWT* dentro del vector \mathbf{v} . Con esta distribución no es posible aplicar dos veces consecutivas la matriz derivativa sobre el mismo conjunto de coeficientes \mathbf{v}' , lo que nos obliga a tener que reconstruir y descomponer la función $f(x)$ cada vez que se quiera derivarla. Esto representa un problema a la hora de resolver de forma iterativa en el tiempo las ecuaciones (3-10), porque cada vez que tengamos que calcular la derivada espacial de uno de los campos necesitamos, en primer lugar, aplicar la *DWT* para descomponerlo y obtener sus coeficientes, aplicar la matriz derivativa, y después necesitamos aplicar la *IDWT* para reconstruir el campo y poder volver a descomponerlo en la siguiente iteración. Todo esto implica un aumento en el tiempo de computación requerido para resolver nuestro problema electromagnético.

Existe otra alternativa para construir la matriz derivativa \mathbf{D}_z^J que evita los dos inconvenientes expuestos anteriormente, y que consiste en descomponerla combinando funciones de escala y de wavelet de distintos niveles [21]. Por ejemplo, la matriz derivativa de orden $J = 2$, \mathbf{D}_z^2 , se descompone de esta manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_z^2 &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_{k_2}^2, \mathbf{f}_{l_2}^2 \rangle \end{bmatrix} \\
 &\equiv \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_{k_1}^1, \mathbf{f}_{l_1}^1 \rangle & \langle \mathbf{f}_{k_1}^1, \mathbf{y}_{l_1}^1 \rangle \\ \langle \mathbf{y}_{k_1}^1, \mathbf{f}_{l_1}^1 \rangle & \langle \mathbf{y}_{k_1}^1, \mathbf{y}_{l_1}^1 \rangle \end{bmatrix} \\
 &\equiv \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_{k_0}^0, \mathbf{f}_{l_0}^0 \rangle & \langle \mathbf{f}_{k_0}^0, \mathbf{y}_{l_0}^0 \rangle & \langle \mathbf{f}_{k_0}^0, \mathbf{y}_{l_1}^1 \rangle \\ \langle \mathbf{y}_{k_0}^0, \mathbf{f}_{l_0}^0 \rangle & \langle \mathbf{y}_{k_0}^0, \mathbf{y}_{l_0}^0 \rangle & \langle \mathbf{y}_{k_0}^0, \mathbf{y}_{l_1}^1 \rangle \\ \langle \mathbf{y}_{k_1}^1, \mathbf{f}_{l_0}^0 \rangle & \langle \mathbf{y}_{k_1}^1, \mathbf{y}_{l_0}^0 \rangle & \langle \mathbf{y}_{k_1}^1, \mathbf{y}_{l_1}^1 \rangle \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3-36}$$

donde, si el espacio está discretizado en n_z puntos, los subíndices de cada una de las submatrices recorren los conjuntos de valores: $k_2, l_2 = 1, \dots, 4n_z$, $k_1, l_1 = 1, \dots, 2n_z$, y $k_0, l_0 = 1, \dots, n_z$, y los coeficientes que constituyen el vector \mathbf{v} sobre el que actúa la matriz derivativa se distribuyen de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{v}] &= [a_1^2, a_2^2, \dots, a_{4n_z-1}^2, a_{4n_z}^2] \\
 &\equiv [a_1^1, a_2^1, \dots, a_{2n_z-1}^1, a_{2n_z}^1 \mid b_1^1, b_2^1, \dots, b_{2n_z-1}^1, b_{2n_z}^1] = \\
 &\equiv [a_1^0, a_2^0, \dots, a_{n_z-1}^0, a_{n_z}^0 \mid b_1^0, b_2^0, \dots, b_{n_z-1}^0, b_{n_z}^0 \mid b_1^1, b_2^1, \dots, b_{2n_z-1}^1, b_{2n_z}^1]
 \end{aligned} \tag{3-37}$$

De este modo, el tamaño que adquiere la matriz derivativa \mathbf{D}^J es inferior al que teníamos anteriormente. Ahora, para un nivel de resolución J , la dimensión de la matriz es $[2^J \cdot n_z] \times [2^J \cdot n_z]$, que es sensiblemente inferior al obtenido en el caso anterior.

La otra ventaja de organizar la matriz de esta forma está la distribución de los coeficientes de la *DWT* dentro del vector \mathbf{v} . Ahora sí es posible aplicar de forma reiterada la matriz derivativa sobre el mismo conjunto de coeficientes, lo que facilita su utilización dentro de las ecuaciones (3-10) ya que no es necesario recomponer y descomponer los campos en cada iteración para calcular su derivada.

Los elementos de las submatrices formadas a partir de funciones de escala y de wavelet de distinto nivel se calculan mediante la *DWT* [9]. Por ejemplo, en la ecuación (3-36), los elementos de la submatriz $[\langle \mathbf{y}_k^1, \mathbf{f}_l^0 \rangle \mid \langle \mathbf{y}_k^1, \mathbf{y}_l^{\prime 0} \rangle]$ se calculan aplicando la

DWT a las filas de $[\langle \mathbf{y}_k^1, \mathbf{f}_l^1 \rangle]$, mientras que los elementos de la submatriz $\left[\begin{array}{c} \langle \mathbf{f}_k^0, \mathbf{y}_l^{\prime 1} \rangle \\ \langle \mathbf{y}_k^0, \mathbf{y}_l^{\prime 1} \rangle \end{array} \right]$ se

calculan aplicando la *DWT* a las columnas de $[\langle \mathbf{f}_k^1, \mathbf{y}_l^{\prime 1} \rangle]$.

Debido a sus ventajas, hemos escogido esta segunda opción para construir la matriz derivativa e implementarla en nuestros algoritmos. Así, para un nivel de resolución $j = 0$ utilizamos la matriz derivativa formada por las funciones de escala de resolución 0:

$$\mathbf{D}_z^0 = \left[\begin{array}{c} \langle \mathbf{f}_k^0, \mathbf{f}_l^0 \rangle \end{array} \right] \quad (3-38)$$

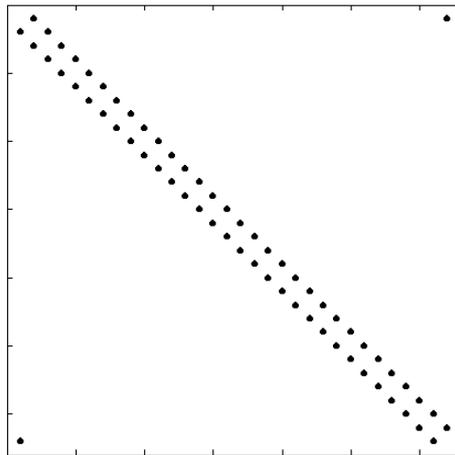
Si queremos aumentar un nivel de resolución, introducimos las funciones de wavelet de nivel 0, con lo que se obtiene la matriz derivativa de nivel 1:

$$\mathbf{D}_z^1 = \left[\begin{array}{c|c} \langle \mathbf{f}_k^0, \mathbf{f}_l^0 \rangle & \langle \mathbf{f}_k^0, \mathbf{y}_l^0 \rangle \\ \hline \langle \mathbf{y}_k^0, \mathbf{f}_l^0 \rangle & \langle \mathbf{y}_k^0, \mathbf{y}_l^0 \rangle \end{array} \right] \quad (3-39)$$

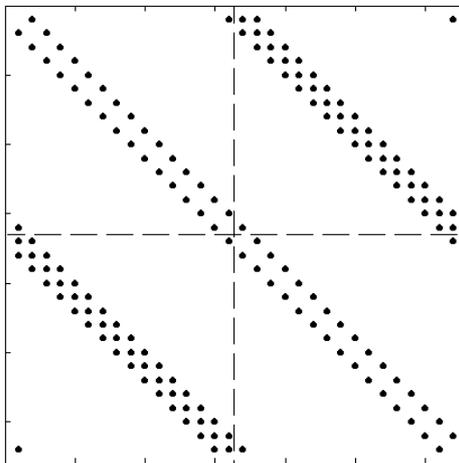
Y si deseamos aumentar aún más la resolución, añadimos funciones de wavelet de nivel 1 obteniendo de esta forma la matriz derivativa de nivel 2:

$$\mathbf{D}_z^2 = \left[\begin{array}{c|c|c} \langle \mathbf{f}_k^0, \mathbf{f}_l^0 \rangle & \langle \mathbf{f}_k^0, \mathbf{y}_l^0 \rangle & \langle \mathbf{f}_k^0, \mathbf{y}_l^1 \rangle \\ \hline \langle \mathbf{y}_k^0, \mathbf{f}_l^0 \rangle & \langle \mathbf{y}_k^0, \mathbf{y}_l^0 \rangle & \langle \mathbf{y}_k^0, \mathbf{y}_l^1 \rangle \\ \hline \langle \mathbf{y}_k^1, \mathbf{f}_l^0 \rangle & \langle \mathbf{y}_k^1, \mathbf{y}_l^0 \rangle & \langle \mathbf{y}_k^1, \mathbf{y}_l^1 \rangle \end{array} \right] \quad (3-40)$$

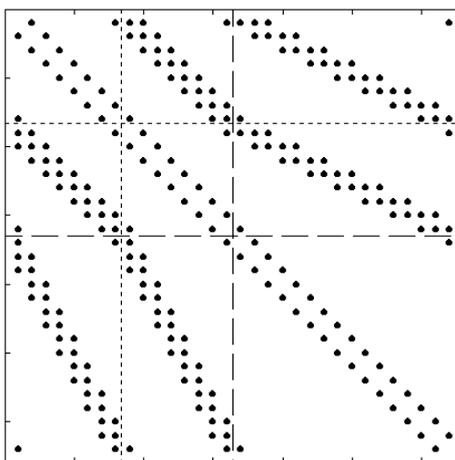
Al igual que antes, el aspecto de estas matrices depende del tipo de wavelet empleado y del nivel de resolución. En la figura 3.3 se puede observar la apariencia que toma esta matriz para tres niveles de resolución utilizando wavelets de Haar. Únicamente se han representado los elementos distintos de cero. Se puede observar una diferencia clara con respecto a la disposición de estos elementos en la matriz anterior aunque vemos cómo los elementos de la matriz también están distribuidos en bandas, cuya anchura aumenta con el orden de la función wavelet empleada (es decir, el número de momentos evanescentes M).



(a) Nivel de resolución $j = 0$



(b) Nivel de resolución $j = 1$



(c) Nivel de resolución $j = 2$

Figura 3.3.: *Aspecto de la matriz derivada para tres niveles de resolución empleando funciones wavelet de Haar.*

3.2.2.- Desarrollo del algoritmo con funciones de escala

Si los campos se desarrollan utilizando únicamente funciones de escala de resolución J , el algoritmo descrito por las ecuaciones (3-10) quedaría de la siguiente forma:

$${}^{n+\frac{1}{2}}[H^f]^J = {}^{n-\frac{1}{2}}[H^f]^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta z} [d^J]^n [E^f]^J \quad (3-41.1)$$

$${}^{n+1}[E^f]^J = {}^n[E^f]^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \frac{1}{\Delta z} [d^J]^{n+\frac{1}{2}} [H^f]^J \quad (3-41.2)$$

donde la expresión ${}^n[F^f]^J$ representa el vector de coeficientes de escala de la componente F del campo (E_x o H_y) en el instante $t = n\Delta t$, que da lugar a la reconstrucción de nivel J .

El aspecto de la matriz derivativa en esta situación es análogo al de la representada en la figura 3.3.a (únicamente la anchura de las bandas podría variar, si utilizamos wavelets diferentes). Observando esa figura, podemos ver que los coeficientes están distribuidos a lo largo de una banda (cuya anchura dependerá del tipo de wavelet empleado), fuera de la cual los coeficientes son nulos. Esto hace que a la hora de actuar sobre el vector de coeficientes $[\mathbf{v}]$, el resultado sea equivalente a aplicar sobre ellos un esquema en diferencias finitas (de hecho, si las funciones son las de Haar, el esquema es análogo al tradicional FDTD de Yee). Esto permite implementar los algoritmos de una forma más eficiente debido a que no es necesario reservar memoria para almacenar las matrices derivativas (sólo es necesario disponer de los coeficientes derivativos correspondientes) y en el cálculo de la derivada no interviene la multiplicación matricial. De esta forma, el esquema para este nivel de resolución expresado en las ecuaciones (3-41) quedaría como:

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_i^f = {}^{n-\frac{1}{2}}H_i^f - \frac{\Delta t}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m}^f \quad (3-42.1)$$

$${}^{n+1}E_i^f = {}^n E_i^f - \frac{\Delta t}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}} H_{i-m}^f \quad (3-42.2)$$

3.2.3.- Desarrollo del algoritmo con funciones de escala y de wavelet

Si queremos aumentar la resolución espacial de nuestro problema con respecto a la situación anterior y elevarla un orden, esto es, resolverlo para nivel $J+1$, añadiremos al esquema anterior los coeficientes de las funciones de wavelet de nivel J , e incluiremos en la matriz derivativa los términos correspondientes. De esta forma, el algoritmo descrito en (3-10) quedaría representado del modo siguiente:

$${}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} = {}^{n-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \begin{bmatrix} d^J & \mathbf{g}^J \\ \mathbf{b}^J & \mathbf{a}^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-43.1)$$

$${}^{n+1} \begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} = {}^n \begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} - \frac{\Delta t}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \begin{bmatrix} d^J & \mathbf{g}^J \\ \mathbf{b}^J & \mathbf{a}^J \end{bmatrix} {}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-43-2)$$

donde la expresión:

$${}^n \begin{bmatrix} F^f \\ F^y \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-43.3)$$

representa el vector de coeficientes de escala y de wavelet de nivel J de la componente F en el instante $t = n\Delta t$, que, al reconstruirlos, dan la aproximación de nivel $J+1$.

Ahora, la matriz derivativa adquirirá el aspecto dado en la figura 3.3.(b), donde se puede observar cómo las submatrices que la constituyen tienen también sus elementos distribuidos en bandas de la misma anchura. Si aplicamos esta matriz al vector de coeficientes (3-43.3), el resultado es equivalente a aplicar un esquema en diferencias finitas similar al anterior para cada conjunto de coeficientes de escala y de wavelet. Así, el conjunto de ecuaciones (3-43) quedaría como sigue:

$${}^{n+\frac{1}{2}} H_i^f = {}^{n-\frac{1}{2}} H_i^f - \frac{\Delta t}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \left[\sum_m d_m^J E_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{g}_m^J E_{i-m}^y \right] \quad (3-44.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}} H_i^y = {}^{n-\frac{1}{2}} H_i^y - \frac{\Delta t}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J E_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{a}_m^J E_{i-m}^y \right] \quad (3-44.2)$$

$${}^{n+1}E_i^f = {}^nE_i^f - \frac{\Delta t}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \left[\sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{g}_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i-m}^y \right] \quad (3-44.3)$$

$${}^{n+1}E_i^y = {}^nE_i^y - \frac{\Delta t}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{a}_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i-m}^y \right] \quad (3-44.4)$$

Ahora, en vez de obtener directamente el valor real de los campos, hemos calculado los coeficientes de escala y de wavelet de la solución final. Para encontrar el valor real debemos realizar un proceso de reconstrucción a partir de dichos coeficientes. Este proceso se realiza mediante la *IDWT*. Si en el caso anterior la resolución espacial era de $\Delta z/2^J$, en este caso, después de la reconstrucción, obtenemos el doble de puntos de muestreo con una separación de $\Delta z/2^{J+1}$, es decir, la mitad.

3.2.4.- Ejemplo de aplicación del algoritmo en multirresolución

Es importante destacar que el incremento de resolución puede limitarse a la región del espacio que nos interese. Para ello, basta con incluir los coeficientes de wavelet sólo donde sea necesario y considerarlos nulos en el resto del dominio de simulación. Por ejemplo, consideremos una región del espacio como la representada en la figura 3.4.

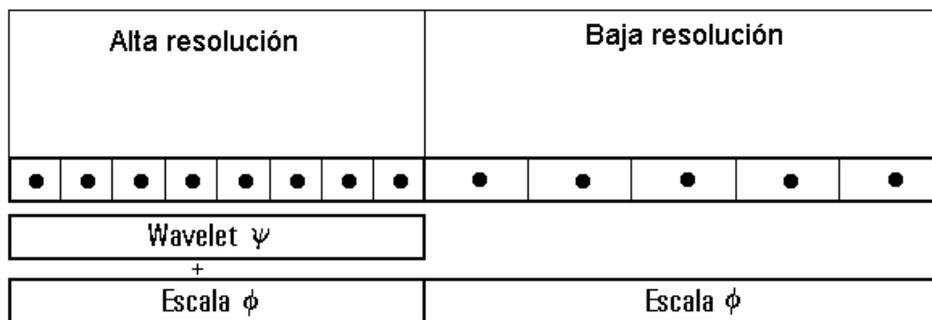


Figura 3.4.: Dominio de simulación dividido en dos regiones de diferente resolución.

En esta figura vemos que el dominio de simulación se ha dividido en dos regiones de diferente resolución. La parte derecha de este dominio corresponde a una zona de baja resolución y por lo tanto en el algoritmo sólo se incluirán los coeficientes de escala. Por el contrario, la parte de la izquierda la hemos considerado de resolución superior, y por lo tanto, en el algoritmo se incluirán los coeficientes de wavelet. Las ecuaciones del algoritmo expresadas en (3-43) se deben modificar eliminando los coeficientes de wavelet correspondientes a la zona de baja resolución, de modo que las ecuaciones de actualización del algoritmo quedan de la siguiente forma:

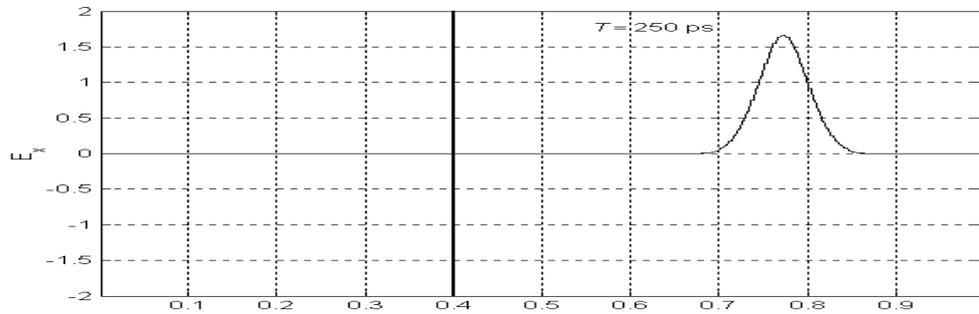
$$\begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{c} H^\phi \\ H^\psi \\ 0 \end{array} \right]^{j+1} \end{matrix} = \begin{matrix} n-\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{c} H^\phi \\ H^\psi \\ 0 \end{array} \right]^{j+1} \end{matrix} - \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} d^j & \gamma^j \\ \beta^j & \alpha^j \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ \left[\begin{array}{c} E^\phi \\ E^\psi \\ 0 \end{array} \right]^{j+1} \end{matrix} \quad (3-45.1)$$

$$\begin{matrix} n+1 \\ \left[\begin{array}{c} E^\phi \\ E^\psi \\ 0 \end{array} \right]^{j+1} \end{matrix} = \begin{matrix} n \\ \left[\begin{array}{c} E^\phi \\ E^\psi \\ 0 \end{array} \right]^{j+1} \end{matrix} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} d^j & \gamma^j \\ \beta^j & \alpha^j \end{bmatrix} \begin{matrix} n+\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{c} H^\phi \\ H^\psi \\ 0 \end{array} \right]^{j+1} \end{matrix} \quad (3-45.2)$$

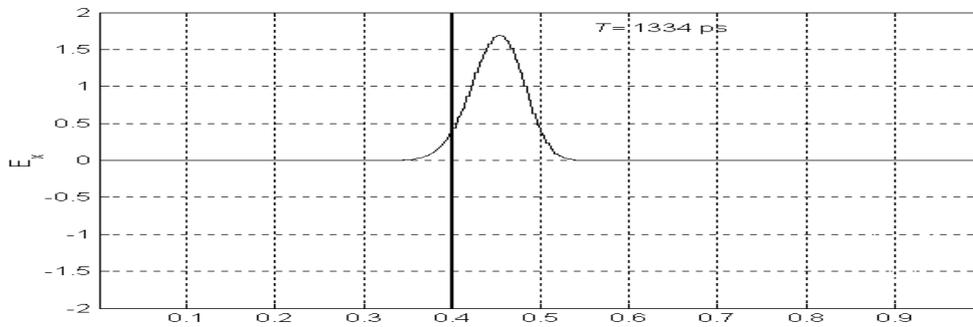
donde se puede apreciar que la actualización de los coeficientes de wavelet en la zona de alta resolución se produce debido al acoplamiento que existe entre los coeficientes de escala y de wavelet.

En la figura 3.5 hemos representado la propagación de un pulso gaussiano en un dominio de simulación como el descrito en la figura 3.4. El espacio de simulación tiene una longitud de 1 m, y lo hemos discretizado dividiéndolo en 200 celdas. Esta discretización da lugar a una resolución espacial de $\Delta z = 5$ mm correspondiente al nivel de resolución mínimo, es decir, para $j = 0$. De este modo, la reconstrucción de los campos en la zona de alta resolución ($j = 1$) dará lugar a una separación entre los puntos de muestreo de $\Delta z/2 = 0,25$ mm. El pulso introducido tiene su centro a 0,4 m de la separación entre las dos regiones y tiene una anchura de $20\Delta z$. En las figuras 3.5.a-c se observa la propagación del pulso en la zona de baja resolución, hasta llegar a la posición

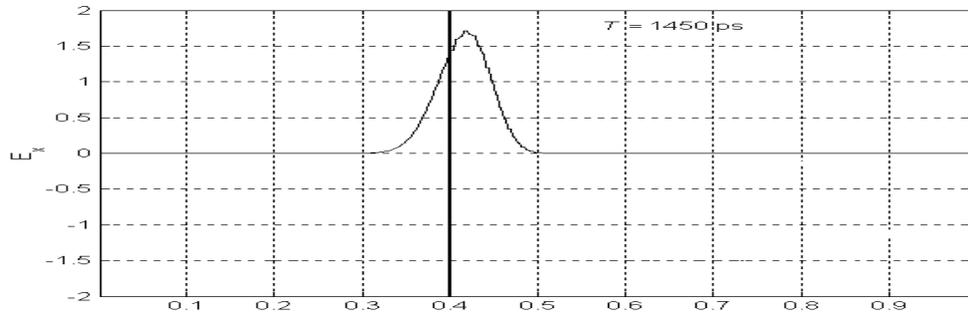
de separación entre las dos zonas. En la figura 3.5.d se puede apreciar cómo al pasar de una zona a otra se obtiene una mayor resolución espacial del pulso, debido al aumento en la densidad de puntos de muestreo.



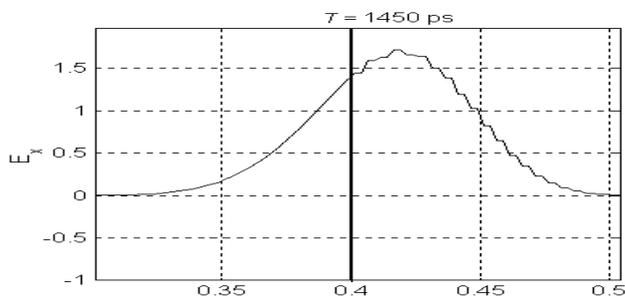
(a)



(b)



(c)



(d)

**Detalle de la zona
de transición**

Figura 3.5.: Propagación de un pulso gaussiano. El dominio de simulación está dividido en dos regiones de diferente resolución.

3.3.- FORMULACIÓN 2D

Consideremos la situación en que ni el campo electromagnético ni la estructura que estamos modelando presentan variación en una de las coordenadas espaciales, por ejemplo, que no haya dependencia respecto a la coordenada y . Esto significa que las derivadas parciales de los campos respecto a la coordenada y son nulas, y que la estructura se extiende de forma indefinida a lo largo del eje y . En esta situación, las seis ecuaciones escalares de Maxwell en un medio lineal, homogéneo, isotrópico y no dispersivo, descritas en (3.1) se reducen a dos conjuntos de ecuaciones independientes entre sí, en cada uno de los cuales intervienen únicamente tres componentes del campo:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mathbf{m} \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (3-46.1)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mathbf{m} \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (3-46.2)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \mathbf{e} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (3-46.3)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \mathbf{e} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (3-47.1)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\mathbf{e} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (3-47.2)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mathbf{m} \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (3-47.3)$$

El conjunto de ecuaciones (3-46) donde sólo intervienen las componentes E_y , H_x y H_z se denomina “modo transversal magnético” (TM) y el conjunto de ecuaciones (3-47) donde sólo intervienen las componentes H_y , E_x y E_z se denomina “modo transversal eléctrico” (TE). Se denominan así porque en el modo TM el campo magnético es transversal a la dirección en la que no hay dependencia, la dirección y en este caso, y en el modo TE, lo es el campo eléctrico. En las ecuaciones (3-46) y (3-47), se puede observar que las distribuciones TE y TM son completamente independientes, por lo tanto, pueden existir simultáneamente sin interactuar entre sí.

Por ejemplo, vamos a analizar la propagación en un medio homogéneo, lineal, isótropo y no dispersivo de un modo TM en dos dimensiones descrito por el conjunto de ecuaciones dado en (3-46), donde los campos varían únicamente en el plano \mathbf{XZ} . El otro modo TE se podría estudiar de forma análoga, intercambiando $\mathbf{E-H}$, y $\mathbf{e-m}$ en las ecuaciones.

Del mismo modo que se hizo para la formulación en una dimensión, desarrollamos cada una de las componentes de los campos utilizando un conjunto de funciones ortonormales de escala y de wavelet en las variables espaciales $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} = x, z$, y funciones pulso $h(t)$ en la variable temporal. De acuerdo con las propiedades descritas en las expresiones (2-18), el espacio $L^2(\mathbf{R}^2)$ se desarrolla de la siguiente forma [54]:

$$L^2(\mathbf{R}^2) = (S_{1D}^0 \oplus W_{1D}^0 \oplus W_{1D}^1 \oplus W_{1D}^2 \oplus \dots) \otimes (S_{1D}^0 \oplus W_{1D}^0 \oplus W_{1D}^1 \oplus W_{1D}^2 \oplus \dots) \quad (3-48)$$

donde S_{1D}^j y W_{1D}^j representan los subespacios de $L^2(\mathbf{R})$ definidos en el capítulo anterior, cuyas funciones base son las funciones de escala y de wavelet unidimensionales $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, respectivamente.

De esta forma, utilizando las funciones ortonormales siguientes

$$\mathbf{f}_k^j(\mathbf{x}) = 2^{\frac{j}{2}} \mathbf{f}(2^j \frac{\mathbf{x}}{\Delta \mathbf{x}} - k) \quad (3-49.1)$$

$$\mathbf{y}_k^j(\mathbf{x}) = 2^{\frac{j}{2}} \mathbf{y}(2^j \frac{\mathbf{x}}{\Delta \mathbf{x}} - k) \quad (3-49.2)$$

$$h_n(t) = h(\frac{t}{\Delta t} - n) \quad (3-49.3)$$

las componentes del campo eléctrico y magnético se desarrollan como sigue:

$$E_y(x, z, t) = \sum_n \left[\begin{aligned} & \sum_i \sum_k^n E_{i,k}^{f^0 f^0} f_i^0(x) f_k^0(z) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_i \sum_k^n E_{i,k}^{f^p y^q} f_i^p(x) y_k^q(z) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_i \sum_k^n E_{i,k}^{y^p f^q} y_i^p(x) f_k^q(z) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_i \sum_k^n E_{i,k}^{y^p y^q} y_i^p(x) y_k^q(z) \end{aligned} \right] \cdot h_n(t) \quad (3-50.1)$$

$$H_x(x, z, t) = \sum_n \left[\begin{aligned} & \sum_i \sum_k^{n+\frac{1}{2}} H_{i,k}^{f^0 f^0} f_i^0(x) f_k^0(z) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_i \sum_k^{n+\frac{1}{2}} H_{i,k}^{f^p y^q} f_i^p(x) y_k^q(z) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_i \sum_k^{n+\frac{1}{2}} H_{i,k}^{y^p f^q} y_i^p(x) f_k^q(z) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_i \sum_k^{n+\frac{1}{2}} H_{i,k}^{y^p y^q} y_i^p(x) y_k^q(z) \end{aligned} \right] \cdot h_{n+\frac{1}{2}}(t) \quad (3-50.2)$$

$$H_z(x, z, t) = \sum_n \left[\begin{aligned} & \sum_i \sum_k^{n+\frac{1}{2}} H_{i,k}^{f^0 f^0} f_i^0(x) f_k^0(z) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_i \sum_k^{n+\frac{1}{2}} H_{i,k}^{f^p y^q} f_i^p(x) y_k^q(z) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_i \sum_k^{n+\frac{1}{2}} H_{i,k}^{y^p f^q} y_i^p(x) f_k^q(z) + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_i \sum_k^{n+\frac{1}{2}} H_{i,k}^{y^p y^q} y_i^p(x) y_k^q(z) \end{aligned} \right] \cdot h_{n+\frac{1}{2}}(t) \quad (3-50.3)$$

donde los índices p y q indican el nivel de resolución de las funciones de escala y de wavelet, y los índices i , k y n se corresponden con las coordenadas espaciales y temporal mediante $x = i \cdot \Delta x$, $z = k \cdot \Delta z$ y $t = n \cdot \Delta t$, siendo Δx y Δz los intervalos de discretización espacial en las direcciones \mathbf{x} y \mathbf{z} , y Δt la discretización temporal.

De esta forma, las funciones base del espacio $L^2(\mathbf{R})$ se forman a partir de la combinación de funciones de escala y de wavelet unidimensionales. Por sencillez en la notación, se pueden definir las siguientes funciones de escala y de wavelet bidimensionales:

$$s_{i,k}^{f^p f^q}(x, z) = \mathbf{f}_i^p(x) \cdot \mathbf{f}_k^q(z) \quad (3-51.1)$$

$$s_{i,k}^{f^p y^q}(x, z) = \mathbf{f}_i^p(x) \cdot \mathbf{y}_k^q(z) \quad (3-51.2)$$

$$s_{i,k}^{y^p f^q}(x, z) = \mathbf{y}_i^p(x) \cdot \mathbf{f}_k^q(z) \quad (3-51.3)$$

$$s_{i,k}^{y^p y^q}(x, z) = \mathbf{y}_i^p(x) \cdot \mathbf{y}_k^q(z) \quad (3-51.4)$$

En la figura 3.6 se han representado las funciones definidas en (3-51), cuando \mathbf{f} y \mathbf{y} son funciones de Haar (wavelets D_1) y $p = q = 0$.

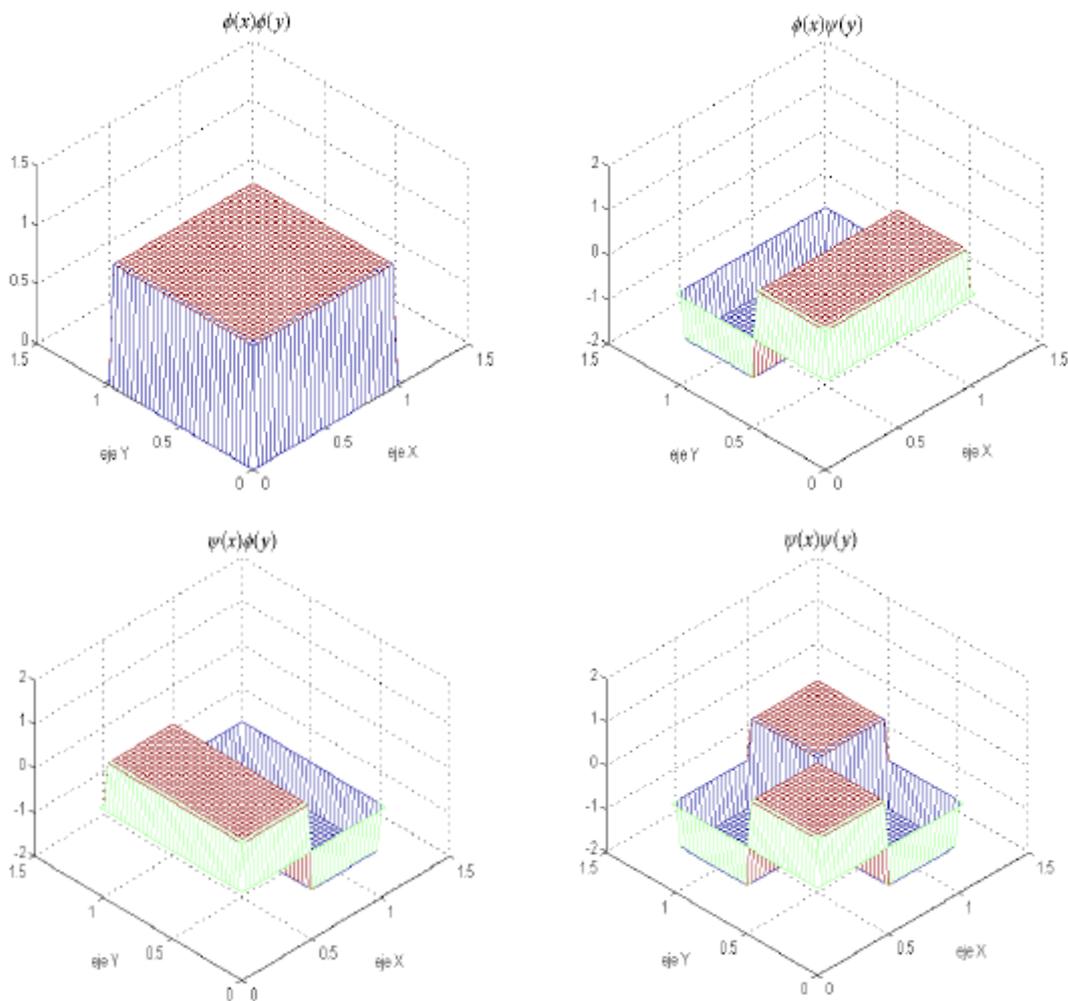


Figura 3.6.: Funciones wavelets de Haar 2D

Introduciendo las expresiones (3-50) en las ecuaciones (3-46) y muestreando con $h_n(t)$ y $h_{n+1/2}(t)$, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones que definen nuestro algoritmo:

Los sumatorios de las ecuaciones (3-52) en los que intervienen los índices p y q , correspondientes al nivel de resolución de las funciones de escala y de wavelet, se pueden truncar tomando un número finito de términos. Por sencillez en los desarrollos, vamos a considerar que el número de términos en ambos sumatorios es el mismo. De esta forma, si tomamos $J-1$ términos en dichos sumatorios, lo que se obtiene es una aproximación de nivel J . Así, las ecuaciones (3-52) se pueden reescribir de forma abreviada como sigue:

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_x^J(x, z) = {}^{n-\frac{1}{2}}H_x^J(x, z) + \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial}{\partial z} {}^n E_y^J(x, z) \quad (3-53.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_z^J(x, z) = {}^{n-\frac{1}{2}}H_z^J(x, z) - \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial}{\partial x} {}^n E_y^J(x, z) \quad (3-53.2)$$

$${}^{n+1}E_y^J(x, z) = {}^n E_y^J(x, z) + \frac{\Delta t}{e} \left[\frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}H_x^J(x, z) - \frac{\partial}{\partial x} {}^{n+\frac{1}{2}}H_z^J(x, z) \right] \quad (3-53.3)$$

donde ${}^n F_x^J$ representa la aproximación de nivel J de la componente \mathbf{x} del campo F en el instante de tiempo $t = n\Delta t$.

3.3.1.- Desarrollo con funciones de escala

Las ecuaciones descritas en (3-53) también se pueden representar de forma matricial. Si consideramos un único nivel de resolución utilizando únicamente funciones de escala de nivel J , las ecuaciones del algoritmo serán las siguientes:

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x^{ff}]^J = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x^{ff}]^J + \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial}{\partial z} {}^n [\mathbf{E}_y^{ff}]^J \quad (3-54.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z^{ff}]^J = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z^{ff}]^J - \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial}{\partial x} {}^n [\mathbf{E}_y^{ff}]^J \quad (3-54.2)$$

$${}^{n+1}[\mathbf{E}_y^{ff}]^J = {}^n [\mathbf{E}_y^{ff}]^J + \frac{\Delta t}{e} \left[\frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x^{ff}]^J - \frac{\partial}{\partial x} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z^{ff}]^J \right] \quad (3-54.3)$$

donde ${}^n[\mathbf{F}_x^{ff}]^J = [{}^n F_{i,k}^{ff}]^J$ (con $\mathbf{x} = x,y,z$) representa la matriz formada por los coeficientes de escala de la componente F_x en el instante $t = n\Delta t$, y que da lugar a la reconstrucción de nivel J .

En estas ecuaciones tenemos un operador derivada para cada una de las coordenadas espaciales. Por lo tanto, se pueden construir dos operadores derivativos de resolución J del mismo modo que se hizo en (3-38). De esta forma, las dos matrices derivativas vendrán dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \mathbf{D}_x^J = \left[\begin{array}{c} \langle \mathbf{f}_k^J(x), \mathbf{f}_l^J(x) \rangle \end{array} \right] = \frac{1}{\Delta x} \left[\begin{array}{c} d_{k,l}^J \end{array} \right] \quad (3-55.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \mathbf{D}_z^J = \left[\begin{array}{c} \langle \mathbf{f}_k^J(z), \mathbf{f}_l^J(z) \rangle \end{array} \right] = \frac{1}{\Delta z} \left[\begin{array}{c} d_{k,l}^J \end{array} \right] \quad (3-55.2)$$

Es muy importante tener en cuenta la disposición de los elementos en la matriz ${}^n[\mathbf{F}_x^{ff}]^J$ para poder calcular las derivadas. En nuestro caso tenemos que las filas representan la coordenada x y las columnas representan la coordenada z . Esto es importante a la hora de evaluar la derivada espacial, porque dependiendo de la coordenada, la matriz derivativa actuará sobre las filas al derivar respecto de la coordenada z $[\mathbf{D}_z]$ o bien actuará sobre las columnas al derivar respecto de la coordenada x $[\mathbf{D}_x]$. Esta operación se debe realizar tantas veces como filas, o columnas, haya. En la figura 3.7 tenemos un esquema con la distribución de los elementos de la matriz ${}^n[\mathbf{F}_x^{ff}]^J$ y hemos indicado el modo de seleccionar los coeficientes según qué coordenada se quiera derivar.

Al igual que sucede en el caso unidimensional, el hecho de que para el nivel de resolución base la matriz derivativa esté formada únicamente por una banda de anchura limitada hace que podamos reescribir el algoritmo, sólo en el nivel base, como un esquema en diferencias finitas. Así, las ecuaciones expresadas en (3-54) quedarían de la siguiente forma:

$${}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,k}^{ff} = {}^{n-\frac{1}{2}}_x H_{i,k}^{ff} + \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,k-m}^{ff} \quad (3-56.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i,k}^{ff} = {}^{n-\frac{1}{2}}_z H_{i,k}^{ff} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,k}^{ff} \quad (3-56.2)$$

$${}^{n+1}_y E_{i,k}^{ff} = {}^n E_{i,k}^{ff} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,k-m}^{ff} - \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i-m,k}^{ff} \right] \quad (3-56.3)$$

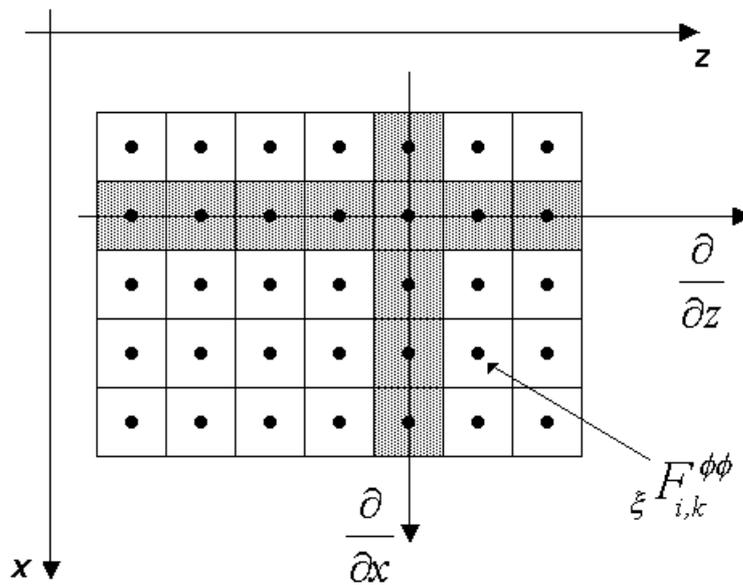


Figura 3.7.: Representación de la matriz $[F_x^{ff}]$. La derivada se calcula por filas o por columnas dependiendo de la coordenada respecto a la que se deriva.

3.3.2.- Desarrollo con funciones de escala y de wavelet

Si se quiere aumentar la resolución de la solución obtenida a partir de las ecuaciones (3-54), se pueden introducir en los desarrollos funciones de wavelet. Por claridad en la exposición, vamos a introducir funciones de wavelet de nivel J en los desarrollos de ambas coordenadas. De esta forma lo que se obtiene es una solución de nivel $J+1$.

Con el fin de expresar las ecuaciones del algoritmo en forma matricial vamos a definir las siguientes submatrices:

$${}^n[\mathbf{F}_x^{ff}]^{J+1} = [{}^n F_{i,k}^{ff}]^{J+1} \quad (3-57.1)$$

$${}^n[\mathbf{F}_x^{fy}]^{J+1} = [{}^n F_{i,k}^{fy}]^{J+1} \quad (3-57.2)$$

$${}^n[\mathbf{F}_x^{yf}]^{J+1} = [{}^n F_{i,k}^{yf}]^{J+1} \quad (3-57.3)$$

$${}^n[\mathbf{F}_x^{yy}]^{J+1} = [{}^n F_{i,k}^{yy}]^{J+1} \quad (3-57.4)$$

donde $\mathbf{x} = x, y, z$. Estas submatrices están formadas por los coeficientes de escala y de wavelet en cada una de las dos coordenadas de la componente F_x en el instante $t = n\Delta t$, y que dan lugar a la reconstrucción de nivel $J+1$. Por ejemplo, los superíndices F^{fy} indican que se han utilizado funciones de escala para la primera coordenada (x) y funciones de wavelet para la segunda coordenada (z). El algoritmo estará formado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$${}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_x^{ff}] & [\mathbf{H}_x^{fy}] \\ [\mathbf{H}_x^{yf}] & [\mathbf{H}_x^{yy}] \end{bmatrix}^{J+1} = {}^{n-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_x^{ff}] & [\mathbf{H}_x^{fy}] \\ [\mathbf{H}_x^{yf}] & [\mathbf{H}_x^{yy}] \end{bmatrix}^{J+1} + \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} [\mathbf{E}_y^{ff}] & [\mathbf{E}_y^{fy}] \\ [\mathbf{E}_y^{yf}] & [\mathbf{E}_y^{yy}] \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-58.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_z^{ff}] & [\mathbf{H}_z^{fy}] \\ [\mathbf{H}_z^{yf}] & [\mathbf{H}_z^{yy}] \end{bmatrix}^{J+1} = {}^{n-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_z^{ff}] & [\mathbf{H}_z^{fy}] \\ [\mathbf{H}_z^{yf}] & [\mathbf{H}_z^{yy}] \end{bmatrix}^{J+1} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} [\mathbf{E}_y^{ff}] & [\mathbf{E}_y^{fy}] \\ [\mathbf{E}_y^{yf}] & [\mathbf{E}_y^{yy}] \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-58.2)$$

$${}^{n+1} \begin{bmatrix} [\mathbf{E}_y^{ff}] & [\mathbf{E}_y^{fy}] \\ [\mathbf{E}_y^{yf}] & [\mathbf{E}_y^{yy}] \end{bmatrix}^{J+1} = {}^n \begin{bmatrix} [\mathbf{E}_y^{ff}] & [\mathbf{E}_y^{fy}] \\ [\mathbf{E}_y^{yf}] & [\mathbf{E}_y^{yy}] \end{bmatrix}^{J+1} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x^{ff}] & [\mathbf{H}_x^{fy}] \\ [\mathbf{H}_x^{yf}] & [\mathbf{H}_x^{yy}] \end{bmatrix}^{J+1} \\ \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z^{ff}] & [\mathbf{H}_z^{fy}] \\ [\mathbf{H}_z^{yf}] & [\mathbf{H}_z^{yy}] \end{bmatrix}^{J+1} \end{bmatrix} \quad (3-58.3)$$

Ahora las matrices derivativas se deben modificar incorporando funciones de escala y de wavelet de nivel J de la forma mostrada en (3-39). Como resultado obtenemos las siguientes matrices:

$$\mathbf{D}_z^{J+1} = \left[\begin{array}{c|c} \langle \mathbf{f}_m^J, \mathbf{f}_l^J \rangle & \langle \mathbf{f}_m^J, \mathbf{y}_l^{J'} \rangle \\ \hline \langle \mathbf{y}_m^J, \mathbf{f}_l^J \rangle & \langle \mathbf{y}_m^J, \mathbf{y}_l^{J'} \rangle \end{array} \right] = \frac{1}{\Delta z} \left[\begin{array}{c|c} d_{m,l}^J & \mathbf{g}_{m,l}^J \\ \hline \mathbf{b}_{m,l}^J & \mathbf{a}_{m,l}^J \end{array} \right] \quad (3-59.1)$$

$$\mathbf{D}_x^{J+1} = \left[\begin{array}{c|c} \langle \mathbf{f}_m^J, \mathbf{f}_l^J \rangle & \langle \mathbf{f}_m^J, \mathbf{y}_l^{J'} \rangle \\ \hline \langle \mathbf{y}_m^J, \mathbf{f}_l^J \rangle & \langle \mathbf{y}_m^J, \mathbf{y}_l^{J'} \rangle \end{array} \right] = \frac{1}{\Delta x} \left[\begin{array}{c|c} d_{m,l}^J & \mathbf{g}_{m,l}^J \\ \hline \mathbf{b}_{m,l}^J & \mathbf{a}_{m,l}^J \end{array} \right] \quad (3-59.2)$$

Para calcular la derivada debemos aplicar las matrices derivativas \mathbf{D}_x y \mathbf{D}_z a los coeficientes de las submatrices $[\mathbf{F}_x^{ff}], [\mathbf{F}_x^{fy}], [\mathbf{F}_x^{yf}], [\mathbf{F}_x^{yy}]$. Hay que tener en cuenta que las matrices derivativas actúan sobre el vector de coeficientes de escala y de wavelet ordenados de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a^J \\ - \\ b^J \end{bmatrix} \quad (3-59.3)$$

Entonces, dado que tenemos coeficientes de escala y de wavelet en las dos coordenadas x y z , esta ordenación se debe hacer dependiendo de la coordenada respecto a la que estamos derivando. Por ejemplo, si estamos derivando respecto de x , los coeficientes de este vector los hemos organizado colocando los coeficientes de escala y de wavelet de la coordenada x de este modo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\begin{array}{c} [\mathbf{F}_x^{ff}] \\ [\mathbf{F}_x^{yf}] \end{array} \right]_{\text{columnas}}^{J+1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{D}_x^{J+1} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} [\mathbf{F}_x^{ff}] \\ [\mathbf{F}_x^{yf}] \end{array} \right]_{\text{columnas}}^{J+1} \quad (3-60.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\begin{array}{c} [\mathbf{F}_x^{fy}] \\ [\mathbf{F}_x^{yy}] \end{array} \right]_{\text{columnas}}^{J+1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{D}_x^{J+1} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} [\mathbf{F}_x^{fy}] \\ [\mathbf{F}_x^{yy}] \end{array} \right]_{\text{columnas}}^{J+1} \quad (3-60.2)$$

Si derivamos respecto de z , los coeficientes los organizamos de este otro modo:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{ff}]^{J+1} \\ [\mathbf{F}_x^{fy}]_{\text{filas}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_z^{J+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{ff}]^{J+1} \\ [\mathbf{F}_x^{fy}]_{\text{filas}} \end{bmatrix} \quad (3-61.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{yf}]^{J+1} \\ [\mathbf{F}_x^{yy}]_{\text{filas}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_z^{J+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{yf}]^{J+1} \\ [\mathbf{F}_x^{yy}]_{\text{filas}} \end{bmatrix} \quad (3-61.2)$$

En la figura 3.8. hemos representado una distribución de las submatrices $[\mathbf{F}_x^{ff}]$, $[\mathbf{F}_x^{fy}]$, $[\mathbf{F}_x^{yf}]$, $[\mathbf{F}_x^{yy}]$ que ayuda a organizar los coeficientes para el cálculo de las derivadas. Según esta distribución de coeficientes, la derivada respecto de x la calculamos ordenando la matriz por columnas para formar el vector (3-59.3), mientras que la derivada respecto de z la calculamos ordenando la matriz por filas.

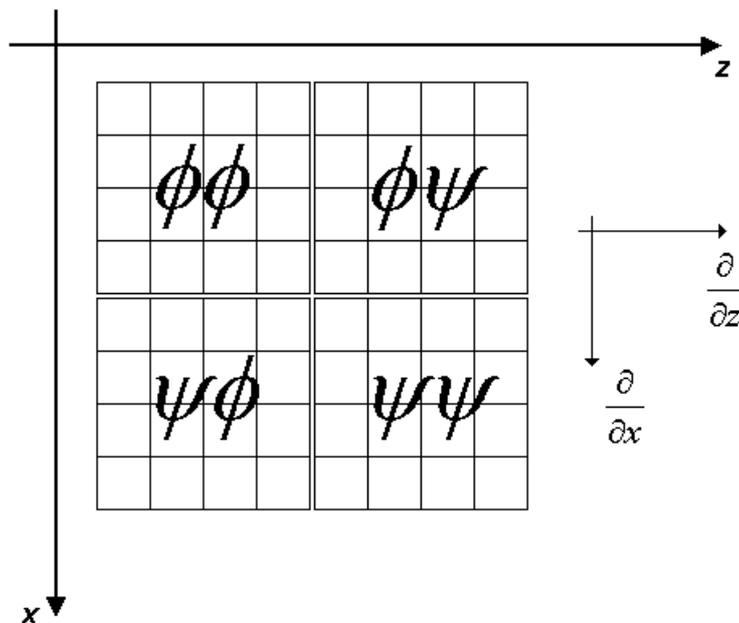


Figura 3.8.: Ordenación de las submatrices $[\mathbf{F}_x^{ff}]$, $[\mathbf{F}_x^{fy}]$, $[\mathbf{F}_x^{yf}]$, $[\mathbf{F}_x^{yy}]$ para facilitar el cálculo de la derivada respecto de cada una de las coordenadas.

Una vez que disponemos de todos los coeficientes, el valor real de los campos en cada punto del espacio se calcula utilizando la Transformada Inversa en Wavelets de dos dimensiones (DWT_{2D}), descrita en el apartado 2.3.1

El algoritmo descrito en las ecuaciones (3-58), con dos únicos niveles de resolución (escala + wavelet), se puede reformular y expresar como un esquema de diferencias finitas, debido a la distribución en bandas de los coeficientes derivativos dentro de las matrices derivativas \mathbf{D}_x y \mathbf{D}_z mostradas en (3-59). De este modo, el algoritmo estaría dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff} = {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff} + \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m d_m^J {}^n E_{i,k-m}^{ff} + \sum_m \mathbf{g}_m^J {}^n E_{i,k-m}^{fy} \right] \quad (3-62.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{fy} = {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{fy} + \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J {}^n E_{i,k-m}^{ff} + \sum_m \mathbf{a}_m^J {}^n E_{i,k-m}^{fy} \right] \quad (3-62.2)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{yf} = {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{yf} + \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m d_m^J {}^n E_{i,k-m}^{yf} + \sum_m \mathbf{g}_m^J {}^n E_{i,k-m}^{yy} \right] \quad (3-62.3)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{yy} = {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{yy} + \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J {}^n E_{i,k-m}^{yf} + \sum_m \mathbf{a}_m^J {}^n E_{i,k-m}^{yy} \right] \quad (3-62.4)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff} = {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta x} \left[\sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,k}^{ff} + \sum_m \mathbf{g}_m^J {}^n E_{i-m,k}^{yf} \right] \quad (3-63.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{yf} = {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{yf} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta x} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J {}^n E_{i-m,k}^{ff} + \sum_m \mathbf{a}_m^J {}^n E_{i-m,k}^{yf} \right] \quad (3-63.2)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{fy} = {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{fy} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta x} \left[\sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,k}^{fy} + \sum_m \mathbf{g}_m^J {}^n E_{i-m,k}^{yy} \right] \quad (3-63.3)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{yy} = {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{yy} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta x} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J {}^n E_{i-m,k}^{fy} + \sum_m \mathbf{a}_m^J {}^n E_{i-m,k}^{yy} \right] \quad (3-63.4)$$

$${}^{n+1}E_{i,k}^{ff} = {}^n E_{i,k}^{ff} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k-m}^{ff} + \sum_m \mathbf{g}_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k-m}^{fy} \right] - \frac{1}{\Delta x} \left[\sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i-m,k}^{ff} + \sum_m \mathbf{g}_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i-m,k}^{yf} \right] \right] \quad (3-64.1)$$

$${}^{n+1}_y E_{i,k}^{fy} = {}^n E_{i,k}^{fy} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J H_{i,k-m}^{ff} + \sum_m \mathbf{a}_m^J H_{i,k-m}^{fy} \right] - \frac{1}{\Delta x} \left[\sum_m \mathbf{d}_m^J H_{i-m,k}^{fy} + \sum_m \mathbf{g}_m^J H_{i-m,k}^{yy} \right] \right] \quad (3-64.2)$$

$${}^{n+1}_y E_{i,k}^{yf} = {}^n E_{i,k}^{yf} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m \mathbf{d}_m^J H_{i,k-m}^{yf} + \sum_m \mathbf{g}_m^J H_{i,k-m}^{yy} \right] - \frac{1}{\Delta x} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J H_{i-m,k}^{ff} + \sum_m \mathbf{a}_m^J H_{i-m,k}^{yf} \right] \right] \quad (3-64.3)$$

$${}^{n+1}_y E_{i,k}^{yy} = {}^n E_{i,k}^{yy} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J H_{i,k-m}^{yf} + \sum_m \mathbf{a}_m^J H_{i,k-m}^{yy} \right] - \frac{1}{\Delta x} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J H_{i-m,k}^{fy} + \sum_m \mathbf{a}_m^J H_{i-m,k}^{yy} \right] \right] \quad (3-64.4)$$

Si se desea aumentar aún más la resolución de la solución, se pueden introducir en el algoritmo nuevas funciones de wavelet de nivel $J+1$, obteniéndose una solución de nivel $J+2$. Ahora, las componentes del campo electromagnético se desarrollan mediante las nueve funciones de escala y de wavelet siguientes:

$$s_{i,k}^{f^J f^J}(x, z) = \mathbf{f}_i^J(x) \cdot \mathbf{f}_k^J(z) \quad (3-65.1)$$

$$s_{i,k}^{f^J y^J}(x, z) = \mathbf{f}_i^J(x) \cdot \mathbf{y}_k^J(z) \quad (3-65.2)$$

$$s_{i,k}^{f^J y^{J+1}}(x, z) = \mathbf{f}_i^J(x) \cdot \mathbf{y}_k^{J+1}(z) \quad (3-65.3)$$

$$s_{i,k}^{y^J f^J}(x, z) = \mathbf{y}_i^J(x) \cdot \mathbf{f}_k^J(z) \quad (3-65.4)$$

$$s_{i,k}^{y^J y^J}(x, z) = \mathbf{y}_i^J(x) \cdot \mathbf{y}_k^J(z) \quad (3-65.5)$$

$$s_{i,k}^{y^J y^{J+1}}(x, z) = \mathbf{y}_i^J(x) \cdot \mathbf{y}_k^{J+1}(z) \quad (3-65.6)$$

$$s_{i,k}^{y^{J+1} f^J}(x, z) = \mathbf{y}_i^{J+1}(x) \cdot \mathbf{f}_k^J(z) \quad (3-65.7)$$

$$s_{i,k}^{y^{J+1} y^J}(x, z) = \mathbf{y}_i^{J+1}(x) \cdot \mathbf{y}_k^J(z) \quad (3-65.8)$$

$$s_{i,k}^{y^{J+1} y^{J+1}}(x, z) = \mathbf{y}_i^{J+1}(x) \cdot \mathbf{y}_k^{J+1}(z) \quad (3-65.9)$$

El algoritmo queda descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x]^{J+2} = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x]^{J+2} + \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial}{\partial z} {}^n[\mathbf{E}_y]^{J+2} \quad (3-66.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z]^{J+2} = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z]^{J+2} - \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial}{\partial x} {}^n[\mathbf{E}_y]^{J+2} \quad (3-66.2)$$

$${}^{n+1}[\mathbf{E}_y]^{J+2} = {}^n[\mathbf{E}_y]^{J+2} + \frac{\Delta t}{e} \left[\frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x]^{J+2} - \frac{\partial}{\partial x} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z]^{J+2} \right] \quad (3-66.3)$$

donde la matriz ${}^n[F_\xi]^{J+2}$ está compuesta por los coeficientes del desarrollo de la componente F_x en términos de las nueve funciones base (3-65), en el instante $t = n\Delta t$, y que dan lugar a la reconstrucción de nivel $J+2$. La organización de estos coeficientes dentro de la matriz está representada en la figura 3.9

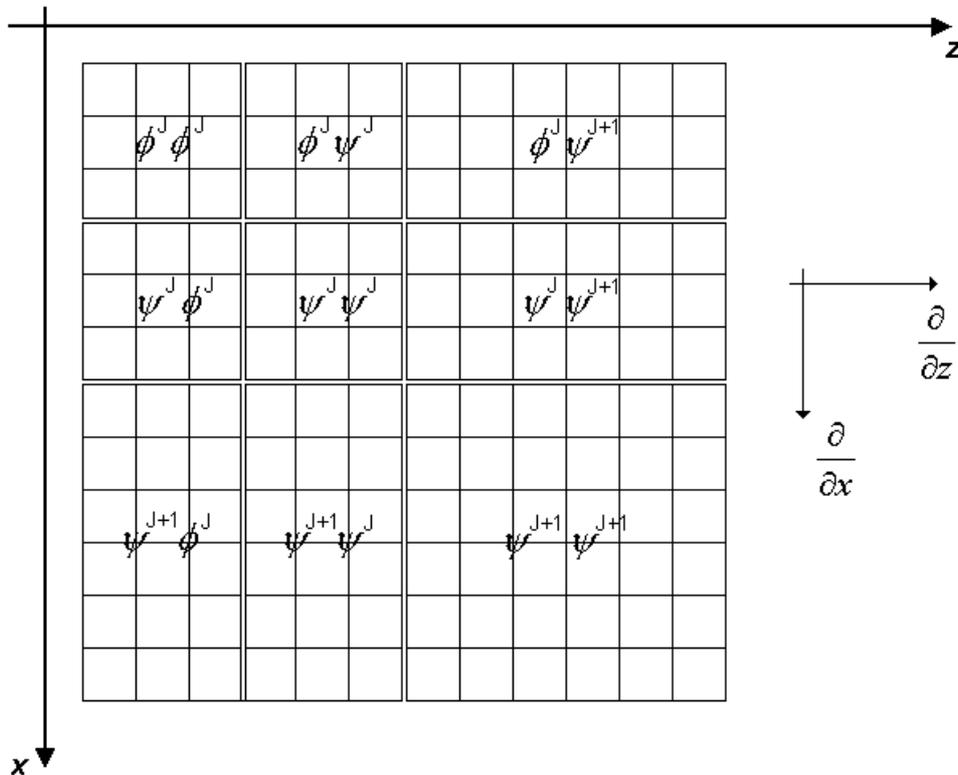


Figura 3.9.: Distribución de los coeficientes dentro de la matriz $[F_x]$

Las matrices derivativas \mathbf{D}_x^{J+2} y \mathbf{D}_z^{J+2} se construyen de la forma indicada en (3-36). De este modo, para cada coordenada tenemos la siguiente matriz:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \equiv \mathbf{D}_x^{J+2} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_{k_j}^J, \mathbf{f}_{l_j}^J \rangle & \langle \mathbf{f}_{k_j}^J, \mathbf{y}_{l_j}^{J'} \rangle & \langle \mathbf{f}_{k_j}^J, \mathbf{y}_{l_{j+1}}^{J'+1} \rangle \\ \langle \mathbf{y}_{k_j}^J, \mathbf{f}_{l_j}^J \rangle & \langle \mathbf{y}_{k_j}^J, \mathbf{y}_{l_j}^{J'} \rangle & \langle \mathbf{y}_{k_j}^J, \mathbf{y}_{l_{j+1}}^{J'+1} \rangle \\ \langle \mathbf{y}_{k_{j+1}}^{J+1}, \mathbf{f}_{l_j}^J \rangle & \langle \mathbf{y}_{k_{j+1}}^{J+1}, \mathbf{y}_{l_j}^{J'} \rangle & \langle \mathbf{y}_{k_{j+1}}^{J+1}, \mathbf{y}_{l_{j+1}}^{J'+1} \rangle \end{bmatrix} \quad (3-67.1)$$

con $\mathbf{x} = x, z$.

Estas matrices actúan sobre los coeficientes de escala y de wavelet del desarrollo ordenados, para cada coordenada, de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a^J \\ - \\ b^J \\ - \\ b^{J+1} \end{bmatrix} \quad (3-67.2)$$

Esto significa que, la derivada de la componente F_x respecto de x se calcula multiplicando la matriz derivativa \mathbf{D}_x^{J+2} por el vector de coeficientes (3-67.2) que resulta de tomar las columnas de ${}^n[F_\xi]^{J+2}$, mientras que la derivada respecto de z se obtiene al multiplicar la matriz derivativa \mathbf{D}_z^{J+2} por el vector de coeficientes (3-67.2) formado por las filas de ${}^n[F_\xi]^{J+2}$.

3.4.- FORMULACIÓN 3D

Cuando el problema que estamos analizando no presente ningún tipo de simetría que permita considerar nula la variación de los campos respecto de alguna de las coordenadas, entonces, para abordarlo, debemos recurrir al conjunto formado por las seis ecuaciones escalares de Maxwell mostradas en (3-2). Del mismo modo que se hizo anteriormente, cada una de las componentes de los campos es desarrollada en las

variables espaciales utilizando funciones de escala y de wavelet ($\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{y}(\mathbf{x})$), con $\mathbf{x} = x, y, z$) y funciones pulso $h(t)$ en la variable temporal. Las funciones de escala y de wavelet tridimensionales se construyen a partir de las funciones de escala y de wavelet en una dimensión teniendo en cuenta las propiedades descritas en las expresiones (2-18):

$$\begin{aligned} L^2(\mathbf{R}^3) &= (S_{1D}^0 \oplus W_{1D}^0 \oplus W_{1D}^1 \oplus W_{1D}^2 \oplus \dots) \\ &\otimes (S_{1D}^0 \oplus W_{1D}^0 \oplus W_{1D}^1 \oplus W_{1D}^2 \oplus \dots) \\ &\otimes (S_{1D}^0 \oplus W_{1D}^0 \oplus W_{1D}^1 \oplus W_{1D}^2 \oplus \dots) \end{aligned} \quad (3-68)$$

donde S_{1D}^j y W_{1D}^j representan los subespacios de $L^2(\mathbf{R})$ definidos en el capítulo anterior, y cuyas funciones base son las funciones de escala y de wavelet unidimensionales $\mathbf{f}_k^j(\mathbf{x})$ y $\mathbf{y}_k^j(\mathbf{x})$, respectivamente:

$$\mathbf{f}_k^j(\mathbf{x}) = 2^{\frac{j}{2}} \mathbf{f}(2^j \frac{\mathbf{x}}{\Delta \mathbf{x}} - k) \quad (3-69.1)$$

$$\mathbf{y}_k^j(\mathbf{x}) = 2^{\frac{j}{2}} \mathbf{y}(2^j \frac{\mathbf{x}}{\Delta \mathbf{x}} - k) \quad (3-69.2)$$

Las funciones base de $L^2(\mathbf{R}^3)$ se forman combinando las funciones de escala y de wavelet unidimensionales. El resultado de esta combinación se obtiene repitiendo el proceso seguido en el apartado 2.3.2, y que daba lugar a las ecuaciones (2-51) y (2-54). De este modo, la base que estamos buscando está compuesta por las funciones::

$$s_{i,j,k}^{\mathbf{f}^p \mathbf{f}^q \mathbf{f}^r}(x, y, z) = \mathbf{f}_i^p(x) \cdot \mathbf{f}_j^q(y) \cdot \mathbf{f}_k^r(z) \quad (3-70.1)$$

$$s_{i,j,k}^{\mathbf{f}^p \mathbf{f}^q \mathbf{y}^r}(x, y, z) = \mathbf{f}_i^p(x) \cdot \mathbf{f}_j^q(y) \cdot \mathbf{y}_k^r(z) \quad (3-70.2)$$

$$s_{i,j,k}^{\mathbf{f}^p \mathbf{y}^q \mathbf{f}^r}(x, y, z) = \mathbf{f}_i^p(x) \cdot \mathbf{y}_j^q(y) \cdot \mathbf{f}_k^r(z) \quad (3-70.3)$$

$$s_{i,j,k}^{\mathbf{f}^p \mathbf{y}^q \mathbf{y}^r}(x, y, z) = \mathbf{f}_i^p(x) \cdot \mathbf{y}_j^q(y) \cdot \mathbf{y}_k^r(z) \quad (3-70.4)$$

$$s_{i,j,k}^{\mathbf{y}^p \mathbf{f}^q \mathbf{f}^r}(x, y, z) = \mathbf{y}_i^p(x) \cdot \mathbf{f}_j^q(y) \cdot \mathbf{f}_k^r(z) \quad (3-70.5)$$

$$s_{i,j,k}^{\mathbf{y}^p \mathbf{f}^q \mathbf{y}^r}(x, y, z) = \mathbf{y}_i^p(x) \cdot \mathbf{f}_j^q(y) \cdot \mathbf{y}_k^r(z) \quad (3-70.6)$$

$$s_{i,j,k}^{\mathbf{y}^p \mathbf{y}^q \mathbf{f}^r}(x, y, z) = \mathbf{y}_i^p(x) \cdot \mathbf{y}_j^q(y) \cdot \mathbf{f}_k^r(z) \quad (3-70.7)$$

$$s_{i,j,k}^{y^p y^q y^r}(x, y, z) = \mathbf{y}_i^p(x) \cdot \mathbf{y}_j^q(y) \cdot \mathbf{y}_k^r(z) \quad (3-70.8)$$

Por claridad en el desarrollo, vamos a considerar también que en las tres coordenadas la resolución aumenta de forma simultánea, es decir, pasar de un nivel de resolución J a un nivel $J+1$ significa aumentar el número de funciones de wavelet en las tres coordenadas.

3.4.1. Desarrollo con funciones de escala

Utilizando como funciones base únicamente las funciones (3-70.1) haciendo $p = q = r = J$, se obtiene una aproximación de los campos de nivel J . De esta forma, las seis ecuaciones de Maxwell (3-2) discretizadas en el tiempo, correspondientes a esta aproximación de nivel J , serán las siguientes:

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_x^J(x, y, z) = {}^{n-\frac{1}{2}}H_x^J(x, y, z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{\partial}{\partial y} {}^n E_z^J(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} {}^n E_y^J(x, y, z) \right] \quad (3-71.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_y^J(x, y, z) = {}^{n-\frac{1}{2}}H_y^J(x, y, z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{\partial}{\partial z} {}^n E_x^J(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} {}^n E_z^J(x, y, z) \right] \quad (3-71.2)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_z^J(x, y, z) = {}^{n-\frac{1}{2}}H_z^J(x, y, z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{\partial}{\partial x} {}^n E_y^J(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} {}^n E_x^J(x, y, z) \right] \quad (3-71.3)$$

$${}^{n+1}E_x^J(x, y, z) = {}^n E_x^J(x, y, z) + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{\partial}{\partial y} {}^{n+\frac{1}{2}}H_z^J(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}H_y^J(x, y, z) \right] \quad (3-71.4)$$

$${}^{n+1}E_y^J(x, y, z) = {}^n E_y^J(x, y, z) + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}H_x^J(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} {}^{n+\frac{1}{2}}H_z^J(x, y, z) \right] \quad (3-71.5)$$

$${}^{n+1}E_z^J(x, y, z) = {}^n E_z^J(x, y, z) + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{\partial}{\partial x} {}^{n+\frac{1}{2}}H_y^J(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} {}^{n+\frac{1}{2}}H_x^J(x, y, z) \right] \quad (3-71.6)$$

De forma matricial, el algoritmo se puede representar por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x^{fff}]^J = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x^{fff}]^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{\partial}{\partial y} {}^n [\mathbf{E}_z^{fff}]^J - \frac{\partial}{\partial z} {}^n [\mathbf{E}_y^{fff}]^J \right] \quad (3-72.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_y^{fff}]^J = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_y^{fff}]^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{\partial}{\partial z} {}^n[\mathbf{E}_x^{fff}]^J - \frac{\partial}{\partial x} {}^n[\mathbf{E}_z^{fff}]^J \right] \quad (3-72.2)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z^{fff}]^J = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z^{fff}]^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{\partial}{\partial x} {}^n[\mathbf{E}_y^{fff}]^J - \frac{\partial}{\partial y} {}^n[\mathbf{E}_x^{fff}]^J \right] \quad (3-72.3)$$

$${}^{n+1}[\mathbf{E}_x^{fff}]^J = {}^n[\mathbf{E}_x^{fff}]^J + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{\partial}{\partial y} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z^{fff}]^J - \frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_y^{fff}]^J \right] \quad (3-72.4)$$

$${}^{n+1}[\mathbf{E}_y^{fff}]^J = {}^n[\mathbf{E}_y^{fff}]^J + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x^{fff}]^J - \frac{\partial}{\partial x} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z^{fff}]^J \right] \quad (3-72.5)$$

$${}^{n+1}[\mathbf{E}_z^{fff}]^J = {}^n[\mathbf{E}_z^{fff}]^J + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{\partial}{\partial x} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_y^{fff}]^J - \frac{\partial}{\partial y} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x^{fff}]^J \right] \quad (3-72.6)$$

donde ${}^n[\mathbf{F}_x^{fff}]^J = [{}^n F_{i,j,k}^{fff}]^J$, siendo $\mathbf{x} = x, y, z$, representa la matriz formada por los coeficientes de escala en las tres coordenadas de la componente F_x en el instante $t = n\Delta t$, y que dan lugar a la reconstrucción de nivel J . La derivada se calcula utilizando la matriz derivativa correspondiente a cada coordenada:

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \mathbf{D}_x^J = \left[\begin{array}{c} \langle \mathbf{f}_k^J(x), \mathbf{f}_l^J(x) \rangle \end{array} \right] = \frac{1}{\Delta x} \left[\begin{array}{c} d_{k,l}^J \end{array} \right] \quad (3-73.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \equiv \mathbf{D}_y^J = \left[\begin{array}{c} \langle \mathbf{f}_k^J(y), \mathbf{f}_l^J(y) \rangle \end{array} \right] = \frac{1}{\Delta y} \left[\begin{array}{c} d_{k,l}^J \end{array} \right] \quad (3-73.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \mathbf{D}_z^J = \left[\begin{array}{c} \langle \mathbf{f}_k^J(z), \mathbf{f}_l^J(z) \rangle \end{array} \right] = \frac{1}{\Delta z} \left[\begin{array}{c} d_{k,l}^J \end{array} \right] \quad (3-73.3)$$

Estas matrices actúan sobre el vector de coeficientes del desarrollo de cada una de las componentes, organizados dentro de la matriz $[\mathbf{F}_x^{fff}]$ como se muestra en la figura 3.10. De esta manera, la derivada respecto de la coordenada \mathbf{x} se calcula multiplicando la matriz derivativa \mathbf{D}_x^J por el vector formado por los coeficientes de la matriz $[\mathbf{F}_x^{fff}]$ tomados en la dirección de la coordenada \mathbf{x} .

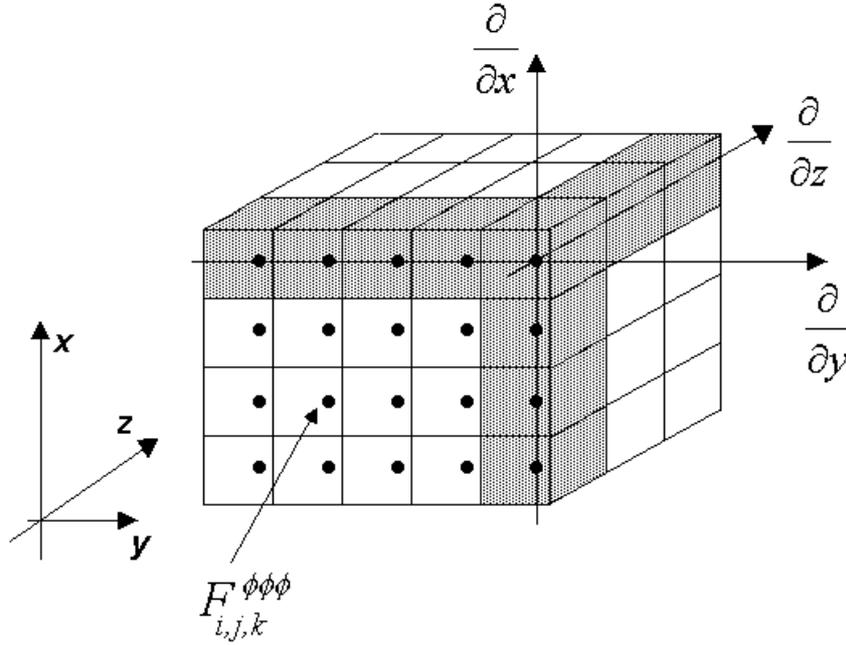


Figura 3.10.: Representación de la matriz $[\mathbf{F}_x^{fff}]$. La derivada se calcula formando el vector de coeficientes que resulta de tomarlos en la dirección de la coordenada respecto a la que se deriva.

Como se vio en el apartado 3.2, debido a que las matrices \mathbf{D}_x^J , \mathbf{D}_y^J y \mathbf{D}_z^J tienen sus coeficientes derivativos distribuidos a lo largo de una banda, las ecuaciones (3-72) se pueden reescribir de forma similar a un esquema en diferencias finitas de la siguiente forma:

$${}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,j,k}^{fff} = {}^{n-\frac{1}{2}}_x H_{i,j,k}^{fff} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,j-m,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,j,k-m}^{fff} \right] \quad (3-74.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}_y H_{i,j,k}^{fff} = {}^{n-\frac{1}{2}}_y H_{i,j,k}^{fff} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,j,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,j,k}^{fff} \right] \quad (3-74.2)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i,j,k}^{fff} = {}^{n-\frac{1}{2}}_z H_{i,j,k}^{fff} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,j,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,j-m,k}^{fff} \right] \quad (3-74.3)$$

$${}^{n+1}_x E_{i,j,k}^{fff} = {}^n E_{i,j,k}^{fff} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i,j-m,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_y H_{i,j,k-m}^{fff} \right] \quad (3-74.4)$$

$${}^{n+1}_y E_{i,j,k}^{fff} = {}^n E_{i,j,k}^{fff} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,j,k-m}^{fff} - \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i-m,j,k}^{fff} \right] \quad (3-74.5)$$

$${}^{n+1}_z E_{i,j,k}^{fff} = {}^n_z E_{i,j,k}^{fff} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_y H_{i-m,j,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,j-m,k}^{fff} \right] \quad (3-74.6)$$

Esto permite evaluar las derivadas sin necesidad de almacenar la matriz derivativa completa para cada coordenada. En su lugar, basta con disponer de los coeficientes derivativos y aplicarlos de la forma indicada en (3.74).

3.4.2. Desarrollo incluyendo funciones de wavelet

Si ahora utilizamos para desarrollar los campos las ocho funciones definidas en (3-70) con $p = q = r = J$, lo que obtenemos es una aproximación de nivel $J+1$. Las ecuaciones que describen el algoritmo son en este caso:

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x]^{J+1} = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x]^{J+1} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{\partial}{\partial y} {}^n[\mathbf{E}_z]^{J+1} - \frac{\partial}{\partial z} {}^n[\mathbf{E}_y]^{J+1} \right] \quad (3-75.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_y]^{J+1} = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_y]^{J+1} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{\partial}{\partial z} {}^n[\mathbf{E}_x]^{J+1} - \frac{\partial}{\partial x} {}^n[\mathbf{E}_z]^{J+1} \right] \quad (3-75.2)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z]^{J+1} = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z]^{J+1} - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \left[\frac{\partial}{\partial x} {}^n[\mathbf{E}_y]^{J+1} - \frac{\partial}{\partial y} {}^n[\mathbf{E}_x]^{J+1} \right] \quad (3-75.3)$$

$${}^{n+1}[\mathbf{E}_x]^{J+1} = {}^n[\mathbf{E}_x]^{J+1} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{\partial}{\partial y} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z]^{J+1} - \frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_y]^{J+1} \right] \quad (3-75.4)$$

$${}^{n+1}[\mathbf{E}_y]^{J+1} = {}^n[\mathbf{E}_y]^{J+1} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x]^{J+1} - \frac{\partial}{\partial x} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z]^{J+1} \right] \quad (3-75.5)$$

$${}^{n+1}[\mathbf{E}_z]^{J+1} = {}^n[\mathbf{E}_z]^{J+1} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{\partial}{\partial x} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_y]^{J+1} - \frac{\partial}{\partial y} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x]^{J+1} \right] \quad (3-75.6)$$

donde las matrices ${}^n[\mathbf{F}_x]^{J+1}$, con $\mathbf{x} = x, y, z$, están formadas por los coeficientes de escala y de wavelet en las tres coordenadas de la componente F_x en el instante $t = n\Delta t$, y que dan lugar a la reconstrucción de nivel $J+1$. Cada matriz ${}^n[\mathbf{F}_x]^{J+1}$ está compuesta por ocho submatrices, correspondientes a los coeficientes del desarrollo de cada una de las componentes del campo en términos de las ocho funciones base (3-70):

$${}^n[\mathbf{F}_x]^{J+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x^{fff} \\ \mathbf{F}_x^{ffy} \\ \mathbf{F}_x^{fyf} \\ \mathbf{F}_x^{fyy} \\ \mathbf{F}_x^{yff} \\ \mathbf{F}_x^{yfy} \\ \mathbf{F}_x^{yyf} \\ \mathbf{F}_x^{yyy} \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-76)$$

Estos coeficientes están distribuidos tridimensionalmente, como se indica en la figura 3.11, donde $\mathbf{x} = x,y,z$, y los superíndices indican qué tipo de función (escala o wavelet) se ha utilizado para el desarrollo de la primera coordenada (x), segunda coordenada (y) y tercera coordenada (z) respectivamente.

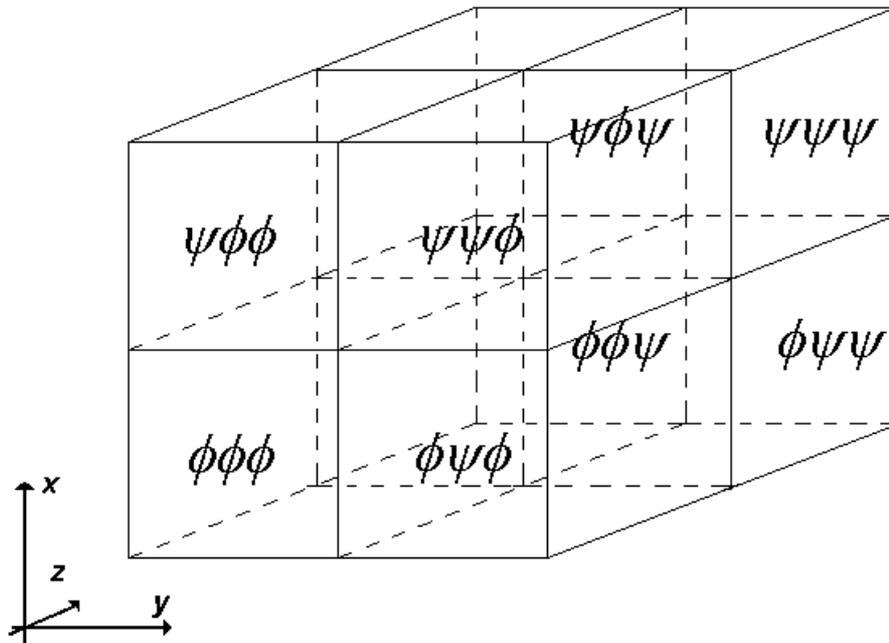


Figura 3.11.: Organización de los coeficientes dentro de la matriz $[\mathbf{F}_x]$ para facilitar el cálculo de la derivada.

La matriz derivativa para cada una de las coordenadas está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{D}_x^{J+1} = \left[\begin{array}{c|c} \langle \mathbf{f}_m^J, \mathbf{f}_l^J \rangle & \langle \mathbf{f}_m^J, \mathbf{y}_l^{J'} \rangle \\ \hline \langle \mathbf{y}_m^J, \mathbf{f}_l^J \rangle & \langle \mathbf{y}_m^J, \mathbf{y}_l^{J'} \rangle \end{array} \right] = \frac{1}{\Delta \mathbf{x}} \left[\begin{array}{c|c} d_{m,l}^J & \mathbf{g}_{m,l}^J \\ \hline \mathbf{b}_{m,l}^J & \mathbf{a}_{m,l}^J \end{array} \right] \quad (3-77)$$

con $\mathbf{x} = x, y, z$. Según esto, para calcular la derivada respecto a una de las coordenadas, aplicamos la matriz derivativa sobre los coeficientes organizados en el orden escala-wavelet. Por ejemplo, la derivada respecto a la coordenada x la hemos calculado de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{fff}] \\ [\mathbf{F}_x^{yff}] \end{bmatrix}^{J+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^{J+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{fff}] \\ [\mathbf{F}_x^{yff}] \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-78.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{ffy}] \\ [\mathbf{F}_x^{yfy}] \end{bmatrix}^{J+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^{J+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{ffy}] \\ [\mathbf{F}_x^{yfy}] \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-78.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{fyf}] \\ [\mathbf{F}_x^{yyf}] \end{bmatrix}^{J+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^{J+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{fyf}] \\ [\mathbf{F}_x^{yyf}] \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-78.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{fyy}] \\ [\mathbf{F}_x^{yyy}] \end{bmatrix}^{J+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^{J+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_x^{fyy}] \\ [\mathbf{F}_x^{yyy}] \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-78.4)$$

Organizando los coeficientes de la matriz ${}^n [\mathbf{F}_x]^{J+1}$ como se indicaba en la figura 3.11, vemos que la derivada respecto de la coordenada \mathbf{x} se calcula multiplicando la matriz derivativa \mathbf{D}_x^{J+1} por el vector formado por los coeficientes de la matriz $[\mathbf{F}_x]$ tomados en la dirección de la coordenada \mathbf{x} .

Debido a que las matrices \mathbf{D}_x^{J+1} , \mathbf{D}_y^{J+1} y \mathbf{D}_z^{J+1} también tienen sus coeficientes derivativos distribuidos a lo largo de una banda, podemos plantear el algoritmo descrito en las ecuaciones (3-75) como un esquema en diferencias finitas. De este modo, las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$${}^{n+1}E_{i,j,k}^{fff} = {}^nE_{i,j,k}^{fff} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta y} \left[\sum_m d_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{fff} + \sum_m g_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{fyf} \right] - \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m d_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{fff} + \sum_m g_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{ffy} \right] \right] \quad (3-79.1)$$

$${}^{n+1}E_{i,j,k}^{ffy} = {}^nE_{i,j,k}^{ffy} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta y} \left[\sum_m d_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{ffy} + \sum_m g_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{fyy} \right] - \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m b_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{fff} + \sum_m a_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{ffy} \right] \right] \quad (3-79.2)$$

$${}^{n+1}E_{i,j,k}^{fyf} = {}^nE_{i,j,k}^{fyf} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta y} \left[\sum_m b_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{fff} + \sum_m a_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{fyf} \right] - \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m d_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{fyf} + \sum_m g_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{fyy} \right] \right] \quad (3-79.3)$$

$${}^{n+1}E_{i,j,k}^{fyy} = {}^nE_{i,j,k}^{fyy} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta y} \left[\sum_m b_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{ffy} + \sum_m a_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{fyy} \right] - \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m b_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{fyf} + \sum_m a_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{fyy} \right] \right] \quad (3-79.4)$$

$${}^{n+1}E_{i,j,k}^{yff} = {}^nE_{i,j,k}^{yff} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta y} \left[\sum_m d_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{yff} + \sum_m g_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{yyf} \right] - \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m d_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{yff} + \sum_m g_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{yfy} \right] \right] \quad (3-79.5)$$

$${}^{n+1}E_{i,j,k}^{yfy} = {}^nE_{i,j,k}^{yfy} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta y} \left[\sum_m d_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{yfy} + \sum_m g_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{yyy} \right] - \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m b_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{yff} + \sum_m a_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{yfy} \right] \right] \quad (3-79.6)$$

$${}^{n+1}E_{i,j,k}^{yyf} = {}^nE_{i,j,k}^{yyf} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta y} \left[\sum_m b_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{yff} + \sum_m a_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{yyf} \right] - \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m d_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{yyf} + \sum_m g_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{yyy} \right] \right] \quad (3-79.7)$$

$${}^{n+1}_x E_{i,j,k}^{yyy} = {}^n_x E_{i,j,k}^{yyy} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\Delta y} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{yfy} + \sum_m \mathbf{a}_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{yyy} \right] - \\ \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{yyf} + \sum_m \mathbf{a}_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{yyy} \right] \end{array} \right] \quad (3-79.8)$$

Una vez que disponemos de todos los coeficientes, el valor real de los campos en cada punto del espacio se obtiene mediante la Transformada Inversa en Wavelets de tres dimensiones (DWT_{3D}) descrita en el apartado 2.3.2.

$${}^{n+1}_x E_{i,j,k}^{yyy} = {}^n_x E_{i,j,k}^{yyy} + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\Delta y} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{yfy} + \sum_m \mathbf{a}_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j-m,k}^{yyy} \right] - \\ \frac{1}{\Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{yyf} + \sum_m \mathbf{a}_m^{J n+\frac{1}{2}} H_{i,j,k-m}^{yyy} \right] \end{array} \right] \quad (3-79.8)$$

Una vez que disponemos de todos los coeficientes, el valor real de los campos en cada punto del espacio se obtiene mediante la Transformada Inversa en Wavelets de tres dimensiones (DWT_{3D}) descrita en el apartado 2.3.2.

3.5. CONDICIONES DE CONTORNO

La simulación de un problema electromagnético requiere, además, de la propagación del campo en un medio de características determinadas, la inclusión de los contornos o límites de la estructura bajo estudio. Esto es debido a que el dominio de la simulación tiene que ser finito, y tener, por tanto, esos límites. Esto obliga al campo electromagnético a verificar unas determinadas condiciones de contorno que es necesario incluir dentro del algoritmo.

Posiblemente la condición de contorno más utilizada en problemas electromagnéticos sea la de conductor perfecto. La superficie de un conductor perfecto determina ciertas condiciones sobre las componentes normales y tangenciales de los campos. De este modo, para un conductor eléctrico perfecto (PEC), las condiciones que deben verificar dichos campos sobre su superficie son:

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (3-80.1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3-80.2)$$

En algunos problemas, las condiciones de simetría de los mismos hacen aconsejable utilizar otro tipo de condición de contorno, similar a la anterior, y donde las condiciones de que deben verificarse son:

$$\vec{n} \times \vec{H} = 0 \quad (3-81.1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = 0 \quad (3-81.2)$$

Por analogía a la situación anterior, la superficie sobre la que se verifican estas condiciones se denomina “conductor magnético perfecto” (PMC).

La imposición sobre los campos de estas condiciones de contorno se puede abordar utilizando el “método de las imágenes”, el cual nos permite sustituir el problema por otro equivalente imponiendo ciertas condiciones de simetría sobre las componentes de los campos [62]. Esto significa que la pared eléctrica/magnética es sustituida por una estructura abierta con campos electromagnéticos simétricos. De esta forma, podemos sustituir el conductor eléctrico perfecto (PEC) por una distribución de campos donde las componentes tangenciales del campo eléctrico tienen una simetría impar, mientras que las componentes tangenciales del campo magnético tienen una simetría par (y al contrario con las componentes normales), y entonces, la solución de este problema nuevo es la misma que la del anterior que queríamos resolver (fuera del conductor), cumpliendo las condiciones (3-80). Del mismo modo, en un problema donde aparece un conductor magnético perfecto (PMC), dicha pared puede ser sustituida por una distribución de campos donde las componentes tangenciales del campo magnético poseen una simetría impar, mientras que las componentes tangenciales del campo eléctrico tienen una simetría par, y al contrario para las componentes normales, cumpliéndose de esta forma las condiciones (3-81).

Para introducir estas condiciones de contorno en nuestro algoritmo, debemos recordar primero el modo en que hemos construido la matriz derivativa. En el capítulo anterior vimos que la Transformada Discreta en Wavelets (*DWT*) utilizada era una transformada *periódica* o *circular* [46, 70], de tal manera que los elementos que están situados en los extremos se consideran contiguos. Esto significa que el espacio de simulación representado es un espacio cíclico, y por lo tanto, sin contornos, de forma que una señal que incide en un extremo, reaparece en el otro. Generalmente esto no se corresponde con los dominios de simulación más habituales, por lo que debemos modificar los algoritmos para poder incorporar las condiciones de contorno deseadas para cada problema concreto y cerrar el dominio.

Para romper esta estructura cíclica modificamos la matriz derivativa construyendo una *matriz extendida* de la forma indicada:

$$\{d_{m,l}\} = \begin{pmatrix} d_0 & d_{-1} & 0 & d_1 \\ d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 \\ 0 & d_1 & d_0 & d_{-1} \\ d_{-1} & 0 & d_1 & d_0 \end{pmatrix} \rightarrow \{d_{l,m}\}_{extendida} = \begin{pmatrix} d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_0 & d_{-1} \end{pmatrix} \quad (3-82)$$

En ella se puede observar que la matriz extendida se construye añadiendo columnas contiguas a los bordes, y cuyos elementos son los coeficientes que relacionaban los dos extremos de la estructura. El número L de columnas adyacentes en cada extremo depende del tipo de función wavelet que estemos utilizando para desarrollar los campos. Para las funciones wavelet de Haar (D_I) tenemos $L = 1$ columna adicional en cada lado, situación que corresponde a la representada en (3-82), mientras que para el resto de funciones wavelet de Daubechies de mayor orden, D_M , el número de columnas adicionales es $L = 2M - 2$ (M es el número de momentos evanescentes de la función de wavelet)

Si el desarrollo incluye términos de wavelet además de los de escala, las submatrices $\{\mathbf{a}\}$, $\{\mathbf{b}\}$ y $\{\mathbf{g}\}$ se deben modificar de la misma forma, dando como resultado la siguiente matriz extendida:

$$\mathbf{D}_{ext} = \begin{pmatrix} d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \mathbf{g}_0 & \mathbf{g}_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_0 & \mathbf{g}_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_0 & \mathbf{g}_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_0 & \gamma_{-1} \\ \beta_1 & \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_{-1} & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_{-1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_{-1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & \beta_{-1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_0 & \alpha_{-1} \end{pmatrix} \quad (3-83)$$

Dado que las dimensiones de la matriz derivativa **D** han variado al incrementar el número de columnas, el vector de coeficientes cuya derivada queremos calcular también debe ser modificado en la misma proporción. Esto significa que el vector columna de coeficientes definido en (3-23) debe ser *extendido* tanto por la parte superior (correspondiente al contorno izquierdo de nuestro dominio de simulación), como por la parte inferior (que corresponde al contorno derecho), añadiendo un número de coeficientes igual al incremento de columnas de la matriz **D**. Esto se puede ver en la siguiente expresión:

$$v_{\text{ext}} = [a'_0 \mid a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n-1} \ a_n \mid a'_{n+1} \mid b'_0 \mid b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1} \ b_n \mid b'_{n+1}] \quad (3-84)$$

Estos coeficientes adicionales representan el valor del campo en posiciones exteriores a nuestro dominio de simulación. Debido a las condiciones de simetría que imponemos para representar un conductor perfecto (PEC/PMC), podemos conocer el valor de los campos en esas nuevas posiciones, y a partir de ellos podemos calcular los coeficientes adicionales (a'_0 , a'_{n+1} , b'_0 y b'_{n+1}) necesarios para formar el vector “extendido” (3-84) imponiendo que sus valores sean tales que cumplan dichas condiciones de simetría (figura 3.12).

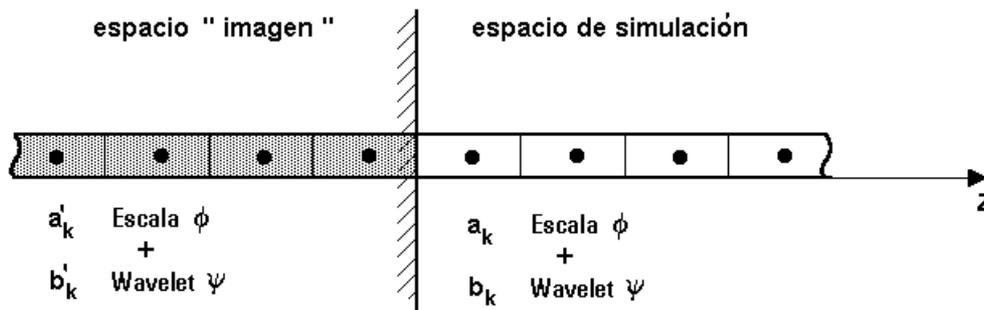


Figura 3.12.: Aplicación del Método de las Imágenes para la obtención de las condiciones de contorno correspondientes.

El modo de calcular los coeficientes adicionales depende de si son coeficientes de escala o coeficientes de wavelet, y del tipo de función wavelet empleado. Si a_k y b_k son los coeficientes de escala y de wavelet, respectivamente, situados en la posición $z = k\Delta z$, entonces los coeficientes adicionales a'_k y b'_k se calculan como indica la tabla III.

TABLA III		
Condiciones de contorno		
	<i>Izquierda</i>	<i>Derecha</i>
Simetría Par $i = 1, \dots, L$	$\begin{cases} a_{1-i}' = +a_i \\ b_{1-i}' = (-1)^M b_i \end{cases}$	$\begin{cases} a_{n_z+i}' = +a_{n_z-i+1} \\ b_{n_z+i}' = (-1)^M b_{n_z-i+1} \end{cases}$
Simetría Impar $i = 1, \dots, L$	$\begin{cases} a_{1-i}' = -a_i \\ b_{1-i}' = (-1)^{M+1} b_i \end{cases}$	$\begin{cases} a_{n_z+i}' = -a_{n_z-i+1} \\ b_{n_z+i}' = (-1)^{M+1} b_{n_z-i+1} \end{cases}$
$L = n^\circ$ de coeficientes adicionales. $n_z = n^\circ$ de puntos de muestreo en el espacio de simulación. $M =$ orden de la función de wavelet (n° de momentos evanescentes).		

3.5.1.- Condiciones de contorno en dos y tres dimensiones

Las condiciones de contorno impuestas por una pared eléctrica/magnética en un problema de dos o tres dimensiones se incorporan al algoritmo de la misma forma que hemos visto en un problema unidimensional. Los coeficientes adicionales necesarios para extender el vector de coeficientes sobre el que actúa la matriz derivativa se calculan de modo que se cumplan las condiciones de simetría impuestas por (3-80) y (3-81). Dado que existe una matriz derivativa para cada una de las coordenadas espaciales del problema, el valor de los coeficientes “extendidos” se calcula siguiendo la tabla III, pero teniendo en cuenta, además, dicha coordenada.

En la figura 3.13 se ha representado una situación correspondiente a un problema bidimensional donde los campos varían en el plano XY, y donde el dominio de simulación está cerrado por paredes eléctricas (PEC). Entonces, si consideramos, por ejemplo, la componente E_z del campo eléctrico, que es tangencial a las dos paredes, tendremos una simetría impar para asegurar una distribución de campo nula sobre la

superficie del PEC. Esto significa, según la tabla III, que los coeficientes de escala adicionales pertenecientes al espacio “imagen” deben tener el signo contrario a los del espacio de simulación. De esta forma, si la pared es perpendicular al eje x , los coeficientes adicionales correspondientes a la función de escala en el eje x tendrán signo contrario, y si la pared es perpendicular al eje y , serán los coeficientes correspondientes a la función de escala en el eje y los que cambien de signo.

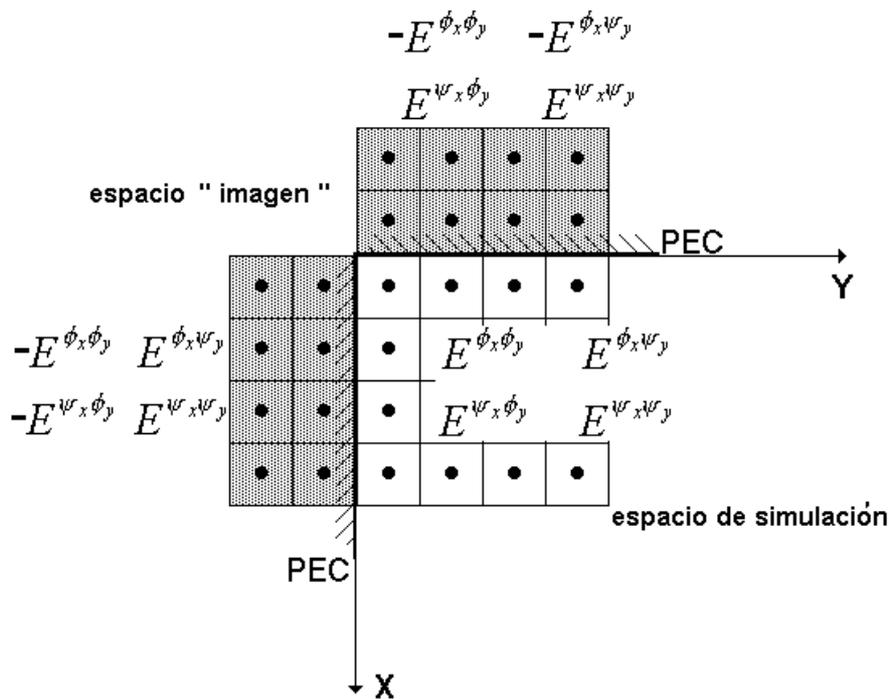


Figura 3.13.: Aplicación del Método de las Imágenes para la obtención de las condiciones de contorno en 2D correspondientes a la componente tangencial del campo eléctrico E en una pared PEC utilizando funciones wavelet de Daubechies D_M con M impar.

El valor correspondiente a los coeficientes de wavelet depende además del tipo de empleado. En el ejemplo de la figura 3.13, dado que la simetría es impar, utilizando wavelets de Daubechies D_M con M par, los coeficientes de wavelet adicionales en la dirección correspondiente tendrán el signo contrario, mientras que si M es impar, el signo de los coeficientes adicionales será el mismo.

3.6.- CONDICIONES ABSORBENTES “PML”

Una consideración a tener en cuenta a la hora de abordar un problema de interacción entre ondas electromagnéticas es que muchas situaciones de interés están planteadas en regiones abiertas, es decir, la región del espacio que se pretende estudiar se extiende de forma ilimitada en una o más direcciones. Sin embargo, la capacidad de almacenamiento de datos de un ordenador es limitada, y por lo tanto la zona donde se plantea el problema debe tener unas dimensiones finitas. De esta forma, el dominio computacional en el cual se realiza la simulación debe contener la estructura de interés y a la vez se debe aplicar una condición de contorno adecuada en su perímetro exterior que simule su extensión indefinida. La figura 3.14 representa esquemáticamente este dominio computacional finito (Ω). En su interior se aplica el esquema numérico que simula la propagación de una onda en cualquier dirección, y sobre la frontera $\delta\Omega$ se deben imponer unas condiciones de contorno que simulen su prolongación.

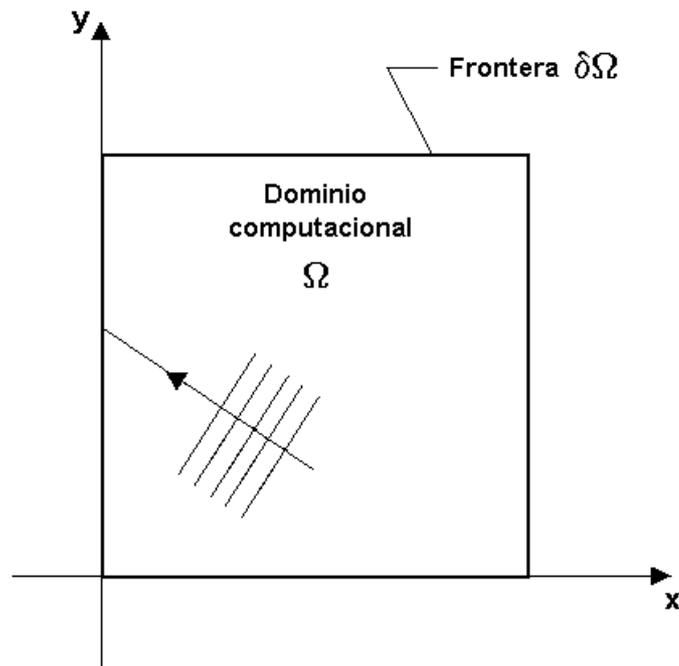


Figura 3.14.: Representación bidimensional del dominio computacional Ω y su frontera $\delta\Omega$ sobre la que se deben imponer las condiciones de contorno adecuadas que simulen su extensión.

Estas condiciones de frontera que simulan la extensión de un dominio hacia el infinito se suelen denominar *Condiciones de Contorno Absorbentes* (ABC, del inglés

Absorbing Boundary Conditions), ya que al incidir un campo sobre dichos contornos, éste parece ser “absorbido”. El desarrollo de las técnicas encaminadas establecer este tipo de condiciones frontera ha ido evolucionando desde los trabajos realizados por Engquist-Madja [25], G.Mur [58] y Mei-Fang [55] principalmente, hasta que a principios de los años 90 J. P. Bérenger introdujo el concepto que él denominó como *Perfectly Matched Layer* (PML) [6][7][8]. Este método consiste básicamente en cerrar el dominio computacional por una zona compuesta de un material “ficticio” que absorbe las ondas electromagnéticas que inciden sobre el mismo. Además, dentro de esta zona realiza una separación de cada una de las componentes del campo eléctrico y magnético, con la posibilidad de asignar pérdidas individuales a cada una de ellas. De esta forma consigue crear un medio cuya impedancia de onda es independiente del ángulo de incidencia y de la frecuencia obteniendo coeficientes de reflexión 3000 veces más pequeños que los proporcionados por técnicas anteriores.

A continuación se va a describir la técnica desarrollada por Bérenger para introducir las condiciones de contorno absorbentes en la frontera del dominio computacional, y después se estudia la forma de introducir estos resultados dentro de nuestro esquema MRTD.

3.6.1.- Condiciones absorbentes “PML” en dos dimensiones

Consideremos la propagación de un campo electromagnético de componentes E_x , E_y y H_z , (modo TE) en un espacio bidimensional (x, y) con pérdidas eléctricas y magnéticas. Las seis ecuaciones escalares de Maxwell se reducen en este caso a las siguientes:

$$\mathbf{e}_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mathbf{s} E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3-85.1)$$

$$\mathbf{e}_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mathbf{s} E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3-85.2)$$

$$\mathbf{m}_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \mathbf{s}^* H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (3-85.3)$$

donde \mathbf{e}_0 y \mathbf{m}_0 son la permitividad y permeabilidad del vacío, y \mathbf{s} y \mathbf{s}^* representan las posibles pérdidas eléctricas y magnéticas asociadas al medio. Bérenger demostró que si se cumple:

$$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{e}_0} = \frac{\mathbf{s}^*}{\mathbf{m}_0} \quad (3-86)$$

entonces la impedancia de onda en el medio con pérdidas es la misma que en el vacío, lo que garantiza que no habrá reflexión cuando un frente de ondas incida normalmente sobre la superficie de separación entre ambos medios [6], es decir, que toda la señal penetra en el medio absorbente.

La técnica PML incorpora en este punto un nuevo grado de libertad a la hora de especificar las pérdidas y la adaptación de la impedancia, dividiendo la componente H_z en dos subcomponentes que Bérenger denota como H_{zx} y H_{zy} . De este modo, las ecuaciones (3-85) quedan de la siguiente forma:

$$\mathbf{e}_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mathbf{s}_y E_x = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (3-87.1)$$

$$\mathbf{e}_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mathbf{s}_x E_y = -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (3-87.2)$$

$$\mathbf{m}_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \mathbf{s}_x^* H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (3-87.3)$$

$$\mathbf{m}_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \mathbf{s}_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (3-87.4)$$

donde los parámetros \mathbf{s}_x y \mathbf{s}_y denotan conductividades eléctricas, y los parámetros \mathbf{s}_x^* y \mathbf{s}_y^* denotan “conductividades” magnéticas.

Si en las ecuaciones (3-87) hacemos que $\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_y = \mathbf{s}_x^* = \mathbf{s}_y^* = 0$, se obtienen las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Si $\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_y$ y $\mathbf{s}_x^* = \mathbf{s}_y^* = 0$, las ecuaciones (3-87) se convierten en las correspondientes a un medio conductor con pérdidas. Y si hacemos $\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_y$ y $\mathbf{s}_x^* = \mathbf{s}_y^*$ lo que se obtiene son las ecuaciones para un hipotético medio

absorbente cuya impedancia estaría adaptada para la incidencia normal de cualquier onda plana desde el vacío. Existen, además, otras posibles combinaciones. Por ejemplo, si $\mathbf{s}_y = \mathbf{s}_y^* = 0$, el medio PML puede absorber una onda plana de componentes (E_y, H_{zx}) propagándose a lo largo del eje x , pero no absorbe una onda de componentes (E_x, H_{zy}) propagándose a lo largo del eje y . La situación inversa es cierta en el caso de tener $\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_x^* = 0$. De esta forma tenemos que en los medios PML caracterizados por el conjunto de parámetros $(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_x^*; 0, 0)$ y $(0, 0, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_y^*)$ y cuyas conductividades satisfagan (3-86), no se va a producir ninguna reflexión en las superficies de separación normales a los ejes x e y respectivamente. Esto se puede comprobar analizando la propagación en un medio PML:

Consideremos la propagación de un frente de ondas sinusoidal en un medio PML, cuyo campo eléctrico tiene una amplitud E_0 y forma un ángulo \mathbf{j} respecto al eje y . Denotemos por H_{zx0} y H_{zy0} a las amplitudes de cada una de las subcomponentes H_{zx} y H_{zy0} en que se divide el campo magnético.

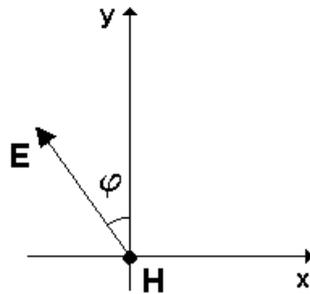


Figura 3.15.: Componentes del campo electromagnético propagándose en un medio “PML”.

Las cuatro componentes del campo se puede expresar como:

$$E_x = -E_0 \operatorname{sen} \mathbf{j} \cdot e^{j\mathbf{w}(t-\mathbf{a}x-\mathbf{b}y)} \quad (3-88.1)$$

$$E_y = E_0 \operatorname{cos} \mathbf{j} \cdot e^{j\mathbf{w}(t-\mathbf{a}x-\mathbf{b}y)} \quad (3-88.2)$$

$$H_{zx} = H_{zx0} \cdot e^{j\mathbf{w}(t-\mathbf{a}x-\mathbf{b}y)} \quad (3-88.3)$$

$$H_{zy} = H_{zy0} \cdot e^{j\mathbf{w}(t-\mathbf{a}x-\mathbf{b}y)} \quad (3-88.4)$$

donde ω es la frecuencia angular, t es el tiempo y \mathbf{a} y \mathbf{b} son dos constantes complejas. Suponiendo que E_0 es conocido, las ecuaciones (3-88) contienen cuatro incógnitas que se deben calcular: \mathbf{a} , \mathbf{b} , H_{zx0} y H_{zy0} . Sustituyendo (3-88) en (3-87) se llega al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\mathbf{e}_0 E_0 \operatorname{sen} \mathbf{j} - j \frac{\mathbf{s}_y}{\omega} E_0 \operatorname{sen} \mathbf{j} = \mathbf{b} (H_{zx0} + H_{zy0}) \quad (3-89.1)$$

$$\mathbf{e}_0 E_0 \operatorname{cos} \mathbf{j} - j \frac{\mathbf{s}_x}{\omega} E_0 \operatorname{cos} \mathbf{j} = \mathbf{a} (H_{zx0} + H_{zy0}) \quad (3-89.2)$$

$$\mathbf{m}_0 H_{zx0} - j \frac{\mathbf{s}_x^*}{\omega} H_{zx0} = \mathbf{a} E_0 \operatorname{cos} \mathbf{j} \quad (3-89.3)$$

$$\mathbf{m}_0 H_{zy0} - j \frac{\mathbf{s}_y^*}{\omega} H_{zy0} = \mathbf{b} E_0 \operatorname{sen} \mathbf{j} \quad (3-89.4)$$

Despejando H_{zx0} y H_{zy0} de (3-89.3) y (3-89.4) y sustituyendo en (3-89.1) y (3-89.2) se obtiene:

$$\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 \left(1 - j \frac{\mathbf{s}_y}{\omega \mathbf{e}_0} \right) \operatorname{sen} \mathbf{j} = \mathbf{b} \left(\frac{\mathbf{a} \operatorname{cos} \mathbf{j}}{1 - j \frac{\mathbf{s}_x^*}{\omega \mathbf{m}_0}} + \frac{\mathbf{b} \operatorname{sen} \mathbf{j}}{1 - j \frac{\mathbf{s}_y^*}{\omega \mathbf{m}_0}} \right) \quad (3-90.1)$$

$$\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 \left(1 - j \frac{\mathbf{s}_x}{\omega \mathbf{e}_0} \right) \operatorname{cos} \mathbf{j} = \mathbf{a} \left(\frac{\mathbf{a} \operatorname{cos} \mathbf{j}}{1 - j \frac{\mathbf{s}_x^*}{\omega \mathbf{m}_0}} + \frac{\mathbf{b} \operatorname{sen} \mathbf{j}}{1 - j \frac{\mathbf{s}_y^*}{\omega \mathbf{m}_0}} \right) \quad (3-90.2)$$

Dividiendo ambas expresiones se obtiene:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\operatorname{sen} \mathbf{j}}{\operatorname{cos} \mathbf{j}} \cdot \frac{1 - j \mathbf{s}_y / \omega \mathbf{e}_0}{1 - j \mathbf{s}_x / \omega \mathbf{e}_0} \quad (3-91)$$

Sustituyendo (3-91) en (3-90.2) se obtiene \mathbf{a}^2 y sustituyendo (3-91) en (3-90.1) se obtiene \mathbf{b}^2 . Esto proporciona dos conjuntos de valores (\mathbf{a} , \mathbf{b}) de signos opuestos que indican las dos posibles direcciones de propagación. Considerando el signo positivo:

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0}}{G} \left(1 - j \frac{\mathbf{s}_x}{\mathbf{w} \mathbf{e}_0} \right) \cos \mathbf{j} \quad (3-92.1)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0}}{G} \left(1 - j \frac{\mathbf{s}_y}{\mathbf{w} \mathbf{e}_0} \right) \sin \mathbf{j} \quad (3-92.2)$$

donde:

$$G = \sqrt{w_x \cos^2 \mathbf{j} + w_y \sin^2 \mathbf{j}} \quad (3-93.1)$$

$$w_x = \frac{1 - j \mathbf{s}_x / \mathbf{w} \mathbf{e}_0}{1 - j \mathbf{s}_x^* / \mathbf{w} \mathbf{m}_0} \quad (3-93.2)$$

$$w_y = \frac{1 - j \mathbf{s}_y / \mathbf{w} \mathbf{e}_0}{1 - j \mathbf{s}_y^* / \mathbf{w} \mathbf{m}_0} \quad (3-93.3)$$

De las expresiones (3-89.3) y (3-89.4) podemos obtener las dos incógnitas restantes H_{zx0} y H_{zy0} :

$$H_{zx0} = E_0 \sqrt{\frac{\mathbf{e}_0}{\mathbf{m}_0}} \cdot \frac{1}{G} \cdot w_x \cos^2 \mathbf{j} \quad (3-94.1)$$

$$H_{zy0} = E_0 \sqrt{\frac{\mathbf{e}_0}{\mathbf{m}_0}} \cdot \frac{1}{G} \cdot w_y \sin^2 \mathbf{j} \quad (3-94.2)$$

Teniendo en cuenta la expresión (3-93) la suma de H_{zx0} y H_{zy0} es:

$$H_0 = E_0 \sqrt{\frac{\mathbf{e}_0}{\mathbf{m}_0}} \cdot G \quad (3-95)$$

y el cociente Z entre el campo eléctrico y el campo magnético es:

$$Z = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_0}{\mathbf{e}_0}} \cdot \frac{1}{G} \quad (3-96)$$

Si consideramos la posibilidad de que cada par $(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_x^*)$ y $(\mathbf{s}_y, \mathbf{s}_y^*)$ satisfagan la condición (3-86), se cumple que $w_x = w_y = G = 1$ independientemente de la frecuencia, lo que conduce a que cualquier componente del campo \mathbf{F} de amplitud F_0 y la impedancia de onda (3-96) tomen el valor, respectivamente,

$$\Phi = \Phi_0 \cdot e^{jw \left(t - \frac{x \cos j + y \sin j}{c} \right)} \cdot e^{-\frac{\mathbf{s}_x x \cos j}{e_0 c}} \cdot e^{-\frac{\mathbf{s}_y y \sin j}{e_0 c}} \quad (3-97)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_0}{\mathbf{e}_0}} \quad (3-98)$$

La primera exponencial de (3-97) indica que la onda se propaga en el medio PML en una dirección perpendicular al campo eléctrico y con la velocidad igual a la de la luz en el vacío $c = \sqrt{1/\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0}$. Las dos exponenciales restantes indican que la amplitud de la onda decrece exponencialmente en las direcciones x e y . La expresión (3-98) nos indica que la impedancia de onda en el medio PML es igual a la del vacío independientemente del ángulo de incidencia. Se comprueba entonces que el criterio de adaptación de impedancias (3-86) para una incidencia normal es también una condición de adaptación para el medio PML, con la diferencia de que en este último se debe cumplir considerando los pares $(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_x^*)$ y $(\mathbf{s}_y, \mathbf{s}_y^*)$.

El dominio computacional propuesto por Bérenger con el fin de simular un medio indefinido está representado en la figura 3.16. El espacio de simulación se encuentra rodeado por zonas PML cuyas características $(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_x^*, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_y^*)$ se escogen de manera que no se produzca reflexión en la superficie de separación entre el medio interior y la lámina PML, y finalmente cerramos el dominio computacional mediante un conductor eléctrico perfecto (PEC).

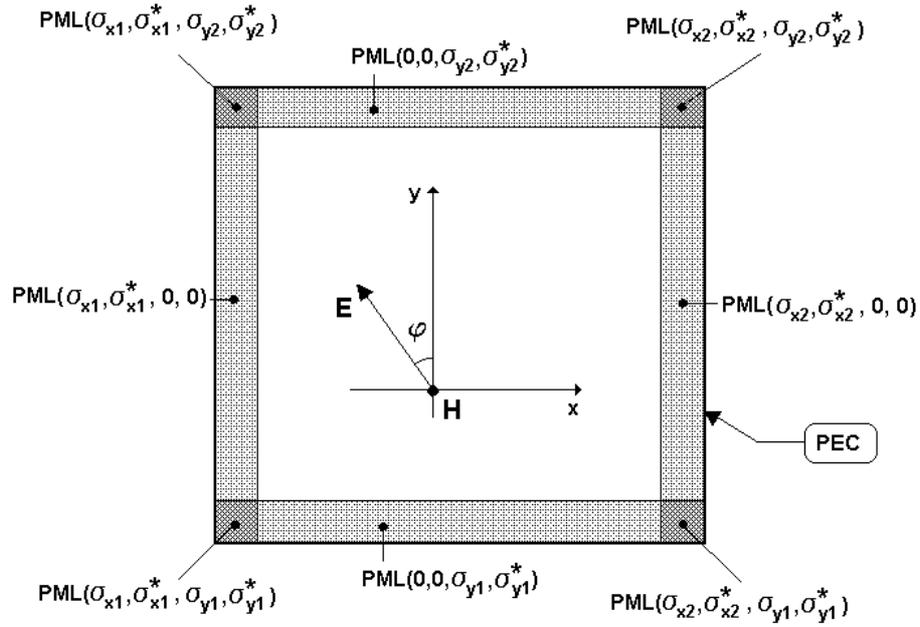


Figura 3.16.: Estructura de un dominio computacional en 2-D con condiciones absorbentes “PML”.

3.6.2.- Condiciones absorbentes “PML” en tres dimensiones

La teoría PML se puede generalizar a un espacio tridimensional, conservando las mismas propiedades en dos dimensiones [7]. Ahora, cada una de las componentes del campo electromagnético se divide en dos subcomponentes, de forma que las seis ecuaciones escalares resultantes de representar en coordenadas cartesianas las dos ecuaciones rotacionales de Maxwell se convierten en las doce ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{m}_0 \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \mathbf{s}_y^* H_{xy} = - \frac{(E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} \quad (3-99.1)$$

$$\mathbf{m}_0 \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \mathbf{s}_z^* H_{xz} = \frac{(E_{yx} + E_{yz})}{\partial z} \quad (3-99.2)$$

$$\mathbf{m}_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \mathbf{s}_z^* H_{yz} = - \frac{(E_{xy} + E_{xz})}{\partial z} \quad (3-99.3)$$

$$\mathbf{m}_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \mathbf{s}_x^* H_{yx} = \frac{(E_{zx} + E_{zy})}{\partial x} \quad (3-99.4)$$

$$\mathbf{m}_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \mathbf{s}_x^* H_{zx} = - \frac{(E_{yx} + E_{yz})}{\partial x} \quad (3-99.5)$$

$$\mathbf{m}_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \mathbf{s}_y^* H_{zy} = - \frac{(E_{xy} + E_{xz})}{\partial y} \quad (3-99.6)$$

$$\mathbf{e}_0 \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \mathbf{s}_y E_{xy} = \frac{(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (3-99.7)$$

$$\mathbf{e}_0 \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \mathbf{s}_z E_{xz} = - \frac{(H_{yx} + H_{yz})}{\partial z} \quad (3-99.8)$$

$$\mathbf{e}_0 \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \mathbf{s}_z E_{yz} = \frac{(H_{xy} + H_{xz})}{\partial z} \quad (3-99.9)$$

$$\mathbf{e}_0 \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \mathbf{s}_x E_{yx} = - \frac{(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (3-99.10)$$

$$\mathbf{e}_0 \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \mathbf{s}_x E_{zx} = \frac{(H_{yx} + H_{yz})}{\partial z} \quad (3-99.11)$$

$$\mathbf{e}_0 \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \mathbf{s}_y E_{zy} = - \frac{(H_{xy} + H_{xz})}{\partial y} \quad (3-99.12)$$

donde

$$E_x = E_{xy} + E_{xz} \quad (3-100.1)$$

$$E_y = E_{yx} + E_{yz} \quad (3-100.2)$$

$$E_z = E_{zx} + E_{zy} \quad (3-100.3)$$

$$H_x = H_{xy} + H_{xz} \quad (3-100.4)$$

$$H_y = H_{yx} + H_{yz} \quad (3-100.5)$$

$$H_z = H_{zx} + H_{zy} \quad (3-100.6)$$

y los parámetros $(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_z, \mathbf{s}_x^*, \mathbf{s}_y^*, \mathbf{s}_z^*)$ representan las conductividades eléctricas y magnéticas del medio.

Del mismo modo que ocurría en dos dimensiones, una onda propagándose a lo largo de la dirección x que incida sobre una lámina caracterizada por $(\mathbf{s}_x, 0, 0, \mathbf{s}_x^*, 0, 0)$ donde el par $(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_x^*)$ verifique la condición (3-86), va a sufrir una reflexión nula independientemente de su frecuencia y del ángulo de incidencia, por lo que el mismo

esquema representado en la figura 3.16 para un problema bidimensional puede trasladarse a uno de tres dimensiones.

3.6.3.- Factor de reflexión en un medio “PML”

Debido a que el dominio computacional está cerrado en última instancia por un conductor eléctrico perfecto (PEC), las ondas que lleguen hasta este extremo sufrirán una reflexión volviendo de nuevo a nuestro espacio de simulación. Consideremos una onda que se propaga en el interior de una zona PML. Aquí, la amplitud de la onda se atenúa de acuerdo con la expresión (3-97), con lo que a una distancia r en el interior de la lámina su amplitud será:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0} r \cos j} \quad (3-101)$$

donde j es el ángulo que forma la onda incidente con la lámina PML. Después de atravesar toda la lámina, la onda es reflejada por el conductor eléctrico perfecto y regresa de nuevo al medio interior. De esta forma, para una lámina de espesor d se puede definir el siguiente factor o coeficiente de reflexión:

$$R(j) = [R(0)]^{\cos j} \quad (3-102)$$

donde:

$$R(0) = e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0} 2d} \quad (3-103)$$

El factor de reflexión depende del producto σd , por lo que teóricamente podrían obtenerse factores de reflexión tan pequeños como se quiera sin más que incrementar el espesor de la lámina d , la conductividad σ , o ambos. Sin embargo, una fuerte discontinuidad en el valor de la conductividad produce una reflexión numérica elevada [8], por lo que se hace recomendable que el valor de la conductividad dentro de la

lámina varíe gradualmente desde cero hasta un valor máximo \mathbf{s}_{max} . Bérenger propuso que esta variación se realizara de acuerdo con el siguiente perfil:

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{s}_{max} \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{d}} \right)^n \quad (3-104)$$

Los perfiles más frecuentes suelen ser el lineal ($n = 1$), el parabólico ($n = 2$) y el cúbico ($n = 3$). De esta forma, escogiendo un factor de reflexión en incidencia normal $R(0)$ (generalmente del orden de 10^{-4} o 10^{-5}) y un espesor \mathbf{d} , se puede calcular el valor máximo de la conductividad \mathbf{s}_{max} .

3.6.4.- Paso de tiempo exponencial

La atenuación de forma exponencial vista en la ecuación (3-101) que se produce en la amplitud de las ondas que se propagan en un medio con grandes pérdidas como es el “PML”, es tan rápida que puede llegar a provocar efectos no deseados, como la reflexión de las ondas que inciden sobre él (una disminución brusca del valor de los campos se puede interpretar como la presencia una pared conductora). Una forma de evitar este problema consiste en modificar el modo en que se discretiza la parte temporal de las ecuaciones dentro del algoritmo. Así, en vez de utilizar una aproximación en diferencias finitas con un paso temporal Δt , conviene utilizar lo que se denomina paso de tiempo exponencial [75].

Consideremos una de las ecuaciones escalares de Maxwell, correspondiente a un medio con una conductividad eléctrica σ :

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} E_x = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3-85.1)$$

Esta ecuación se puede tratar como una ecuación diferencial de primer orden para $E_x(t)$, de manera que su solución general se obtiene, como es sabido, sumando a la

solución general de la ecuación homogénea una solución particular de la ecuación completa:

$$E_x(t) = E_{x \text{ homogénea}}(t) + E_{x \text{ particular}}(t) \quad (3-105)$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$E_{x \text{ homogénea}}(t') = C \cdot e^{-\frac{s \cdot t'}{e_0}} \quad (3-106)$$

Consideramos que la solución de la ecuación homogénea en un instante de tiempo se obtiene a partir de la atenuación de la solución de un instante anterior, de manera que al final de cada intervalo temporal la solución de la ecuación homogénea vendrá dada por:

$$E_{x \text{ homogénea}}^{n+1} = e^{-\frac{s \cdot \Delta t}{e_0}} \cdot E_{x \text{ homogénea}}^n \quad (3-107)$$

Una solución particular de la ecuación completa (3-85.1) se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$E_{x \text{ particular}}(t') \cdot e^{\int \frac{s}{e_0} dt'} = \left(\int \frac{1}{e_0} \frac{\partial H_z}{\partial y} \cdot e^{\int \frac{s}{e_0} dt'} dt' + K \right) \quad (3-108)$$

Operando en la expresión anterior se llega a que la solución particular buscada de la ecuación (3-85.1) tiene la siguiente forma:

$$E_{x \text{ particular}}(t') = \frac{1}{s} \frac{\partial H_z}{\partial y} + K \cdot e^{-\frac{s \cdot t'}{e_0}} \quad (3-109)$$

La constante K se puede calcular suponiendo que la contribución de esta solución particular se realiza únicamente dentro de cada intervalo de tiempo, y que el

tiempo t' se mide desde el principio de ese intervalo. De esta forma, al principio de cada intervalo ($t' = 0$) se tiene que:

$$E_{x \text{ particular}}(t'=0) = 0 = \frac{1}{\mathbf{s}} \frac{\partial H_z}{\partial y} + K \quad (3-110)$$

y de donde podemos obtener K :

$$K = -\frac{1}{\mathbf{s}} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3-111)$$

Al final del intervalo temporal ($t' = \Delta t$) la solución particular tendrá el siguiente valor:

$$E_{x \text{ particular}}(t' = \Delta t) = \left(1 - e^{-\frac{\mathbf{s} \cdot \Delta t}{\epsilon_0}} \right) \cdot \frac{1}{\mathbf{s}} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3-112)$$

De esta forma, la solución de la ecuación completa en el intervalo de tiempo $(n+1)\Delta t$ estará formada por la atenuación de la solución homogénea respecto del intervalo anterior más la contribución de la solución particular en ese intervalo de tiempo:

$$E_x^{n+1} = e^{-\frac{\mathbf{s} \cdot \Delta t}{\epsilon_0}} E_x^n + \frac{1}{\mathbf{s}} \left(1 - e^{-\frac{\mathbf{s} \cdot \Delta t}{\epsilon_0}} \right) \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3-113)$$

3.6.5- Implementación de las condiciones “PML”: ejemplo

Las expresiones desarrolladas por Bérenger para su técnica PML, y que acabamos de estudiar, hacen referencia a los valores reales del campo. Dado que en nuestro algoritmo estamos trabajando con coeficientes correspondientes a los

desarrollos de los campos, esto implica que debemos modificar esta técnica antes de aplicarla.

Estas modificaciones sólo son necesarias cuando se utilicen funciones de escala y funciones de wavelet para representar los campos, ya que si sólo se incluyen funciones de escala, debido a que sus coeficientes representan valores reales del campo electromagnético, podemos trabajar directamente con las expresiones desarrolladas por Bérenger.

Consideremos a modo de ejemplo, la propagación en el vacío de una onda TEM, cuyos campos E_x y H_y varían únicamente en la dirección del eje z . Con el fin de simular un espacio abierto, colocamos en los extremos del dominio de simulación dos zonas PML de espesor d cuyas conductividades eléctrica y magnética (σ y σ^* respectivamente) se escogen de manera que se cumpla la relación:

$$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{e}_0} = \frac{\mathbf{s}^*}{\mathbf{m}_0} \quad (3-86)$$

Se trata, pues, de un ejemplo en una dimensión, con sólo una componente para el campo eléctrico \mathbf{E} y una componente para el campo magnético \mathbf{H} , por lo que no es necesario descomponer ninguna de ellas dentro de la zona PML. Sólo es necesario aplicar el método del paso de tiempo exponencial en la actualización de los campos dentro de dicha zona.

En la figura 3.17 se ha representado un esquema con la estructura del dominio de simulación, correspondiente a uno de sus extremos, y donde se indican las características de los diferentes medios que lo forman. Se puede observar cómo el dominio computacional está cerrado por una pared PEC.

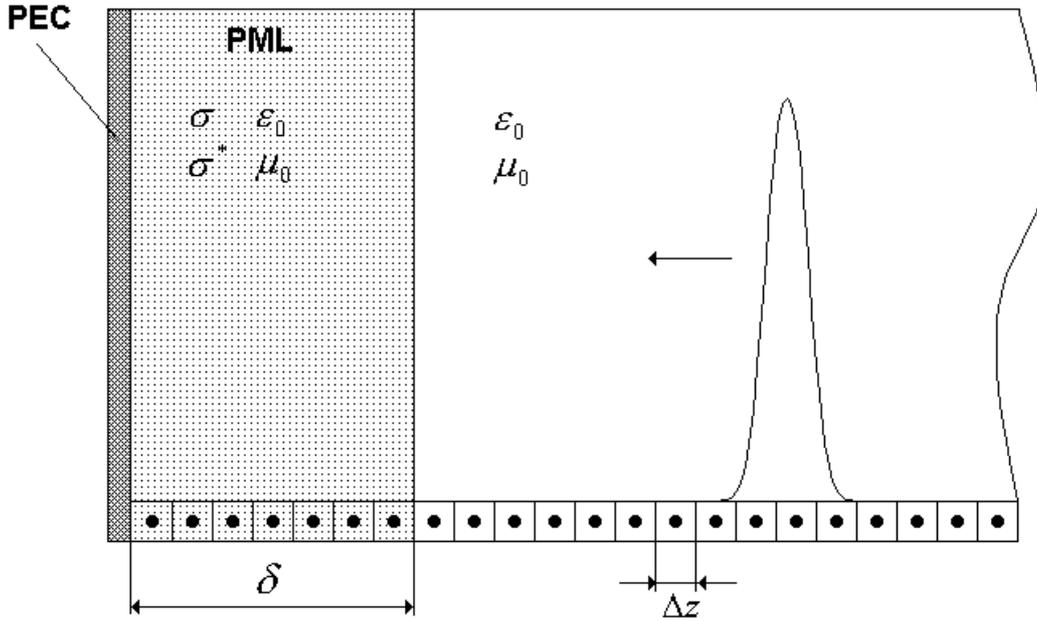


Figura 3.17.: Dominio de simulación con condiciones absorbentes “PML” en uno de sus extremos.

Dentro de la zona PML definida anteriormente, la propagación del campo electromagnético está gobernada por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\mathbf{s}^*}{\mathbf{m}_0} H_y = -\frac{1}{\mathbf{m}_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (3-114.1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{e}_0} E_x = -\frac{1}{\mathbf{e}_0} \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (3-114.2)$$

De acuerdo con la teoría de Bérenger, la discretización temporal de estas ecuaciones se realiza mediante el paso de tiempo exponencial descrito en la sección 3.6.4. De este modo, las ecuaciones (3-114) quedan de la siguiente forma:

$$H_y^{n+\frac{1}{2}} = e^{-\frac{\mathbf{s}^* \cdot \Delta t}{\mathbf{m}_0}} H_y^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\mathbf{s}^*} \left(1 - e^{-\frac{\mathbf{s}^* \cdot \Delta t}{\mathbf{m}_0}} \right) \cdot \frac{\partial E_x^n}{\partial z} \quad (3-115.1)$$

$$E_x^{n+1} = e^{-\frac{\mathbf{s} \cdot \Delta t}{\mathbf{e}_0}} E_x^n - \frac{1}{\mathbf{s}} \left(1 - e^{-\frac{\mathbf{s} \cdot \Delta t}{\mathbf{e}_0}} \right) \cdot \frac{\partial H_y^{n+\frac{1}{2}}}{\partial z} \quad (3-115.2)$$

Si la discretización espacial se realiza utilizando funciones de escala de nivel J , lo que se obtiene es una aproximación de nivel J de los campos. El conjunto de ecuaciones resultante expresado de forma matricial será el siguiente:

$${}^{n+\frac{1}{2}}[H^f]^J = [\mathbf{\phi}_1^*]^J \cdot {}^{n-\frac{1}{2}}[H^f]^J - [\mathbf{\phi}_2^*]^J \cdot \frac{1}{\Delta z} [d^J]^n [E^f]^J \quad (3-116.1)$$

$${}^{n+1}[E^f]^J = [\mathbf{\phi}_1]^J \cdot {}^n[E^f]^J - [\mathbf{\phi}_2]^J \cdot \frac{1}{\Delta z} [d^J]^{n+\frac{1}{2}} [H^f]^J \quad (3-116.2)$$

donde $[\mathbf{s}_1]$, $[\mathbf{s}_2]$, $[\mathbf{s}_1^*]$ y $[\mathbf{s}_2^*]$ son matrices diagonales cuyos elementos dependen del valor de las conductividades eléctrica y magnética (σ y σ^*) en cada punto del espacio dentro de la zona “PML”:

$$[\mathbf{\phi}_1] = \left[\exp\left(-\frac{\mathbf{s}(z) \cdot \Delta t}{\mathbf{e}_0}\right) \right] \quad (3-117.1)$$

$$[\mathbf{\phi}_2] = \left[\frac{1}{\mathbf{s}(z)} \left[1 - \exp\left(-\frac{\mathbf{s}(z) \cdot \Delta t}{\mathbf{e}_0}\right) \right] \right] \quad (3-117.2)$$

$$[\mathbf{\phi}_1^*] = \left[\exp\left(-\frac{\mathbf{s}^*(z) \cdot \Delta t}{\mathbf{m}_0}\right) \right] \quad (3-117.3)$$

$$[\mathbf{\phi}_2^*] = \left[\frac{1}{\mathbf{s}^*(z)} \left[1 - \exp\left(-\frac{\mathbf{s}^*(z) \cdot \Delta t}{\mathbf{m}_0}\right) \right] \right] \quad (3-117.4)$$

El perfil de variación escogido para las conductividades es parabólico y está dado por las siguiente expresiones:

$$\mathbf{s}(z) = \mathbf{s}_{\max} \left(1 - \frac{z}{d} \right)^2 \quad (3-118.1)$$

$$\mathbf{s}^*(z) = \mathbf{s}(z) \frac{\mathbf{m}_0}{\mathbf{e}_0} \quad (3-118.2)$$

donde el valor de la conductividad máxima σ_{\max} se obtiene a partir del valor que hayamos fijado para el factor de reflexión $R(0)$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{s}_{\max} = -\frac{3\mathbf{e}_0 c}{2d} \ln R(0) \quad (3-119)$$

Si la discretización espacial se realiza utilizando funciones de escala y de wavelet de nivel J , lo que se obtiene ahora es una aproximación de nivel $J+1$ de los campos. En este caso, el conjunto de ecuaciones resultante expresado de forma matricial será el siguiente:

$${}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} = \begin{bmatrix} d \mathbf{s}_1^* & g \mathbf{s}_1^* \\ b \mathbf{s}_1^* & a \mathbf{s}_1^* \end{bmatrix} {}^{n-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} - \begin{bmatrix} d \mathbf{s}_2^* & g \mathbf{s}_2^* \\ b \mathbf{s}_2^* & a \mathbf{s}_2^* \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} d^J & g^J \\ \mathbf{b}^J & \mathbf{a}^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-120.1)$$

$${}^{n+1} \begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} = \begin{bmatrix} d \mathbf{s}_1 & g \mathbf{s}_1 \\ b \mathbf{s}_1 & a \mathbf{s}_1 \end{bmatrix} {}^n \begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} - \begin{bmatrix} d \mathbf{s}_2 & g \mathbf{s}_2 \\ b \mathbf{s}_2 & a \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} d^J & g^J \\ \mathbf{b}^J & \mathbf{a}^J \end{bmatrix} {}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} \quad (3-120-2)$$

donde las matrices relacionadas con las conductividades se calculan mediante la *DWT* en dos dimensiones de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} d \mathbf{s}_1 & g \mathbf{s}_1 \\ b \mathbf{s}_1 & a \mathbf{s}_1 \end{bmatrix} = DWT_{2D} [\mathbf{g}_1]^{J+1} \quad (3-121.1)$$

$$\begin{bmatrix} d \mathbf{s}_2 & g \mathbf{s}_2 \\ b \mathbf{s}_2 & a \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} = DWT_{2D} [\mathbf{g}_2]^{J+1} \quad (3-121.2)$$

$$\begin{bmatrix} d \mathbf{s}_1^* & g \mathbf{s}_1^* \\ b \mathbf{s}_1^* & a \mathbf{s}_1^* \end{bmatrix} = DWT_{2D} [\mathbf{g}_1^*]^{J+1} \quad (3-121.3)$$

$$\begin{bmatrix} d \mathbf{s}_2^* & g \mathbf{s}_2^* \\ b \mathbf{s}_2^* & a \mathbf{s}_2^* \end{bmatrix} = DWT_{2D} [\mathbf{g}_2^*]^{J+1} \quad (3-121.4)$$

Las matrices $[\mathbf{s}_1]^{J+1}$, $[\mathbf{s}_2]^{J+1}$, $[\mathbf{s}_1^*]^{J+1}$ y $[\mathbf{s}_2^*]^{J+1}$ se construyen de la forma indicada en (3-117) a partir del valor de la conductividad correspondiente al nivel de resolución superior, como se indica en la figura 3.18.

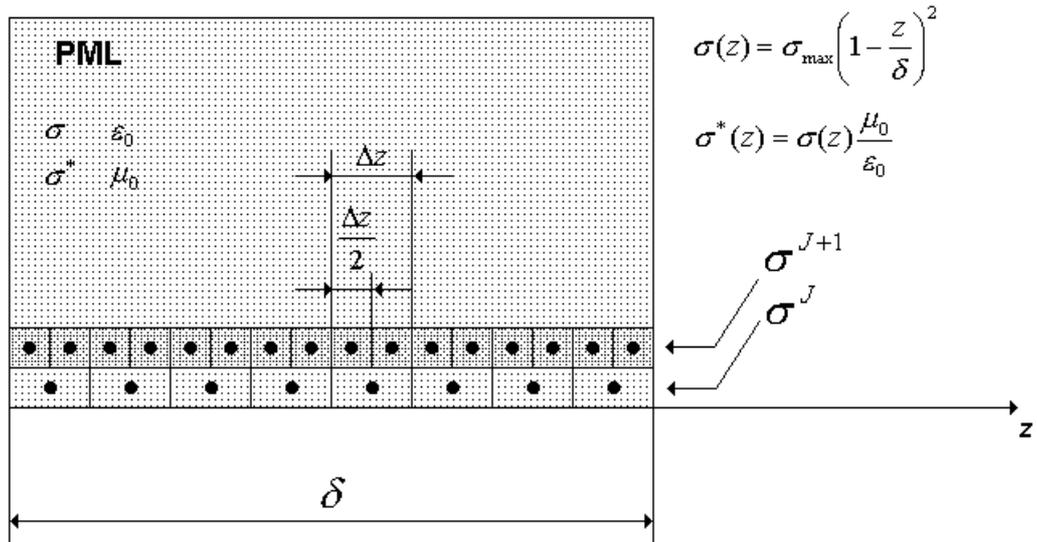


Figura 3.18.: Discretización de la conductividad s para dos niveles de resolución consecutivos J y $J+1$.

Capítulo IV

CARACTERÍSTICAS NUMÉRICAS DEL ALGORITMO

4.1.- INTRODUCCIÓN

En los algoritmos que hemos presentado para resolver las ecuaciones de Maxwell se requiere que el incremento Δt introducido por la discretización temporal tenga un límite específico relacionado con la discretización espacial del mallado Δx , Δy , Δz . Este límite es necesario para evitar la inestabilidad numérica del algoritmo, es decir, que no se produzca de forma indeseable un aumento incontrolado de los valores de las soluciones calculadas durante el tiempo de ejecución. Esta posible inestabilidad es debida a los errores numéricos introducidos por la discretización de la ecuación “continua”. Si a medida que el algoritmo progresa ese error se mantiene acotado, se trata de un algoritmo estable; pero si, por el contrario, el error se acumula y crece de manera indefinida, el esquema es inestable. Este problema puede, en principio, aparecer en cualquier algoritmo que resuelva numéricamente ecuaciones diferenciales de forma explícita, y por ello es un tema que siempre hay que abordar para dar robustez a la técnica empleada.

Otro problema a tratar como posible fuente de error del algoritmo es el que se conoce como “dispersión numérica”. El uso de las técnicas numéricas para resolver problemas electromagnéticos (como por ejemplo TLM [19], FDTD [75], MRTD [50] ...) requieren siempre un proceso de discretización de las variables utilizadas. Este proceso da lugar a un error de fase en la propagación de los campos, es decir, la velocidad de fase dada por el algoritmo puede ser diferente de la velocidad de fase de la onda en el medio que estemos considerando, de hecho varía con la dirección de propagación en el mallado, con la longitud de onda y con la resolución de la malla empleada (figura 4.1).

Este comportamiento dispersivo que no se corresponde con la realidad del medio que estamos simulando debe tenerse en cuenta especialmente a la hora de tratar con estructuras de simulación largas debido a que las diferencias entre la fase real y la numérica pueden ser considerables.

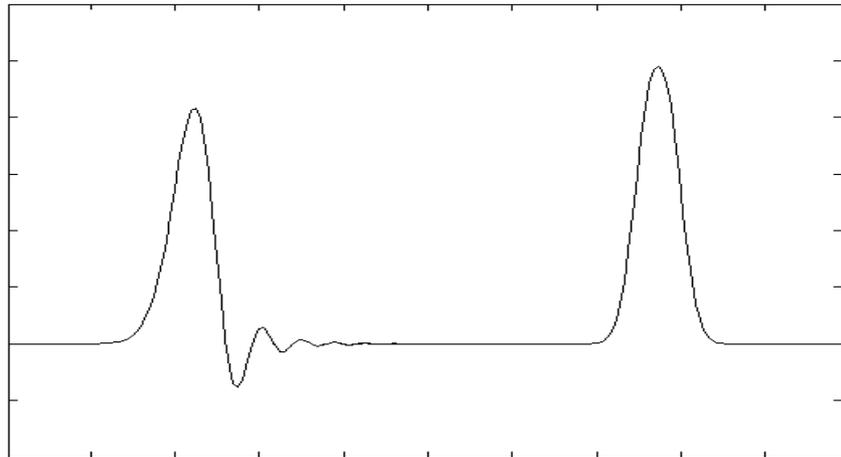


Figura 4.1.: *Distorsión de un pulso debido a la dispersión: A la derecha se encuentra el pulso inicial y a la izquierda, tras simular unos instantes de propagación, se puede ver la forma del pulso distorsionada debido a la existencia de diferentes velocidades de fase asociadas a cada frecuencia.*

En este apartado se van a investigar las condiciones necesarias para que los algoritmos presentados sean estables así como las propiedades de dispersión de los mismos. El estudio incluye el análisis para los diferentes tipos de wavelets empleadas en el desarrollo de los campos. Empezaremos analizando el caso unidimensional para posteriormente generalizarlo a dos y tres dimensiones.

4.2.- ESTABILIDAD NUMÉRICA

El método que hemos empleado para analizar la estabilidad sigue las pautas propuestas por Taflove [75], basadas en el planteamiento clásico desarrollado por Courant, Friedrich y Levy (CFL) y von Neumann. Este planteamiento permite estudiar de forma separada los aspectos de estabilidad de la parte derivativa temporal y espacial. Para ello el algoritmo propuesto se separa en dos problemas de autovalores, unos espaciales y otros temporales. De esta manera, se determina el conjunto de autovalores asociados al proceso espacial y se compara con el conjunto de autovalores estables asociados al proceso temporal. Imponiendo que todos los autovalores espaciales estén dentro del rango estable temporal se asegura que todos los posibles modos numéricos que se propaguen por la malla sean estables, es decir, que no puedan crecer de forma

incontrolada. Esto acotará el intervalo de discretización temporal en relación con la discretización espacial.

4.2.1. Estabilidad numérica en una dimensión

Por simplicidad empezaremos analizando un problema unidimensional, donde los campos presentan variación únicamente respecto de la coordenada z . Las ecuaciones necesarias para abordar este problema son:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mathbf{m} \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (4-1.1)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\mathbf{e} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (4-1.2)$$

En el apartado 3.2 se estudió la discretización temporal de este par de ecuaciones utilizando funciones pulso $h_n(t)$ de anchura Δt , de forma que una aproximación de nivel J para los campos nos llevaba al siguiente conjunto de ecuaciones:

$${}^{n+\frac{1}{2}}H^J(z) = {}^{n-\frac{1}{2}}H^J(z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial z} {}^n E^J(z) \quad (4-2.1)$$

$${}^{n+1}E^J(z) = {}^n E^J(z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}H^J(z) \quad (4-2.2)$$

Utilizando funciones de escala de resolución J para representar dicha aproximación, el algoritmo quedaba determinado por el siguiente conjunto de ecuaciones discretizadas:

$${}^{n+\frac{1}{2}}[H^f]^J = {}^{n-\frac{1}{2}}[H^f]^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta z} [d^J]^n [E^f]^J \quad (4-3.1)$$

$${}^{n+1}[E^f]^J = {}^n [E^f]^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \frac{1}{\Delta z} [d^J]^{n+\frac{1}{2}} [H^f]^J \quad (4-3-2)$$

Para que el algoritmo sea estable, el par de valores Δt y Δz se debe escoger de una forma adecuada. La relación entre ambos se obtiene al descomponer el algoritmo en

dos problemas de autovalores, uno que involucra la parte temporal y otro que afecta a la parte espacial. Para mayor claridad, las ecuaciones (4-3) se pueden reescribir del siguiente modo, donde se muestra directamente la relación entre los coeficientes:

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}H_i^f - {}^{n-\frac{1}{2}}H_i^f}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m}^f \quad (4-4.1)$$

$$\frac{{}^{n+1}E_i^f - {}^n E_i^f}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i-m}^f \quad (4-4.2)$$

Este par de ecuaciones se puede ahora descomponer, separándolo en los dos problemas de autovalores mencionados; por un lado la parte temporal:

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}H_i^f - {}^{n-\frac{1}{2}}H_i^f}{\Delta t} = \Lambda^n H_i^f \quad (4-5.1)$$

$$\frac{{}^{n+1}E_i^f - {}^n E_i^f}{\Delta t} = \Lambda^{n+\frac{1}{2}} E_i^f \quad (4-5.2)$$

y por el otro, la parte espacial:

$$-\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m}^f = \Lambda^n H_i^f \quad (4-6.1)$$

$$-\frac{1}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i-m}^f = \Lambda^{n+\frac{1}{2}} E_i^f \quad (4-6.2)$$

El conjunto de ecuaciones (4-5) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}V_i - {}^{n-\frac{1}{2}}V_i}{\Delta t} = \Lambda^n V_i \quad (4-7)$$

donde V representa un coeficiente de escala de una de las componentes del campo (E_x o H_y). Si definimos la siguiente expresión como el factor de crecimiento de la solución:

$$q_i = \frac{{}^{n+\frac{1}{2}}V_i}{{}^nV_i} = \frac{{}^nV_i}{{}^{n-\frac{1}{2}}V_i} \quad (4-8)$$

entonces, para que no se produzca un crecimiento ilimitado de la solución durante la marcha del algoritmo, se debe cumplir que $|q_i| \leq 1$. Sustituyendo este factor de crecimiento en la expresión (4-7) se tiene que:

$$\frac{q_i {}^nV_i - \frac{{}^nV_i}{q_i}}{\Delta t} = \Lambda {}^nV_i \quad (4-9)$$

lo que da lugar a la siguiente ecuación de segundo grado, cuya solución nos proporcionará la condición que deben cumplir los autovalores temporales para que la solución sea estable:

$$q_i^2 - \Lambda \Delta t q_i - 1 = 0 \quad (4-10)$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$q_i = a \pm \sqrt{a^2 + 1} \quad (4-11)$$

donde:

$$a = \frac{\Lambda \Delta t}{2} \quad (4-12)$$

Se puede comprobar que $|q_i| = 1$, cumpliendo por lo tanto con la condición de estabilidad, siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\text{Re}(a) = 0 \quad (4-13.1)$$

$$-1 \leq \text{Im}(a) \leq 1 \quad (4-13.2)$$

De esta forma llegamos a que, para que el algoritmo sea estable, el conjunto de autovalores debe estar incluido en el intervalo dado por:

$$-\frac{2}{\Delta t} \leq \text{Im}(\Lambda) \leq +\frac{2}{\Delta t} \quad (4-14)$$

La relación entre el intervalo temporal y el espacial se obtiene al imponer que todos los autovalores espaciales estén dentro de este rango de estabilidad. Las soluciones válidas deben ser soluciones de ambas ecuaciones a la vez, (4-5) y (4-6), es decir, sólo son válidos los autovalores que sean solución de ambas. Ya hemos visto que, en principio, puede haber autovalores temporales estables, y no estables, y la relación que nos dice cuáles están en un grupo, y cuáles en el otro. Entonces, para que todas las soluciones sean estables, ninguno de los autovalores espaciales debe coincidir con uno temporal que esté fuera del rango estable, y por ello se debe hacer que todos los autovalores espaciales estén dentro del rango estable. Para encontrar esos autovalores espaciales, resolvemos las ecuaciones (4-6). Para ello, introducimos en dichas ecuaciones un modo de propagación genérico, caracterizado por un vector de onda numérico \tilde{k} dado por el algoritmo, como el de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E_i^f &= E_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J)} \\ H_i^f &= H_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J)} \end{aligned} \quad (4-15)$$

donde la resolución espacial correspondiente al nivel de resolución J es:

$$\Delta z^J = \frac{\Delta z}{2^J} \quad (4-16)$$

Llevando la expresión (4-15) al problema de autovalores mostrado en (4-6) tenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J E_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J)} e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} &= \Lambda H_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J)} \\ -\frac{1}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J H_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J)} e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} &= \Lambda E_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J)} \end{aligned} \quad (4-17)$$

Simplificando estas ecuaciones y aplicando las identidades de Euler¹, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 -\frac{E_0}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J [\cos(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J) + j \operatorname{sen}(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)] &= \Lambda H_0 \\
 -\frac{H_0}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J [\cos(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J) + j \operatorname{sen}(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)] &= \Lambda E_0
 \end{aligned} \tag{4-18}$$

Teniendo en cuenta la siguiente propiedad de los coeficientes derivativos estudiada en el capítulo 3,

$$d(m) = -d(-m) \tag{4-19}$$

se verifica que:

$$\sum_m d_m^J \cos(-k \cdot m \cdot \Delta z^J) = 0 \tag{4-20}$$

con lo que la parte real de la expresión (4-18) se anula, llegando a que los valores propios de esta ecuación son imaginarios puros y además su módulo es:

$$\operatorname{Im}(\Lambda) = \frac{c}{\Delta z} \sum_m d_m^J \operatorname{sen}(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J) \tag{4-21}$$

El rango de estos autovalores está definido en el siguiente intervalo:

$$-\frac{c}{\Delta z/2^J} \sum_m |d_m| \leq \operatorname{Im}(\Lambda) \leq \frac{c}{\Delta z/2^J} \sum_m |d_m| \tag{4-22}$$

donde hemos sustituido el valor del coeficiente derivativo de nivel J por su expresión equivalente desarrollada en el capítulo 3,

¹ Identidades de Euler: $e^{ia} = \cos a + i \operatorname{sen} a$, $e^{-ia} = \cos a - i \operatorname{sen} a$

$$d_m^J = 2^J \cdot d_m \quad (4-23)$$

Entonces, para garantizar la estabilidad numérica del algoritmo, el rango de los autovalores espaciales debe estar completamente incluido dentro del rango estable de los autovalores temporales. Para que esto suceda, basta con que el límite superior de los autovalores espaciales dado en (4-22) sea menor o igual que el límite superior de los autovalores temporales dado en (4-14):

$$\frac{c}{\Delta z/2^J} \sum_m |d_m| \leq \frac{2}{\Delta t} \quad (4-24)$$

De esta manera se obtiene el límite superior del intervalo de tiempo Δt que podemos fijar en nuestro algoritmo:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sum_m |d_m|} \frac{\Delta z/2^J}{c} \quad (4-25)$$

Si definimos un **factor de estabilidad** s como:

$$s = \frac{c\Delta t}{\Delta z/2^J} \quad (4-26)$$

la ecuación (4-25) se puede reescribir como:

$$\Delta t = s \cdot \frac{\Delta z/2^J}{c} \quad (4-27)$$

de donde se obtiene que los valores que puede tomar este factor de estabilidad s deben estar incluidos en el intervalo:

$$0 < s \leq \frac{2}{\sum_m |d_m|} \quad (4-28)$$

El intervalo definido en (4-28) depende del valor que tengan los coeficientes d_m , los cuales dependen del tipo de función wavelet empleado. En la tabla IV se muestra el valor límite que puede tomar el factor de estabilidad para diferentes tipos de función wavelet. Se observa un valor máximo ($s = 2$) para las funciones wavelet de Haar (D_1) que va disminuyendo a medida que aumenta el orden de la función wavelet D_M .

TABLA IV					
Factor de estabilidad s					
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
s	2,0	1,33	1,10	0,98	0,90

Observando los valores que puede tomar el factor de estabilidad en la tabla IV, vemos que, para un mismo valor en la resolución espacial Δz que aparece en la expresión (4-27), se tiene un rango de valores para el intervalo de tiempo Δt que da lugar a un algoritmo estable. En concreto se observa que para las funciones wavelet de Haar (D_1) el intervalo de tiempo Δt que se puede obtener es exactamente el doble, en comparación con el correspondiente valor en FDTD para la misma resolución espacial [75]:

$$0 < S_{FDTD} \leq 1 \Rightarrow \Delta t_{MRTD} \leq 2 \cdot \Delta t_{FDTD} \tag{4-29}$$

En los esquemas donde se utilizan funciones de escala de nivel J junto con funciones de wavelet de nivel J , dado que el conjunto es equivalente a un esquema con funciones de escala de nivel $J+1$, la estabilidad del primer esquema es igual a la estabilidad del segundo. Esto se puede comprobar fácilmente para las wavelets de Haar (D_1), debido a su representación más sencilla. Entonces, para comprobarlo, partimos del conjunto de ecuaciones discretizadas utilizando funciones de escala y funciones de wavelet de nivel J , y que fue estudiado en el apartado 3.2 del capítulo anterior:

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_i^f = {}^{n-\frac{1}{2}}H_i^f - \frac{\Delta t}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \left[\sum_m d_m^{J^n} E_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{g}_m^{J^n} E_{i-m}^y \right] \quad (4-30.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_i^y = {}^{n-\frac{1}{2}}H_i^y - \frac{\Delta t}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^{J^n} E_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{a}_m^{J^n} E_{i-m}^y \right] \quad (4-30.2)$$

$${}^{n+1}E_i^f = {}^nE_i^f - \frac{\Delta t}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \left[\sum_m d_m^{J^{n+\frac{1}{2}}} H_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{g}_m^{J^{n+\frac{1}{2}}} H_{i-m}^y \right] \quad (4-30.3)$$

$${}^{n+1}E_i^y = {}^nE_i^y - \frac{\Delta t}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^{J^{n+\frac{1}{2}}} H_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{a}_m^{J^{n+\frac{1}{2}}} H_{i-m}^y \right] \quad (4-30.4)$$

donde los coeficientes derivativos \mathbf{a}_m , \mathbf{b}_m , \mathbf{g}_m y d_m , correspondientes a la función wavelet de Haar, aparecen en la tabla II, y el número de coeficientes distintos de cero está dentro del rango $-1 \leq m \leq 1$. De nuevo, el criterio de estabilidad se obtiene a partir de los autovalores del sistema (4-30), dividiéndolo en dos problemas, uno temporal y otro espacial, e imponiendo que todos los autovalores espaciales estén dentro del rango que delimita al conjunto de autovalores temporalmente estables. El problema de autovalores temporales está descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}H_i^f - {}^{n-\frac{1}{2}}H_i^f}{\Delta t} = \Lambda^n H_i^f \quad (4-31.1)$$

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}H_i^y - {}^{n-\frac{1}{2}}H_i^y}{\Delta t} = \Lambda^n H_i^y \quad (4-31.2)$$

$$\frac{{}^{n+1}E_i^f - {}^nE_i^f}{\Delta t} = \Lambda^{n+\frac{1}{2}} E_i^f \quad (4-31.3)$$

$$\frac{{}^{n+1}E_i^y - {}^nE_i^y}{\Delta t} = \Lambda^{n+\frac{1}{2}} E_i^y \quad (4-31.4)$$

mientras que el problema de autovalores espaciales está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$-\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \left[\sum_m d_m^{J^n} E_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{g}_m^{J^n} E_{i-m}^y \right] = \Lambda^n H_i^f \quad (4-32.1)$$

$$-\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^{J^n} E_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{a}_m^{J^n} E_{i-m}^y \right] = \Lambda^n H_i^y \quad (4-32.1)$$

$$-\frac{1}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \left[\sum_m d_m^J H_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{g}_m^J H_{i-m}^y \right] = \Lambda^{n+\frac{1}{2}} E_i^f \quad (4-32.2)$$

$$-\frac{1}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J H_{i-m}^f + \sum_m \mathbf{a}_m^J H_{i-m}^y \right] = \Lambda^{n+\frac{1}{2}} E_i^y \quad (4-32.2)$$

La solución del problema temporal nos lleva de nuevo a que, para que el algoritmo sea estable, el conjunto de autovalores debe estar incluido en el intervalo dado por:

$$-\frac{2}{\Delta t} \leq \text{Im}(\Lambda) \leq +\frac{2}{\Delta t} \quad (4-14)$$

Para resolver el problema espacial, introducimos en las ecuaciones (4-32) un modo de propagación genérico, caracterizado por un vector de onda numérico \tilde{k} dado por el algoritmo, como el de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E_i^f &= E_0^f e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J)} \\ E_i^y &= E_0^y e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J)} \\ H_i^f &= H_0^f e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J)} \\ H_i^y &= H_0^y e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J)} \end{aligned} \quad (4-33)$$

donde Δz^J es la discretización espacial correspondiente al nivel de resolución J . De esta forma, tras simplificar los términos semejantes en ambos miembros de las igualdades, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$-\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \left[\sum_m d_m^J E_0^f e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} + \sum_m \mathbf{g}_m^J E_0^y e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right] = \Lambda H_0^f \quad (4-34.1)$$

$$-\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J E_0^f e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} + \sum_m \mathbf{a}_m^J E_0^y e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right] = \Lambda H_0^y \quad (4-34.2)$$

$$-\frac{1}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \left[\sum_m d_m^J H_0^f e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} + \sum_m \mathbf{g}_m^J H_0^y e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right] = \Lambda E_0^f \quad (4-34.3)$$

$$-\frac{1}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \left[\sum_m \mathbf{b}_m^J H_0^f e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} + \sum_m \mathbf{a}_m^J H_0^y e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right] = \Lambda E_0^y \quad (4-34.4)$$

Despejando H_0^f y H_0^y en (4-34.1) y (4-34.2) respectivamente, y llevándolo a (4-34.3) y (4-34.4), se obtienen las ecuaciones:

$$\left(\frac{c}{\Lambda \cdot \Delta z}\right)^2 \left[\begin{array}{l} \left[\sum_m d_m^J E_0^f e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} + \sum_m g_m^J E_0^y e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right] \cdot \sum_m d_m^J e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} + \\ \left[\sum_m b_m^J E_0^f e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} + \sum_m a_m^J E_0^y e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right] \cdot \sum_m g_m^J e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \end{array} \right] = E_0^f \quad (4-35.1)$$

$$\left(\frac{c}{\Lambda \cdot \Delta z}\right)^2 \left[\begin{array}{l} \sum_m g_m^J \left[\sum_m d_m^J E_0^f e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} + \sum_m g_m^J E_0^y e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right] e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} + \\ \sum_m a_m^J \left[\sum_m b_m^J E_0^f e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} + \sum_m a_m^J E_0^y e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right] e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \end{array} \right] = E_0^y \quad (4-35.2)$$

donde $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ es la velocidad de la luz en el medio que estamos modelando.

Teniendo en cuenta que para las funciones wavelet de Haar se cumplen las siguientes relaciones entre los coeficientes derivativos:

$$d_m = -a_m \quad (4-36.1)$$

$$b_m = -g_m \quad (4-36.2)$$

entonces, de las ecuaciones (4-35), se llega a la siguiente expresión:

$$\Lambda^2 = \left(\frac{c}{\Delta z}\right)^2 \cdot \left[\left(\sum_{m=1}^{-1} d_m^J e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right)^2 + \left(\sum_{m=1}^{-1} b_m^J e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right) \left(\sum_{m=1}^{-1} g_m^J e^{j(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right) \right] \quad (4-37)$$

Ahora, aplicando las identidades de Euler, y teniendo en cuenta que:

$$\sum_{m=1}^{-1} d_m^J \cos(-k \cdot m \cdot \Delta z^J) = 0 \quad (4-38.1)$$

$$\sum_{m=1}^{-1} b_m^J \sin(-k \cdot m \cdot \Delta z^J) = \sum_{m=1}^{-1} g_m^J \sin(-k \cdot m \cdot \Delta z^J) = 0 \quad (4-38.2)$$

obtenemos que el valor de los autovalores espaciales están dados por la siguiente expresión:

$$\Lambda^2 = -\left(\frac{2^J c}{\Delta z}\right)^2 \cdot \left[\left(\sum_{m=1}^{-1} d_m \text{sen}(-k \cdot m \cdot \Delta z^J) \right)^2 + \left(\sum_{m=1}^{-1} \mathbf{b}_m \text{cos}(-k \cdot m \cdot \Delta z^J) \right)^2 \right] \quad (4-39)$$

donde hemos hecho los cambios $d_m^J = 2^J \cdot d_m$ y $\mathbf{b}_m^J = 2^J \cdot \mathbf{b}_m$

En la expresión (4-39) vemos que los autovalores espaciales son imaginarios puros, y que su módulo es:

$$|\text{Im}(\Lambda)| = \frac{c}{\Delta z/2^J} \sqrt{\left(\sum_{m=1}^{-1} d_m \text{sen}(-k \cdot m \cdot \Delta z^J) \right)^2 + \left(\sum_{m=1}^{-1} \mathbf{b}_m \text{cos}(-k \cdot m \cdot \Delta z^J) \right)^2} \quad (4-40)$$

de donde obtenemos que el módulo de estos autovalores está acotado por el siguiente valor máximo:

$$|\text{Im}(\Lambda)| \leq 2 \cdot \frac{c}{\Delta z/2^J} = \frac{c}{\Delta z/2^{J+1}} \quad (4-41)$$

Entonces, para garantizar la estabilidad numérica del algoritmo, todos los autovalores espaciales deben estar incluidos dentro del rango de autovalores estables temporalmente. Para que esto suceda, el límite superior de los autovalores espaciales dado en (4-41) debe ser menor o igual que el límite superior de los autovalores temporales dado en (4-14):

$$\frac{c}{\Delta z/2^{J+1}} \leq \frac{2}{\Delta t} \quad (4-42)$$

De esta manera se obtiene que el límite superior del intervalo de tiempo Δt que podemos fijar en nuestro algoritmo es:

$$\Delta t \leq 2 \cdot \frac{\Delta z / 2^{J+1}}{c} \quad (4-43)$$

y corresponde al valor máximo que podemos tomar si desarrollamos los campos utilizando funciones de escala de nivel $J+1$.

Esta demostración, que hemos hecho con wavelets de Haar - los más simples - se puede repetir con cualquier otro tipo de wavelet, llegando, en principio, al mismo resultado. Para comprobarlo con un ejemplo, hemos simulado la propagación a lo largo del eje z de un pulso electromagnético de componentes E_x y H_y , utilizando funciones wavelet D_2 para desarrollar los campos en el espacio. En primer lugar, hemos considerado un desarrollo formado únicamente por funciones de escala de nivel $J = 0$, dividiendo el espacio de simulación en 100 puntos separados por una distancia de $\Delta z = 1$ mm. Según los valores mostrados en la tabla IV, hemos escogido el valor límite del factor de estabilidad, esto es, $s = 1,33$, con lo que hemos obtenido un valor del paso temporal igual a $\Delta t = 4,43$ ps. En la serie de figuras 4.2 se ha representado el valor de la componente E_x en diferentes instantes de tiempo. En ellas se puede apreciar cómo el pulso introducido en la estructura se divide en dos pulsos que se propagan en sentidos opuestos, sin aparecer ningún problema de estabilidad.

Sin embargo, en la serie de figuras 4.3 hemos representado el valor del campo eléctrico obtenido mediante una simulación de las mismas características que la anterior (sólo funciones de escala de nivel $J = 0$, y una discretización espacial de $\Delta z = 1$ mm), pero escogiendo un factor de estabilidad por encima del valor límite indicado en la tabla IV. Este valor ha sido $s = 1,5$, con lo que el paso temporal obtenido ha sido mayor que en la situación anterior, esto es, $\Delta t = 5$ ps. Ahora se observa cómo, tras un pequeño número de iteraciones, el valor del campo dado por el algoritmo comienza a crecer de forma ilimitada hasta producirse un desbordamiento del mismo.

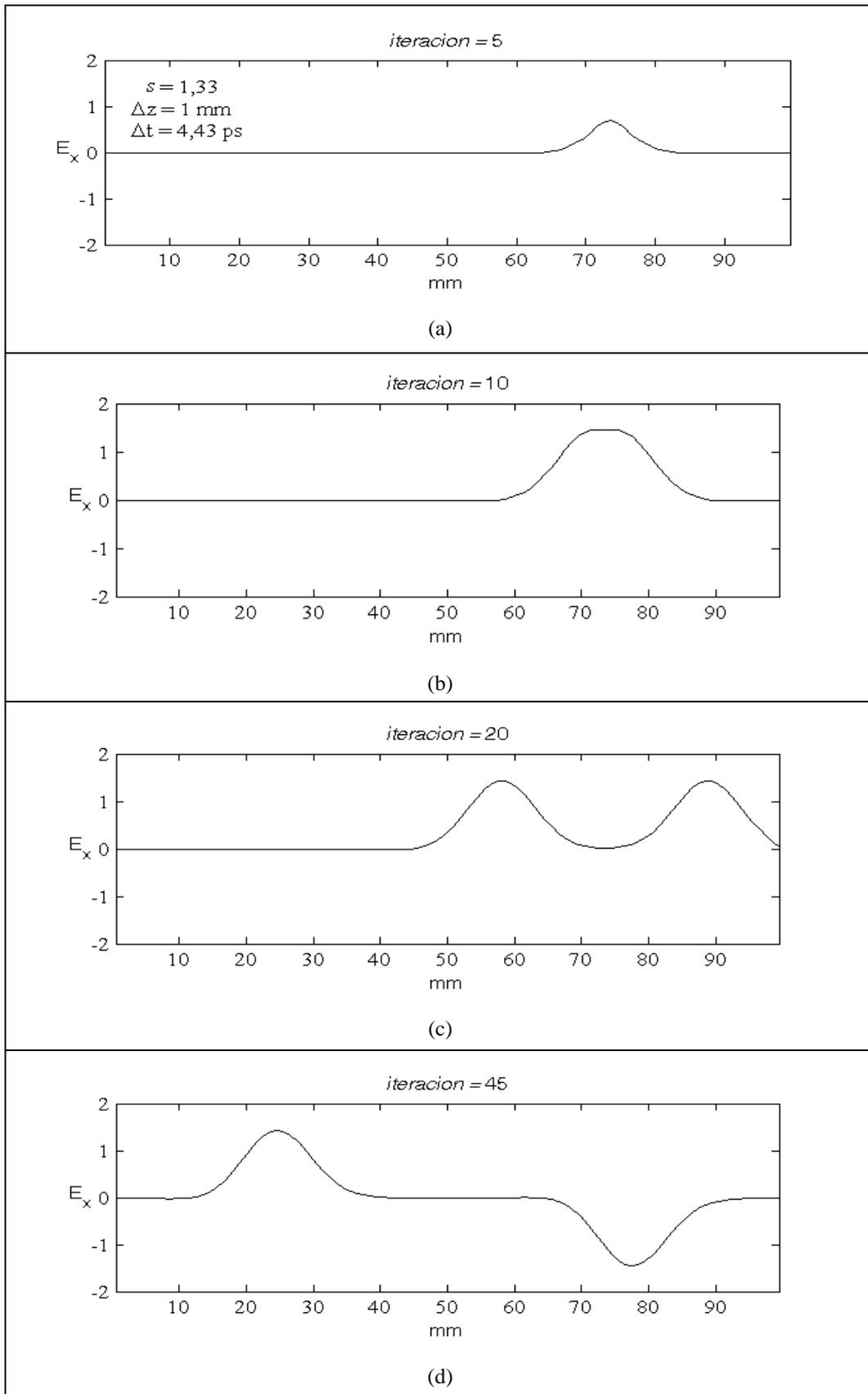


Figura 4.2.: Valor de la componente E_x (en V/m) en diferentes instantes de tiempo. La simulación representa la propagación de un pulso, y se ha realizado utilizando funciones de escala del tipo D_2 con un valor límite del factor de estabilidad igual a $s = 1,33$.

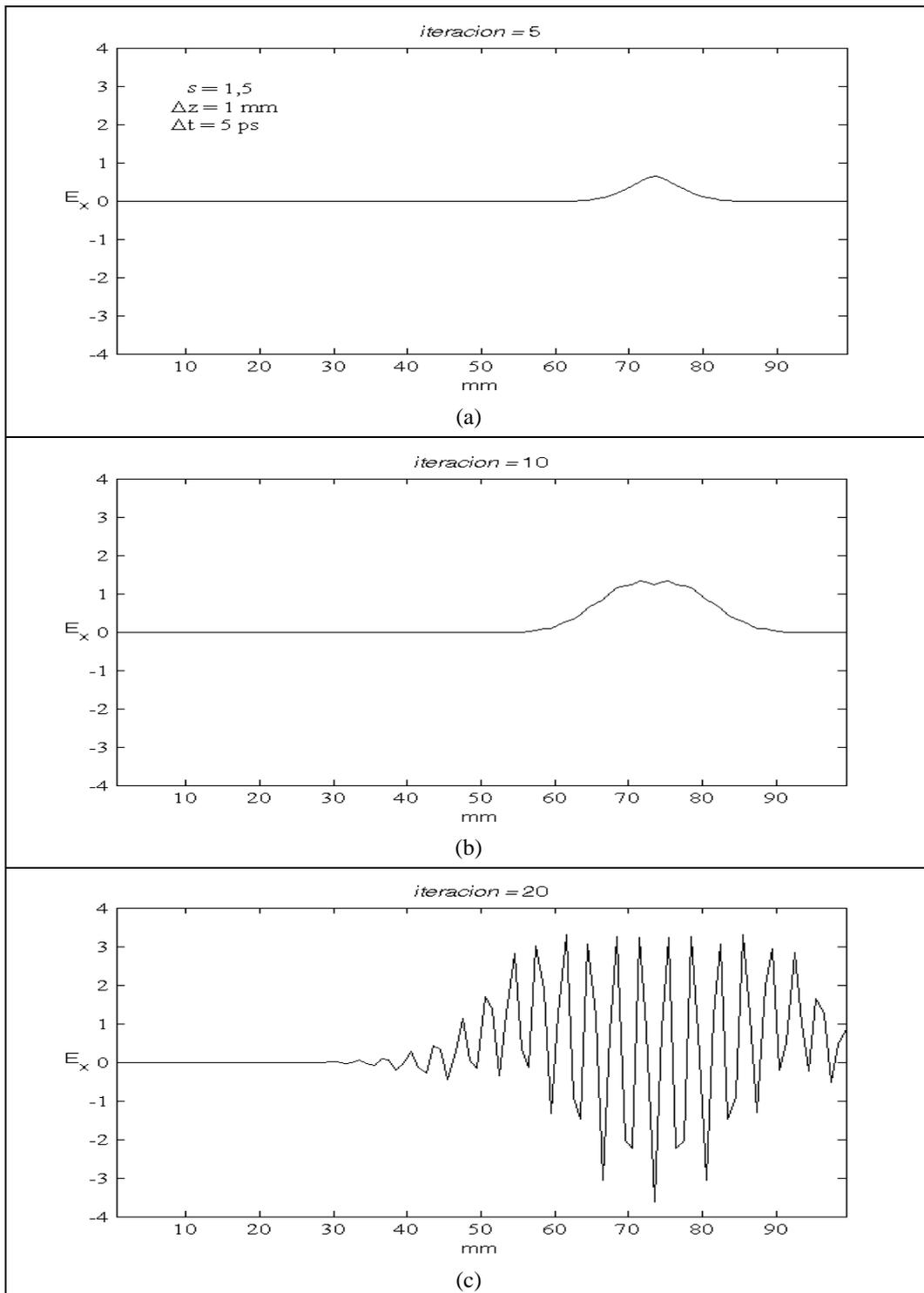


Figura 4.3.: Valor de la componente E_x (en V/m) en diferentes instantes de tiempo. La simulación de ha realizado en las mismas condiciones que la representada en la figura 4.2, pero con un valor del factor de estabilidad por encima del límite ($s = 1,5$), lo que provoca al cabo de unas pocas iteraciones (c) un desbordamiento del valor del campo proporcionado por el algoritmo.

En segundo lugar, hemos realizado dos simulaciones estudiando nuevamente la propagación de un pulso electromagnético a lo largo del eje z , pero esta vez utilizando, para desarrollar los campos en el espacio, funciones de escala y funciones de wavelet D_2 de nivel $J = 0$, lo que nos ha proporcionado una solución final de nivel $J = 1$. Al igual que en las dos simulaciones anteriores, éstas se han realizado dividiendo el espacio en 100 puntos, con una separación entre cada uno de $\Delta z = 1$ mm. De esta forma, al reconstruir el valor de los campos, se ha obtenido una resolución final de $\Delta z^1 = \Delta z/2 = 0,5$ mm. Se ha escogido el valor límite del factor de estabilidad de acuerdo con esta resolución espacial final, es decir, $s = 1,33$, con lo que el valor del paso temporal ha sido de $\Delta t = 2,22$ ps, que es exactamente la mitad del valor obtenido en las simulaciones anteriores. El valor de la componente E_x obtenido en estas condiciones se ha representado en la serie de figuras 4.4. En ellas se puede apreciar la misma situación que la mostrada en la figura 4.2, es decir, el pulso introducido en la estructura se divide en dos que se propagan en sentidos opuestos, sin aparecer inestabilidad alguna. Debido a que en este caso el paso temporal es la mitad que en las simulaciones anteriores, se observa que el número de iteraciones necesarias para representar la situación en el mismo instante temporal es exactamente el doble.

En la serie de figuras 4.5 se ha representado el valor de la componente E_x en diferentes instantes de tiempo, pero esta vez se ha escogido un valor del factor de estabilidad por encima del límite, por ejemplo, $s = 1,5$. De acuerdo con la resolución espacial final ($\Delta z^1 = 0,5$ mm), este valor nos ha proporcionado un paso temporal de $\Delta t = 2,5$ ps. Se puede apreciar, nuevamente, cómo al cabo de unas pocas iteraciones, el valor del campo eléctrico obtenido aumenta sin límite de manera que el algoritmo se vuelve inestable. Esto confirma que, efectivamente, el valor del factor de estabilidad se debe escoger dentro de los límites mostrados en la tabla IV, y además, en las situaciones en las que se utilizan varios niveles de resolución, se debe escoger teniendo en cuenta el valor de la discretización espacial final.

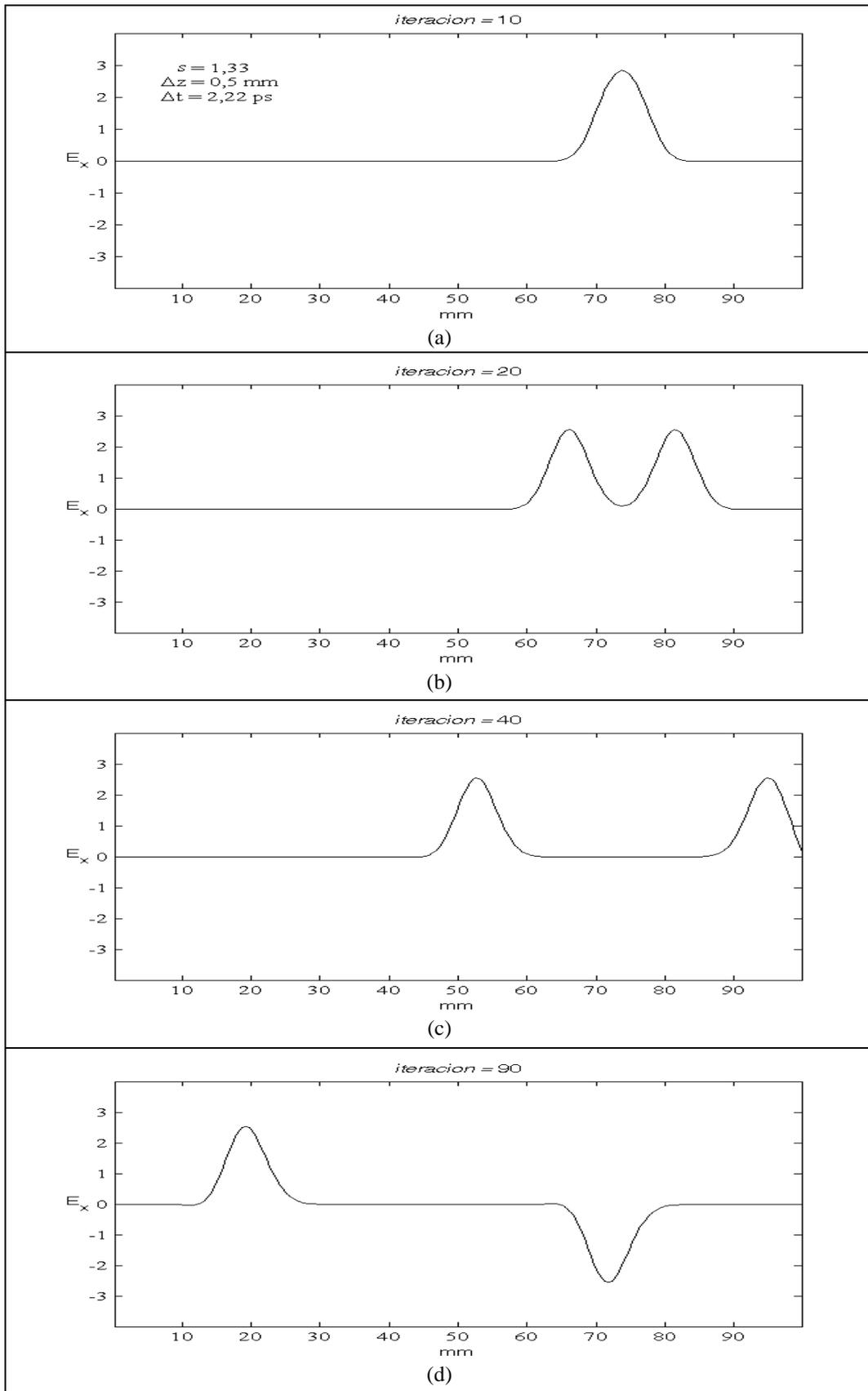


Figura 4.4.: Valor de la componente E_x (en V/m) en diferentes instantes de tiempo. La simulación se ha realizado utilizando funciones de escala y de wavelet de nivel 0 del tipo D_2 , con un factor de estabilidad $s = 1,33$.

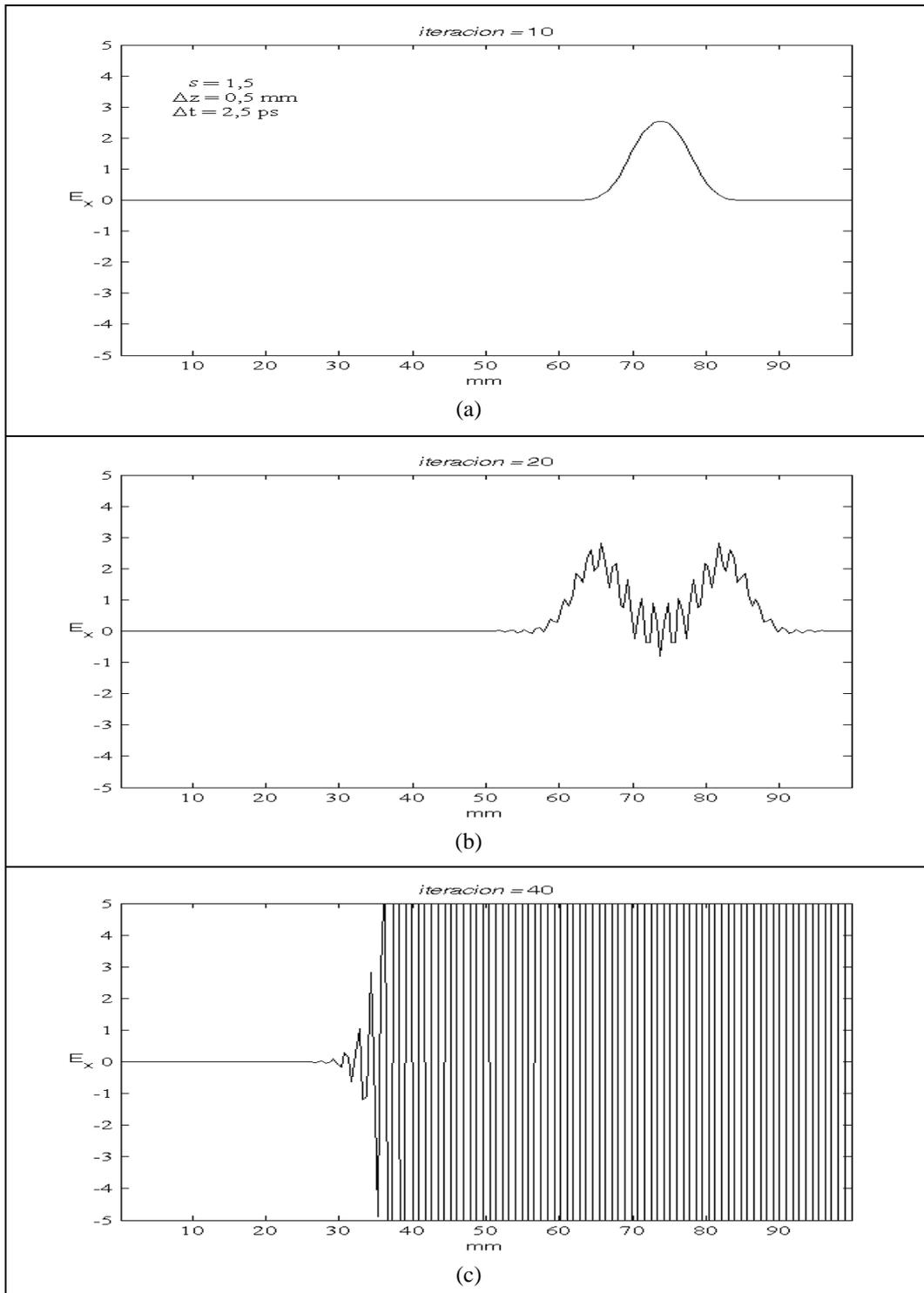


Figura 4.5.: Valor de la componente E_x (en V/m) en diferentes instantes de tiempo. La simulación se ha realizado en las mismas condiciones que la representada en la figura 4.4, pero con un factor de estabilidad por encima del límite, $s = 1,5$.

Como acabamos de ver, los esquemas donde se utilizan funciones de escala de nivel J junto con funciones de wavelet de nivel J , son equivalentes, en conjunto, a un esquema con funciones de escala de nivel $J+1$, en lo que se refiere a la dependencia temporal, y también en lo que se refiere a la estabilidad. Entonces, si añadimos a este esquema funciones de wavelet de nivel $J+1$, el resultado final será equivalente, en cuanto a estabilidad y resolución espacial, a un esquema con funciones de escala de nivel $J+2$.

4.2.2. Estabilidad numérica en dos dimensiones

Estudiamos ahora la estabilidad del algoritmo para un modo TM en dos dimensiones (para un modo TE el procedimiento es análogo). Consideramos un medio homogéneo, lineal, isótropo y no dispersivo donde los campos varían únicamente en el plano \mathbf{XZ} . En este caso, las ecuaciones de Maxwell necesarias para abordar este problema se reducen a:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mathbf{m} \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (4-44.1)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mathbf{m} \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (4-44.2)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \mathbf{e} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (4-44.2)$$

La discretización temporal de estas de ecuaciones, utilizando funciones pulso $h_n(t)$ de anchura Δt , se vio en el apartado 3.3, llegando al siguiente conjunto de ecuaciones:

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_x^J(x, z) = {}^{n-\frac{1}{2}}H_x^J(x, z) + \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial z} {}^n E_y^J(x, z) \quad (4-45.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}H_z^J(x, z) = {}^{n-\frac{1}{2}}H_z^J(x, z) - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial x} {}^n E_y^J(x, z) \quad (4-45.2)$$

$${}^{n+1}E_y^J(x, z) = {}^n E_y^J(x, z) + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}H_x^J(x, z) - \frac{\partial}{\partial x} {}^{n+\frac{1}{2}}H_z^J(x, z) \right] \quad (4-45.3)$$

Estas ecuaciones se discretizaban en el espacio utilizando funciones de escala de nivel J con lo que se obtenían las ecuaciones siguientes:

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff} - {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff}}{\Delta t} = \frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,k-m}^{ff} \quad (4-46.1)$$

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff} - {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta x} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,k}^{ff} \quad (4-46.2)$$

$$\frac{{}^{n+1}E_{i,k}^{ff} - {}^n E_{i,k}^{ff}}{\Delta t} = \mathbf{e} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k-m}^{ff} - \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i-m,k}^{ff} \right] \quad (4-46.3)$$

Del mismo modo que se hizo con las ecuaciones (4-4) en una dimensión, en dos dimensiones las ecuaciones (4-46) se dividen en dos problemas de autovalores, separando la parte espacial y la temporal, con el fin de encontrar su rango de estabilidad. Así, el conjunto de ecuaciones que representa el problema de autovalores temporales es el siguiente:

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff} - {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff}}{\Delta t} = \Lambda_x {}^n H_{i,k}^{ff} \quad (4-47.1)$$

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff} - {}^{n-\frac{1}{2}}H_{i,k}^{ff}}{\Delta t} = \Lambda_z {}^n H_{i,k}^{ff} \quad (4-47.1)$$

$$\frac{{}^{n+1}E_{i,k}^{ff} - {}^n E_{i,k}^{ff}}{\Delta t} = \Lambda_y {}^{n+\frac{1}{2}}E_{i,k}^{ff} \quad (4-47.2)$$

Estas ecuaciones son formalmente idénticas a las ecuaciones (4-5) correspondientes al problema unidimensional. Por lo tanto, su solución se obtiene del mismo modo y se llega también a que para que el algoritmo sea estable, el conjunto de autovalores de la ecuación espacial debe estar dentro del intervalo dado por:

$$-\frac{2}{\Delta t} \leq \text{Im}(\Lambda) \leq +\frac{2}{\Delta t} \quad (4-14)$$

Para encontrar el conjunto de autovalores espaciales, también se procede de forma análoga a como hicimos en una dimensión. Primeramente, obtenemos el conjunto de ecuaciones que describen el problema de autovalores espaciales:

$$\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J E_{i,k-m}^{ff} = \Lambda_x^n H_{i,k}^{ff} \quad (4-48.1)$$

$$-\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta x} \sum_m d_m^J E_{i-m,k}^{ff} = \Lambda_z^n H_{i,k}^{ff} \quad (4-48.2)$$

$$\mathbf{e} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J H_{i,k-m}^{ff} - \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J H_{i-m,k}^{ff} \right] = \Lambda_y^{n+\frac{1}{2}} E_{i,k}^{ff} \quad (4-48.3)$$

Seguidamente, se introduce en ellas un modo de propagación genérico, caracterizado por un vector de onda numérico de componentes \tilde{k}_x y \tilde{k}_z , como el indicado en la expresión:

$$\begin{aligned} E_{i,k}^{ff} &= E_{0y} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} \\ H_{i,k}^{ff} &= H_{0x} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} \\ H_{i,k}^{ff} &= H_{0z} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} \end{aligned} \quad (4-49)$$

Sustituyendo (4-49) en (4-48) obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J E_{0y} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} e^{j(-\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J)} &= \Lambda H_{0x} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} \\ -\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta x} \sum_m d_m^J E_{0y} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} e^{j(-\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J)} &= \Lambda H_{0z} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} \end{aligned} \quad (4-50)$$

$$\mathbf{e} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J H_{0x} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} e^{j(-\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J)} - \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J H_{0z} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} e^{j(-\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J)} \right] = \Lambda E_{0y} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)}$$

De nuevo, aplicamos la identidad de Euler y tenemos en cuenta la propiedad (4-19), de modo que la parte real de estas ecuaciones se anula. Tras estas simplificaciones, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 j \frac{E_{0y}}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J \operatorname{sen}(-\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J) &= \Lambda H_{0x} \\
 -j \frac{E_{0y}}{\mathbf{m} \cdot \Delta x} \sum_m d_m^J \operatorname{sen}(-\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J) &= \Lambda H_{0z} \\
 j \frac{1}{\mathbf{e}} \left[\frac{H_{0x}}{\Delta z} \sum_m d_m^J \operatorname{sen}(-\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J) - \frac{H_{0z}}{\Delta x} \sum_m d_m^J \operatorname{sen}(-\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J) \right] &= \Lambda E_{0y}
 \end{aligned} \tag{4-51}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos que los valores propios son imaginarios puros y además su módulo es:

$$\operatorname{Im}(\Lambda) = \sqrt{\left(\frac{c}{\Delta x}\right)^2 \left(\sum_m d_m^J \operatorname{sen}(-\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J)\right)^2 + \left(\frac{c}{\Delta z}\right)^2 \left(\sum_m d_m^J \operatorname{sen}(-\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J)\right)^2} \tag{4-52}$$

Analizando la expresión (4-52) se ve que el conjunto de autovalores espaciales está dentro del siguiente rango:

$$|\operatorname{Im}(\Lambda)| \leq \sqrt{\left(\frac{c}{\Delta x}\right)^2 \left(\sum_m |d_m^J|\right)^2 + \left(\frac{c}{\Delta z}\right)^2 \left(\sum_m |d_m^J|\right)^2} \tag{4-53}$$

que, sustituyendo los valores de d_m^J por su expresión equivalente dada en la ecuación (4-23), se puede poner como:

$$|\operatorname{Im}(\Lambda)| \leq \sum_m |d_m| \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{\Delta x/2^J}\right)^2 + \left(\frac{c}{\Delta z/2^J}\right)^2} \tag{4-54}$$

Como se explicó anteriormente para una dimensión, para garantizar la estabilidad numérica del algoritmo, el rango de todos los autovalores espaciales debe estar completamente incluido dentro del rango estable de los autovalores temporales. Para que esto suceda, basta con que el límite superior de los autovalores espaciales dado en la ecuación (4-54) sea menor o igual que el límite superior de los autovalores temporales estables dado en la ecuación (4-14):

$$\Delta t \leq \frac{2}{c \cdot \sum_m |d_m|} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z/2^J}\right)^2}} \quad (4-55)$$

Definiendo el siguiente factor de estabilidad s :

$$s = c\Delta t \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z/2^J}\right)^2} \quad (4-56)$$

la expresión (4-55) se puede poner como

$$\Delta t = s \cdot \frac{1}{c \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z/2^J}\right)^2}} \quad (4-57)$$

donde el rango de valores permitidos que puede tomar el factor de estabilidad s para que el algoritmo sea estable es el dado en (4-28), con lo cual, para cada función de Daubechies, tenemos los mismos límites para el valor de s que se indicaban en la tabla IV. Un procedimiento equivalente al utilizado en la sección 4.2.1. permitiría demostrar que también ahora el límite de estabilidad sigue siendo el mismo, al añadir funciones de wavelet.

4.2.3. Estabilidad numérica en tres dimensiones

Cuando el problema que se desea resolver no permita realizarr ninguna simplificación, eliminando la dependencia respecto de alguna coordenada, debemos utilizar las seis ecuaciones escalares de Maxwell (3-2). Como se vio en el apartado 3.4 del capítulo anterior, la discretización de estas ecuaciones utilizando funciones pulso en la variable temporal, y funciones de escala de nivel J en las variables espaciales, nos lleva al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,j,k}^{fff} - {}^{n-\frac{1}{2}}_x H_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{m}} \left[\frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,j-m,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,j,k-m}^{fff} \right] \quad (4-58.1)$$

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}_y H_{i,j,k}^{fff} - {}^{n-\frac{1}{2}}_y H_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{m}} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,j,k-m}^{fff} - \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,j,k}^{fff} \right] \quad (4-58.2)$$

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i,j,k}^{fff} - {}^{n-\frac{1}{2}}_z H_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{m}} \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,j,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,j-m,k}^{fff} \right] \quad (4-58.3)$$

$$\frac{{}^{n+1}_x E_{i,j,k}^{fff} - {}^n E_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = \frac{1}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i,j-m,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_y H_{i,j,k-m}^{fff} \right] \quad (4-58.4)$$

$$\frac{{}^{n+1}_y E_{i,j,k}^{fff} - {}^n E_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = \frac{1}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,j,k-m}^{fff} - \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i-m,j,k}^{fff} \right] \quad (4-58.5)$$

$$\frac{{}^{n+1}_z E_{i,j,k}^{fff} - {}^n E_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = \frac{1}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_y H_{i-m,j,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,j-m,k}^{fff} \right] \quad (4-58.6)$$

El estudio de la estabilidad del algoritmo formado a partir de estas seis ecuaciones sigue las mismas pautas que los dos casos anteriores. Para ello, el conjunto de ecuaciones (4-58) se divide en dos problemas de autovalores, espaciales y temporales. El problema de autovalores temporales, al no depender de la discretización espacial, es el mismo en 1D, 2D y 3D, con lo cual la condición de estabilidad es la expresada en la ecuación (4-14):

$$-\frac{2}{\Delta t} \leq \text{Im}(\Lambda) \leq +\frac{2}{\Delta t} \quad (4-14)$$

En cuanto al problema de autovalores espaciales, a pesar de tratarse de seis ecuaciones, se resuelve de manera análoga introduciendo en ellas un modo de propagación genérico, caracterizado por un vector de onda numérico de componentes \tilde{k}_x , \tilde{k}_y y \tilde{k}_z , como el indicado en la expresión:

$$\begin{aligned}
 {}_x E_{i,j,k}^{fff} &= E_{0x} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_y \cdot j \cdot \Delta y^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} \\
 {}_y E_{i,j,k}^{fff} &= E_{0y} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_y \cdot j \cdot \Delta y^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} \\
 {}_z E_{i,j,k}^{fff} &= E_{0z} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_y \cdot j \cdot \Delta y^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} \\
 {}_x H_{i,j,k}^{fff} &= H_{0x} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_y \cdot j \cdot \Delta y^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} \\
 {}_y H_{i,j,k}^{fff} &= H_{0y} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_y \cdot j \cdot \Delta y^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)} \\
 {}_z H_{i,j,k}^{fff} &= H_{0z} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_y \cdot j \cdot \Delta y^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J)}
 \end{aligned} \tag{4-59}$$

Operando del mismo que se hizo anteriormente, se llega a que los valores propios de la parte espacial son imaginarios puros y se encuentran dentro del siguiente intervalo:

$$|\text{Im}(\Lambda)| \leq \sum_m |d_m| \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{\Delta x/2^J}\right)^2 + \left(\frac{c}{\Delta y/2^J}\right)^2 + \left(\frac{c}{\Delta z/2^J}\right)^2} \tag{4-60}$$

Entonces, para garantizar la estabilidad del algoritmo, imponemos que todos los autovalores de la parte espacial estén incluidos dentro del rango de estabilidad de la parte temporal. Para ello es suficiente que el límite superior de los autovalores espaciales dado en (4-60) esté por debajo del valor máximo dado en (4-14). De esta forma obtenemos que el incremento temporal Δt que garantiza la estabilidad del algoritmo se encuentra dentro del siguiente intervalo:

$$\Delta t \leq \frac{2}{c \cdot \sum_m |d_m|} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z/2^J}\right)^2}} \tag{4-61}$$

Definiendo el siguiente factor de estabilidad s :

$$s = c \cdot \Delta t \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z/2^J}\right)^2} \tag{4-62}$$

la expresión (4-61) se puede poner como:

$$\Delta t = s \cdot \frac{1}{c \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z/2^J}\right)^2}} \quad (4-63)$$

y para que el algoritmo sea estable, el valor que puede tomar el factor de estabilidad s debe estar dentro de los límites mencionados en la ecuación (4-28), con lo cual, para cada función de Daubechies, tenemos los mismos posibles valores que se indicaban en la tabla IV.

$$\Delta t = s \cdot \frac{1}{c \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z/2^J}\right)^2}} \quad (4-63)$$

y para que el algoritmo sea estable, el valor que puede tomar el factor de estabilidad s debe estar dentro de los límites mencionados en la ecuación (4-28), con lo cual, para cada función de Daubechies, tenemos los mismos posibles valores que se indicaban en la tabla IV.

4.3.- CARACTERÍSTICAS DE DISPERSIÓN

La satisfacción de los límites de estabilidad expuestos en el apartado anterior únicamente nos asegura que el valor de la solución numérica proporcionado por el algoritmo permanece acotado. La precisión del algoritmo es otro factor a tener en cuenta y lo vamos a tratar a continuación. El proceso de discretización realizado para la obtención de las ecuaciones del algoritmo da lugar a un error de fase en la propagación de los campos, es decir, la velocidad de fase dada por el algoritmo puede ser diferente de la velocidad de fase de la onda en el medio que estemos considerando, siendo, además, distinta para cada frecuencia y dependiente de la dirección de propagación. Esto se conoce como dispersión numérica y su análisis se realiza de forma similar al realizado para la estabilidad numérica, donde ahora el objetivo es encontrar la relación que existe entre el número de ondas k y la frecuencia angular ω de una onda monocromática.

4.3.1. Dispersión numérica en una dimensión

Comenzaremos, en primer lugar, analizando el problema unidimensional descrito por las ecuaciones (4-1). Como ya se hizo en el estudio de la estabilidad, tomamos como punto de partida el conjunto de ecuaciones discretizadas dado en (4-4)

donde se han empleado funciones de escala de resolución J para desarrollar los campos en el espacio:

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}H_i^f - {}^{n-\frac{1}{2}}H_i^f}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m}^f \quad (4-4.1)$$

$$\frac{{}^{n+1}E_i^f - {}^n E_i^f}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{e} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}H_{i-m}^f \quad (4-4.2)$$

Consideramos entonces la propagación de un modo numérico arbitrario caracterizado por los frentes de onda monocromáticos definidos en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} {}^n E_i^f &= E_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \cdot \Delta t)} \\ {}^n H_i^f &= H_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \cdot \Delta t)} \end{aligned} \quad (4-64)$$

donde \tilde{k} representa el número de ondas de la solución numérica dada por el algoritmo, y Δz^J es la resolución espacial en el nivel de resolución J .

Introducimos las expresiones (4-64) como solución en nuestro sistema de ecuaciones discretizadas (4-4), y como resultado obtenemos:

$$\begin{aligned} E_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \cdot \Delta t)} e^{-j\mathbf{w} \cdot \Delta t} &= E_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \cdot \Delta t)} - \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{1}{\mathbf{e}} \left[\sum_m d_m^J H_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \cdot \Delta t)} e^{-j(\tilde{k} \cdot l \cdot \Delta z^J + \mathbf{w} \cdot \frac{\Delta t}{2})} \right] \\ H_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \cdot \Delta t)} e^{-j\mathbf{w} \cdot \frac{\Delta t}{2}} &= H_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \cdot \Delta t)} e^{j\mathbf{w} \cdot \frac{\Delta t}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{1}{\mathbf{m}} \left[\sum_m d_m^J E_0 e^{j(\tilde{k} \cdot i \cdot \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \cdot \Delta t)} e^{-j(\tilde{k} \cdot l \cdot \Delta z^J)} \right] \end{aligned} \quad (4-65)$$

Estas ecuaciones se pueden simplificar hasta llegar a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} E_0 \left[e^{-j\mathbf{w} \cdot \frac{\Delta t}{2}} - e^{j\mathbf{w} \cdot \frac{\Delta t}{2}} \right] &= -\frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{1}{\mathbf{e}} \left[\sum_m d_m^J H_0 e^{-j(\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right] \\ H_0 \left[e^{-j\mathbf{w} \cdot \frac{\Delta t}{2}} - e^{j\mathbf{w} \cdot \frac{\Delta t}{2}} \right] &= -\frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{1}{\mathbf{m}} \left[\sum_m d_m^J E_0 e^{-j(\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right] \end{aligned} \quad (4-66)$$

Aplicando las identidades de Euler, y teniendo en cuenta de nuevo la propiedad (4-19), llegamos a que la parte real de estas ecuaciones se anula y que la parte imaginaria queda como sigue:

$$\begin{aligned} 2E_0 \operatorname{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} &= \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{1}{\mathbf{e}} \left[\sum_m d_m^J H_0 \operatorname{sen}(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J) \right] \\ 2H_0 \operatorname{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} &= \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{1}{\mathbf{m}} \left[\sum_m d_m^J E_0 \operatorname{sen}(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J) \right] \end{aligned} \quad (4-67)$$

A partir de aquí se obtiene la relación de dispersión numérica del algoritmo:

$$\frac{2\Delta z}{c\Delta t} \operatorname{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} = \sum_m d_m^J \operatorname{sen}(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J) \quad (4-68)$$

que, sustituyendo los valores de d_m^J por su expresión equivalente dada en (4-23), se puede poner como:

$$\frac{2\Delta z^J}{c\Delta t} \operatorname{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} = \sum_m d_m \operatorname{sen}(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z^J) \quad (4-69)$$

Teniendo en cuenta la siguiente propiedad de los coeficientes derivativos estudiada en el capítulo 3,

$$\sum_m m \cdot d_m = -1 \quad (4-70)$$

se puede comprobar que cuando Δz es muy pequeño con respecto a la longitud de onda, es decir, para resoluciones altas, la relación dada en (4-69) se reduce a la expresión teórica correspondiente a un medio no dispersivo:

$$R = \frac{1}{\Delta z} \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{w} \approx c \cdot \tilde{k} \quad (4-71)$$

Esto significa que la dispersión numérica producida por el algoritmo podría reducirse en el grado que se desee, simplemente empleando un mallado suficientemente fino. En cualquier caso, sucede que para cada frecuencia tendremos un valor de \tilde{k} que depende de la relación entre Δz y la longitud de onda \mathbf{l} . Esto implica que, para señales con un amplio contenido en frecuencias, existirán diferentes velocidades de fase \tilde{v}_f asociadas a cada frecuencia, lo que provocará su distorsión. A esta velocidad de fase numérica la definimos como:

$$\tilde{v}_f = \frac{\mathbf{w}}{\tilde{k}} \quad (4-72)$$

En la figura 4.6 está representada la velocidad de fase numérica \tilde{v}_f dada por el algoritmo en función de la resolución espacial para diferentes tipos de wavelets de Daubechies. Se ha escogido un factor de estabilidad $s = 0,5$ de manera que el algoritmo es estable en todos los casos representados. Se puede apreciar cómo la velocidad de fase tiende hacia el valor correspondiente al de un medio no dispersivo a medida que aumenta la resolución:

$$R = \frac{\mathbf{l}}{\Delta z} \rightarrow \infty \Rightarrow \tilde{v}_f \approx c \quad (4-73)$$

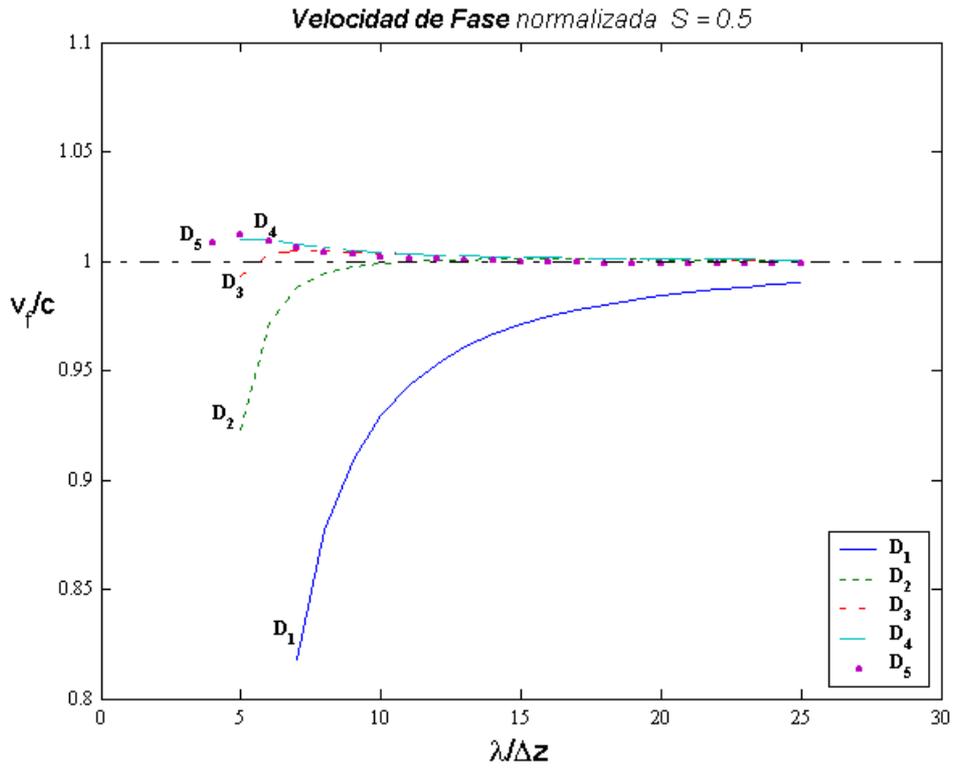


Figura 4.6.: Característica de dispersión del algoritmo (velocidad de fase en función de la resolución espacial) para diferentes Wavelets D_M . El valor del factor de estabilidad escogido ha sido $s=0,5$.

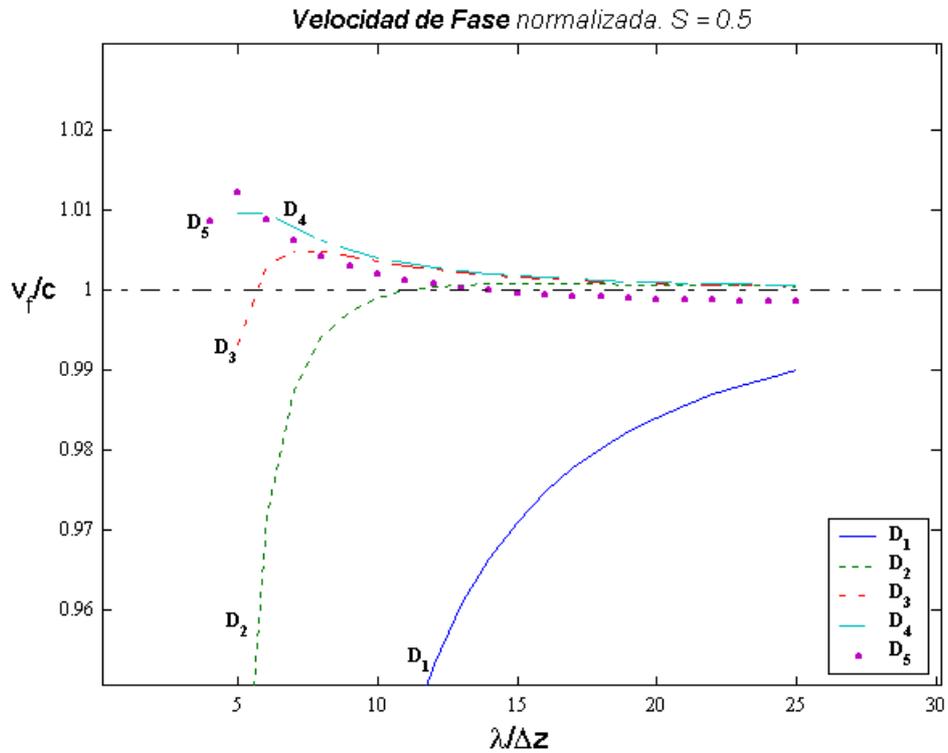


Figura 4.7.: Detalle de la figura 4.6. en el límite próximo al valor ideal ($\tilde{v}_f/c=1$).

En la figura 4.6 se observa, además, cómo el error de dispersión disminuye a medida que aumenta el orden M de la función wavelet D_M empleada, es decir, la diferencia entre el valor de la velocidad de fase dado por el algoritmo y el valor teórico correspondiente al caso no dispersivo es cada vez menor. La figura 4.7 corresponde a un detalle de la figura 4.6, donde se puede apreciar con claridad esta propiedad. Se observa también que, utilizando wavelets de orden $M \geq 2$, el error es inferior al 1% incluso para resoluciones muy bajas, del orden de 7 puntos por longitud de onda.

Para el caso particular en el que el desarrollo de los campos se realice utilizando wavelets de Haar (D_1), la relación de dispersión dada en (4-69) se reduce a:

$$\frac{2}{s} \operatorname{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} = \operatorname{sen}(\tilde{\mathbf{k}} \cdot \Delta z) \quad (4-74)$$

donde s es el factor de estabilidad definido en (4-26), y hemos considerado, por sencillez en la notación, y sin pérdida de generalidad, que $J = 0$. Se observa que para el límite de estabilidad $s = 2$ el algoritmo no es dispersivo.

En la figura 4.8 se ha representado la velocidad de fase numérica $\tilde{v}_f = \mathbf{w}/\tilde{\mathbf{k}}$ frente a la resolución espacial para diferentes valores del factor de estabilidad s . Se puede comprobar cómo el error de dispersión del algoritmo se reduce a medida que aumenta la resolución espacial y además, cómo disminuye a medida que aumenta el factor de estabilidad. Las situaciones correspondientes a factores de estabilidad mayores que 1 no podrían modelarse utilizando FDTD, ya que no serían estables.

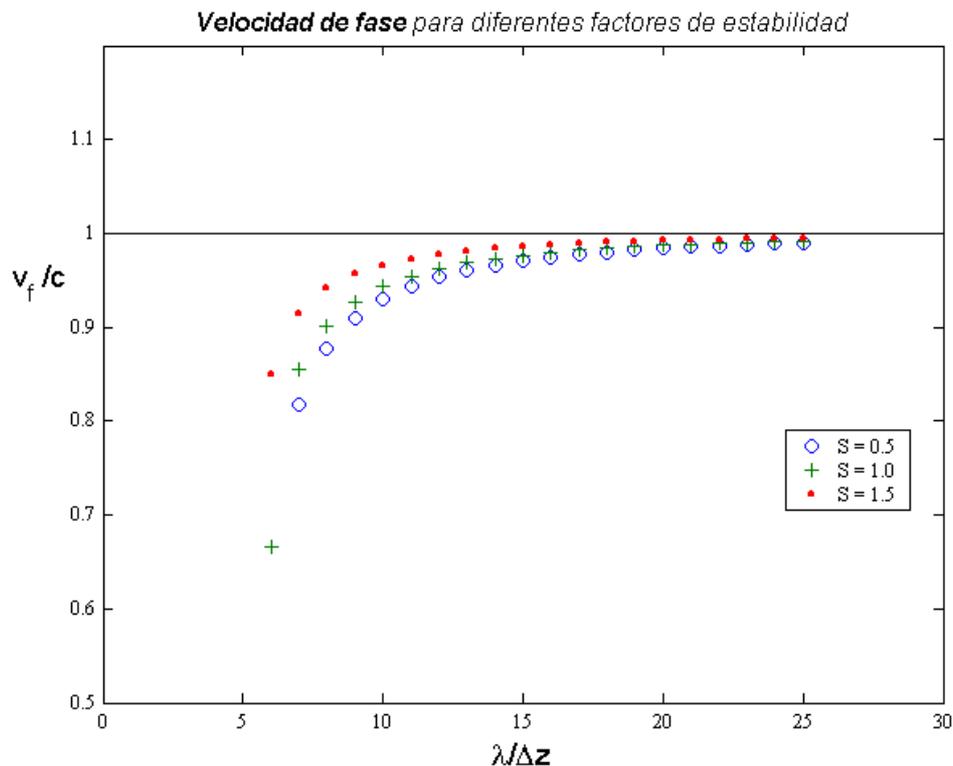


Figura 4.8.: Característica de dispersión del algoritmo utilizando wavelets de Haar para diferentes valores del factor de estabilidad S .

Para observar la diferencia que existe entre la característica de dispersión del algoritmo correspondiente a las diferentes wavelets de Daubechies, se ha simulado la propagación de un pulso gaussiano en el sentido negativo del eje z . En la figura 4.9 se ha representado el valor de la componente E_x del campo eléctrico en tres instantes diferentes de su propagación, y para tres tipos de wavelets (D_1 , D_2 y D_3). Aquí se pone de manifiesto la diferencia entre los errores de dispersión de los tres esquemas. Se observa que el caso más dispersivo es aquel en el que se han empleado wavelets de Haar (D_1), mientras que para las wavelets de orden superior el error de dispersión se hace prácticamente inapreciable. En los tres casos se ha utilizado un factor de estabilidad $s = 0,5$.

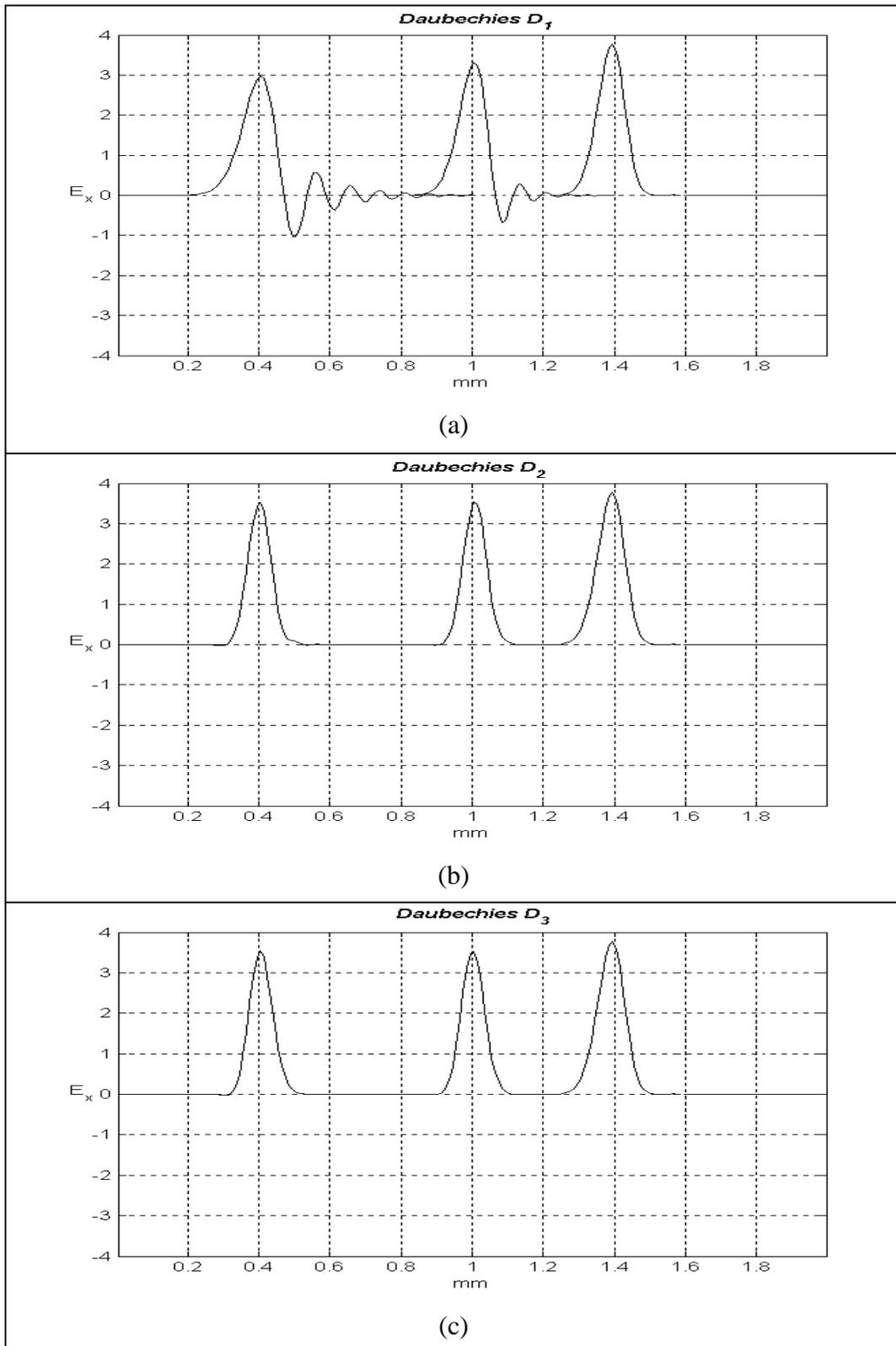


Figura 4.9.: *Dispersión en la propagación de un pulso gaussiano utilizando diferentes wavelets D_M : (a) D_1 (wavelets de Haar); (b) D_2 ; (c) D_3 . Las gráficas corresponden a tres instantes diferentes de la propagación del pulso a lo largo del eje z en el sentido negativo.*

Estos resultados se pueden comparar con los obtenidos mediante otras técnicas, como por ejemplo, FDTD y TLM.

La relación de dispersión para el método FDTD está dada por la siguiente expresión [75]:

$$\frac{1}{s} \operatorname{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} = \operatorname{sen} \left(\frac{\tilde{\mathbf{k}} \cdot \Delta z}{2} \right) \quad (4-75)$$

donde s es el factor de estabilidad definido como $s = c\Delta t/\Delta z$, y cuyo valor debe estar dentro del rango $0 < s \leq 1$. A partir de la expresión (4-75) se puede calcular la velocidad de fase numérica dada por el algoritmo $\tilde{v}_f = \mathbf{w}/\tilde{\mathbf{k}}$. En la figura 4.10 se ha representado esta velocidad de fase normalizada, en función de la resolución espacial $R = l/\Delta z$, para un factor de estabilidad $s = 0,5$.

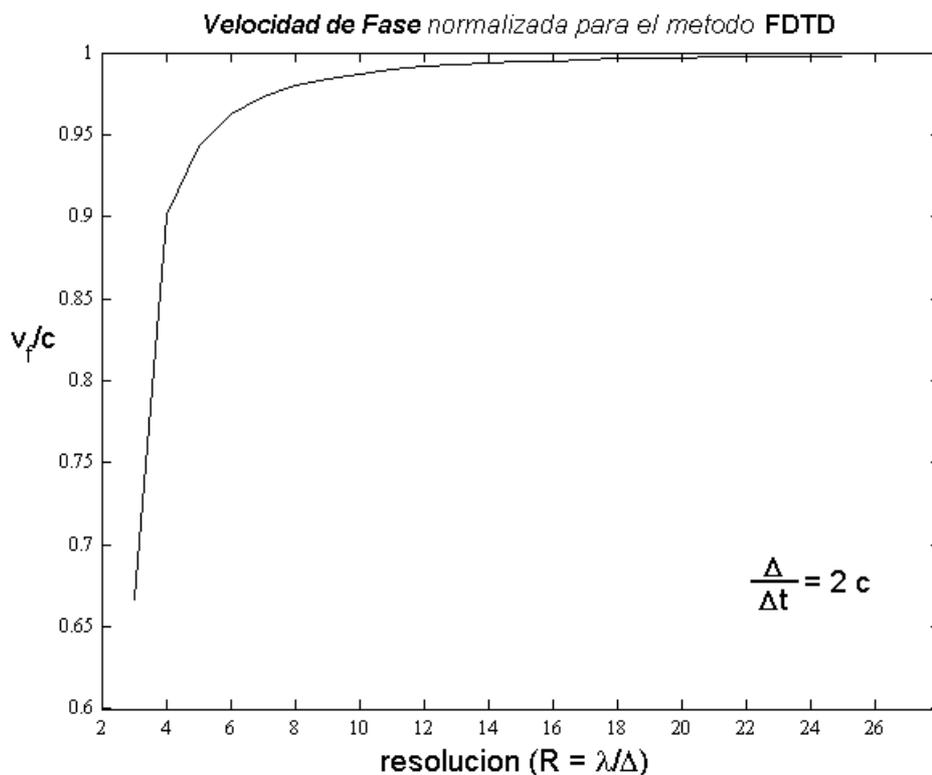


Figura 4.10.: Característica de dispersión del método FDTD para un factor de estabilidad $s=0,5$.

En esta figura se puede apreciar el error de la velocidad de fase respecto del valor teórico del medio que queremos modelar ($\tilde{v}_f/c=1$). En comparación con la figura 4.6 se observa que este error es menor que el que se obtiene cuando se utilizan funciones wavelet de Haar (D_I), pero sin embargo, es mayor que el obtenido cuando se emplean funciones wavelet D_M , con M^32 .

Estas características de dispersión también se pueden comparar con la correspondiente al método TLM. El método TLM-1D, aplicado en medios homogéneos, no presenta error de dispersión. Si por el contrario, nos vemos obligados a introducir stubs para modelar las características del medio a simular (necesario cuando se trata de medios no homogéneos) [19], entonces, por ejemplo, para una relación entre la discretización espacial y la temporal dada por $c\Delta t/\Delta z=0,5$, la velocidad de fase numérica normalizada es la siguiente:

$$\frac{\tilde{v}_f}{c} = \frac{2p \frac{\Delta z}{l}}{\arcsen\left(2 \operatorname{sen} p \frac{\Delta z}{l}\right)} \quad (4-76)$$

En la figura 4.11 se ha representado la velocidad de fase normalizada expresada en (4-76), en función de la resolución espacial $R = l/\Delta z$. En ella se puede apreciar que el error de la velocidad de fase respecto del valor teórico del medio que queremos modelar ($\tilde{v}_f/c=1$) es similar al obtenido en nuestro esquema MRTD utilizando funciones wavelet D_I , y por lo tanto este error es mayor si lo comparamos en las situaciones en las que se emplean las wavelets D_M , con M^32 .

Se puede concluir, por tanto, que el error de dispersión de los esquemas MRTD propuestos, utilizando wavelets D_M (con M^32), es inferior al que se obtiene mediante otras técnicas habituales como FDTD y TLM, pero no así cuando se emplean las funciones wavelet D_I , donde los errores obtenidos son similares a los proporcionados por la técnica TLM, pero mayores en comparación con los obtenidos mediante el método FDTD.

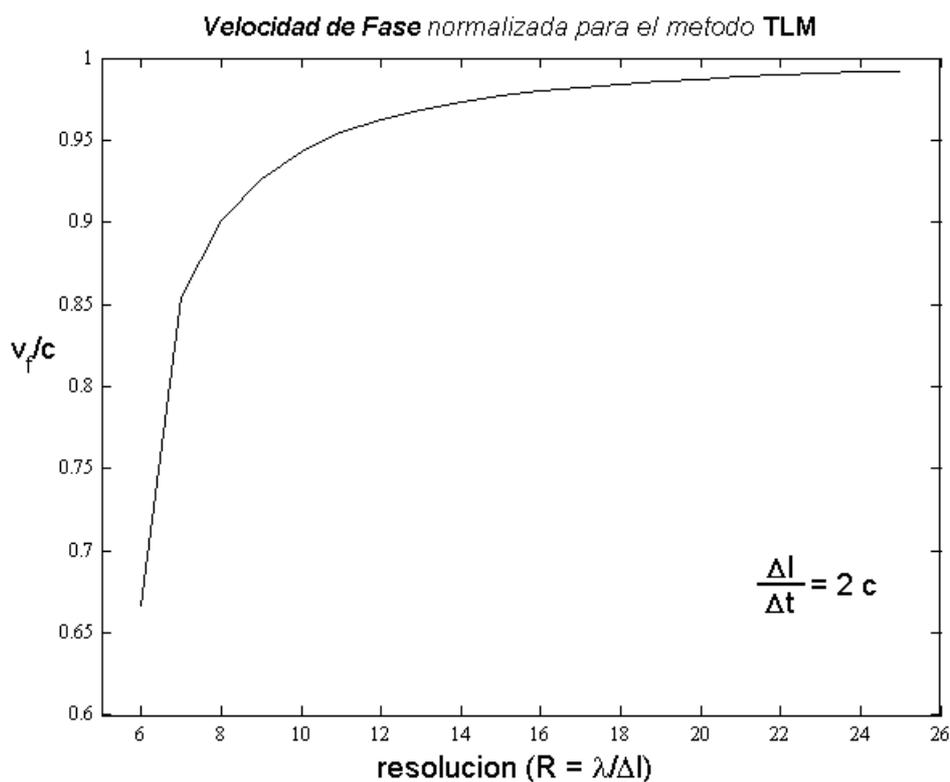


Figura 4.11.: Característica de dispersión del método TLM.

Todos los resultados que se presentan están en función de la resolución espacial expresada en términos de λ/Δ , donde Δ representa la discretización espacial *efectiva* (Δz^J) definida en (4-16):

$$\Delta z^J = \frac{\Delta z}{2^J} \quad (4-16)$$

Esto quiere decir que en las situaciones donde se emplean funciones de escala y funciones de wavelet conjuntamente para representar los campos, la discretización espacial *efectiva* es la que se obtiene tras su reconstrucción. De esta forma, si el desarrollo de los campos se ha hecho utilizando funciones de escala de nivel J y funciones de wavelet de nivel J simultáneamente, la discretización efectiva final será la correspondiente al nivel de resolución $J+1$.

Para comprobar que el error de dispersión producido por el algoritmo depende del nivel de resolución final, se han realizado dos simulaciones de la propagación de un pulso gaussiano a lo largo del eje z , utilizando en un caso funciones de escala, y en otro, funciones de escala y de wavelet. En la primera de ellas se ha considerado un espacio de simulación de 800 mm y se ha discretizado dividiéndolo en 200 puntos, obteniendo una separación entre cada uno de ellos de $\Delta z = 4$ mm. Para el desarrollo de los campos se han empleado funciones de escala del tipo D_I , y se ha escogido un factor de estabilidad $s = 1$, con lo que el paso de tiempo obtenido ha sido $\Delta t = 13,34$ ps. En la segunda simulación se han empleado funciones de escala y funciones de wavelet del tipo D_I , y se ha discretizado el espacio de manera que al reconstruir el valor de los campos se obtienen las mismas condiciones que en la primera simulación. Para ello, se ha dividido el espacio de simulación en 100 puntos, obteniendo en el nivel base una separación entre cada uno de ellos de $\Delta z = 8$ mm. Así, al reconstruir los campos, se obtiene una resolución espacial final de $\Delta z^1 = 4$ mm, la misma que en la primera simulación. El factor de estabilidad escogido ha sido $s = 1$, de manera que también obtenemos el mismo paso de tiempo $\Delta t = 13,34$ ps.

En la figura 4.12 se ha presentado el resultado de las dos simulaciones. En ambas se representa el valor de la componente E_x del campo eléctrico correspondiente a dos instantes de su propagación (a la derecha se encuentra el pulso inicial y a la izquierda se encuentra el pulso tras 100 iteraciones). La figura 4.12.a corresponde a la simulación realizada utilizando un nivel de resolución con funciones de escala, y la figura 4.12.b corresponde al valor del campo eléctrico obtenido tras su reconstrucción a partir de sus coeficientes de escala y de wavelet. En las dos se puede apreciar la distorsión del pulso debida a la dispersión producida por el algoritmo, y se observa que este error es el mismo en ambas simulaciones, a pesar de haberse obtenido de forma diferente, pero con la misma resolución espacial final Δz .

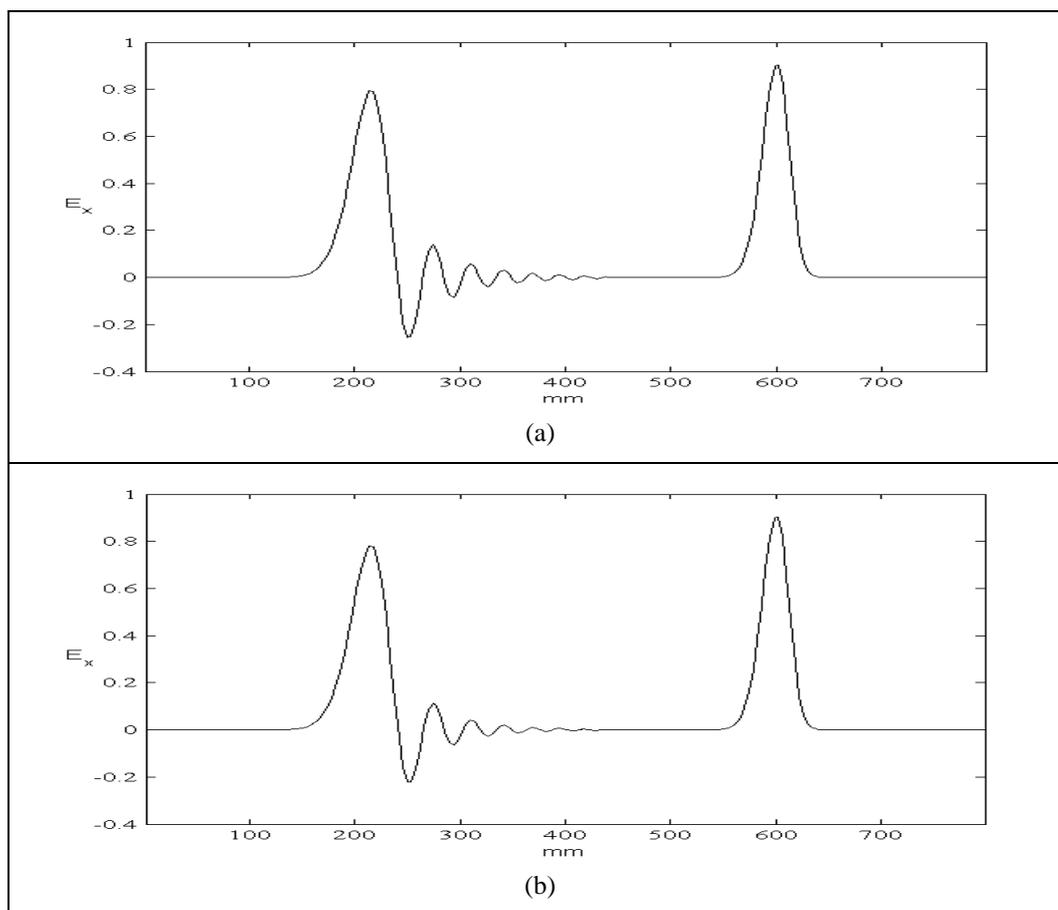


Figura 4.12.: Propagación de un pulso gaussiano a lo largo del eje z . A la derecha se encuentra el pulso inicial, y a la izquierda se observa la distorsión del pulso tras 100 iteraciones. En resultado representado en (a) corresponde a una simulación realizada utilizando funciones de escala D_I , y el resultado representado en (b) corresponde a una simulación realizada utilizando funciones de escala y de wavelet D_I .

Con los resultados de la expresión (4-72) se ha calculado el error de fase por longitud de onda en función de la resolución espacial, dada en celdas por longitud de onda, para diferentes tipos de wavelets de Daubechies. Esto lo tenemos representado en la figura 4.13, donde se ha utilizado un factor de estabilidad $s = 0,5$ en todos los casos. Algunos resultados numéricos relativos a la velocidad de fase y su error respecto del caso ideal ($\tilde{v}_f/c = 1$) se incluyen en una tabla separada (V).

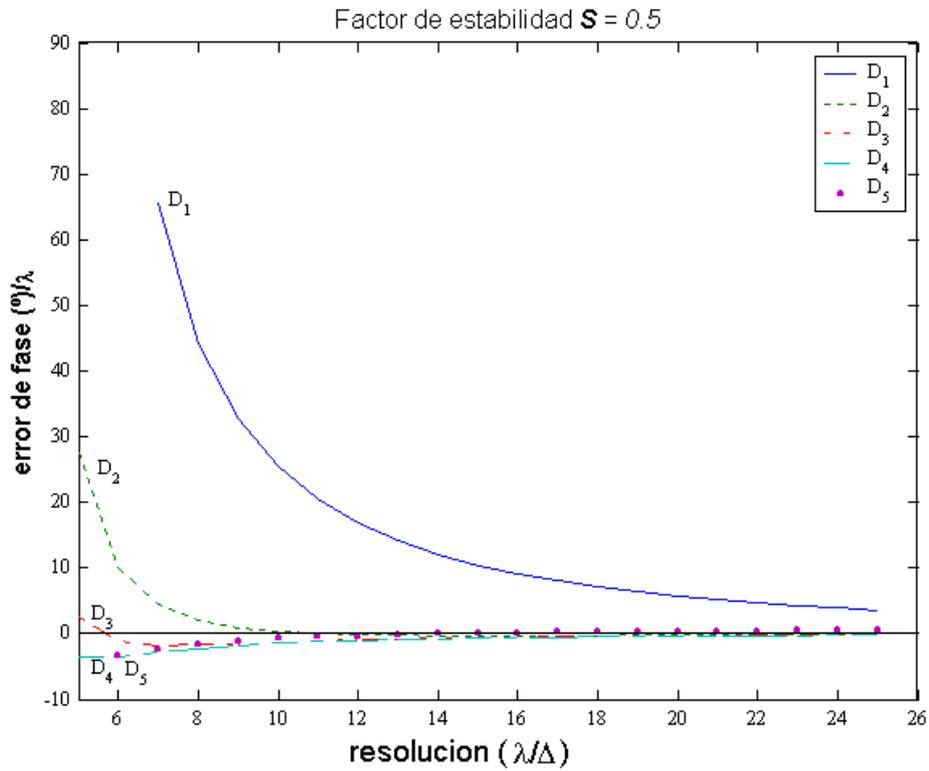


Figura 4.13.: Error de fase en grados por longitud de onda utilizando diferentes tipos de wavelets D_M .

TABLA V				
<i>Velocidad de fase relativa y su desviación respecto del caso ideal</i>				
<i>(s = 0,5)</i>				
	$R = 1/\Delta z = 7$		$R = 1/\Delta z = 14$	
	\tilde{v}_f/c	<i>desviación</i>	\tilde{v}_f/c	<i>desviación</i>
D_1	0,8178	-18,22%	0,9665	-3,35%
D_2	0,9876	-1,23%	1,0008	+0,08%
D_3	1,0050	+0,50%	1,0019	+0,19%
D_4	1,0079	+0,79%	1,0021	+0,21%
D_5	1,0062	+0,62%	1,0000	+0,0014%

A la vista de los valores representados en la tabla V se puede comprobar que para una resolución espacial de 7 celdas por longitud de onda ($\Delta=\lambda/7$), si se utilizan wavelets de Haar (D_1), el error en la velocidad de fase alcanza el 18%, lo que significa que el error de fase por longitud de onda sería de $65,5^\circ$. Si se utilizan wavelets D_M de orden $M>2$, el error en la velocidad de fase se sitúa por debajo del 1%, lo cual se traduciría en un error de fase por longitud de onda por debajo de los 4° . Estos errores se reducen considerablemente al aumentar la resolución. Así, para un valor de 14 celdas por longitud de onda ($\Delta=\lambda/14$), el error en la velocidad de fase utilizando wavelets de Haar (D_1) sería del 3%, lo que implica un error de fase inferior a 12° , mientras que utilizando wavelets D_M de orden M superior, el error en la velocidad de fase es inferior al 0,2% produciendo un error de fase por debajo de los $0,7^\circ$ por longitud de onda. En la figura 4.14 se ha representado con más detalle el error de fase por longitud de onda en función de la resolución espacial. Aquí se aprecia con claridad cómo para valores de resolución superiores a 14 celdas por longitud de onda, el módulo del error de fase utilizando funciones wavelet D_M para $M\geq 2$ no supera los $0,6^\circ$, mientras que si utilizamos wavelets de Haar (D_1) el error alcanza los 12° .

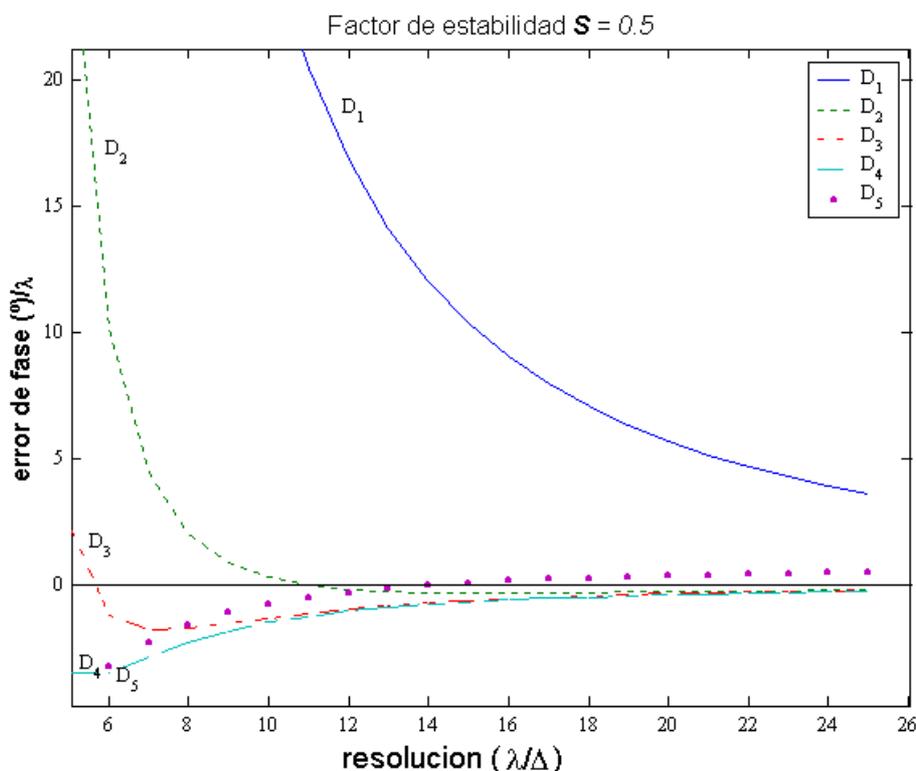


Figura 4.14.: Detalle de la figura 4.13 correspondiente al error de fase en función de la resolución para diferentes tipos de wavelets de Daubechies D_M .

Al igual que sucede con la velocidad de fase, la velocidad de grupo numérica dada por el algoritmo también depende de la resolución espacial. Esta velocidad de grupo numérica se define como:

$$\tilde{v}_g = \frac{d\mathbf{w}}{d\tilde{k}} \quad (4-77)$$

y se puede obtener a partir de la relación de dispersión (4-69) considerando $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\tilde{k})$. De esta forma, diferenciando la expresión (4-69) respecto de \tilde{k} y simplificando se obtiene:

$$\frac{1}{c} \cos\left(\frac{\mathbf{w}\Delta t}{2}\right) \cdot \frac{d\mathbf{w}}{d\tilde{k}} = -\sum_m m \cdot d_m \cos(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z) \quad (4-78)$$

donde se ha tomado, sin pérdida de generalidad, $J = 0$. A partir de aquí podemos despejar la velocidad de grupo numérica \tilde{v}_g :

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\tilde{k}} = c \cdot \frac{-\sum_m m \cdot d_m \cos(-\tilde{k} \cdot m \cdot \Delta z)}{\cos\left(\frac{\mathbf{w}\Delta t}{2}\right)} \quad (4-79)$$

La ecuación (4-79) es una expresión general válida para valores arbitrarios de Δt y Δz . El único término adicional necesario para evaluar esta expresión es el valor de \tilde{k} , el cual se obtiene a partir de la relación de dispersión (4-69). Al igual que sucedía con la velocidad de fase \tilde{v}_f , a medida que la resolución espacial aumenta, la velocidad de grupo tiende hacia el valor de la velocidad de la luz correspondiente al medio que estamos modelando, esto es:

$$R = \frac{l}{\Delta z} \rightarrow \infty \Rightarrow \tilde{v}_g \rightarrow c \quad (4-80)$$

Esto confirma la idea de que la solución numérica se aproxima a la solución exacta a medida que los incrementos espacial y temporal tienden a cero.

En la figura 4.15 se ha representado la velocidad de grupo numérica \tilde{v}_g dada por el algoritmo en función de la resolución espacial y para diferentes tipos de funciones de wavelet de Daubechies. Se ha escogido un factor de estabilidad $s = 0,5$ con el cual, nos aseguramos que el algoritmo sea estable en todos los casos. Se pueden apreciar las mismas características que las observadas para la velocidad de fase numérica, esto es, que el error de la velocidad de grupo respecto del valor teórico es mayor cuando se utilizan wavelets D_I que cuando se utilizan wavelets D_M , con $M \geq 2$. En la figura 4.16 se aprecia con más detalle esta característica. Se observa, además, la propiedad vista en la ecuación (4-80), es decir, vemos cómo a medida que aumenta la resolución espacial, la velocidad de grupo obtenida utilizando cualquiera de los tipos de función wavelet tiende hacia el valor teórico $\tilde{v}_g/c = 1$.

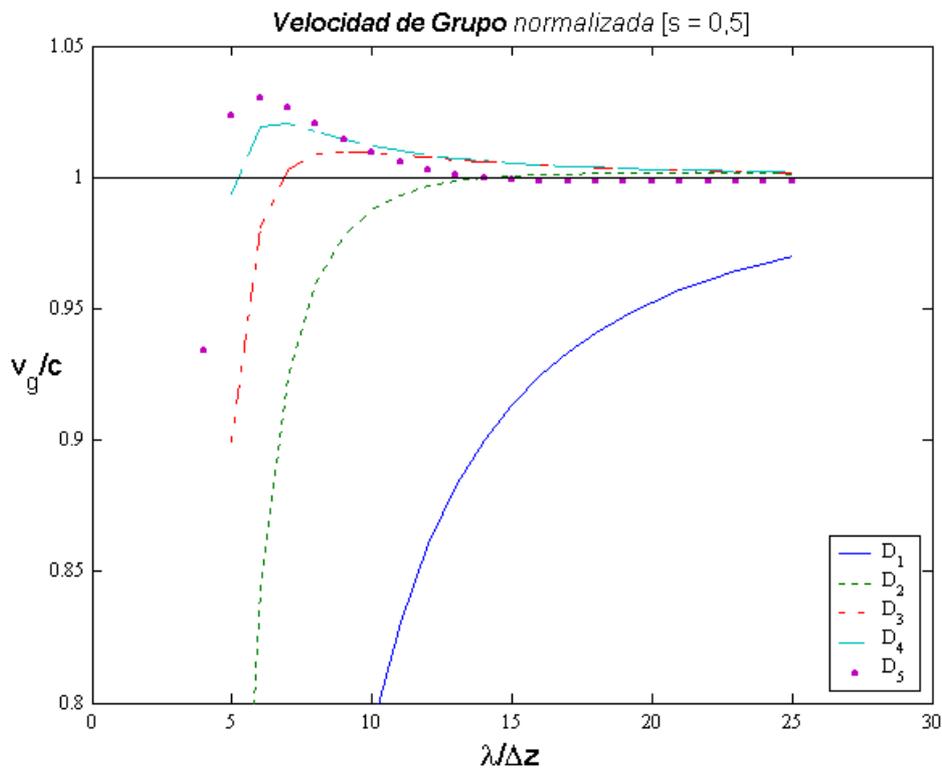


Figura 4:15.: Velocidad de grupo normalizada en función de la resolución espacial para un factor de estabilidad $s=0,5$.

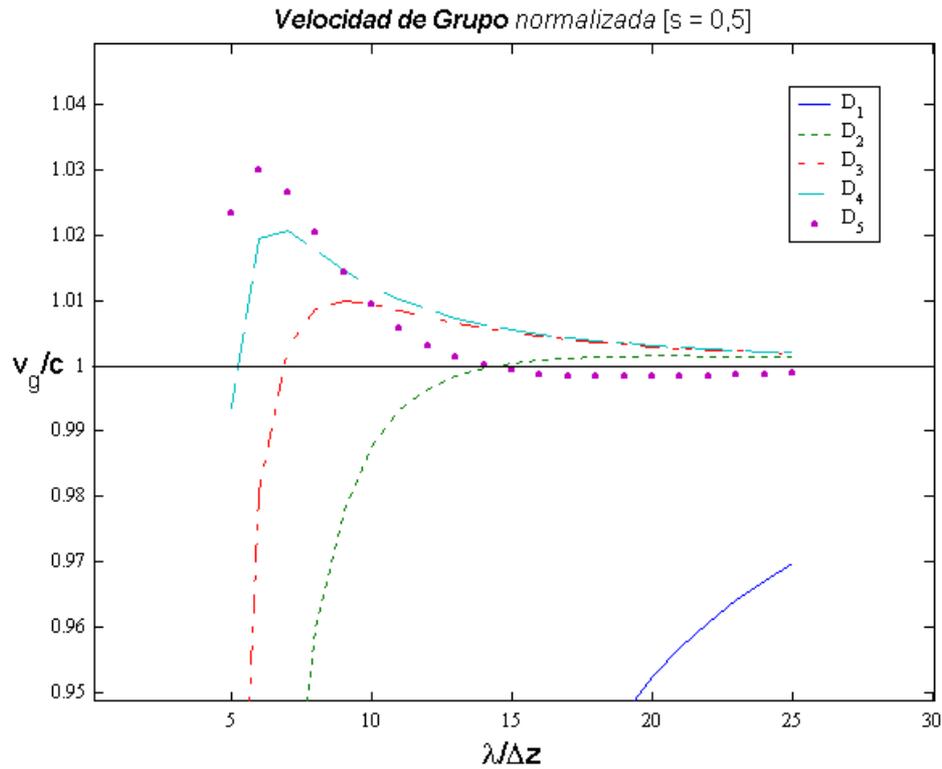


Figura 4:16.: Velocidad de grupo normalizada para un factor de estabilidad $s=0,5$. (Detalle de la figura 4.15)

4.3.2. Dispersión numérica en dos dimensiones

Analizamos ahora las características de dispersión del algoritmo para un problema bidimensional correspondiente a un modo TM. De manera análoga a como se hizo en el apartado anterior, tomamos como punto de partida el conjunto de ecuaciones discretizadas dado en la expresión (4-46), donde se han empleado funciones de escala de resolución J para desarrollar los campos en el espacio:

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,k}^{ff} - {}^{n-\frac{1}{2}}_x H_{i,k}^{ff}}{\Delta t} = \frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,k-m}^{ff} \quad (4-46.1)$$

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i,k}^{ff} - {}^{n-\frac{1}{2}}_z H_{i,k}^{ff}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{m} \cdot \Delta x} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,k}^{ff} \quad (4-46.2)$$

$$\frac{{}^{n+1}_y E_{i,k}^{ff} - {}^n_y E_{i,k}^{ff}}{\Delta t} = \frac{1}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,k-m}^{ff} - \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i-m,k}^{ff} \right] \quad (4-46.3)$$

Consideramos entonces la propagación de un modo numérico arbitrario caracterizado por los frentes de onda monocromáticos siguientes:

$$\begin{aligned} {}^n_y E_{i,k}^{ff} &= E_{0y} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \cdot \Delta t)} \\ {}^n_x H_{i,k}^{ff} &= H_{0x} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \cdot \Delta t)} \\ {}^n_z H_{i,k}^{ff} &= H_{0z} e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \cdot \Delta x^J + \tilde{k}_z \cdot k \cdot \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \cdot \Delta t)} \end{aligned} \quad (4-81)$$

donde $\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}_x, \tilde{k}_z)$ representa el número de ondas de la solución numérica dada por el algoritmo. Sustituimos estos frentes en la ecuación (4-46) y tras simplificar llegamos a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} H_{0x} \left[e^{-j\frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2}} - e^{j\frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2}} \right] &= \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{E_{0y}}{\Delta z} \left[\sum_m d_m^J e^{-j(\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J)} \right] \\ H_{0z} \left[e^{-j\frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2}} - e^{j\frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2}} \right] &= -\frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{E_{0y}}{\Delta x} \left[\sum_m d_m^J e^{-j(\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J)} \right] \\ E_{0y} \left[e^{-j\frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2}} - e^{j\frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2}} \right] &= \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{H_{0x}}{\Delta z} \sum_m d_m^J e^{-j(\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J)} - \frac{H_{0z}}{\Delta x} \sum_m d_m^J e^{-j(\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J)} \right] \end{aligned} \quad (4-82)$$

Aplicando las identidades de Euler, junto con la propiedad (4-19), se llega a que la parte real de las ecuaciones (4-82) se anula y la parte imaginaria queda como sigue:

$$\begin{aligned} -2 \cdot H_{0x} \operatorname{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} &= \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{E_{0y}}{\Delta z} \sum_m d_m^J \operatorname{sen}(\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J) \\ -2 \cdot H_{0z} \operatorname{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} &= -\frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{E_{0y}}{\Delta x} \sum_m d_m^J \operatorname{sen}(\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J) \\ -2 \cdot E_{0y} \operatorname{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} &= \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{H_{0x}}{\Delta z} \sum_m d_m^J \operatorname{sen}(\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J) - \frac{H_{0z}}{\Delta x} \sum_m d_m^J \operatorname{sen}(\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J) \right] \end{aligned} \quad (4-83)$$

A partir de estas ecuaciones se puede obtener la relación de dispersión numérica en dos dimensiones de nuestro algoritmo:

$$\left[\frac{2}{c \cdot \Delta t} \text{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} \right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J \text{sen}(\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J \text{sen}(\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J) \right]^2 \quad (4-84)$$

que también se puede poner como:

$$\left[\frac{2}{c \cdot \Delta t} \text{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} \right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x^J} \sum_m d_m \text{sen}(\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta z^J} \sum_m d_m \text{sen}(\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J) \right]^2 \quad (4-85)$$

donde hemos hecho el cambio $d_m^J = 2^J \cdot d_m$. Si consideramos un mallado regular con $\Delta x = \Delta z = \Delta$, la relación dada en la ecuación (4-85) también se reduce a la expresión que corresponde al valor teórico del un medio no dispersivo que queremos modelar:

$$\frac{\mathbf{l}}{\Delta} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\dot{u}^2}{c^2} \approx \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_z^2 \quad (4-86)$$

4.3.3. Dispersión numérica en tres dimensiones

En un problema general de propagación en tres dimensiones, el procedimiento para evaluar las características de dispersión del algoritmo es similar a los anteriores, es decir, sobre las ecuaciones de Maxwell discretizadas utilizando funciones de escala de nivel J para desarrollar los campos en el espacio y funciones pulso en el tiempo:

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,j,k}^{fff} - {}^{n-\frac{1}{2}}_x H_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{m}} \left[\frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,j-m,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,j,k-m}^{fff} \right] \quad (4-58.1)$$

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}_y H_{i,j,k}^{fff} - {}^{n-\frac{1}{2}}_y H_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{m}} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,j,k-m}^{fff} - \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,j,k}^{fff} \right] \quad (4-58.2)$$

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i,j,k}^{fff} - {}^{n-\frac{1}{2}}_z H_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathbf{m}} \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^n E_{i-m,j,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^n E_{i,j-m,k}^{fff} \right] \quad (4-58.3)$$

$$\frac{{}^{n+1}_x E_{i,j,k}^{fff} - {}^n E_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = \frac{1}{\mathbf{e}} \left[\frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i,j-m,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_y H_{i,j,k-m}^{fff} \right] \quad (4-58.4)$$

$$\frac{{}^{n+1}_y E_{i,j,k}^{fff} - {}^n_y E_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = \mathbf{e} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,j,k-m}^{fff} - \frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_z H_{i-m,j,k}^{fff} \right] \quad (4-58.5)$$

$$\frac{{}^{n+1}_z E_{i,j,k}^{fff} - {}^n_z E_{i,j,k}^{fff}}{\Delta t} = \mathbf{e} \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_y H_{i-m,j,k}^{fff} - \frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J {}^{n+\frac{1}{2}}_x H_{i,j-m,k}^{fff} \right] \quad (4-58.6)$$

introducimos un frente de onda monocromático de la forma:

$${}^n_x F_{i,j,k}^{fff} = F_0 e^{j(\tilde{k}_x \cdot i \Delta x^J + \tilde{k}_y \cdot j \Delta y^J + \tilde{k}_z \cdot k \Delta z^J - \mathbf{w} \cdot n \Delta t)} \quad (4-87)$$

donde ${}_x F$ es la componente \mathbf{x} del campo eléctrico o magnético, y que caracterizado por el vector de onda $\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z)$. Entonces, sustituyendo la expresión (4-87) en la (4-58) podemos encontrar la relación que existe entre \mathbf{w} y $\tilde{\mathbf{k}}$, que nos proporciona la relación de dispersión del algoritmo.

Procediendo del mismo modo que se hizo en los casos anteriores, se llega a que la relación de dispersión numérica de nuestro algoritmo para la propagación en tres dimensiones es la siguiente:

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{c \cdot \Delta t} \text{sen} \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} \right]^2 &= \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_m d_m^J \text{sen}(\tilde{k}_x \cdot m \cdot \Delta x^J) \right]^2 + \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta y} \sum_m d_m^J \text{sen}(\tilde{k}_y \cdot m \cdot \Delta y^J) \right]^2 + \\ &+ \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_m d_m^J \text{sen}(\tilde{k}_z \cdot m \cdot \Delta z^J) \right]^2 \end{aligned} \quad (4-88)$$

Esta relación de dispersión se puede comparar con la relación de dispersión analítica correspondiente a la propagación en un medio sin pérdidas, y que viene dada por la expresión:

$$\frac{\mathbf{w}^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (4-89)$$

Utilizando nuevamente la propiedad (4-70), se puede comprobar que la expresión (4-88) se corresponde con la expresión (4-89) en el límite cuando Δx , Δy , Δz y Δt tienden a cero, lo cual implica que la solución no sufre el efecto de la dispersión. Esto significa que la solución dada por el algoritmo sería exacta en el límite cuando la resolución fuera infinita, resultado que intuitivamente podíamos esperar, ya que en ese caso la discretización del espacio-tiempo tiende al límite continuo.

4.3.4. Análisis cuantitativo en dos dimensiones

Para analizar cuantitativamente la dependencia del efecto de la dispersión con la discretización, consideramos el problema estudiado anteriormente para un modo TM en dos dimensiones. Para mayor claridad y simplicidad en el análisis de los resultados, vamos a considerar dimensiones normalizadas. También vamos a considerar un malla regular con celdas cuadradas (es decir, $\Delta x = \Delta z = \Delta$) y un ángulo de propagación \mathbf{a} de la onda respecto del eje z :

$$\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}_x, \tilde{k}_z),$$

$$\tilde{k}_x = \tilde{k} \cdot \sin \mathbf{a}; \quad \tilde{k}_z = \tilde{k} \cdot \cos \mathbf{a}$$

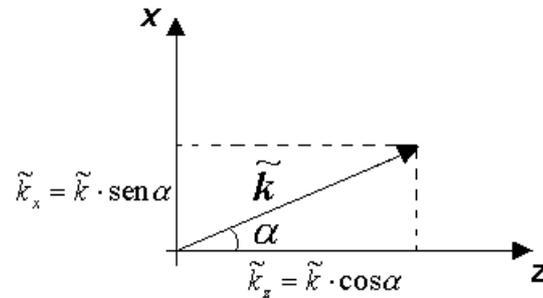


Figura 4.17.: Vector de onda.

En este caso la relación de dispersión numérica expresada en (4-85) quedaría como sigue:

$$\left[\frac{2\Delta}{c \cdot \Delta t} \sin \frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2} \right]^2 = \left[\sum_m d_m \sin(\tilde{k} \sin \mathbf{a} \cdot m \cdot \Delta) \right]^2 + \left[\sum_m d_m \sin(\tilde{k} \cos \mathbf{a} \cdot m \cdot \Delta) \right]^2 \quad (4-90)$$

La ecuación (4-90) se puede resolver en función de \tilde{k} para diferentes valores del ángulo de propagación \mathbf{a} utilizando el método iterativo de Newton-Raphson. Para mayor simplicidad en los cálculos se consideran dimensiones normalizadas haciendo $\mathbf{w}/c = 2\mathbf{p}$. De esta forma, se puede obtener el valor normalizado de la velocidad de fase mediante la expresión:

$$\frac{\tilde{v}_f}{c} = \frac{2\mathbf{p}}{\tilde{k}} \quad (4-91)$$

siendo \tilde{k} el valor calculado por el método de Newton-Raphson. En las figuras 4.18 a 4.20 se ha representado el valor de la velocidad de fase normalizada en función del ángulo de propagación \mathbf{a} para diferentes resoluciones espaciales y para diferentes tipos de wavelets.

En los tres ejemplos presentados, el factor de estabilidad se ha fijado en $s=1/\sqrt{2}$, satisfaciendo el criterio de estabilidad dado por la expresión (4-57) para todas las wavelets empleadas, y obteniendo una relación entre la discretización espacial y temporal de $c\Delta t/\Delta = 0,5$. Nuevamente se observa que los esquemas donde se han utilizado wavelets \mathbf{D}_I son más dispersivos, presentando el mayor valor de concordancia en propagación oblicua a 45° . El error de la velocidad de fase respecto al caso no dispersivo aumenta a medida que nos separamos de dicho ángulo, y disminuye, como cabía esperar, al aumentar la resolución espacial. Para el resto de wavelets \mathbf{D}_M , con $M \geq 2$, se observa una menor influencia respecto del ángulo de propagación, manteniéndose la velocidad de fase prácticamente constante para todos los ángulos. Esta influencia es mayor en resoluciones bajas, donde se aprecia una variación máxima respecto al valor no dispersivo por debajo del 2%, mientras que en resoluciones más altas esta variación no supera el 0,2%.

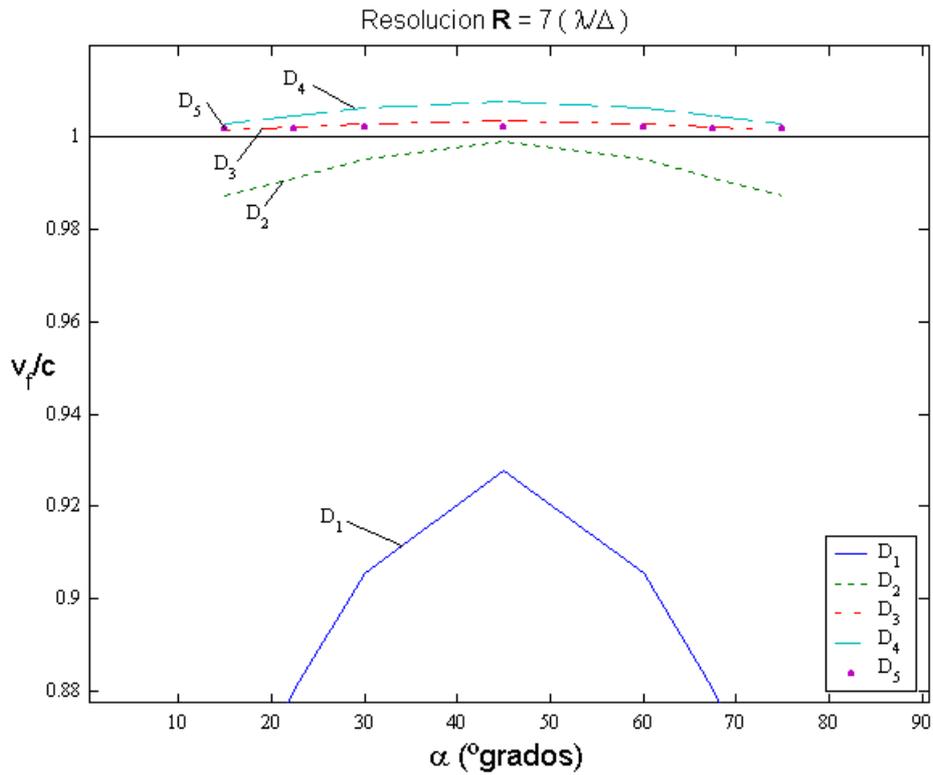


Figura 4.18.: Variación de la velocidad de fase numérica con el ángulo de propagación para diferentes wav elets. El factor de estabilidad es $s = 0,71$.

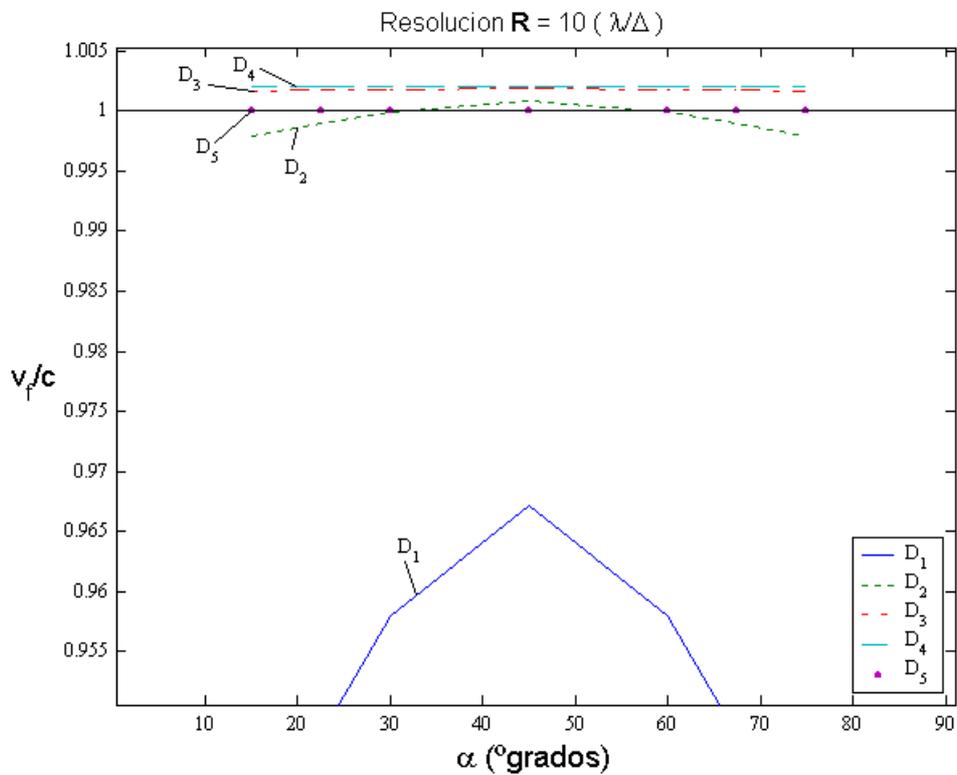


Figura 4.19.: Variación de la velocidad de fase numérica con el ángulo de propagación para una resolución de 10 celdas por longitud de onda. El factor de estabilidad es $s = 0,71$.

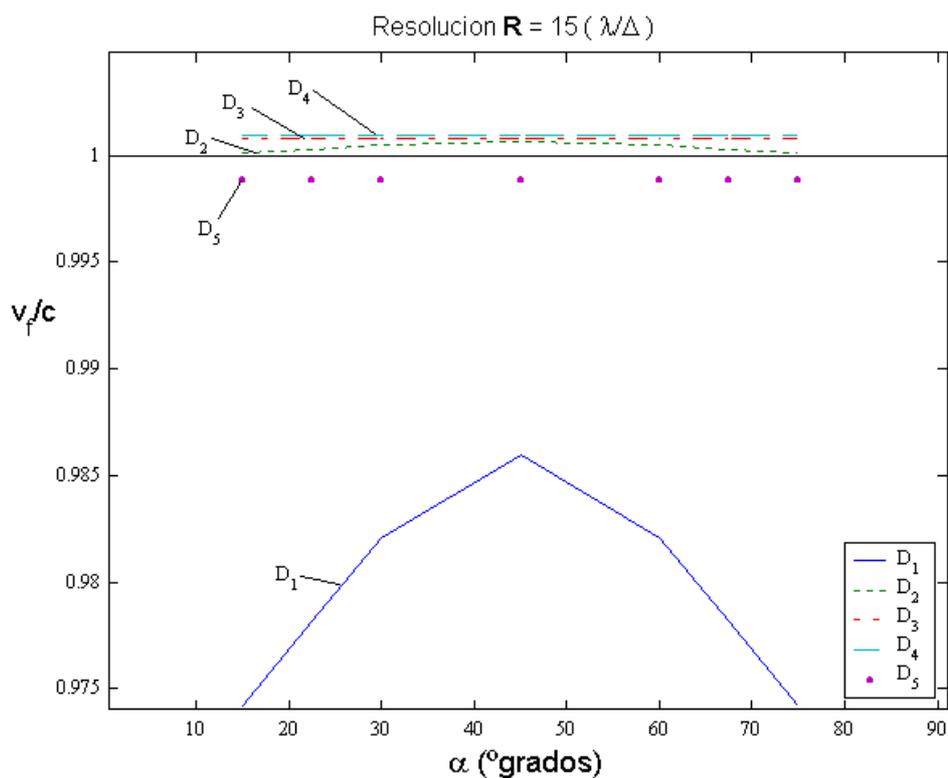


Figura 4.20.: Variación de la velocidad de fase numérica con el ángulo de propagación para una resolución de 14 celdas por longitud de onda. El factor de estabilidad es $s = 0,71$.

En las figuras 4.21 y 4.22 se ha representado la variación de la velocidad de fase con la resolución espacial para el caso de propagación oblicua a $\alpha=45^\circ$. Algunos resultados numéricos relativos a la velocidad de fase y su desviación respecto del caso ideal ($\tilde{v}_f/c = 1$) se incluyen en una tabla separada (VI).

TABLA VI						
<i>Velocidad de fase normalizada en propagación oblicua a $\alpha=45^\circ$</i>						
	<i>R = 7</i>		<i>R = 10</i>		<i>R = 15</i>	
	\tilde{v}_f/c	<i>desviación</i>	\tilde{v}_f/c	<i>desviación</i>	\tilde{v}_f/c	<i>desviación</i>
<i>D₁</i>	0,9277	-7,23%	0,9672	-3,28%	0,9859	-1,41%
<i>D₂</i>	0,9990	-0,10%	1,0008	+0,08%	1,0007	+0,07%
<i>D₃</i>	1,0036	+0,36%	1,0019	+0,19%	1,0008	+0,08%
<i>D₄</i>	1,0077	+0,77%	1,0021	+0,21%	1,0009	+0,09%
<i>D₅</i>	1,0021	+0,21%	0,9999	-0,01%	0,9988	-0,12%

En todos los casos se ha seguido manteniendo un factor de estabilidad $s = 1/\sqrt{2}$ para garantizar la estabilidad en todos los esquemas independientemente del tipo de función wavelet empleado. En la figura 4.21 se observa que utilizando wavelets de Haar (D_1), la velocidad de fase aumenta progresivamente, tendiendo hacia el valor ideal ($\tilde{v}_f/c = 1$), a medida que aumenta la resolución. Sin embargo, si se utilizan wavelets D_M de orden superior $M \geq 2$, se puede apreciar que a partir de valores de resolución de 8 celdas por longitud de onda ($\Delta = \lambda/8$), la velocidad de fase no presenta apenas variación, manteniéndose en todo caso dentro de un margen de error inferior al 0,2% respecto al valor ideal. Esto se puede ver con detalle en la figura 4.22. Esto significa que para resoluciones bajas ($\lambda/\Delta < 8$), el error de fase obtenido utilizando wavelets de Haar (D_1) alcanza los 30° por longitud de onda, mientras que con wavelets D_M de orden M superior este error de fase se sitúa por debajo de los 3° por longitud de onda. Este error de fase disminuye al aumentar la resolución, llegando a valores inferiores a los 5° por longitud de onda en el caso de utilizar wavelets de Haar, y por debajo de $0,5^\circ$ por longitud de onda si utilizamos wavelets de orden superior. Podemos observar este resultado en las figuras 4.23 y 4.24.

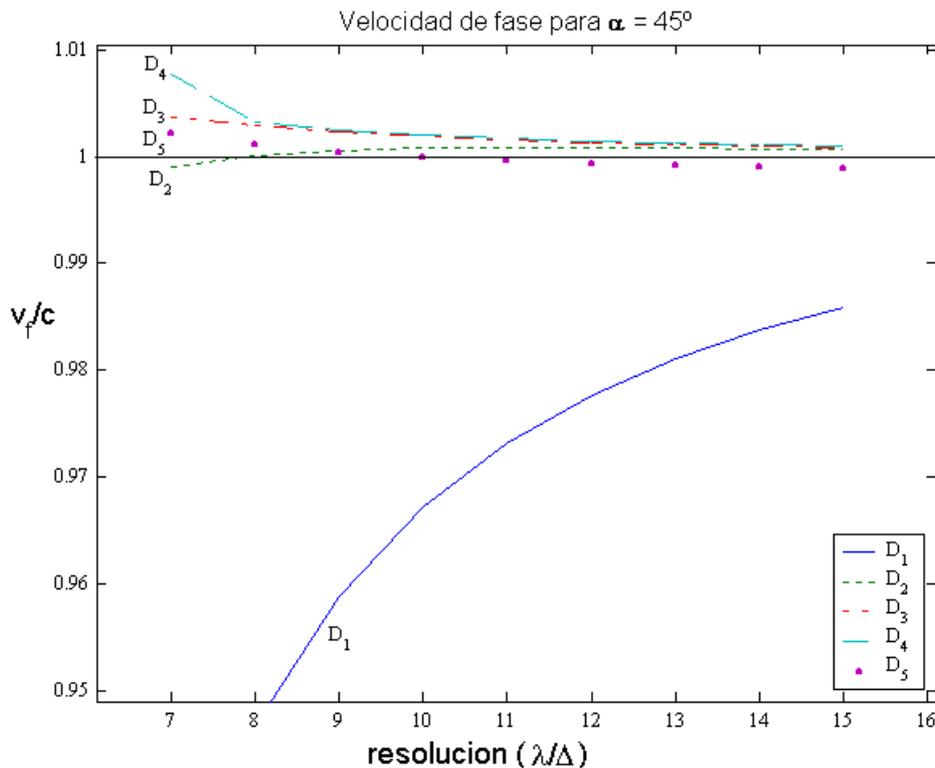


Figura 4.21.: Variación de la velocidad de fase con la resolución espacial para un ángulo de propagación de $\alpha=45^\circ$. El factor de estabilidad es $s = 0,71$.

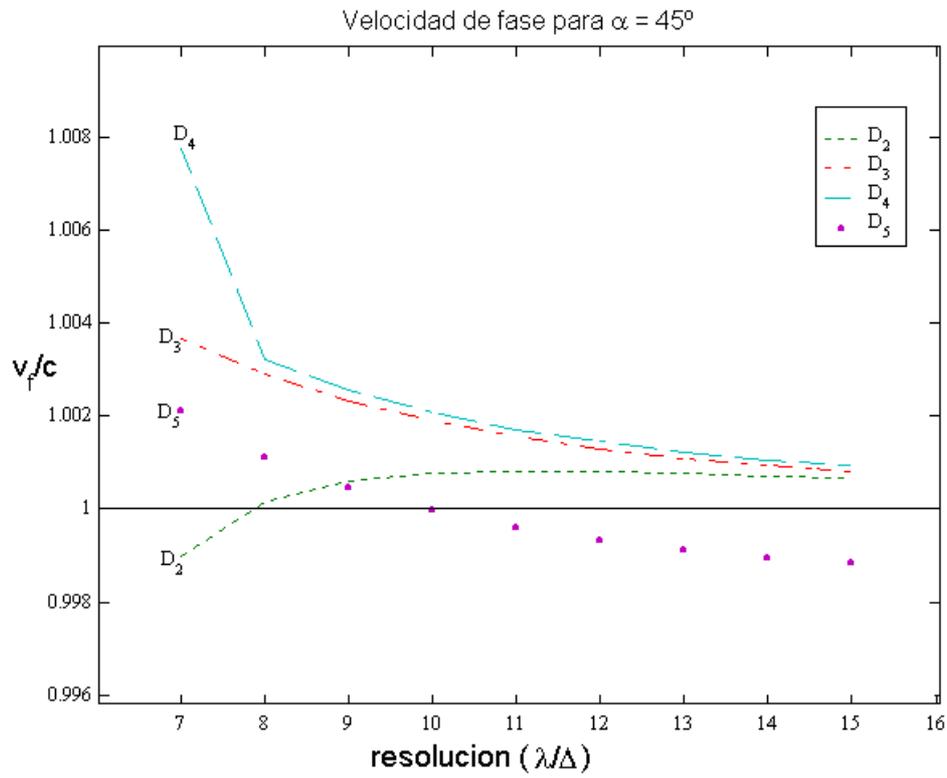


Figura 4.22.: Detalle de la figura 4.21 en el que se observa la velocidad de fase numérica dada por el algoritmo utilizando wavelets D_M de orden $M^{\geq 2}$.

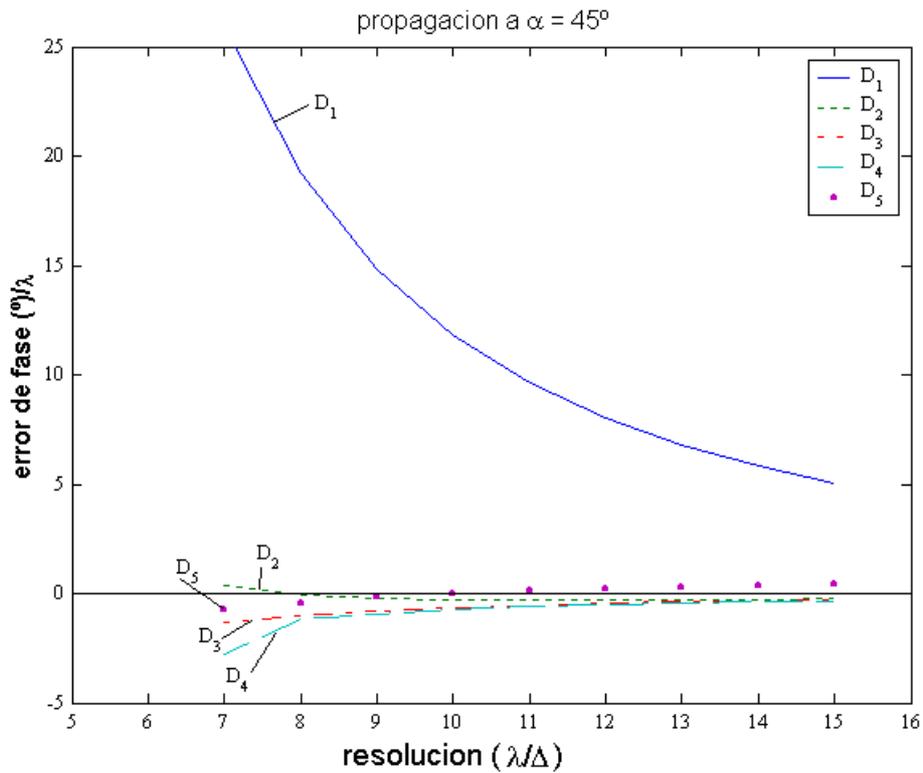


Figura 4.23.: Error de fase en el caso de propagación oblicua, dado en grados por longitud de onda, frente a la resolución espacial utilizando diferentes tipos de wavelets.

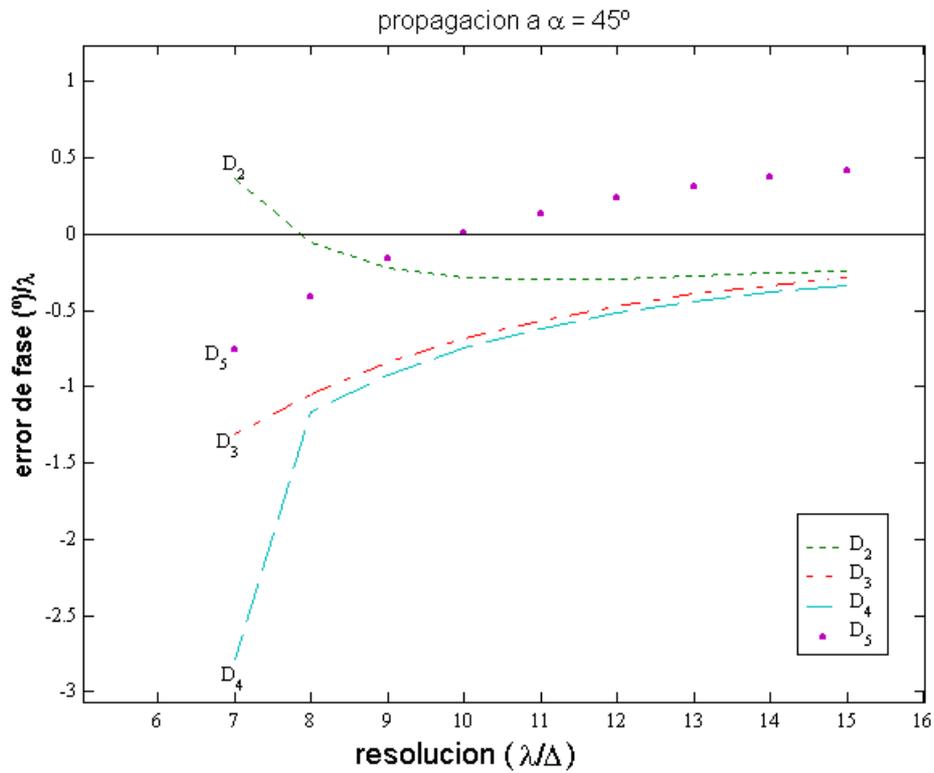


Figura 4.24.: Detalle de la figura 4.23 en el que se aprecia el error de fase en grados por longitud de onda utilizando wavelets D_M de orden $M^{\geq 2}$.

Estos resultados también se pueden comparar con los obtenidos mediante las técnicas FDTD y TLM.

La relación de dispersión para el método FDTD en 2D está dada por la siguiente expresión [75]:

$$\left(\frac{\Delta}{c\Delta t}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\mathbf{w} \cdot \Delta t}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_x \cdot \Delta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_z \cdot \Delta}{2}\right) \quad (4-92)$$

donde también hemos considerado un mallado regular con celdas cuadradas (es decir, $\Delta x = \Delta z = \Delta$). A partir de la expresión (4-92), y considerando un ángulo de propagación \mathbf{a} de la onda respecto del eje \mathbf{z} , es decir, $\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}_x, \tilde{k}_z)$ con $\tilde{k}_x = \tilde{k} \cdot \text{sen } \mathbf{a}$ y $\tilde{k}_z = \tilde{k} \cdot \text{cos } \mathbf{a}$,

se puede calcular la velocidad de fase en función de la resolución espacial y para diferentes ángulos de propagación.

En la figura 4.25 se ha representado, para diferentes valores de la resolución espacial, la velocidad de fase normalizada en función del ángulo de propagación, y para una relación entre la discretización espacial y temporal de $c\Delta t/\Delta = 0,5$. Se puede apreciar cómo el error de la velocidad de fase respecto del valor teórico ($\tilde{v}_f/c = 1$) varía con el ángulo de propagación, alcanzando su valor mínimo para una propagación oblicua a 45° , siendo esta variación es menos acusada a medida que aumenta la resolución espacial. Esto último también se puede ver en la figura 4.26, donde se ha representado la velocidad de fase normalizada en función de la resolución espacial para un ángulo de propagación oblicua a 45° . Vemos, por lo tanto, que las características de dispersión del método FDTD son similares a las del método MRTD cuando se emplean wavelets D_I , pero presenta un error de dispersión mayor al compararlo con el método MRTD empleando wavelets D_M , con $M \geq 2$.

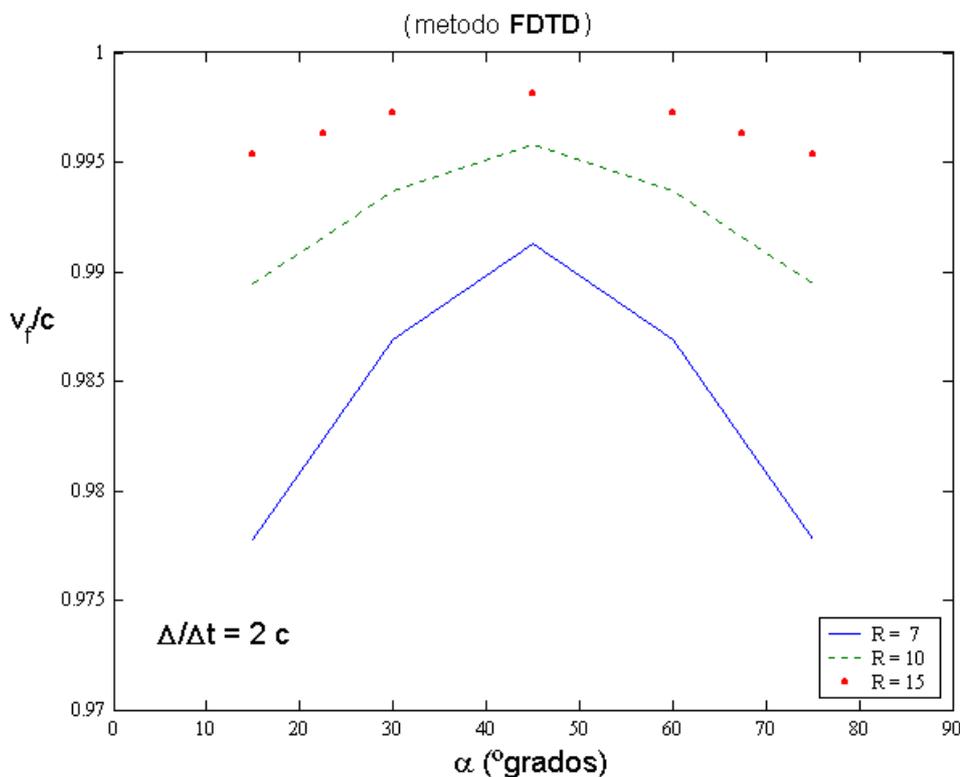


Figura 4.25.: Velocidad de fase numérica normalizada en función del ángulo de propagación α en grados, para tres resoluciones espaciales diferentes, obtenida mediante el método FDTD.

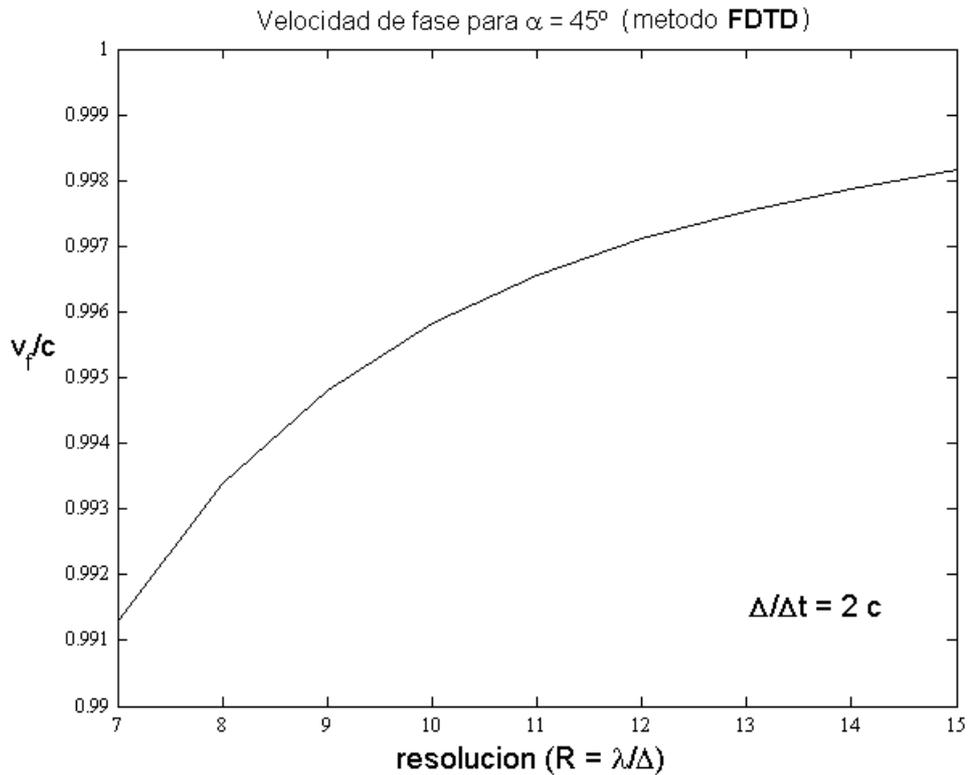


Figura 4.26.: Velocidad de fase numérica normalizada en función de la resolución espacial para un ángulo de propagación α de 45° , obtenida mediante el método FDTD.

Estas características de dispersión también se pueden comparar con la correspondiente al método TLM en 2D. En este método, para una relación entre la discretización espacial y la temporal dada por $c\Delta t/\Delta = 1/\sqrt{2}$, la velocidad de fase numérica normalizada para una propagación a lo largo de uno de los ejes (propagación axial) es la siguiente [19]:

$$\frac{\tilde{v}_f}{c} = \frac{\sqrt{2}p \frac{\Delta}{l}}{\arcsen\left(\sqrt{2} \operatorname{sen} p \frac{\Delta}{l}\right)} \quad (4-93)$$

mientras que para una propagación diagonal ($\alpha = 45^\circ$) se tiene que la velocidad de fase es:

$$\tilde{v}_f/c = 1 \quad (4-94)$$

En la figura 4.27 se ha representado la velocidad de fase normalizada, en función de la resolución espacial $R = l/\Delta z$ para los diferentes ángulos de propagación. La zona comprendida entre la curva de propagación axial y la curva de propagación diagonal corresponde al valor de la velocidad de fase para un ángulo de propagación arbitrario, donde se observa su tendencia hacia el valor teórico a medida que aumenta la resolución espacial.

Se puede concluir, nuevamente, que los errores de dispersión de los esquemas MRTD propuestos, utilizando wavelets D_M (con M^2), son inferiores a los obtenidos mediante otras técnicas habituales como FDTD y TLM.

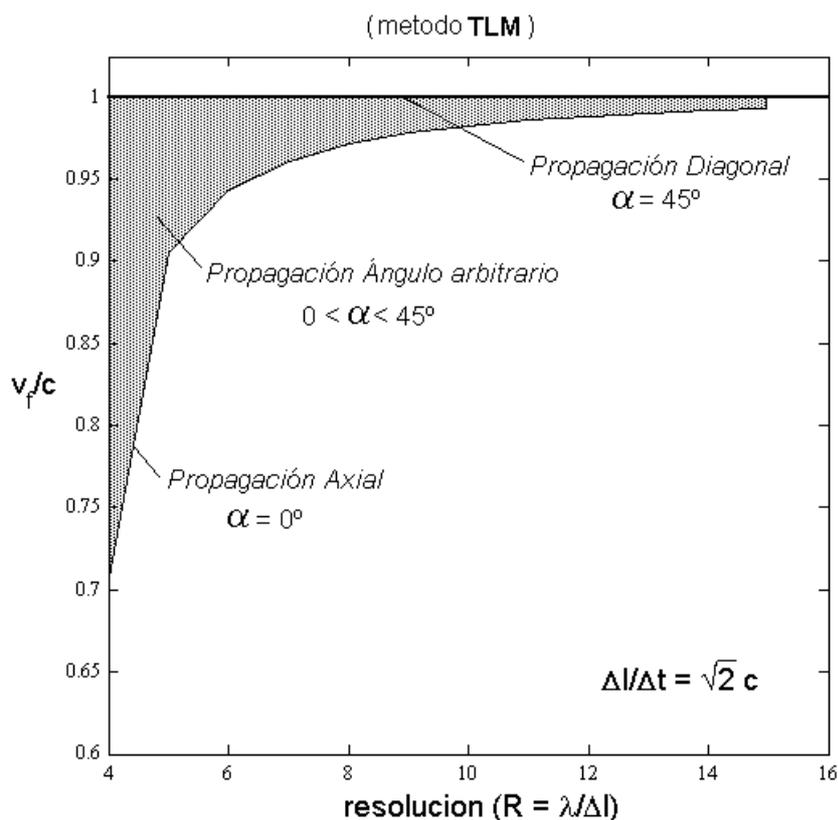


Figura 4.27.: Velocidad de fase numérica normalizada en función de la resolución espacial para diferentes ángulos de propagación, obtenida mediante el método TLM.

Capítulo V

RESULTADOS

5.1.- INTRODUCCIÓN

Con el fin de validar los algoritmos propuestos, se han analizado diversas estructuras, como guías de onda y resonadores, y se han contrastado ciertos parámetros característicos de las mismas obtenidos a partir de la simulación con los valores analíticos, si son conocidos, y con los obtenidos mediante otras técnicas como TLM [19], FDTD [75] y Haar-MRTD [26].

Los ejemplos analizados están divididos en tres grupos, referentes a problemas unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales respectivamente. Como ejemplos unidimensionales se va a analizar la propagación de un pulso gaussiano con diferentes condiciones en los contornos del dominio de simulación (PEC, PMC, PML), así como el cálculo de las frecuencias de resonancia en un resonador unidimensional.

En dos dimensiones, los ejemplos considerados serán el cálculo de las frecuencias de corte en un guía rectangular, y la obtención de los parámetros de scattering de una unión T. También se analiza la propagación de un modo TE_{10} en el interior de una guía rectangular WR28.

En tres dimensiones, los resultados presentados se corresponden con el análisis de distintas cavidades resonantes vacías y cargadas con diferentes dieléctricos, y también se estudia la propagación en el interior de una guía rectangular WR90.

Antes de presentar los ejemplos de simulación, se va a realizar un análisis detallado correspondiente a la forma de introducir la excitación electromagnética dentro de la estructura en estudio, que es un punto clave a la hora de obtener resultados apropiados tras la simulación.

5.2.- EXCITACIÓN DEL CAMPO

Uno de los puntos fundamentales a la hora de llevar a cabo una simulación es la forma de introducir adecuadamente la excitación de la onda electromagnética dentro de la estructura que queremos analizar. La elección de una excitación adecuada está fuertemente condicionada al tipo de problema que se pretenda resolver. En particular, hay que distinguir entre los requerimientos que deben cumplir las excitaciones apropiadas para realizar simulaciones en el espacio libre y las utilizadas en simulaciones de dispositivos de propagación guiada.

Un modo de introducir una excitación en la estructura consiste en plantear la misma en forma de condiciones iniciales no nulas. En este tipo de excitación, introducido en 1966 por Yee [88], la onda incidente se aproxima como una condición inicial para cada componente del campo eléctrico y magnético en cada uno de los puntos del mallado. El signo y la amplitud inicial de cada componente del campo se eligen de acuerdo con la polarización y la dirección deseadas para la onda. Un factor importante a tener en cuenta al aplicar este tipo de condición inicial es el desfase temporal existente entre las componentes del campo eléctrico y magnético. Con este tipo de excitación, el excesivo tamaño de la malla necesario para generar señales de larga duración o fuentes armónicas hace desaconsejable su uso en numerosas ocasiones, siendo de utilidad en problemas muy específicos y fundamentalmente unidimensionales.

Para solucionar este problema, es deseable que la onda incidente sea generada únicamente en algunos puntos de la malla, e introduciendo la señal a lo largo del tiempo. Esto se consigue empleando una *fente ideal*, que consiste en asignar una función temporal concreta a ciertas componentes del campo eléctrico o magnético en una zona determinada de la malla.

En principio, es posible introducir como excitación una forma de onda arbitraria y estudiar su evolución espacio-temporal por la estructura. Sin embargo, si la estructura no representa un medio libre, sino que se pretende analizar una onda guiada, puede ser interesante hacer un estudio de los diferentes modos existentes (“análisis modal”). Así,

dato que la señal que se propaga se puede expresar como una combinación de modos, es importante poder controlar los modos a excitar, y también que no haya componentes frecuenciales por debajo del corte del modo excitado. En estos casos, dado que el sistema guiado puede soportar diferentes modos propagantes, con su propia distribución espacial de los campos eléctrico y magnético, sucede que al introducir la excitación se pueden generar de forma involuntaria modos no deseados y dificultar el análisis de los modos de interés. En algunas estructuras, como en las guías de onda rectangulares, se conoce analíticamente el patrón transversal, lo que permite hacer corresponder la excitación con el modo dominante sin excitar modos superiores que se propaguen ni introducir energía reactiva asociada a modos evanescentes. En la figura 5.1 se muestra la variación apropiada del campo eléctrico en el plano transversal para excitar el modo TE_{10} de una guía rectangular.

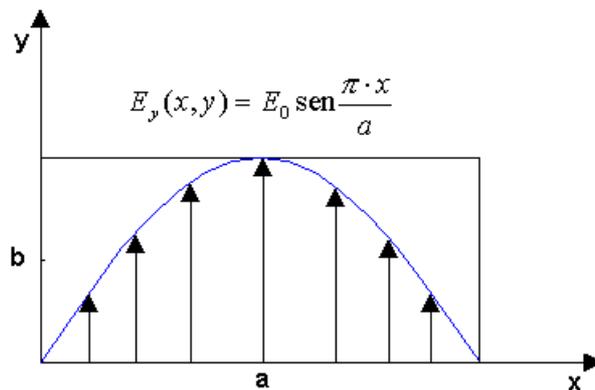


Figura 5.1.: Variación en el plano transversal del campo eléctrico en una guía de onda rectangular para el modo TE_{10}

Así como la distribución del campo electromagnético en el plano transversal de la excitación es responsable de los distintos modos producidos en la estructura, la variación temporal de la excitación es la que fija las componentes en frecuencia. Se puede introducir, por ejemplo, una fuente de voltaje que excita una onda monocromática de frecuencia ω_0 asignando a una de las componentes del campo eléctrico una variación sinusoidal continua en el tiempo:

$$E(t)_{\text{fuente}} = E_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 \cdot t) \quad (5-1)$$

Esto permite, transcurrido cierto periodo de tiempo para que se pueda considerar que se ha alcanzado el estado estacionario, calcular los parámetros de la estructura relacionados con esa frecuencia ω_0 . Sin embargo, si se desean obtener las características para un espectro más amplio de frecuencias, se puede conocer dicho comportamiento frecuencial a partir del estudio de su respuesta transitoria. Esto es, como un impulso en delta contiene todas las frecuencias, se podrían estudiar en todo el rango requerido de una vez. Sin embargo, es conveniente tener en cuenta que en los dispositivos que presentan el fenómeno de frecuencia de corte, si el espectro de la excitación contiene frecuencias por debajo de ésta, se va a generar energía reactiva asociada a los modos no propagantes en la vecindad de la fuente, aunque también hay que señalar que, debido a las características de dispersión del método, que vimos en el capítulo 4, no conviene tampoco que la señal tenga componentes en frecuencia muy alta. Si lo que nos interesa es estudiar un modo en concreto, esto nos obligaría a separar la fuente de la zona de estudio para que se produzca la atenuación completa de estos campos reactivos antes de alcanzar dicha zona. Además, debido a la naturaleza dispersiva de los dispositivos de guiado de onda, las diferentes componentes frecuenciales se propagan a velocidades distintas, lo que puede obligar a prolongar el tiempo de simulación cuando la excitación contiene señales con frecuencias muy cercanas a las de corte, que se propagan muy lentamente. En las simulaciones en las que no existe frecuencia de corte, es habitual emplear una señal cuyo espectro se extienda hasta un cierto valor ω_s . Esto se consigue utilizando como excitación un pulso gaussiano con ancho de banda finito:

$$E(t)_{\text{fuente}} = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{a^2}\right) \quad (5-2.1)$$

$$\Delta\omega \leq \frac{2}{a} \quad (5-2.2)$$

siendo $\Delta\omega$ el ancho de banda. En las simulaciones en las que se quiera evitar cierto valor de corte, lo que se desea es que el espectro de frecuencias esté dentro del rango de propagación. En este caso se utiliza una función gaussiana modulada a la frecuencia central de interés ω_0 :

$$E(t)_{\text{fuente}} = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{a^2}\right) \cdot \cos(\omega_0 (t-t_0)) \quad (5-3.1)$$

$$\omega_0 - \frac{2}{a} \leq \Delta\omega \leq \omega_0 + \frac{2}{a} \quad (5-3.2)$$

En las figuras 5.2 y 5.3 se han representado los dos tipos de excitación antes mencionados con sus respectivos espectros en frecuencia dados por su transformada de Fourier. Estos dos ejemplos representados pertenecen al caso en el que la excitación se introduce a lo largo de un tiempo infinito. Esta es una situación ideal, ya que no es posible realizar una simulación durante un número infinito de iteraciones ni en un intervalo continuo. Lo que sucede en realidad es que introducimos la excitación durante un tiempo determinado. Este truncamiento en el dominio del tiempo hace que los espectros en frecuencia se vean alterados extendiéndose más allá de las zonas de interés. El efecto del truncamiento sobre el comportamiento ideal es más acusado cuanto menor sea el tiempo durante el que se introduce la excitación.

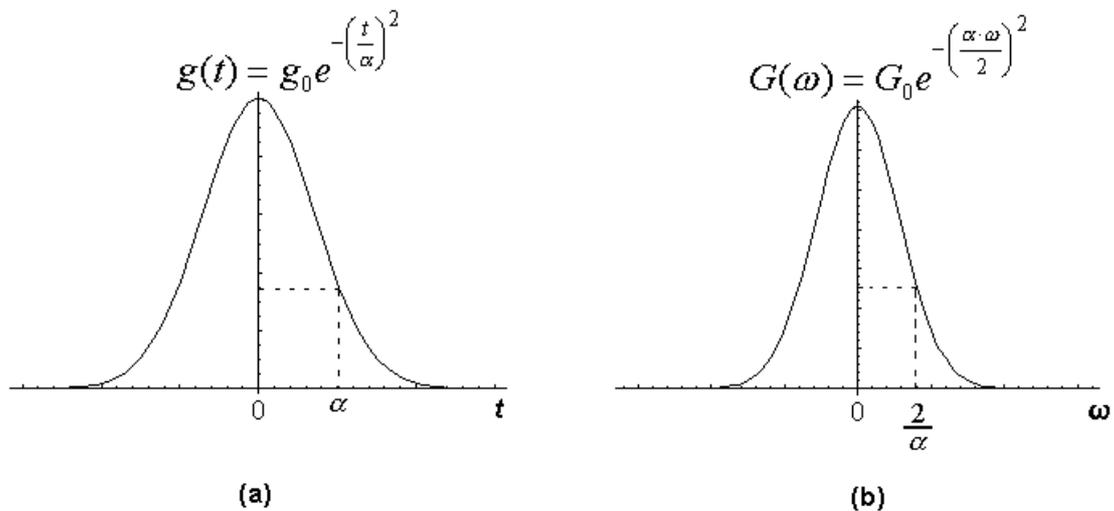


Figura 5.2.: Excitación Gaussiana (a) y su espectro en frecuencia (b)

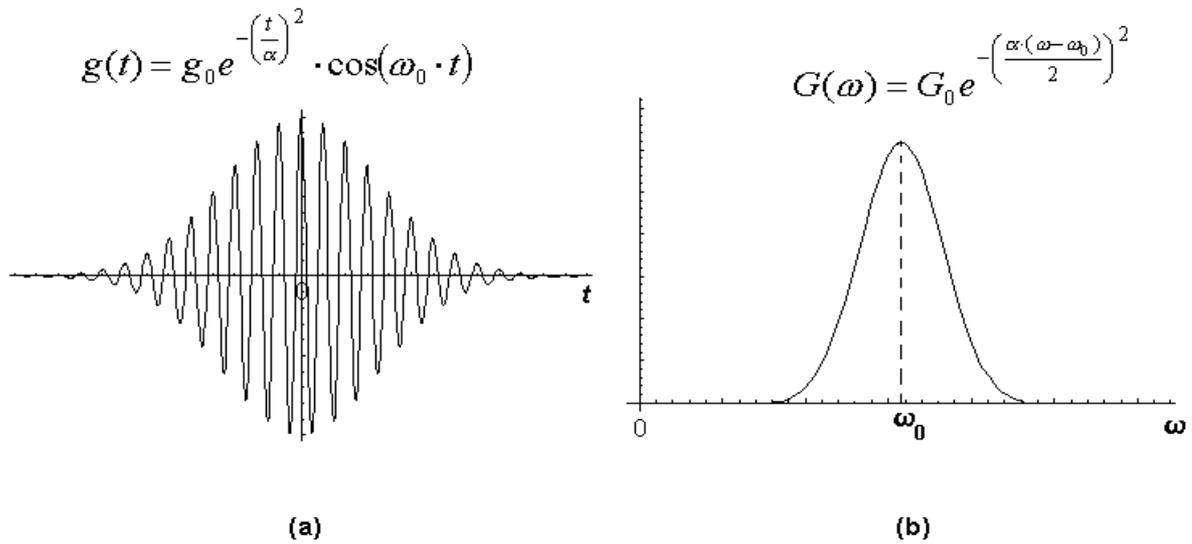


Figura 5.3.: Excitación Gaussiana modulada (a) y su espectro en frecuencia (b)

Para evitar en la medida de lo posible este efecto, el objetivo es introducir señales temporales que decrezcan lo suficientemente rápido como para que den lugar a un espectro que se anule prácticamente fuera del rango de interés, aún cuando se introduzcan durante un número finito de pasos. En la figura 5.4.(a) está representada una excitación gaussiana introducida en la estructura durante un periodo de tiempo limitado $2T_0$, y en la figura 5.4.(b) vemos su correspondiente espectro en frecuencia. Se observa cómo el truncamiento provoca un aumento en la extensión del rango de frecuencias, pero aún así, la parte más significativa del mismo se sigue manteniendo dentro del mismo rango que en el caso ideal. Esto hace de la excitación gaussiana (5-2) y (5-3) una buena elección para realizar las simulaciones de banda ancha.

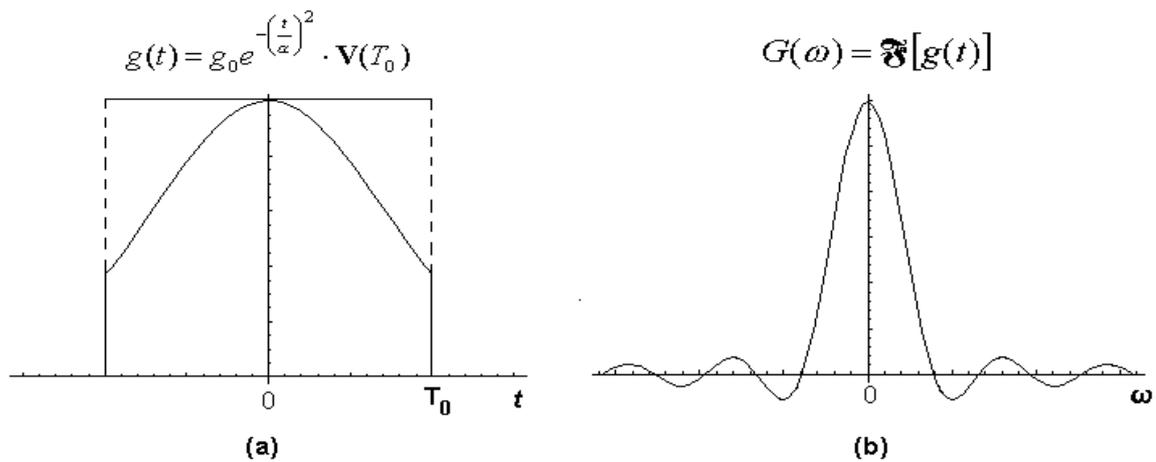


Figura 5.4.: Función gaussiana multiplicada por una ventana rectangular de anchura $2T_0$ (a) y su espectro en frecuencia dado por la Transformada de Fourier (b).

Para diseñar la excitación adecuada debemos ajustar los parámetros \mathbf{a} , \mathbf{w}_0 y t_0 . El valor \mathbf{w}_0 se fija como el valor central de la frecuencia de nuestro interés y \mathbf{a} se fija lo suficientemente grande como para que el espectro decaiga rápidamente, pero también suficientemente pequeño como para que haya una componente significativa de señal en los extremos de la banda. El valor del retardo t_0 se debe escoger lo suficientemente grande como para que la señal se introduzca suavemente en la estructura pero por otra parte debe ser lo suficientemente pequeño como para que el tiempo de simulación no se alargue excesivamente. Como ayuda para la elección del retardo t_0 , se puede calcular el valor $h(0)$ con la que comienza la excitación a introducirse en la estructura en función de \mathbf{a} y del valor máximo de la excitación E_0 para distintos valores de t_0 :

$$h(0) = E_0 \cdot e^{-\left(\frac{t_0}{\mathbf{a}}\right)^2} \tag{5-4}$$

Despejando el valor de t_0 de la expresión (5-4) se obtiene:

$$t_0 = \mathbf{a} \cdot \sqrt{\ln \frac{E_0}{h(0)}} \tag{5-5}$$

De este modo, una vez fijado el valor de \mathbf{a} , el valor del retraso t_0 se escoge de acuerdo con el cociente entre E_0 y $h(0)$. Por ejemplo, se puede tomar como valor inicial de $h(0)$ la centésima parte del valor máximo E_0 , esto es, $h(0) = E_0/100$.

Las excitaciones (5-2) y (5-3) admiten una formulación alternativa en la que sólo intervienen parámetros adimensionales que se interpretan como pasos temporales. Para ello se definen:

$$\mathbf{a} = n_a \cdot \Delta t \quad (5-6.1)$$

$$t_0 = n_t \cdot \Delta t \quad (5-6.2)$$

$$t = n \cdot \Delta t \quad (5-6.3)$$

De esta forma, las ecuaciones (5-2) y (5-3) se reescriben como:

$$E(n) = \exp\left[-\frac{(n-n_t)^2}{n_a^2}\right] \quad (5-7)$$

$$E(n) = \exp\left[-\frac{(n-n_t)^2}{n_a^2}\right] \cdot \cos(\mathbf{w}_0 \cdot (n-n_t) \cdot \Delta t) \quad (5-8)$$

y de la expresión (5-5) obtenemos el valor de n_t en función de n_a y del cociente $E_0/h(0)$:

$$n_t = n_a \cdot \sqrt{\ln \frac{E_0}{h(0)}} \quad (5-9)$$

Por ejemplo, si tomamos como valor inicial $h(0) = E_0/100$, el valor aproximado que se obtiene para n_t es $n_t \approx 2n_a$.

Una vez escogida la excitación debemos modificar el algoritmo para conseguir introducirla dentro de la estructura. Una forma consiste en hacer que la excitación fije los valores del campo en la posición donde se encuentra la fuente. Esto genera una onda numérica con la dependencia temporal elegida y que se propaga simétricamente dentro de la estructura partiendo de la posición de la fuente. En principio es necesario mantener

el proceso iterativo temporal de manera continuada, hasta alcanzar el estado estacionario en caso de una fuente monocromática. Durante este tiempo parte de la señal excitada puede verse reflejada de nuevo hacia la posición de la fuente. Si esto sucede, dado que los valores del campo en la posición de la fuente están fijados por la excitación, la señal volverá a reflejarse de forma indeseada (fuente de impedancia cero).

Una manera de evitar esta reflexión adicional consiste en apagar la fuente, esto es, eliminar la fuente del algoritmo, una vez que el valor de la excitación ha decaído hasta un valor despreciable, y volver a incorporar estos puntos al algoritmo. Este método presenta el inconveniente de tener que alargar el dominio de computación para separar la fuente de las primeras discontinuidades, y además de no poderse aplicar a las excitaciones de duración infinita, como por ejemplo la sinusoidal.

La forma más eficiente de solucionar estos problemas consiste en aplicar el principio de superposición a los puntos situados en la fuente. Esto significa que el valor del campo en la posición de la fuente se calcula aplicando el algoritmo de forma normal y sumando en estos puntos la contribución de la excitación:

$$E(t, \vec{r}_{\text{fuente}}) = E_{\text{algoritmo}}(t, \vec{r}_{\text{fuente}}) + E_{\text{excitación}}(t, \vec{r}_{\text{fuente}}) \quad (5-10)$$

Un punto importante en lo que se refiere a la introducción de la excitación dentro del algoritmo se refiere a su situación espacial. A diferencia de otras técnicas (FDTD, TLM, ...) en las que la fuente se puede localizar en un único punto de la malla, con nuestro esquema MRTD conviene situar la fuente distribuida entre varios nodos de la malla, de forma que su introducción en el espacio sea suave. Esto significa que en la expresión (5-10) el término \vec{r}_{fuente} no se refiere a un sólo punto sino a todos los puntos que se consideran en la fuente. De esta forma, la excitación se puede descomponer en dos características, una temporal y otra espacial:

$$\text{Excitación}(t, \vec{r}_{\text{fuente}}) = \text{Excitación}(t) * \text{Excitación}(\vec{r}) \quad (5-11)$$

La característica temporal vendrá determinada por las condiciones expuestas anteriormente en lo que se refiere a su contenido en frecuencia. En cuanto a la parte espacial, en nuestras simulaciones vamos a considerar, para que la introducción sea suave, que la fuente está caracterizada por una función seno cuadrado. En las simulaciones en que hemos utilizado dominios en dos y tres dimensiones, la excitación se debe introducir también de la misma forma. En estos casos puede que en alguna o en todas las coordenadas, la distribución espacial del campo esté ya determinada por el tipo de propagación que queremos realizar, como por ejemplo, en una guía rectangular donde nos interesa estudiar el modo fundamental. En estas situaciones la distribución espacial en forma de seno cuadrado sólo afectaría a las coordenadas que estén sin determinar. De este modo, la distribución de la excitación a lo largo de una sola coordenada (por ejemplo, z) será la siguiente:

$$e(z) = e_0 \operatorname{sen}^2 \left(\mathbf{p} \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right) \quad (5-12.1)$$

y la distribución de la excitación en un plano (por ejemplo, \mathbf{XZ}) será la siguiente:

$$e(x, z) = e_0 \operatorname{sen}^2 \left(\mathbf{p} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot \operatorname{sen}^2 \left(\mathbf{p} \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right) \quad (5-12.2)$$

En la figura 5.5 tenemos representada una distribución espacial de medio seno cuadrado para la fuente en una simulación unidimensional.

En la figura 5.6. tenemos la correspondiente distribución espacial para una simulación en dos dimensiones en la que ninguna de las dos coordenadas está determinada de antemano por un patrón característico.

Sobre estos puntos del mallado, que pertenecen a la posición de la fuente, se debe aplicar la característica temporal estudiada anteriormente, tal como se indicaba en la expresión (5-11).

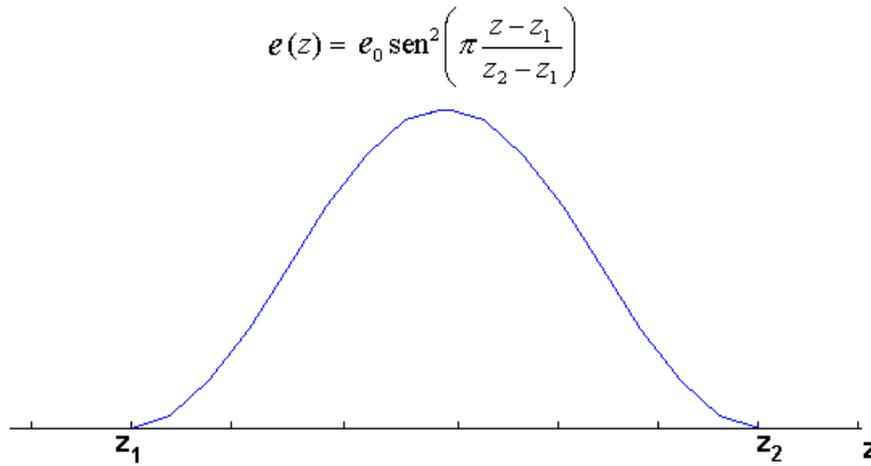


Figura 5.5.: Distribución espacial de la fuente para una simulación 1D

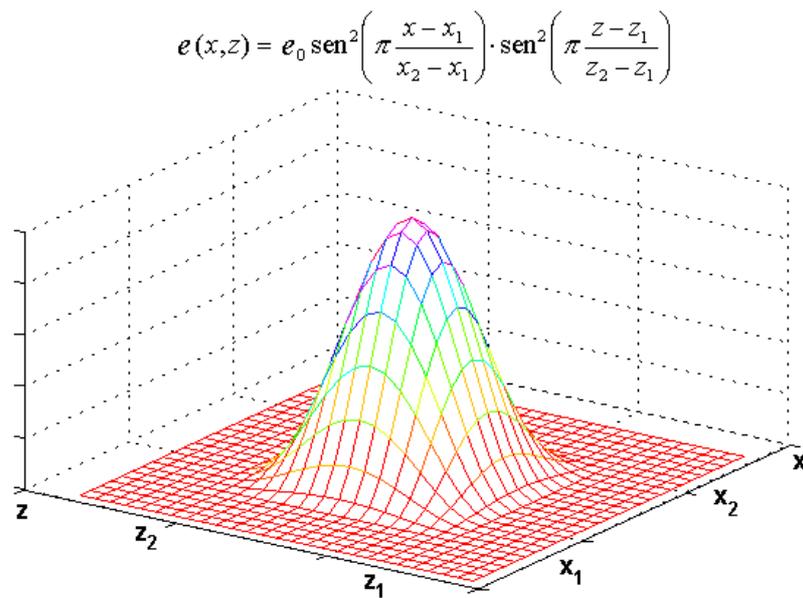


Figura 5.6.: Distribución espacial de la fuente en una simulación 2D

5.2.1.- Excitación en una dimensión

Consideremos un problema en el que los campos varían únicamente a lo largo del eje z . Si estamos trabajando con un nivel de resolución, en nuestro algoritmo sólo necesitaremos utilizar funciones de escala f para describir la distribución espacial de los

campos. En esta situación, en el supuesto de que estemos excitando el campo eléctrico con una variación temporal dada por $g(t)$, el desarrollo de dicha excitación se expresa como sigue:

$$e(z,t) = \sum_n \sum_k^n e_k^f \mathbf{f}_k(z) \cdot g_n(t) \quad (5-13)$$

donde ${}^n e_k^f$ representa el valor del coeficiente de escala en la posición $z = k\Delta z$, en el instante de tiempo $t = n\Delta t$, y $g_n(t)$ representa el valor de $g(t)$ en dicho instante de tiempo (siendo Δz y Δt la discretización espacial y temporal respectivamente). Debido a que los coeficientes de escala representan el valor real de los campos, la excitación de estos coeficientes se realiza asignándoles el valor correspondiente a la distribución espacial descrita en la ecuación (5-12.1):

$${}^n e_k^f = e_0 \operatorname{sen}^2 \left(\mathbf{p} \frac{k - k_1}{k_2 - k_1} \right) \cdot g_n(t) \quad (5-14)$$

Entonces, el algoritmo modificado para incluir la excitación queda de la siguiente forma:

$${}^{n+\frac{1}{2}} [H^f]^J = {}^{n-\frac{1}{2}} [H^f]^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{1}{\Delta z} [d^J]^n [E^f]^J \quad (5-15.1)$$

$${}^{n+1} [E^f]^J = {}^n [E^f]^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \frac{1}{\Delta z} [d^J]^{n+\frac{1}{2}} [H^f]^J + {}^{n+1} [e^f]^J \quad (5-15.2)$$

Si además de las funciones de escala \mathbf{f} utilizamos funciones de wavelet \mathbf{y} para desarrollar los campos en el espacio, es decir, aumentamos el nivel de resolución, la excitación se debe expresar utilizando sus correspondientes coeficientes de escala y de wavelet de la siguiente forma:

$$e(z,t) = \sum_n \left[\sum_k^n e_k^f \mathbf{f}_k(z) + \sum_k^n e_k^y \mathbf{y}_k(z) \right] \cdot g_n(t) \quad (5-16)$$

donde ${}^n e_k^f$ y ${}^n e_k^y$ representan el valor de los coeficientes de escala y de wavelet respectivamente, en la posición $z = k\Delta z$ y en el instante de tiempo $t = n\Delta t$.

Para obtener los coeficientes de este desarrollo, que dan lugar a la excitación del campo, se utiliza la Transformada Discreta en Wavelets (*DWT*) descrita en el capítulo 2. De esta forma, teniendo en cuenta que $J+1$ es el nivel de resolución que queremos alcanzar y que e^{J+1} representa el valor real de la excitación en ese nivel, los coeficientes e_k^f y e_k^y se calculan como se indica en la figura 5.7:

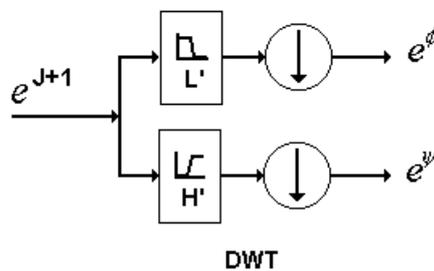


Figura 5.7.: Obtención de los coeficientes de escala e^f y de wavelet e^y de nivel J a partir de los coeficientes e^{J+1} de nivel $J+1$ mediante la Transformada Discreta en Wavelets (*DWT*).

Si la excitación que introducimos tiene una distribución espacial con forma de seno cuadrado, como se representaba en la figura 5.5, su descomposición en términos de funciones de escala f y de wavelet y estaría representada de la forma mostrada en la figura 5.8.

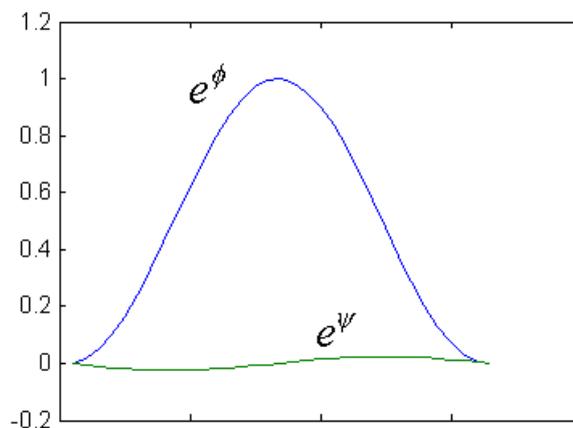


Figura 5.8.: Descomposición de la excitación en términos de escala f y de wavelet y .

Entonces, el algoritmo modificado para incluir la excitación queda de la siguiente forma:

$${}^{n+\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} = {}^{n-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} - \frac{\Delta t}{m} \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} d^J & g^J \\ b^J & a^J \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} \quad (5-17.1)$$

$${}^{n+1}\begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} = {}^n\begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} - \frac{\Delta t}{e} \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} d^J & g^J \\ b^J & a^J \end{bmatrix}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} + \begin{bmatrix} e^f \\ e^y \end{bmatrix}^{J+1} \quad (5-17.2)$$

Si analizamos la figura 5.8 se puede observar la diferencia de magnitud que existe entre los coeficientes de escala y los coeficientes de wavelet. Esto se puede apreciar con claridad en la figura 5.9:

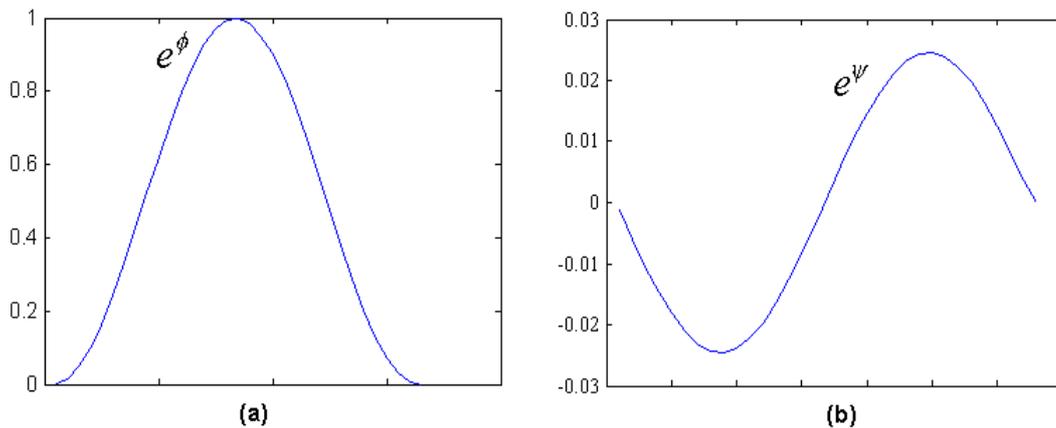


Figura 5.9.: Representación a diferentes escalas de los términos de escala f (a) y de wavelet y (b) de la excitación.

5.2.2.- Excitación en dos dimensiones

Para los problemas en dos y tres dimensiones se puede hacer un estudio de la excitación similar al que acabamos de ver en una dimensión. Si consideramos una situación en la que los campos varían únicamente en el plano \mathbf{XZ} , la excitación utilizada se puede describir en términos generales mediante la siguiente expresión:

$$e(x, z, t) = e(x, z) * g(t) \quad (5-18)$$

Si estamos trabajando con un único nivel de resolución, en nuestro algoritmo sólo necesitaremos funciones de escala para describir la distribución espacial de los campos, y lo mismo sucede con la excitación. De esta forma, el desarrollo de la excitación en términos de funciones de escala es el siguiente:

$$e(x, z, t) = \sum_n \sum_i \sum_k {}^n e_{i,k}^{ff} \mathbf{f}_i(x) \mathbf{f}_k(z) \cdot g_n(t) \quad (5-19)$$

donde ${}^n e_{i,k}^{ff}$ representa el valor del coeficiente de escala en la posición ($x = i\Delta x$, $z = k\Delta z$) en el instante de tiempo $t = n\Delta t$, siendo Δx y Δz la discretización espacial en el eje x y en el eje z respectivamente, y Δt la discretización temporal. Si la excitación que introducimos tiene una distribución espacial con forma de seno cuadrado en las dos coordenadas espaciales, como se representaba en la figura 5.6, el valor de los coeficientes de escala estará dado por la siguiente expresión:

$${}^n e_{i,k}^{ff} = e_0 \operatorname{sen}^2\left(\mathbf{p} \frac{i-i_1}{i_2-i_1}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\mathbf{p} \frac{k-k_1}{k_2-k_1}\right) \cdot g_n(t) \quad (5-20)$$

Entonces, si deseamos describir la propagación de un modo TM en el plano \mathbf{XZ} , el algoritmo que debemos utilizar, convenientemente modificado para incluir la excitación, es el descrito por las siguientes ecuaciones:

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x^{ff}]^J = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x^{ff}]^J + \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial z} {}^n[\mathbf{E}_y^{ff}]^J \quad (5-21.1)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z^{ff}]^J = {}^{n-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z^{ff}]^J - \frac{\Delta t}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial x} {}^n[\mathbf{E}_y^{ff}]^J \quad (5-21.2)$$

$${}^{n+1}[\mathbf{E}_y^{ff}]^J = {}^n[\mathbf{E}_y^{ff}]^J + \frac{\Delta t}{\mathbf{e}} \left[\frac{\partial}{\partial z} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_x^{ff}]^J - \frac{\partial}{\partial x} {}^{n+\frac{1}{2}}[\mathbf{H}_z^{ff}]^J \right] + {}^{n+1}[e^{ff}]^J \quad (5-21.3)$$

Si aumentamos en un nivel la resolución del problema, el desarrollo espacial de los campos se realizará combinando funciones de escala y de wavelet en las dos coordenadas x y z . Entonces, la excitación se debe expresar utilizando sus correspondientes coeficientes de escala y de wavelet de la siguiente forma:

$$e(x, z, t) = \sum_n \left[\begin{aligned} & \sum_i \sum_k^n e_{i,k}^{ff} f_i(x) f_k(z) + \sum_i \sum_k^n e_{i,k}^{fy} f_i(x) y_k(z) + \\ & \sum_i \sum_k^n e_{i,k}^{yf} y_i(x) f_k(z) + \sum_i \sum_k^n e_{i,k}^{yy} y_i(x) y_k(z) \end{aligned} \right] \cdot g_n(t) \quad (5-22)$$

Para obtener los coeficientes de este desarrollo se utiliza la Transformada Discreta en Wavelets en dos dimensiones (DWT_{2D}) de la forma descrita en el capítulo 2. Del mismo modo que en el caso anterior, teniendo en cuenta que $J+1$ es el nivel de resolución que queremos alcanzar, y que e^{J+1} representa el valor real de la excitación en ese nivel, los coeficientes de escala y de wavelet del desarrollo se calculan como se indica en la figura 5.10:

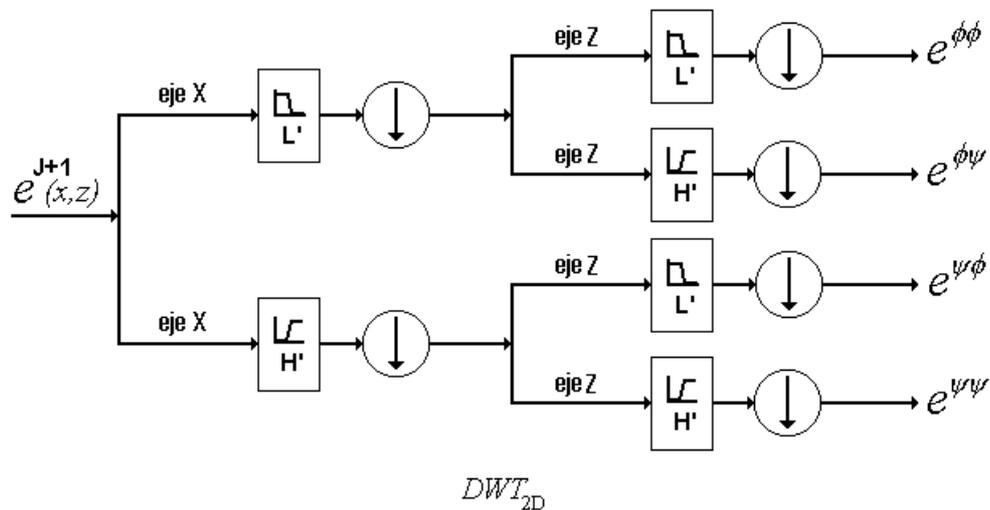


Figura 5.10.: Descomposición en términos de los coeficientes de escala y de wavelet de la excitación de nivel $J+1$ mediante la Transformada Discreta en Wavelets en dos dimensiones (DWT_{2D}).

Si la excitación que introducimos tiene una distribución espacial con forma de seno cuadrado en las dos coordenadas espaciales, como se representaba en la figura 5.6, su descomposición en términos de funciones de escala y de wavelet será como la mostrada en las figuras 5.11 y 5.12.

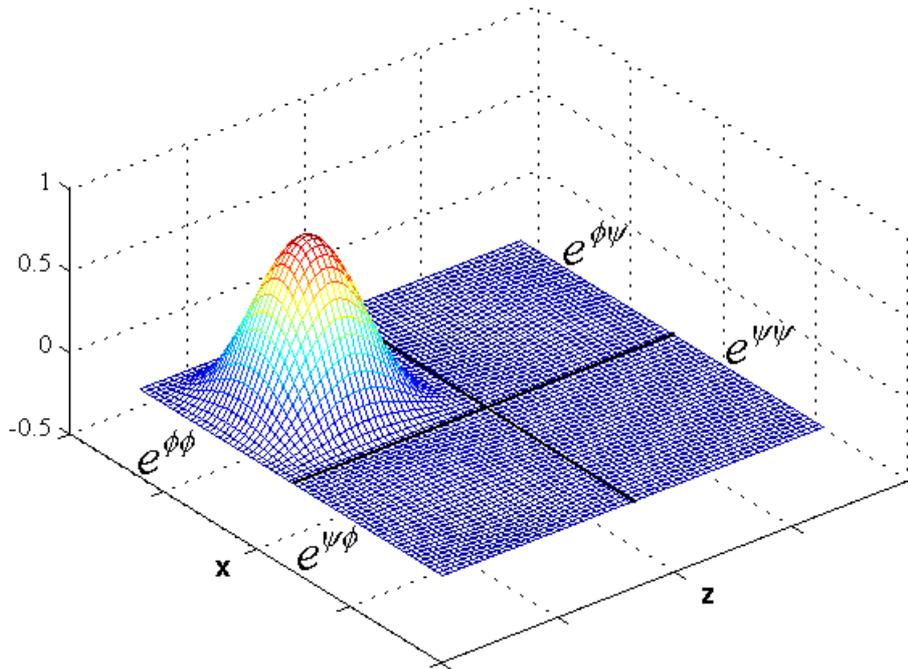


Figura 5.11.: Descomposición de la excitación en dos dimensiones en términos de escala y de wavelet.

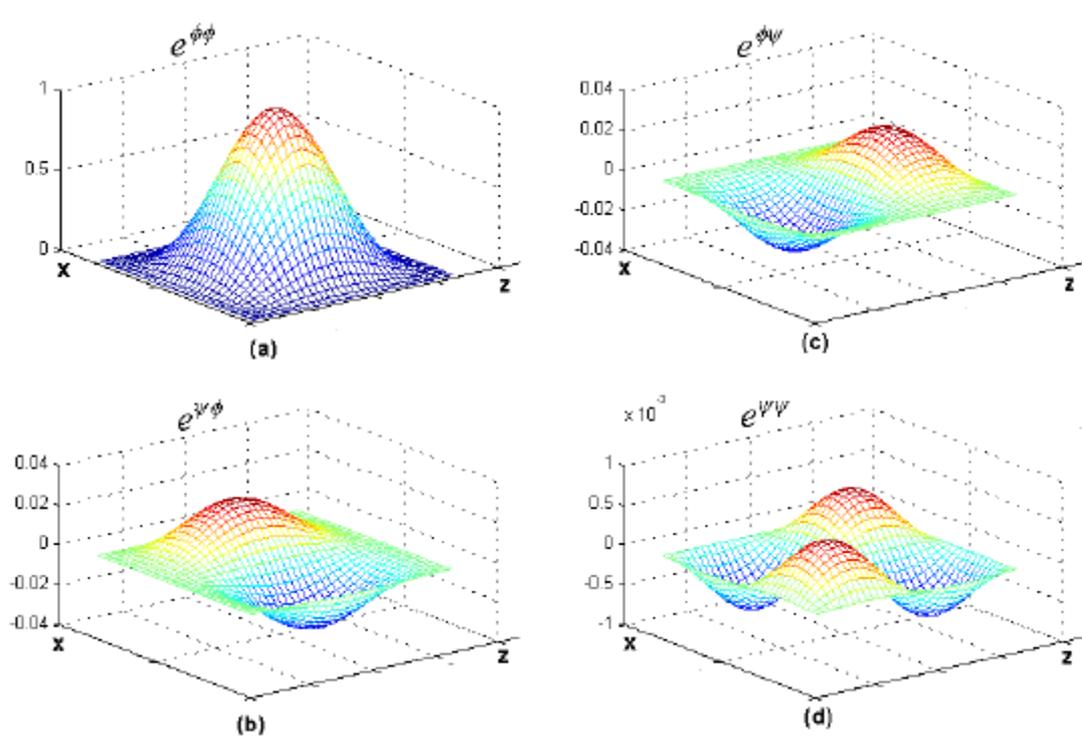


Figura 5.12.: Representación a diferentes escalas de la descomposición en términos de escala y de wavelet de la excitación en dos dimensiones.

5.3.- APLICACIÓN DE LA TÉCNICA MRTD 1D

Como ejemplos de aplicación de la técnica en una dimensión se han realizado varias simulaciones, analizando la propagación de un pulso gaussiano en un dominio con diferentes condiciones de contorno, y también se han calculado las frecuencias de resonancia de un resonador unidimensional con paredes eléctricas en los dos extremos.

5.3.1.- Propagación de un pulso gaussiano

Comenzamos estudiando la propagación en el vacío de una onda plana TEM, con polarización lineal, y de componentes E_x y H_y a lo largo del eje z , como se indica en la figura 5.13.

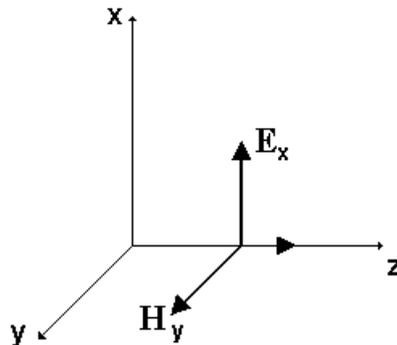


Figura 5.13.: *Propagación en el vacío de una onda plana TEM de componentes E_x y H_y a lo largo del eje z .*

La simulación se ha realizado considerando un dominio de 100 mm de longitud y utilizando dos niveles de resolución, es decir, utilizando funciones de escala y de wavelet de primer orden para desarrollar los campos en el espacio ($J = 1$). La discretización en el nivel base ($J = 0$) se realiza dividiendo el espacio de simulación en 50 celdas, lo que da lugar a una resolución base de $\Delta z = 2$ mm. En estas condiciones, una vez reconstruidos los campos se obtendrán 100 puntos de muestreo con una separación entre cada uno de ellos de $\Delta z^J = 1$ mm.

Dado que estamos empleando dos niveles de resolución, la excitación se desarrollará utilizando funciones de escala y de wavelet de la forma indicada en la ecuación (5-16). Como característica temporal de la excitación consideramos un pulso gaussiano como el de la expresión (5-2.1), con una anchura $a = 6\Delta t$ y un retardo $t_0 = 12\Delta t$, donde Δt es la discretización temporal dada por

$$\Delta t = s \cdot \frac{\Delta z / 2^J}{c} \tag{5-23}$$

siendo s el factor de estabilidad cuyo valor se escoge dependiendo del tipo de función wavelet empleado. La distribución espacial de la excitación corresponde a medio seno cuadrado, como el de la expresión (5-12.1), localizado en el centro del dominio de simulación y con una anchura de $|z_2 - z_1| = 20 \text{ mm}$. Los coeficientes de escala y de wavelet de esta distribución se calculan mediante la Transformada Discreta en Wavelets, de la forma indicada en la figura 5.14:

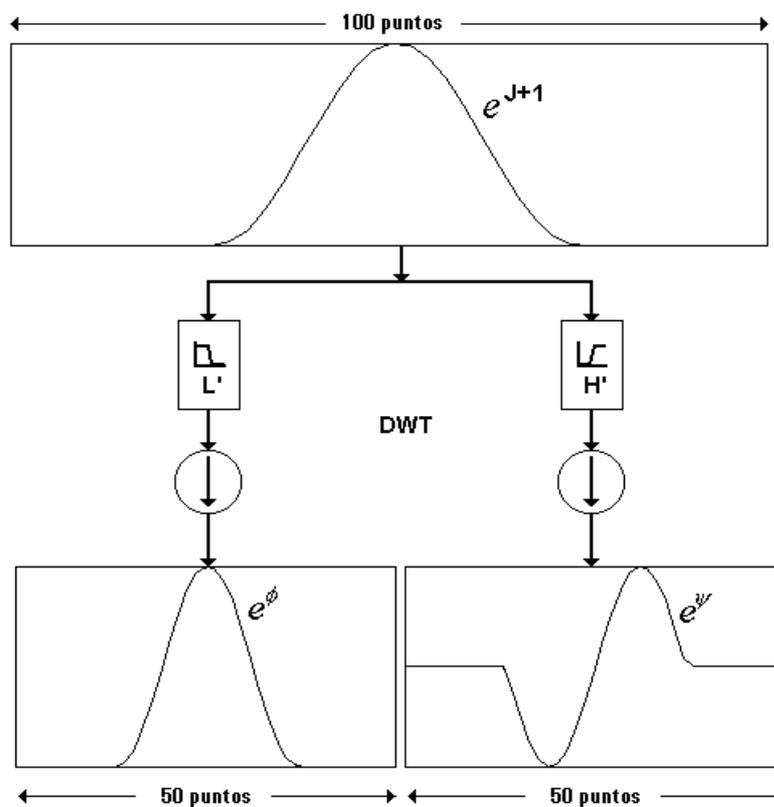


Figura 5.14.: Cálculo de los coeficientes de escala y de wavelet de la excitación.

Paredes Eléctricas (PEC)

Como condición de contorno en nuestro dominio de simulación vamos a considerar en primer lugar dos paredes eléctricas (PEC) situadas en los extremos del dominio de simulación. Sobre la pared de un conductor eléctrico perfecto se verifican las expresiones (3-80) que implican cierta simetría sobre las componentes normales y tangenciales del campo electromagnético. En nuestro caso, tanto el campo eléctrico (E_x) como el campo magnético (H_y) son tangenciales a la pared eléctrica, con lo cual el campo eléctrico presenta una simetría impar y el campo magnético una simetría par. Esto lo tenemos representado en la figura 5.15, donde se puede apreciar la simetría aplicada a ambos lados de la pared. El cálculo de los coeficientes necesarios para aplicar estas condiciones de simetría se realiza de acuerdo con lo expresado en la tabla III del apartado 3.5.

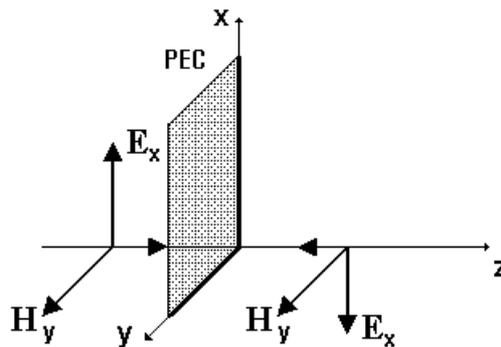
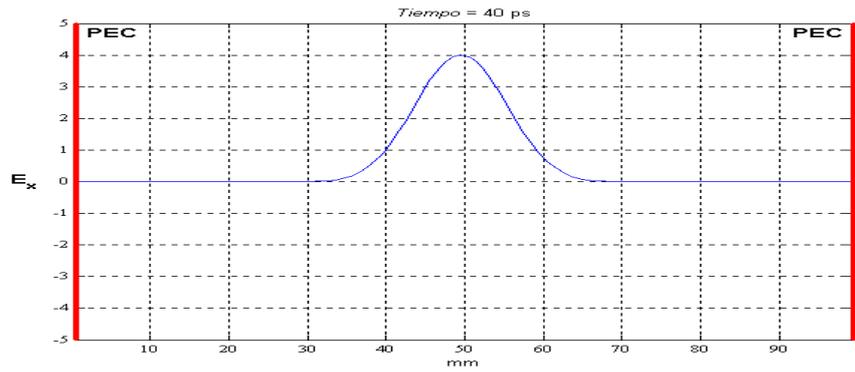
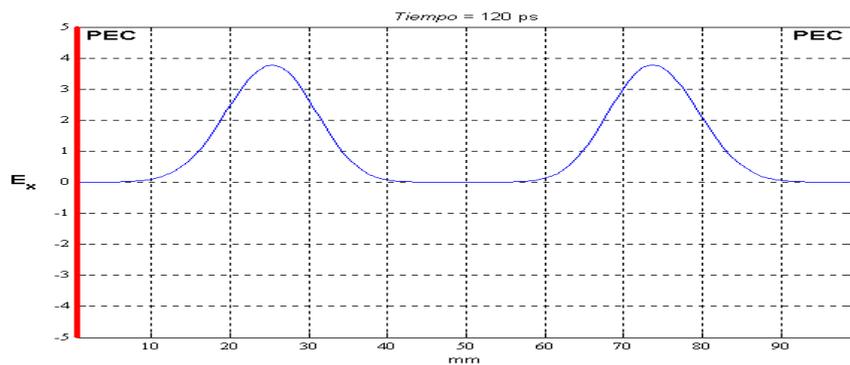


Figura 5.15.: Condiciones de contorno en una pared eléctrica: Simetría impar para el campo eléctrico y simetría par para el campo magnético, tangenciales a la pared.

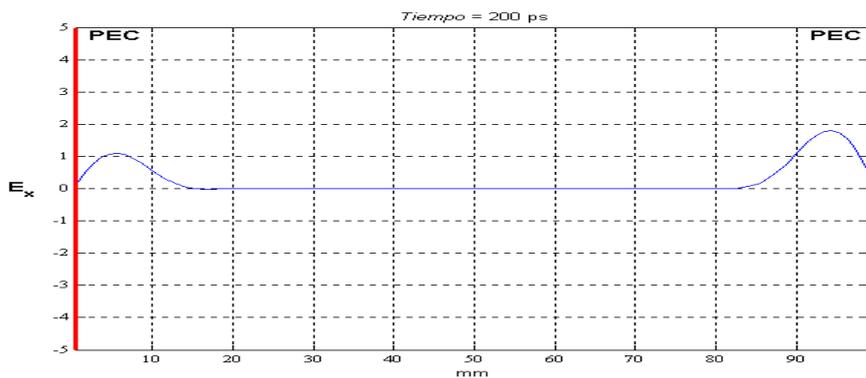
En la figura 5.16 se ha representado el valor del campo eléctrico E_x a lo largo del dominio de simulación y en diferentes instantes de tiempo. El cálculo se ha realizado utilizando funciones wavelet del tipo D_1 (wavelets de Haar) escogiendo un factor de estabilidad $s = 1$. De esta forma, el paso temporal determinado por la expresión (5-23) es igual a $\Delta t = 3,34$ ps. En esta figura se puede ver cómo la excitación introducida da lugar a dos pulsos que se propagan en sentidos opuestos y cómo al incidir sobre la pared eléctrica la componente E_x cambia de sentido tras su reflexión.



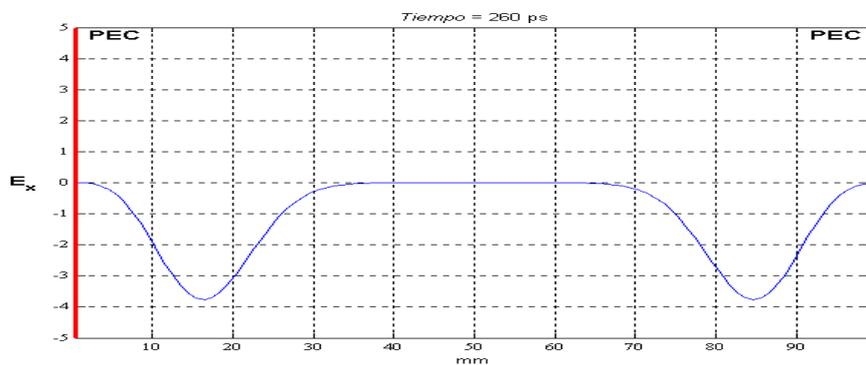
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.16.: Campo eléctrico (en V/m) de un pulso gaussiano propagándose en un medio con paredes eléctricas (PEC) en los extremos. El pulso inicial (a) se separa en dos pulsos que se propagan en sentidos opuestos (b) que inciden sobre las paredes eléctricas (c) y se reflejan presentando un cambio de sentido (d).

Paredes Magnéticas (PMC)

En segundo lugar hemos repetido el esquema anterior considerando como condiciones de contorno dos paredes magnéticas (PMC) situadas en los extremos del dominio de simulación. Ahora, sobre la pared de un conductor magnético perfecto se verifican las expresiones (3-81) que implican cierta simetría sobre las componentes del campo electromagnético. En este caso, dado que tanto el campo eléctrico (E_x) como el campo magnético (H_y) son tangenciales a la pared eléctrica, el campo eléctrico presentará una simetría par y el campo magnético una simetría impar como se muestra en la figura 5.17.

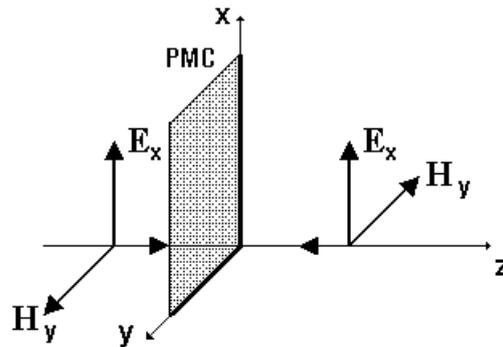
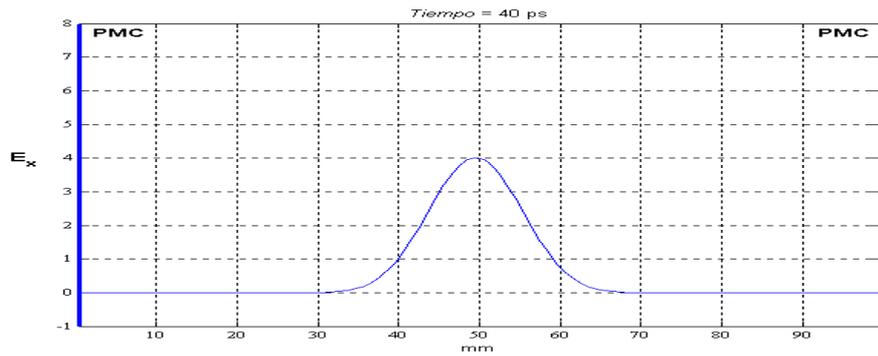
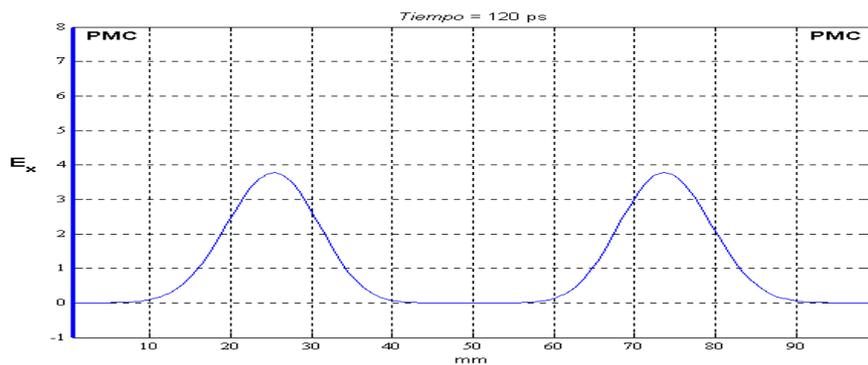


Figura 5.17: Condiciones de contorno sobre una pared magnética: Simetría par para el campo eléctrico y simetría impar para el campo magnético, ambos tangenciales a la pared.

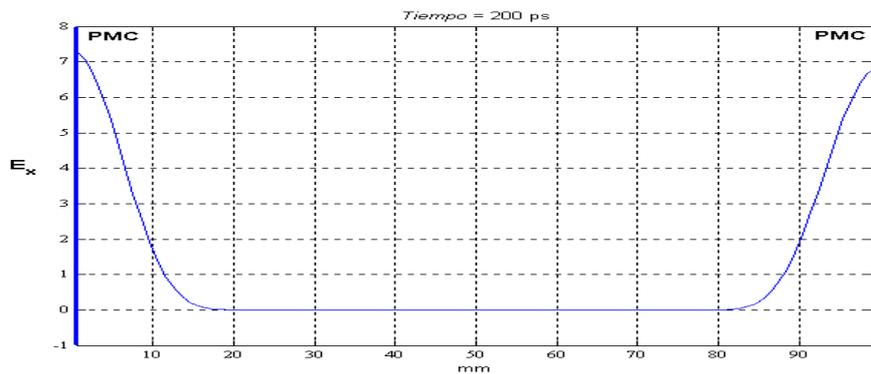
En la figura 5.18 se ha representado nuevamente el valor del campo eléctrico E_x a lo largo del dominio de simulación y en diferentes instantes de tiempo, utilizando funciones wavelet del tipo D_2 y escogiendo un factor de estabilidad $s = 1$. De esta forma, obtenemos el mismo paso temporal que en la situación anterior, es decir, $\Delta t = 3,34$ ps. En esta figura se puede ver cómo la excitación introducida produce dos pulsos que se propagan en sentidos opuestos, pero ahora, tras incidir sobre la pared magnética, no se produce ningún cambio de sentido en la componente E_x .



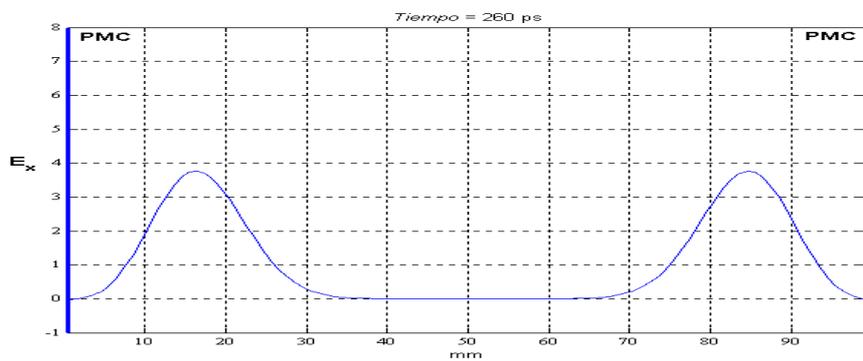
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.18.: Campo eléctrico (en V/m) de un pulso gaussiano propagándose en un medio con paredes magnéticas (PMC) en los extremos. El pulso inicial (a) se separa en dos pulsos que se propagan en sentidos opuestos (b) que inciden sobre las paredes magnéticas (c) y se reflejan.

Condiciones Absorbentes “PML”

En tercer lugar hemos considerado un dominio de simulación con condiciones absorbentes PML [6] en los extremos. Se ha tomado un espesor de la zona PML de $d = 10$ mm, equivalentes a $5\Delta z$. El perfil utilizado para modelar la conductividad es un perfil parabólico de la forma:

$$\mathbf{s}(z) = \mathbf{s}_{\max} \left(1 - \frac{z}{d}\right)^2 \quad (5-24)$$

donde el valor de la “conductividad” magnética $\sigma^*(z)$ se calcula a partir de $\sigma(z)$ de manera que se cumpla la relación:

$$\frac{\mathbf{s}(z)}{\mathbf{e}_0} = \frac{\mathbf{s}^*(z)}{\mathbf{m}_0} \quad (5-25)$$

con el fin de que no se produzca reflexión en la frontera entre el medio PML y el dominio de simulación. El valor máximo de la conductividad σ_{\max} se determina a partir del factor o coeficiente de reflexión $R(0)$ dado por:

$$R(0) = \exp\left[-\frac{2}{\mathbf{e}_0 c} \int_0^d \mathbf{s}_{\max} dz\right] = \exp\left[-\frac{2\mathbf{s}_{\max} d}{3\mathbf{e}_0 c}\right] \quad (5-26)$$

Despejando de esta expresión, obtenemos el valor máximo de la conductividad σ_{\max} en función de los parámetros d y $R(0)$ que hayamos fijado:

$$\mathbf{s}_{\max} = -\frac{3\mathbf{e}_0 c}{2d} \ln R(0) \quad (5-27)$$

Fijando un factor de reflexión de $R = 10^{-4}$, obtenemos en nuestro caso un valor de conductividad máxima de $3,667 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Dado que el desarrollo de los campos se ha

realizado empleando funciones de escala y de wavelet, dentro de la zona PML el algoritmo estará descrito por las siguientes ecuaciones:

$${}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} = \begin{bmatrix} d \mathbf{s}_1^* & g \mathbf{s}_1^* \\ b \mathbf{s}_1^* & a \mathbf{s}_1^* \end{bmatrix} {}^{n-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} - \begin{bmatrix} d \mathbf{s}_2^* & g \mathbf{s}_2^* \\ b \mathbf{s}_2^* & a \mathbf{s}_2^* \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} d^J & g^J \\ \mathbf{b}^J & \mathbf{a}^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} \quad (5.28.1)$$

$${}^{n+1} \begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} = \begin{bmatrix} d \mathbf{s}_1 & g \mathbf{s}_1 \\ b \mathbf{s}_1 & a \mathbf{s}_1 \end{bmatrix} {}^n \begin{bmatrix} E^f \\ E^y \end{bmatrix}^{J+1} - \begin{bmatrix} d \mathbf{s}_2 & g \mathbf{s}_2 \\ b \mathbf{s}_2 & a \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} d^J & g^J \\ \mathbf{b}^J & \mathbf{a}^J \end{bmatrix} {}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^f \\ H^y \end{bmatrix}^{J+1} \quad (5.28.2)$$

El cálculo de las matrices con las conductividades se realiza a través de la Transformada Discreta en Wavelets de dos dimensiones como se indica en la figura 5.19. Entonces, sobre la matriz diagonal $[\mathbf{s}]^{J+1}$, cuyos elementos se obtienen a partir de las expresiones (3-117), se aplica la *DWT* sobre las filas y posteriormente sobre las columnas, obteniendo como resultado las cuatro matrices $[\alpha\sigma]$, $[\beta\sigma]$, $[\gamma\sigma]$ y $[\delta\sigma]$.

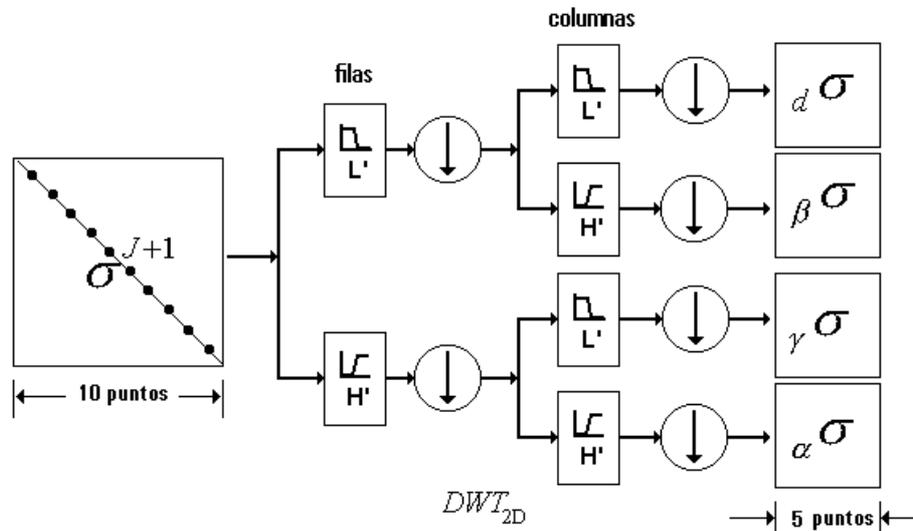
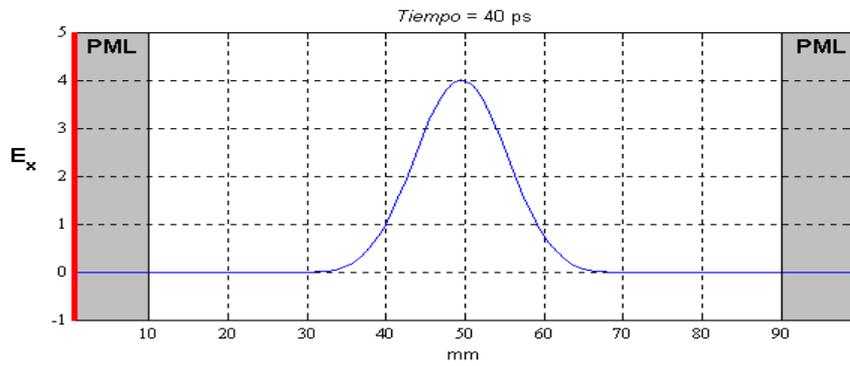
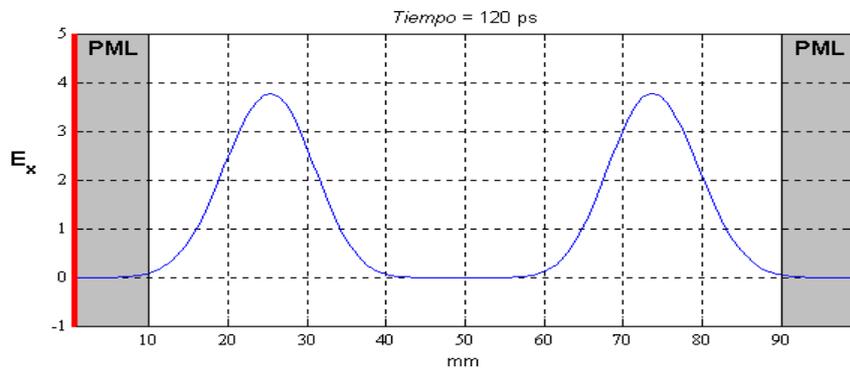


Figura 5.19.: Cálculo de las matrices de las conductividades mediante la Transformada Discreta en Wavelets de dos dimensiones.

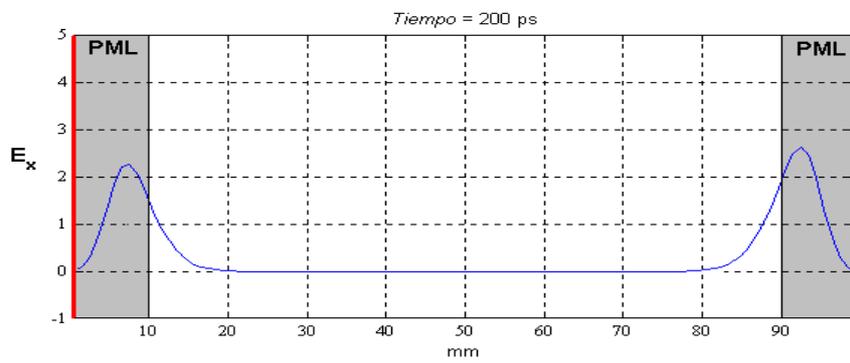
En la figura 5.20 se ha representado el valor del campo eléctrico E_x a lo largo del dominio de simulación y en diferentes instantes de tiempo, utilizando funciones wavelet del tipo D_3 y escogiendo un factor de estabilidad $s = 1$, con lo que se obtiene un paso temporal de $\Delta t = 3,34$ ps.



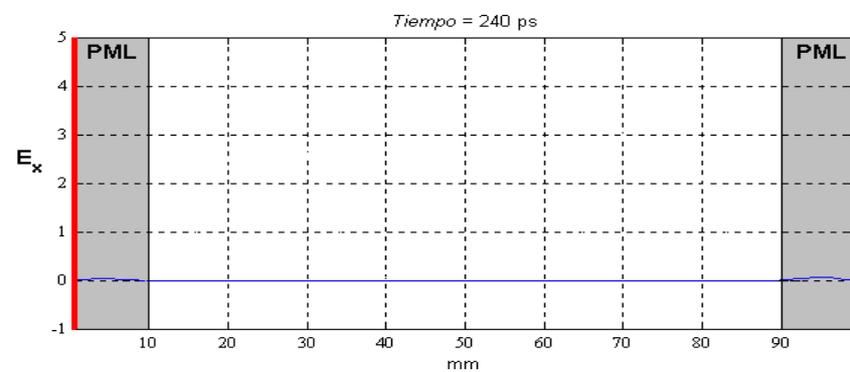
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.20.: Campo eléctrico (en V/m) de un pulso gaussiano propagándose en un medio con condiciones absorbentes PML en los extremos. El pulso inicial (a) se separa en dos pulsos que se propagan en sentidos opuestos (b) penetrando en el medio PML (c) y siendo absorbidos (d).

En esta figura se puede ver cómo la excitación introducida se divide en dos pulsos que se propagan en sentidos opuestos, y cómo se van atenuando a medida que penetran en la zona PML, siendo absorbidos por completo al cabo de unas iteraciones más.

Para verificar la eficacia de las condiciones absorbentes PML vamos a calcular el valor del coeficiente de reflexión S_{11} para diferentes espesores de la zona PML y para diferentes tipos de función wavelet. Las condiciones de la simulación son las mismas que las descritas hasta ahora, es decir, consideramos dos niveles de resolución ($J = 1$) con una discretización espacial base de $\Delta z = 2$ mm, siendo la resolución final, tras la reconstrucción de los campos, de $\Delta z^1 = 1$ mm. Los tipos de función wavelet considerados han sido D_1 , D_2 y D_3 , escogiendo un factor de estabilidad $s = 1$, con lo que se obtiene un paso de tiempo de $\Delta t = 3,34$ ps. La distribución espacial de la excitación corresponde a medio seno cuadrado con una anchura de $|z_2 - z_1| = 20$ mm, mientras que su característica temporal corresponde a una gaussiana de anchura $a = 6\Delta t$ (lo que implica un ancho de banda de aproximadamente 15GHz) y con un retraso de $t_0 = 12\Delta t$.

Los espesores de la zona PML que se han tomado han sido $d = 5\Delta z$, $d = 10\Delta z$ y $d = 15\Delta z$, y el valor del coeficiente de reflexión utilizado en las simulaciones ha sido $R(0) = 10^{-4}$. De esta forma, para un espesor de $d = 5\Delta z$ la conductividad máxima es $\sigma_{\max} = 3,67 (\Omega\text{m})^{-1}$, para $d = 10\Delta z$ es $\sigma_{\max} = 1,83 (\Omega\text{m})^{-1}$ y para $d = 15\Delta z$ se tiene $\sigma_{\max} = 1,22 (\Omega\text{m})^{-1}$.

Para calcular el coeficiente de reflexión S_{11} situamos un punto de extracción a una distancia de $10\Delta z$ de la zona PML (figura 5.21). Necesitamos, además, una señal de referencia que corresponda a una situación de reflexión nula, para lo cual realizamos una primera simulación considerando un dominio lo suficientemente largo como para que no se produzca ninguna reflexión durante el tiempo que dura la simulación. Una vez obtenida esta señal de referencia realizamos las simulaciones utilizando los tres espesores distintos.

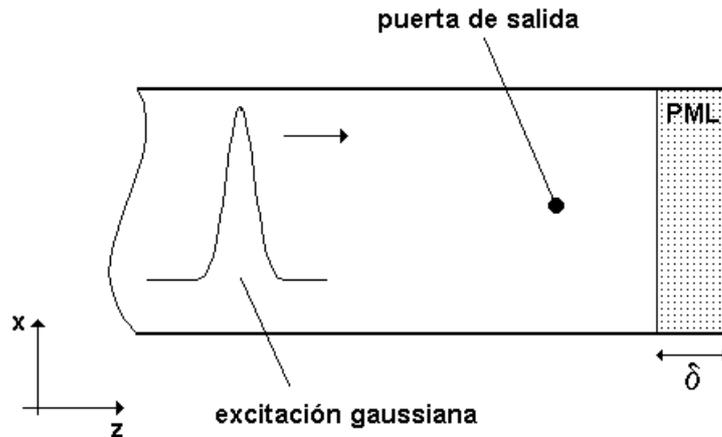


Figura 5.21.: Esquema de la simulación para el cálculo de S_{11} .

En la figura 5.22 se ha representado el valor del parámetro S_{11} en dB en función de la frecuencia para un espesor de $d = 5\Delta z$. Para las funciones D_1 se observa un valor del parámetro S_{11} inferior a -30 dB, mientras que para las wavelets D_2 y D_3 se llega a valores por debajo de -44 dB y -50 dB, respectivamente. La figura 5.23 corresponde a la variación del parámetro S_{11} para un espesor de $d = 10\Delta z$. En ella se pueden apreciar valores por debajo de -55 dB en los tres casos, llegando a unos valores mínimos inferiores a -80 dB. Finalmente, en la figura 5.24 se ha representado el valor del parámetro S_{11} en función de la frecuencia para un espesor de $d = 15\Delta z$. Se observa que el valor de S_{11} se encuentra por debajo de los -70 dB cuando se utilizan las wavelets D_1 , presentando un mínimo sobre los 3 GHz cercano a -100 dB, mientras que para las wavelets D_2 y D_3 el parámetro S_{11} se sitúa por debajo de los -56 dB, alcanzando valores mínimos de -80 dB. Vemos que el comportamiento de la zona PML es mejor cuando se utilizan las wavelets de Haar (D_1) con espesores grandes, mientras que para espesores pequeños este comportamiento es mejor con el resto de wavelets. Además, se observa que incluso para espesores de la zona PML muy pequeños ($5\Delta z$) se obtienen valores muy bajos del factor de reflexión S_{11} .

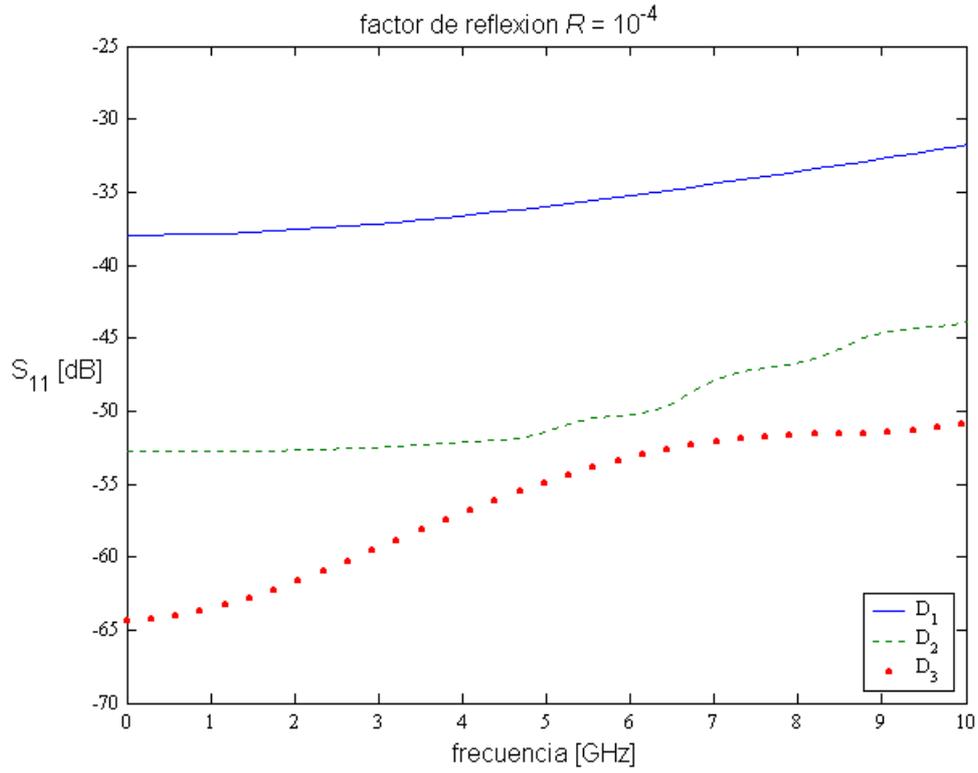


Figura 5.22.: Coeficiente de reflexión S_{11} para un espesor de la zona PML de $d = 5Dz$.

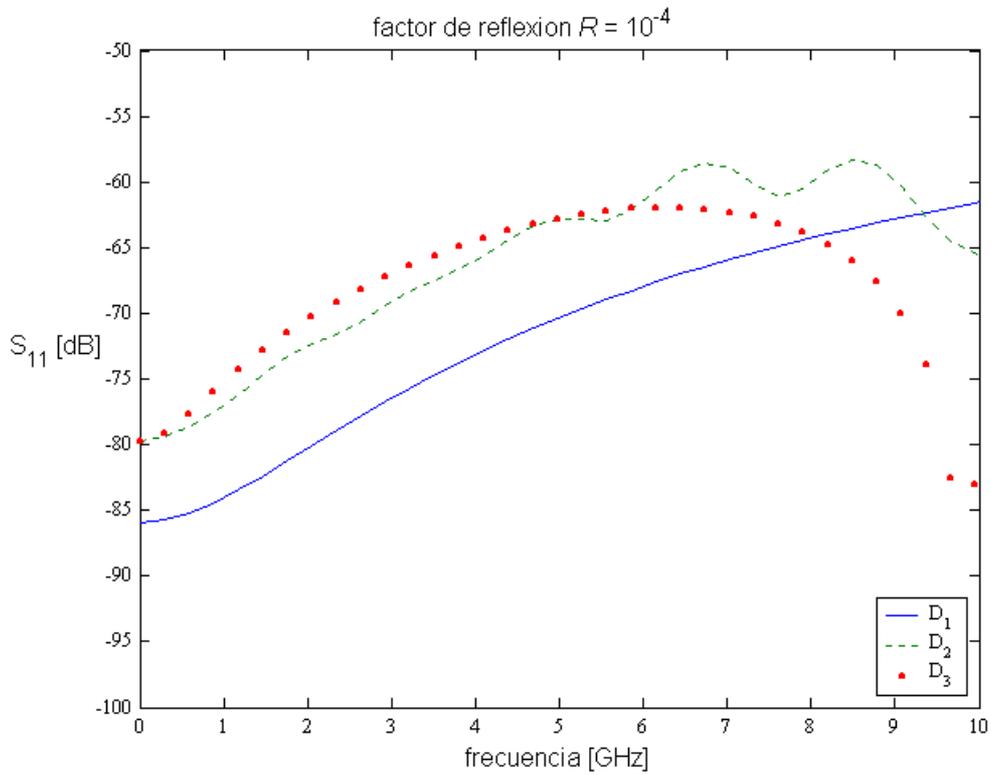


Figura 5.23.: Coeficiente de reflexión S_{11} para un espesor de la zona PML de $d = 10Dz$.

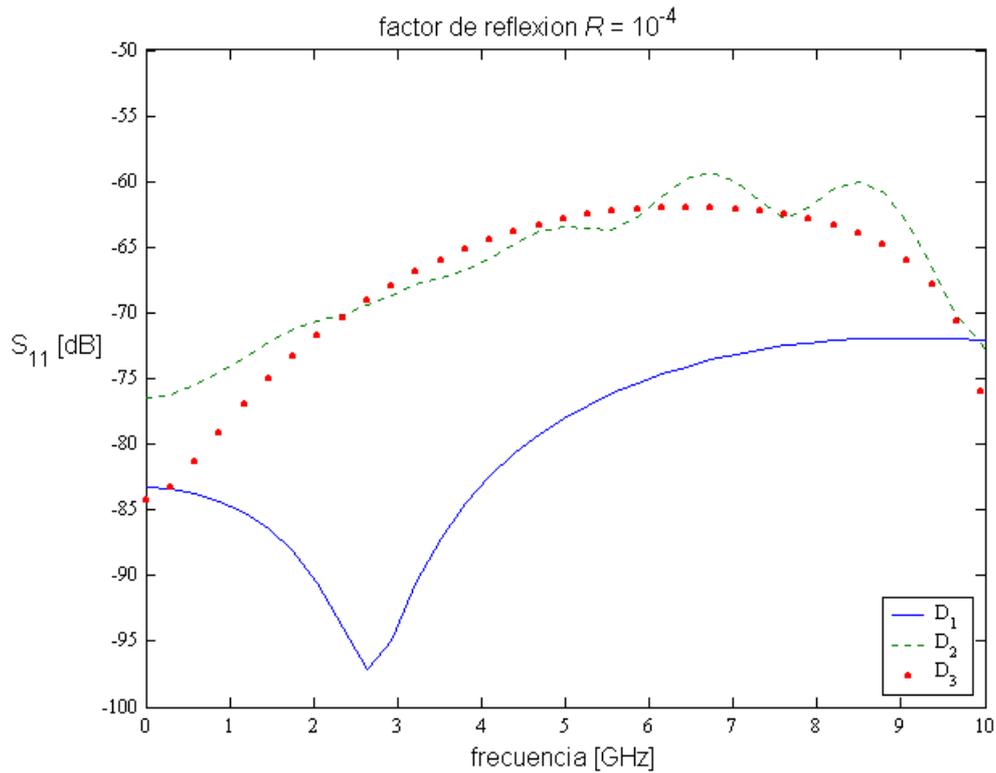


Figura 5.24.: Coeficiente de reflexión S_{11} para un espesor de la zona PML de $d = 15Dz$.

5.3.2.- Resonador unidimensional

Como validación del esquema unidimensional también se han calculado las frecuencias de resonancia de un resonador unidimensional con paredes conductoras (PEC) en los extremos, como el representado en la figura 5.25.

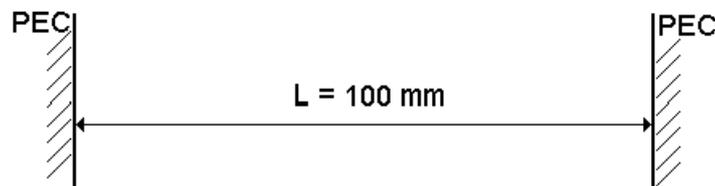


Figura 5.25: Resonador unidimensional.

Para ello, se ha dividido el espacio de simulación en 100 celdas, y se ha considerado un único nivel de resolución, con lo que la discretización espacial resultante es $\Delta z = 1$ mm. El cálculo se ha realizado utilizando tres tipos distintos de

wavelets (D_1 , D_2 y D_3) y tomando como factor de estabilidad $s = 1$, con el cual, los tres esquemas empleados cumplen el criterio de estabilidad. De esta forma, el intervalo temporal obtenido al fijar estos parámetros ha sido de $\Delta t = 3,34$ ps. Como excitación se introduce un pulso gaussiano con una distribución espacial en forma de seno cuadrado, como la expresada en la ecuación (5.12), donde $z_1 = 20\Delta z$ y $z_2 = 40\Delta z$, y con una característica temporal que nos permita extraer información en un amplio rango de frecuencias, que en nuestro caso ha sido una gaussiana con un ancho $a = 6\Delta t$ (lo que implica un ancho de banda de aproximadamente 15 GHz) y un retardo de $12\Delta t$. Se deja evolucionar el sistema durante $N=4096$ iteraciones y se extraen muestras del campo eléctrico en un punto arbitrario, en el cual tenga un valor no nulo para los primeros modos de resonancia durante toda la simulación.

Con los datos almacenados correspondientes a la variación del campo eléctrico durante el tiempo de simulación analizamos su contenido espectral aplicando una Transformada Rápida de Fourier. La resolución en frecuencia obtenida está determinada por los parámetros que hemos fijado en la simulación, siendo igual a $\Delta f = 1/N \cdot \Delta t = 73,18$ MHz. En la figura 5.26 se ha representado el resultado de la respuesta en frecuencia de la señal en un punto tal que los 10 primeros modos den lugar a un campo eléctrico no nulo.

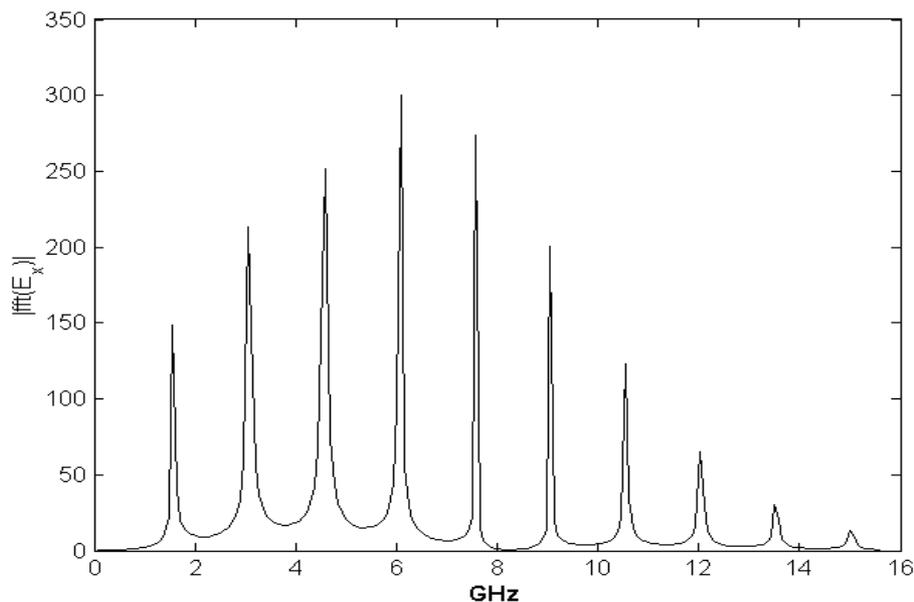


Figura 5.26.: Frecuencias de resonancia expresadas GHz para un resonador unidimensional de 100 mm de longitud.

En la tabla VII se han presentado las frecuencias de resonancia de los primeros modos, calculadas utilizando los tres tipos de funciones wavelet mencionados, y comparando con su valor teórico. Se puede apreciar que los resultados obtenidos han sido los mismos en los tres casos, con un error del 2% para la frecuencia de resonancia del primer modo (que corresponde a una longitud de onda $I = 2L$, con L la longitud del resonador) y un error inferior al 0,5% en los demás.

TABLA VII			
<i>Frecuencias de resonancia en GHz</i>			
<i>($\Delta f \approx 0,07$ GHz)</i>			
<i>D₁</i> <i>error</i>	<i>D₂</i> <i>error</i>	<i>D₃</i> <i>error</i>	Analítico
1,47 -2%	1,47 -2%	1,47 -2%	1,5
3,00 +0%	3,00 +0%	3,00 +0%	3
4,47 -0,7%	4,47 -0,7%	4,47 -0,7	4,5
6,01 +0,17%	6,01 +0,17%	6,01 +0,17%	6
7,48 -0,3%	7,48 -0,3%	7,48 -0,3%	7,5
8,95 -0,5%	8,95 -0,5%	8,95 -0,5%	9
10,48 -0,19%	10,48 -0,19%	10,48 -0,19%	10,5

5.4.- APLICACIÓN DE LA TÉCNICA MRTD 2D

Como validación de la técnica empleada en dos dimensiones vamos a analizar una serie de ejemplos, contrastando los resultados obtenidos con las soluciones analíticas, cuando éstas estén disponibles, y con las soluciones obtenidas mediante otras técnicas numéricas con el fin de evaluar y comparar su precisión. También haremos una comparación entre los resultados que se obtienen utilizando diferentes tipos de función wavelet.

5.4.1.- Frecuencias de corte en una guía WR28

Como primer ejemplo en dos dimensiones vamos a calcular las frecuencias de corte en una guía rectangular WR28, cuyas dimensiones están representadas en la figura 5.27

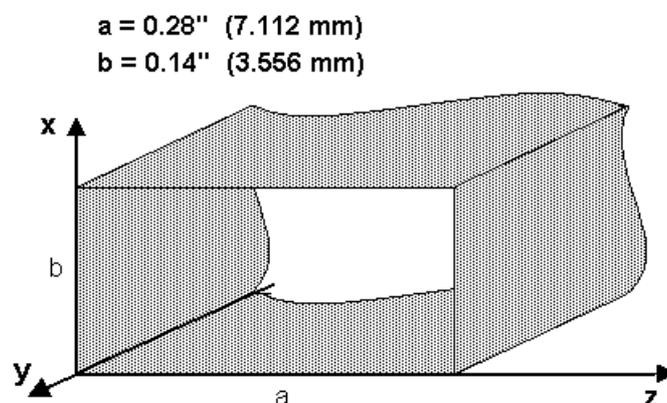


Figura 5.27.: Guía de ondas rectangular WR28.

En muchas ocasiones es de interés conocer los diferentes modos, propagantes o evanescentes, que existen en una guía. Para ello resulta de utilidad conocer el valor de las frecuencias de corte de cada modo con el fin de conocer el número total de modos propagantes a cada frecuencia. Dado que los valores que obtenemos de nuestro algoritmo se corresponden con los valores que adquiere el campo electromagnético en diferentes instantes de tiempo y puntos del espacio, podemos realizar el análisis en

frecuencia sin más que aplicar la Transformada de Fourier a los datos almacenados en un punto del dominio de simulación.

La constante de propagación k_g en una guía de ondas de sección rectangular como la de la figura 5.27 está determinada por la siguiente expresión [13]:

$$k_g^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2) \quad (5-29)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, y ω_c es la frecuencia de corte, cuyo valor depende de la geometría de la guía, y que en este caso viene determinada por la expresión:

$$\omega_c = c\beta \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (5-30)$$

donde m y n son números enteros. Entonces, para calcular las frecuencias de corte podemos tener en cuenta que la sección transversal de una guía de ondas en condiciones de corte ($k_g = 0$) se comporta como un resonador bidimensional cuyas frecuencias de resonancia coinciden con las frecuencias de corte de los distintos modos de la guía. Por lo tanto, el proceso a seguir para determinar estas frecuencias será el mismo que para estudiar las frecuencias de resonancia de cualquier estructura resonante.

Según esto, nuestro dominio de computación será la sección transversal de la estructura que queremos analizar, que en nuestro caso se trata de un rectángulo de dimensiones $a \times b$ (figura 5.27). No hay que analizar por tanto la variación de los campos en la dirección de propagación, a lo largo de la cual se supondrá que la estructura presenta simetría de translación. Bastará realizar una simulación en dos dimensiones para, a través de una DFT, obtener las frecuencias de corte. Vamos a suponer que colocamos los ejes de coordenadas como en la figura 5.16, con lo cual el eje de propagación de la guía de ondas es el eje y . Esto implica que, en situación de corte, no hay dependencia de la señal con respecto a ese eje. En esta situación, las seis ecuaciones escalares de Maxwell se pueden agrupar en dos subsistemas desacoplados de tres

ecuaciones escalares cada uno. Uno de los dos subsistemas de ecuaciones estará formado por las componentes E_x , E_z y H_y y se le denomina "distribución o modo Transversal Eléctrico" a la dirección y (modo **TE**), y el otro subsistema estará formado por las componentes H_x , H_z y E_y y se le denomina "distribución o modo Transversal Magnético" a la dirección y (modo **TM**)¹. Un análisis completo de la estructura hace necesario el estudio de ambos conjuntos de modos, tanto TE como TM (figura 5.28).

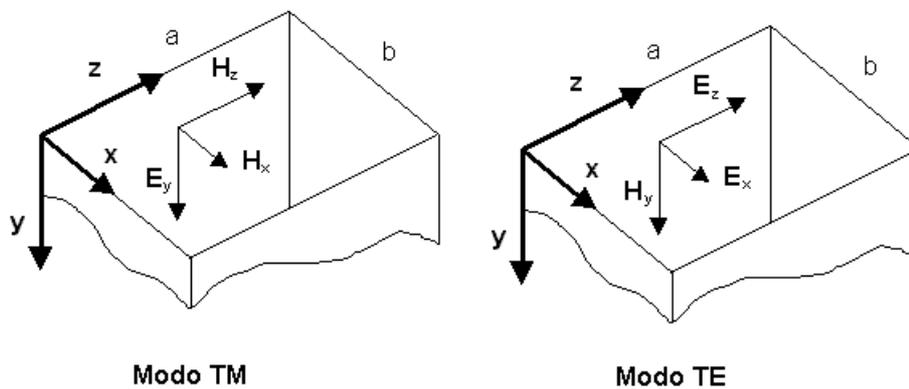


Figura 5.28.: Distribución de las componentes del campo electromagnético según los modos de propagación.

El tipo de modos generados no solamente depende del subsistema de ecuaciones en que se base el algoritmo sino también de la componente del campo excitada y de la posición del elemento de excitación. En nuestro ejemplo de una guía de ondas de sección rectangular homogénea, con paredes conductoras perfectas, es fácil comprobar, por ejemplo, que si se eligen las ecuaciones asociadas a los modos TM y se escoge la componente E_y para excitar la señal con una distribución centrada en el punto medio de su sección transversal ($a/2$, $b/2$), se estarán excitando únicamente los modos con simetría par respecto al centro de la guía (TM_{11} , TM_{31} , TM_{13} , TM_{33} , ... es decir, TM_{mn} con m, n impares), y quedarán excluidos los modos con simetría impar, debido a que dicha componente se anula en esa posición. De la misma manera, otros puntos que podamos elegir para situar la excitación podrían excluir otros modos diferentes. Debemos entonces elegir la posición de la excitación de tal forma que el abanico de

¹ En algunos métodos numéricos a veces se definen los modos TE y TM con respecto al plano de simulación (generalmente en problemas de scattering en dos dimensiones), y entonces su notación es justamente la contraria.

modos excitados sea el más amplio posible. Teniendo en cuenta que las características del método MRTD aconsejan, como se mencionó en el apartado 5.2, introducir la excitación en un intervalo más o menos extenso.

La componente del campo que se va a utilizar como señal excitadora es aquella que sea no nula en el mayor número posible de modos. Por ese motivo tomamos la componente E_y para excitar los modos TM, y la componente H_y para excitar los modos TE. Lógicamente, las componentes del campo electromagnético que se van a muestrear serán esas mismas componentes, es decir, dado que las componentes E_y y H_y están presentes siempre en los modos TM y TE respectivamente, serán éstas las que se muestreen.

Una vez obtenido el registro temporal con los coeficientes correspondientes a los valores del campo en el punto de observación seleccionado, aplicamos una Transformada Discreta de Fourier (*DFT*) para trasladar el resultado al dominio de la frecuencia. Si el desarrollo lo hemos hecho utilizando funciones de escala y de wavelet, previamente debemos reconstruir los campos aplicando la Transformada Inversa en Wavelets (*IDWT*). Es importante recordar las limitaciones inherentes a la discretización de la Transformada de Fourier en lo que se refiere a su resolución en frecuencia Δf , y a la máxima frecuencia resoluble [58]. También hay que tener en cuenta que, puesto que el proceso de determinación de las frecuencias conlleva sucesivas manipulaciones numéricas, no puede descartarse una posible contaminación matemática de los resultados.

Modos TE

En estos términos, para calcular las frecuencias de corte de los modos TE_{mn} en una guía de ondas WR28, vamos a realizar una simulación bidimensional utilizando como dominio la sección transversal de la guía, que consideramos vacía. Discretizamos nuestro dominio de simulación dividiéndolo en 20 celdas de largo por 10 celdas de ancho, con lo que obtenemos un mallado regular con un incremento espacial igual en las dos direcciones del espacio, $\Delta x = \Delta y = \Delta = 0,356$ mm. Vamos a realizar un análisis utilizando cinco tipos de wavelets distintos (D_1 , D_2 , D_3 , D_4 y D_5) y considerando dos

niveles de resolución ($J = 1$), es decir, utilizando funciones de escala y de wavelet de primer orden para desarrollar los campos en cada una de las coordenadas del espacio. Así, una vez reconstruido el valor de los campos mediante la *IDWT*, la resolución espacial resultante será $\Delta^J = \Delta/2 = 0,178$ mm

Para que las simulaciones se puedan realizar en las mismas condiciones con todos los esquemas utilizados, escogemos un factor de estabilidad tal que se garantice la estabilidad para todos ellos. Si elegimos, por ejemplo, $s = 0,8$, se cumple esa condición, como se puede comprobar consultando los valores mostrados en la tabla IV (capítulo 4). De esta forma, el intervalo temporal queda determinado por la siguiente expresión:

$$\Delta t = s \cdot \frac{1}{c \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x/2^J}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z/2^J}\right)^2}} = s \cdot \frac{\Delta/2^J}{c\sqrt{2}} \quad (5-31)$$

siendo en nuestro caso igual a $\Delta t = 0,335$ ps.

Una vez fijados todos los parámetros correspondientes a la estructura de la simulación, queda por determinar la característica espacial y temporal de la excitación. Con el fin de excitar el mayor número de modos posibles utilizaremos como característica temporal una excitación gaussiana sobre la componente H_y del campo magnético, con un ancho $a = 6\Delta t$ (lo que implica un ancho de banda aproximado de 150 GHz) y un retraso $t_0 = 12\Delta t$. Esta excitación es introducida de forma suave dentro del espacio de simulación utilizando una distribución con forma de seno cuadrado en las dos coordenadas, como la expresada en (5-12.2), situada entre las posiciones ($x_1 = 2\Delta$, $z_1 = 2\Delta$), ($x_2 = 6\Delta$, $z_2 = 6\Delta$), es decir, con unas dimensiones de $|x_2 - x_1| = |z_2 - z_1| = 1,422$ mm y una posición no simétrica, para asegurarnos de excitar tanto los modos impares, como lo pares. Los coeficientes de escala y de wavelet de la excitación se calculan mediante la *DWT* de la forma indicada en la figura 5.29.

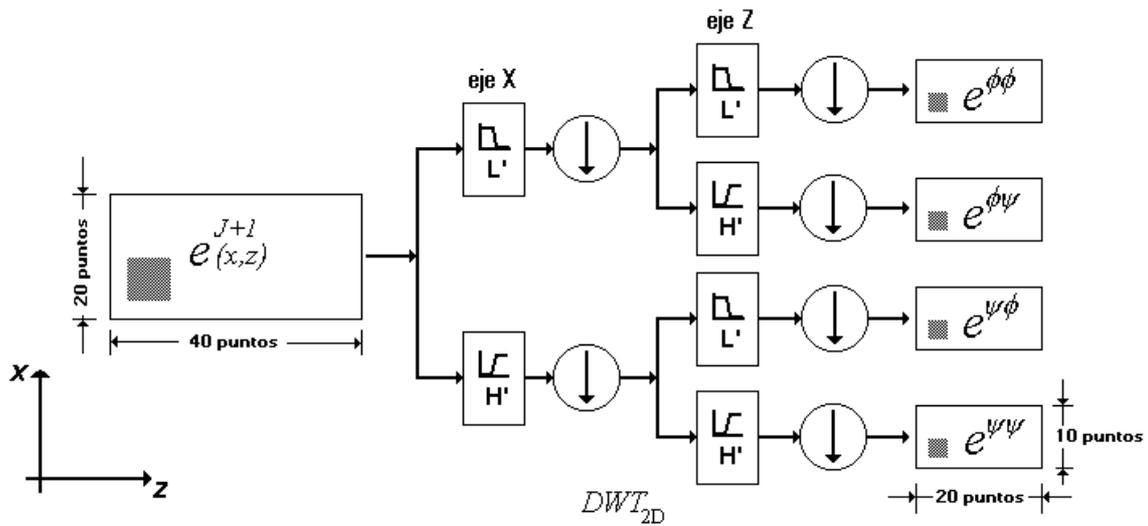


Figura 5.29.: Cálculo de los coeficientes de escala y de wavelet de la excitación mediante la Transformada Discreta en Wavelets de dos dimensiones.

Dejaremos evolucionar el sistema durante $N = 4096$ iteraciones, y una vez obtenida la secuencia temporal correspondiente al valor de la componente H_y en un punto de la estructura donde la componente muestreada tiene un valor no nulo para el mayor número de modos de resonancia, aplicamos una Transformada Discreta de Fourier para extraer su contenido en frecuencia. Las frecuencias de corte buscadas para los modos TM se corresponderán con las frecuencias de resonancia obtenidas de esta forma (frecuencias de resonancia transversal).

Los resultados se han obtenido con una resolución en frecuencia de $\Delta f = 1/N\Delta t = 0,728$ GHz. En la figura 5.30 está representada la respuesta en frecuencia de la señal analizada en un punto arbitrario donde se pueden observar las frecuencias de corte para los primeros modos TE_{mn} .

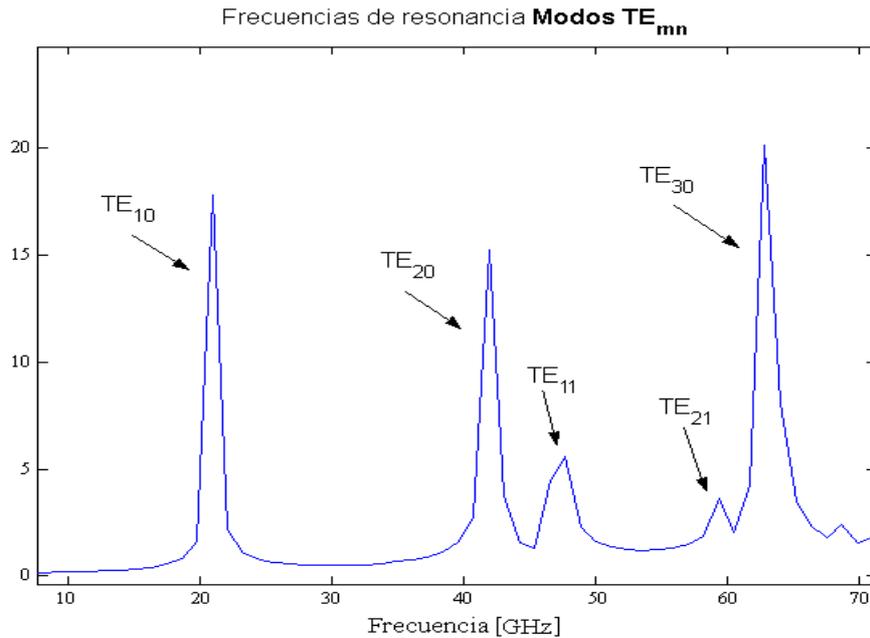


Figura 5.30.: *Respuesta en frecuencia de la señal analizada utilizando funciones wavelet D_2 , donde se pueden observar las frecuencias de corte para los primeros modos TE en una guía de ondas rectangular WR28.*

En la tabla VIII se ha representado las primeras frecuencias de corte de la guía de ondas WR28, calculadas utilizando cinco wavelets de Daubechies diferentes, y comparadas con una simulación hecha utilizando un simulador TLM comercial (MEFiSTo[©]) y los valores analíticos de las mismas. En ella se puede apreciar que los resultados obtenidos utilizando wavelets D_M , con M^{32} , presentan un error respecto del valor analítico por debajo del 0,15% (excepto para el modo TE_{11} , que presentan un error del 0,3%), mientras que para las wavelets D_I (wavelets de Haar) el error se sitúa por encima del 1%, llegando hasta el 3% para el modo TE_{30} . Estos resultados reflejan las características de dispersión estudiadas en el capítulo 4, donde se vio cómo la dispersión de los esquemas que utilizaban wavelets D_I aumentaba considerablemente con la frecuencia, siendo esta variación mucho menos acusada utilizando el resto de las wavelets D_M , con M^{32} , y cuyo error de dispersión era, además, mucho menor. En los valores de la tabla se observa también una concordancia con los resultados obtenidos mediante el método TLM, siendo su error respecto del valor analítico del orden del 0,6% (excepto para el modo TE_{21} , que presenta un error del 0,19%) y que es inferior al obtenido con las wavelets D_I , pero mayor respecto al obtenido con las funciones wavelet D_M , con M^{32} .

TABLA VIII							
<i>Frecuencias de corte en GHz para los modos TE en una guía WR28</i> ($\Delta f \approx 0,7$ GHz)							
	D_1 f_c error	D_2 f_c error	D_3 f_c error	D_4 f_c error	D_5 f_c error	TLM f_c error	<i>Analítico</i>
TE ₁₀	21,1 +0,11%	21,1 +0,11%	21,1 +0,11%	21,1 +0,11%	21,1 +0,11%	20,9 -0,8%	21,077
TE ₂₀ / TE ₀₁	41,5 -1,5%	42,2 +0,11%	42,2 +0,11%	42,2 +0,11%	42,2 +0,11%	41,9 -0,6%	42,153
TE ₁₁	46,6 -1,1%	47,3 +0,3%	47,3 +0,3%	47,3 +0,3%	47,3 +0,3%	46,8 -0,7%	47,129
TE ₂₁	58,9 -1,2%	59,7 +0,15%	59,7 +0,15%	59,7 +0,15%	59,7 +0,15%	59,5 -0,19%	59,613
TE ₃₀	61,1 -3%	63,3 +0,11%	63,3 +0,11%	63,3 +0,11%	63,3 +0,11%	62,9 -0,5%	63,230

Modos TM

Para calcular las frecuencias de corte correspondientes a los modos TM_{mn} en una guía de ondas WR28, se ha realizado una simulación con las mismas características que la anterior, utilizando también cinco funciones wavelet diferentes. Se ha considerado el mismo dominio de simulación, correspondiente a la sección transversal de la guía de ondas, y se han utilizado dos niveles de resolución ($J = 1$) para desarrollar los campos en las dos coordenadas espaciales. Dividiendo el dominio de simulación en 20 celdas de largo por 10 celdas de ancho, se obtiene una discretización espacial en el nivel base de $\Delta x = \Delta y = \Delta = 0,356$ mm, por lo que la resolución espacial resultante tras la reconstrucción de los campos será $\Delta^J = \Delta/2 = 0,178$ mm. El factor de estabilidad

escogido con el fin de garantizar la estabilidad para todos los esquemas utilizados ha sido también $s = 0,8$ con lo que el paso temporal dado por (5-31) es $\Delta t = 0,335$ ps.

La excitación en este caso se realiza sobre la componente del campo eléctrico E_y , presente en todos los modos TM. La característica temporal de la excitación corresponde a un pulso gaussiano con un ancho $a = 6\Delta t$ (lo que implica un ancho de banda de 150 GHz) y un retardo $t_0 = 12\Delta t$. Esta excitación se introduce dentro del espacio de simulación de forma suave utilizando una distribución con forma de seno cuadrado en las dos coordenadas, en la misma posición y con las mismas dimensiones que en el ejemplo anterior, es decir, $|x_2 - x_1| = |z_2 - z_1| = 1,422$ mm. Los coeficientes de escala y de wavelet de la excitación también se calculan mediante la *DWT* de la forma indicada en la figura 5.29.

Se deja evolucionar el algoritmo durante $N = 4096$ iteraciones, y una vez obtenida la secuencia temporal correspondiente al valor de la componente E_y en un punto de la estructura, aplicamos una Transformada Discreta de Fourier para extraer su contenido en frecuencia. Los resultados se han obtenido con una resolución en frecuencia de $\Delta f = 1/N\Delta t = 0,728$ GHz.

En la figura 5.31 se ha representado la respuesta en frecuencia de la señal analizada en el mismo punto que se utilizó anteriormente, y utilizando wavelets D_3 (para las demás funciones la respuesta obtenida es similar), donde los picos corresponden a las frecuencias de corte de la guía.

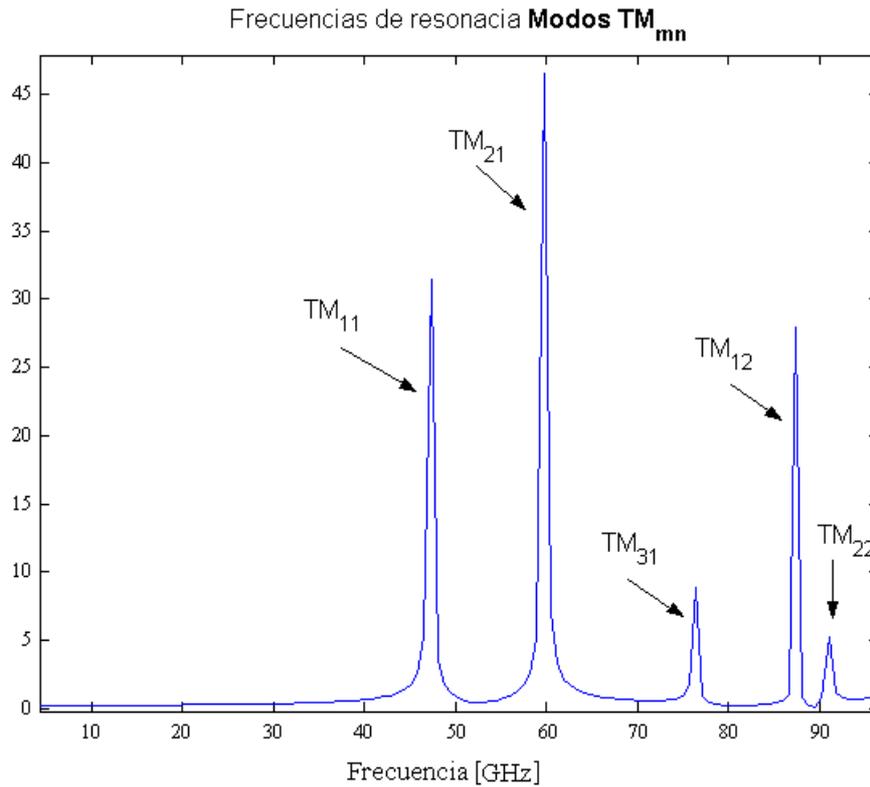


Figura 5.31.: *Respuesta en frecuencia de la señal analizada utilizando funciones wavelet D_3 , donde se pueden observar las frecuencias de corte correspondientes a los primeros modos TM de la guía de ondas WR28.*

En la tabla VIII están las primeras frecuencias de corte, calculadas utilizando las cinco funciones wavelet de Daubechies, y comparadas con una simulación hecha utilizando un simulador TLM y con los valores teóricos de esas mismas frecuencias. Al igual que en el ejemplo anterior, se puede apreciar una diferencia entre los resultados obtenidos con las wavelets D_1 y el resto de funciones wavelet. Los valores obtenidos con las wavelets D_1 presentan un mayor error respecto al valor teórico, y que además aumenta con la frecuencia, llegando hasta un error del 5% para el modo TM_{22} . Por el contrario, con las funciones wavelet D_M , con M^32 , se obtienen valores mucho más cercanos al valor teórico, con un error que se mantiene por debajo del 0,5% para todos los modos calculados. También se observa que el error relativo obtenido con el método TLM es mayor que el obtenido utilizando estas funciones wavelet (excepto para el modo TM_{31}), pero no así al compararlo con las wavelets D_1 , donde el error del TLM es claramente inferior.

TABLA IX							
<i>Frecuencias de corte en GHz para los modos TM en una guía WR28</i> ($\Delta f \approx 0,7$ GHz)							
	D_1 f_c error	D_2 f_c error	D_3 f_c error	D_4 f_c error	D_5 f_c error	TLM f_c error	Análítico
TM ₁₁	46,6 -1,1%	47,3 +0,4%	47,3 +0,4%	47,3 +0,4%	47,3 +0,4%	46,9 -0,5%	47,129
TM ₂₁	58,9 -1,2%	59,7 +0,15%	59,7 +0,15%	59,7 +0,15%	59,7 +0,15%	59,4 -0,4%	59,613
TM ₃₁	74,2 -2%	76,4 +0,5%	76,4 +0,5%	76,4 +0,5%	76,4 +0,5%	75,8 -0,3%	75,992
TM ₁₂	82,2 -5%	86,6 -0,3%	87,3 +0,5%	87,3 +0,5%	87,3 +0,5%	86,3 -0,7%	86,901
TM ₂₂	89,5 -5%	94,6 +0,4%	94,6 +0,4%	94,6 +0,4%	94,6 +0,4%	93,5 -0,8%	94,257

5.4.2.- Propagación de un modo TE_{10} en una guía WR28

Como siguiente ejemplo, se ha analizado la propagación de un modo TE_{10} a lo largo de una guía rectangular WR28 como la representada en la figura 5.32.

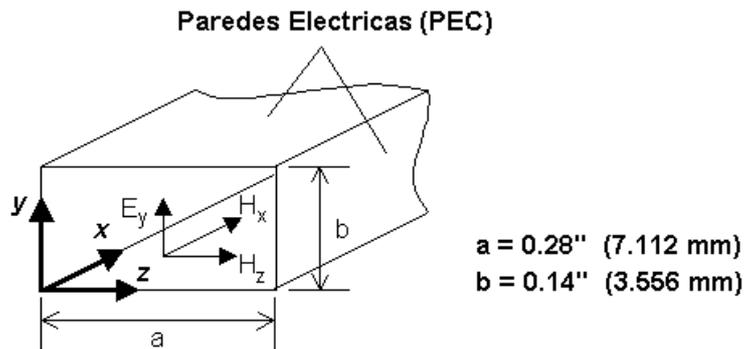


Figura 5.32.: Propagación de un modo TE_{10} en una guía de ondas WR28.

En un modo TE_{10} , los campos no varían a lo largo de uno de los ejes transversales, (el eje y en este caso), y por lo tanto se puede analizar mediante una simulación en dos dimensiones (x y z). Entonces, las componentes del campo electromagnético son E_y , H_x y H_z , luego es un modo TE respecto al plano de la simulación. La discretización del dominio de simulación se ha realizado dividiéndolo en 100 celdas en la dirección del eje x y 20 celdas en la dirección del eje z , y considerando un mallado regular, es decir, escogiendo un incremento espacial igual en las dos direcciones $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,356$ mm. Para el desarrollo de los campos se han empleado funciones de escala del tipo D_2 , escogiendo un factor de estabilidad $s = 1$, con lo que el intervalo de tiempo dado por la expresión (5-31) ha sido $\Delta t = 0,839$ ps. Las paredes laterales son conductoras (PEC), como corresponde al propio problema, mientras que en las paredes terminales colocamos una zona PML con el fin de simular la propagación a lo largo de una guía de longitud indefinida. La zona PML considerada tiene un espesor de $10\Delta x$, utilizando para modelar su conductividad, un perfil parabólico de la forma expresada en la ecuación (5-24), y escogiendo un factor de reflexión de 10^{-4} .

Dado que la frecuencia de corte del modo TE_{10} es aproximadamente 21 GHz y el siguiente modo TE_{20} tiene ya una frecuencia de corte de 42 GHz, introduciendo una señal sinusoidal de 30 GHz, nos aseguramos de que sólo se propague el modo TE_{10} . Con este fin, se ha excitado la componente y del campo eléctrico (E_y) con una característica temporal correspondiente a una señal sinusoidal a dicha frecuencia, y con una distribución espacial de medio seno en la dirección transversal z , por ser ésta la distribución de campos en el modo TE_{10} , como se muestra en la figura 5.33. En la dirección longitudinal x se utiliza una distribución en forma de seno cuadrado para introducirla de forma suave dentro de la estructura. Situamos esta excitación en la posición $x_1 = 30\Delta$ y con un ancho de $|x_2 - x_1| = 3$ mm. De este modo, aparecerán dos ondas propagándose en sentidos contrarios a lo largo de la guía desde la posición de la fuente.

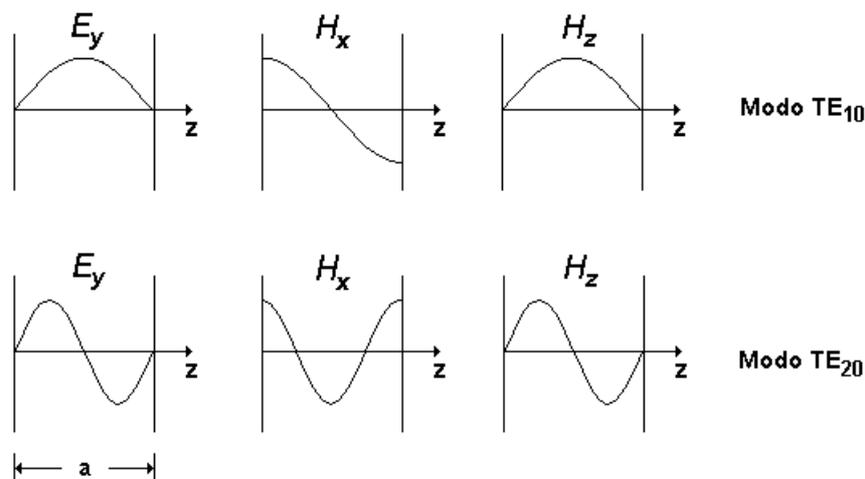


Figura 5.33.: Variación de las componentes del campo en la sección transversal z para los modos TE_{10} y TE_{20} en una guía de ondas rectangular. No hay dependencia respecto de la coordenada vertical y . Las ondas se propagan en la dirección perpendicular a la página.

En las figuras 5.34 se ha representado el valor de la componente E_y del campo eléctrico a lo largo del dominio de la simulación en diferentes instantes de tiempo, donde se puede apreciar claramente el patrón transversal de medio seno mencionado anteriormente, y la variación sinusoidal a lo largo de la guía.

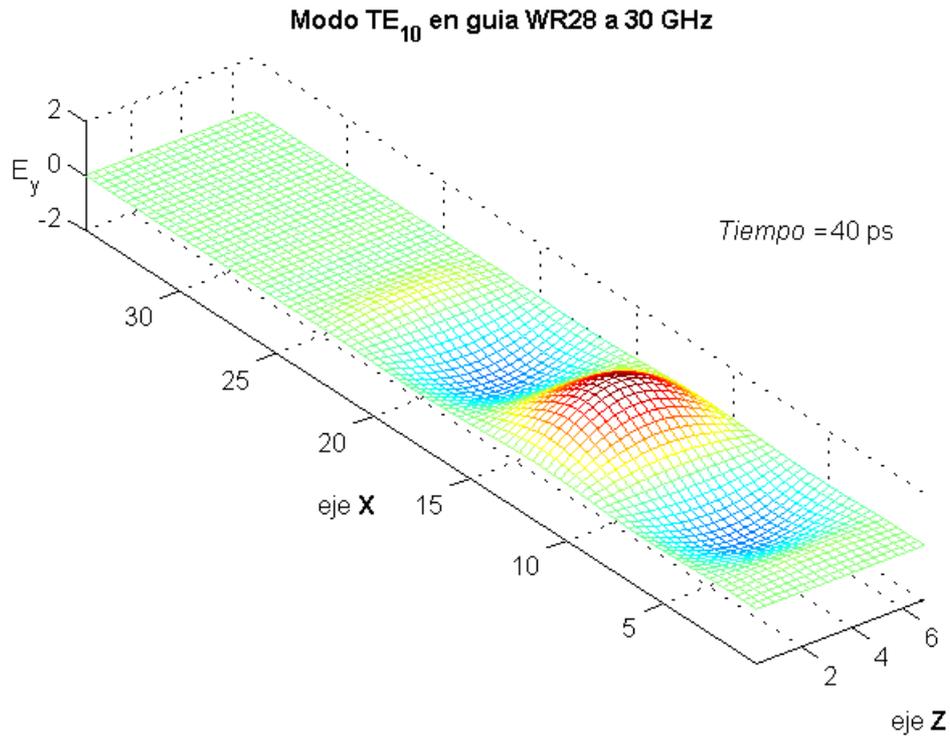


Figura 5.34.a: Simulación de la propagación de un modo TE_{10} en una guía de ondas WR28 utilizando funciones wavelet D_2 .

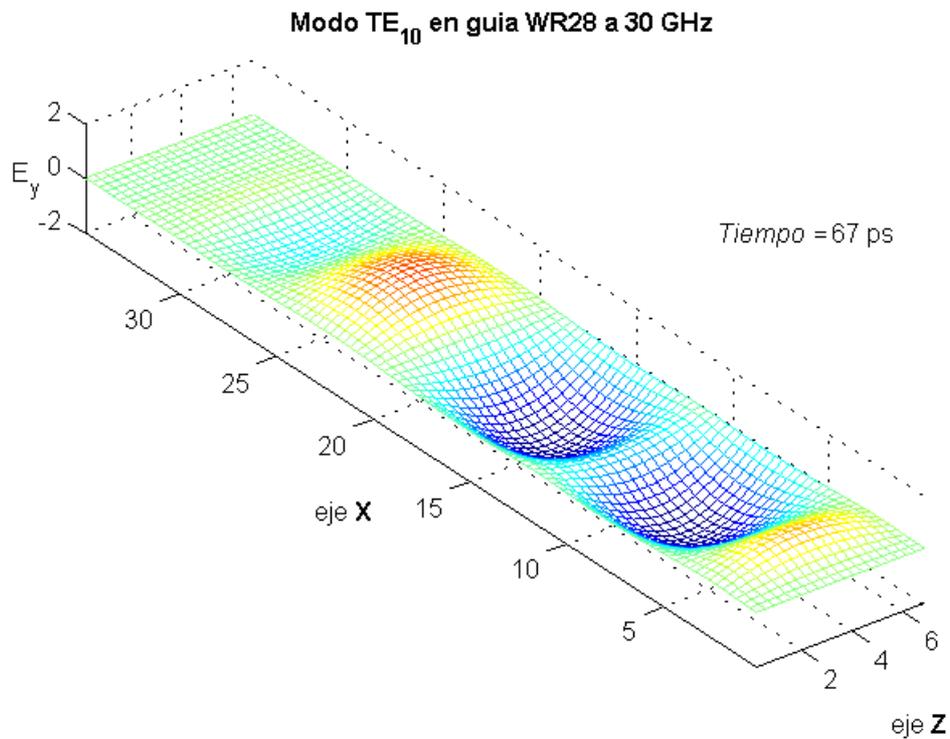


Figura 5.34.b: Simulación de la propagación de un modo TE_{10} en una guía de ondas WR28 utilizando funciones wavelet D_2 .

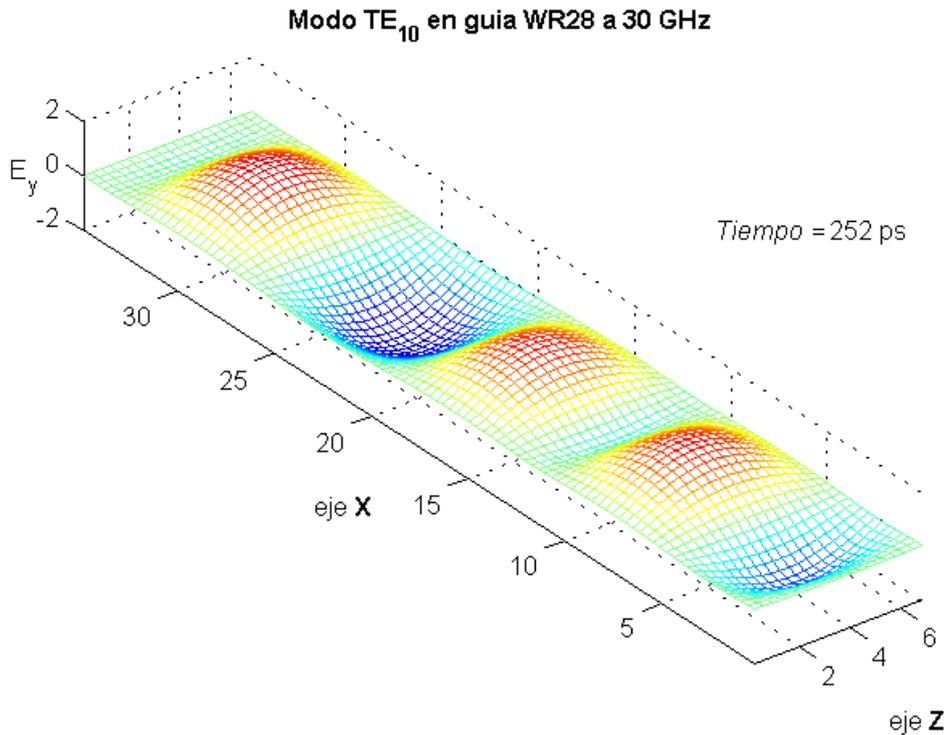


Figura 5.34.c: Simulación de la propagación de un modo TE_{10} en una guía de ondas WR28 utilizando funciones wavelet D_2

5.4.3.- Parámetros de *scattering* de una unión T en plano H.

Vamos a examinar el *scattering* de un modo TE_{10} en una unión T en el plano H. Este es uno de los dispositivos utilizados en los circuitos de microondas como divisor de potencia, y está formado por la unión de guías de onda con tres puertas independientes como muestra la figura 3.35. Cuando el eje del brazo lateral es paralelo al campo \mathbf{E} del modo propagante se denomina “T en el plano E” (figura 3.35.a), mientras que si dicho eje es paralelo al campo \mathbf{H} recibe el nombre de “T en el plano H” (figura 3.35.b). En nuestro ejemplo vamos a considerar una unión T en el plano H de una guía de ondas rectangular WR28. Una manera efectiva de caracterizar este tipo de dispositivos consiste en evaluar sus parámetros de *scattering*, los cuales muestran la relación entre las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas.

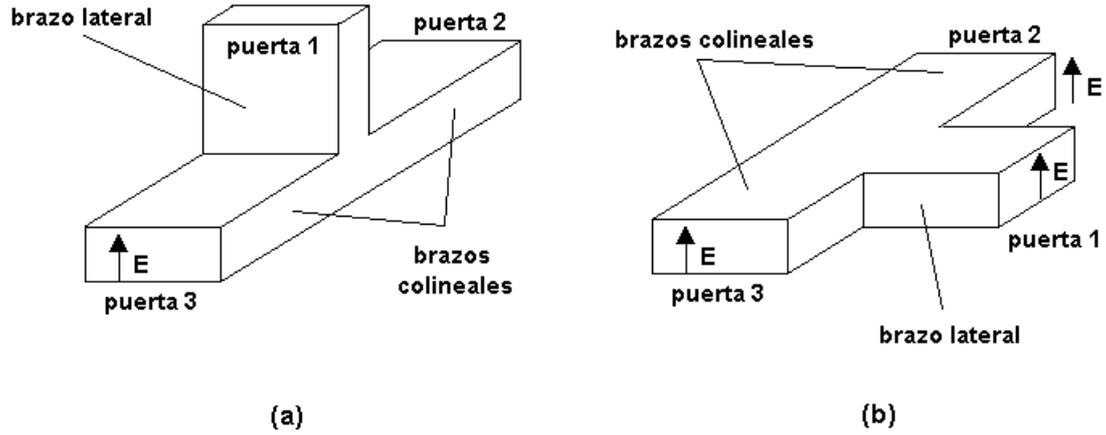


Figura 3.35.: Unión T en el plano E (a), y unión T en el plano H (b).

Para un dispositivo lineal, y en virtud de la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, existe una relación lineal entre las amplitudes de onda incidentes, reflejadas y transmitidas en cada una de sus puertas. La matriz que da cuenta de esta relación se conoce como matriz de *scattering* y los elementos de ésta como parámetros de *scattering*. Consideremos un dispositivo de estas características con N puertas y denotemos por V_n^+ a la tensión equivalente (magnitud compleja, con módulo y fase) de la onda incidente en la puerta n , y V_n^- a la tensión equivalente de la onda que sale por la puerta n . La matriz de *scattering* se define en relación a estos voltajes como [62]:

$$\begin{pmatrix} V_1^- \\ V_2^- \\ \vdots \\ V_N^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ \vdots \\ V_N^+ \end{pmatrix} \quad (5-32)$$

Con el fin de conseguir que la matriz de *scattering* de un dispositivo recíproco sea simétrica, los parámetros S_{ij} se calculan como:

$$S_{ij}(\mathbf{w}) = \frac{V_i^-(\mathbf{w})}{V_j^+(\mathbf{w})} \sqrt{\frac{Z_{0,j}(\mathbf{w})}{Z_{0,i}(\mathbf{w})}} \Big|_{V_k^+=0, \text{ para } k \neq j} \quad (5-33)$$

donde $Z_{0,n}$ es la impedancia característica de la puerta n . Para un modo TE en una guía de ondas rectangular esta impedancia característica es [62]:

$$Z_0 = \frac{k_0}{k_g} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}}} \quad (5-34)$$

donde k_g es la constante de propagación en la guía, dada en la expresión (5-29), y k_0 es la constante de propagación en el medio libre caracterizado por \mathbf{e} y \mathbf{m}

Los parámetros de *scattering* S_{ij} son función de la frecuencia y además dependen de los planos en los que se evalúen las amplitudes complejas V_i^\pm . Para obtener estos parámetros frecuenciales a partir de las secuencias temporales suministradas por nuestro algoritmo se deben considerar dos aspectos. En primer lugar hay que definir las tensiones equivalentes V_i en función de las componentes del campo electromagnético. Estas tensiones se definen para cada modo particular de la guía y se consideran proporcionales a la amplitud del campo eléctrico transversal [62]:

$$V_i = C_i \cdot E_{0,i} \quad (5-35)$$

donde $E_{0,i}$ es la amplitud máxima del campo eléctrico en la puerta i , y C_i es la constante de proporcionalidad particular para la puerta i . Para el modo TE_{10} en una guía de ondas rectangular esta constante de proporcionalidad es:

$$C = \sqrt{\frac{a \cdot b}{2}} \quad (5-36)$$

En segundo lugar, hay que tener en cuenta que necesitamos realizar dos simulaciones. La primera simulación se realiza sobre una guía de ondas de longitud indefinida, sin la unión T, lo que permite conocer la tensión equivalente de la onda incidente ($v_{\text{incidente}}$), ya que en este caso no hay onda reflejada. La segunda simulación se realiza sobre la estructura que queremos caracterizar, lo que nos permite obtener el voltaje total de cada puerta y a partir de éste, el voltaje reflejado ($v_{\text{reflejado}} = v_{\text{total}} - v_{\text{incidente}}$), y el voltaje transmitido ($v_{\text{transmitido}}$).

Según esto, para calcular los parámetros de *scattering* correspondientes al modo TE₁₀ en una guía rectangular WR28 (el esquema de la estructura de simulación se muestra en la figura 5.36), el procedimiento sería el siguiente:

- En primer lugar se debe introducir una excitación en el circuito, cuyo espectro en frecuencia cubra el rango de interés, que en el caso es el rango en que se propaga sólo el modo TE₁₀, esto es, entre 26 GHz y 40 GHz.
- Realizar dos simulaciones, la primera sobre una guía de longitud indefinida sin “T”, con el fin de obtener la secuencia temporal correspondiente a la tensión incidente en la puerta 1 $v_i(n\Delta t)$, y la segunda sobre la estructura completa para obtener la tensión reflejada en la puerta 1 $v_r(n\Delta t) = v_{total}(n\Delta t) - v_i(n\Delta t)$, y a la tensión transmitida en la puerta 2 $v_t(n\Delta t)$.
- Calcular la DFT de dichas secuencias para obtener las secuencias $V_i(n\Delta f)$, $V_r(n\Delta f)$, y $V_t(n\Delta f)$, donde $\Delta f = 1/N\Delta t$.
- Dado que las dos puertas tienen la misma geometría (guía WR28) y estamos considerando un único modo (TE₁₀), tanto la impedancia característica (5-34) como la constante de proporcionalidad (5-36) de ambas puertas serán las mismas. De esta forma, tomando como tensión equivalente el valor del campo eléctrico en el centro de la guía, podemos obtener los parámetros de *scattering* como:

$$S_{11}(n\Delta f) = \frac{V_r(n\Delta f)}{V_i(n\Delta f)} \quad (5-37.1)$$

$$S_{21}(n\Delta f) = \frac{V_t(n\Delta f)}{V_i(n\Delta f)} \quad (5-37.2)$$

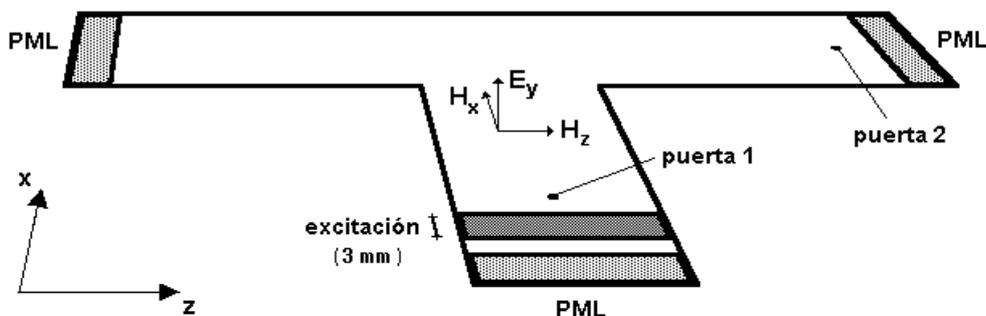


Figura 5.36.: Situación de las puertas de entrada y de salida para caracterizar una unión T en el plano H de una guía rectangular WR28.

La discretización de nuestro dominio de simulación se realiza dividiendo cada uno de los brazos de la unión-T en 20 celdas de ancho por 40 celdas de largo, con un incremento espacial $\Delta x = \Delta z = \Delta = 0,356$ mm. Consideramos el interior de la guía vacío ($\epsilon_r = 1$, $\sigma = 0$). Vamos a realizar el análisis utilizando tres tipos de función wavelet (D_1 , D_2 y D_3) con un único nivel de resolución, y escogiendo un factor de estabilidad $s = 1$. Con estos datos el incremento temporal queda determinado y su valor es $\Delta t = 0,839$ ps. Colocamos condiciones absorbentes PML en los extremos de la unión-T, para evitar que las ondas reflejadas y transmitidas vuelvan a penetrar en el medio, y perturben los resultados, considerando que las zonas PML tienen un espesor de 10 celdas (10Δ), y escogiendo un factor de reflexión de 10^{-4} .

La excitación que debemos introducir en la estructura debe tener las características espacial y temporal adecuadas para dar lugar a la propagación de un modo TE_{10} dentro del rango de frecuencias de interés. Para ello excitamos la componente E_y con una distribución espacial con forma de medio seno en la sección transversal z , como corresponde al modo TE_{10} (figura 5.33), y de seno cuadrado, con un ancho de $|x_2 - x_1| = 3$ mm a lo largo del eje x , con el fin de introducir la excitación de forma suave en el espacio. La característica temporal corresponde a una función gaussiana modulada a la frecuencia central de interés, tal como se indica en la expresión (5-3.1). Vamos a tomar una frecuencia central de 30 GHz con un ancho de banda aproximado de 4 GHz, para lo cual se utiliza una gaussiana con una anchura de $a = 100\Delta t$ y un retraso de $t_0 = 200\Delta t$.

Realizamos una primera simulación en la guía de ondas sin la unión "T", dejando evolucionar el algoritmo durante 2048 iteraciones, con el fin de obtener la señal incidente o de referencia en la puerta 1 $v_i(n\Delta t)$, tomando las muestras del campo eléctrico E_y en el centro de la guía (figura 5.37). Una transformada de Fourier de esta señal nos proporciona el contenido espectral de la onda incidente $V_i(n\Delta f)$ con una resolución en frecuencia de $\Delta f = 0,582$ GHz (figura 5.38).

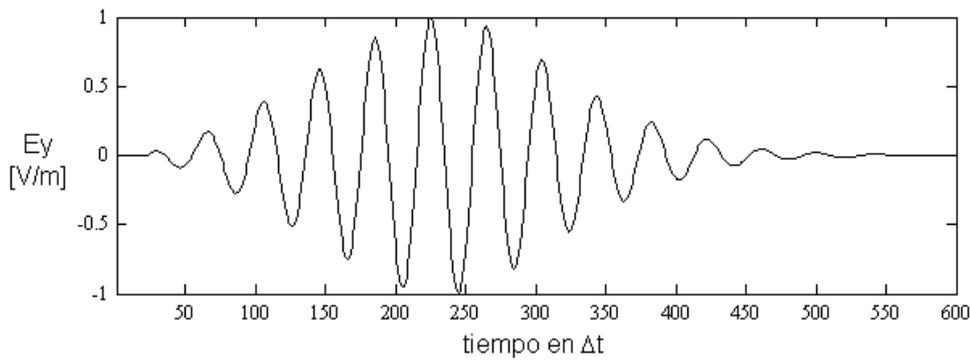


Figura 5.37.: Señal de referencia (V/m)

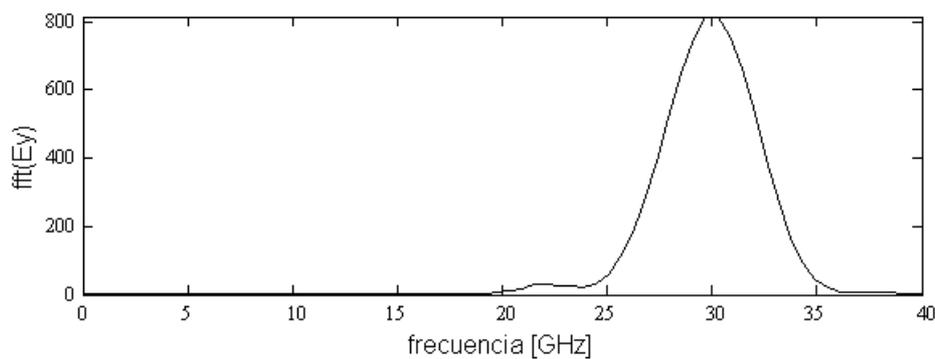


Figura 5.38.: Módulo de la DFT de la señal de referencia.

Una vez obtenida la onda incidente o señal de referencia, realizamos otra simulación, considerando toda la estructura y tomando muestras de la componente E_y del campo eléctrico en la puerta 1 y en la puerta 2. En esta simulación obtenemos la evolución temporal del voltaje total en la puerta 1 y del voltaje transmitido $v_t(n\Delta t)$ en la puerta 2. El voltaje reflejado en la puerta 1 se obtiene al restar del voltaje total el voltaje incidente de la primera simulación, $v_r(n\Delta t) = v_{total}(n\Delta t) - v_i(n\Delta t)$. Aplicando una transformada discreta de Fourier obtenemos el contenido espectral de ambas señales, $V_r(n\Delta f)$ y $V_t(n\Delta f)$.

Una vez calculadas las secuencias correspondientes al contenido espectral de las señales incidente, reflejada y transmitida, $V_i(n\Delta f)$, $V_r(n\Delta f)$, y $V_t(n\Delta f)$ respectivamente, podemos obtener los parámetros de scattering S_{ij} de la forma indicada en (5-37). El resultado obtenido utilizando los diferentes tipos de función wavelet lo tenemos representado en las figuras 5.39.a-c, en la que se aprecia la variación del módulo y la fase de los parámetros S_{11} y S_{21} en función de la frecuencia dentro del rango de interés.

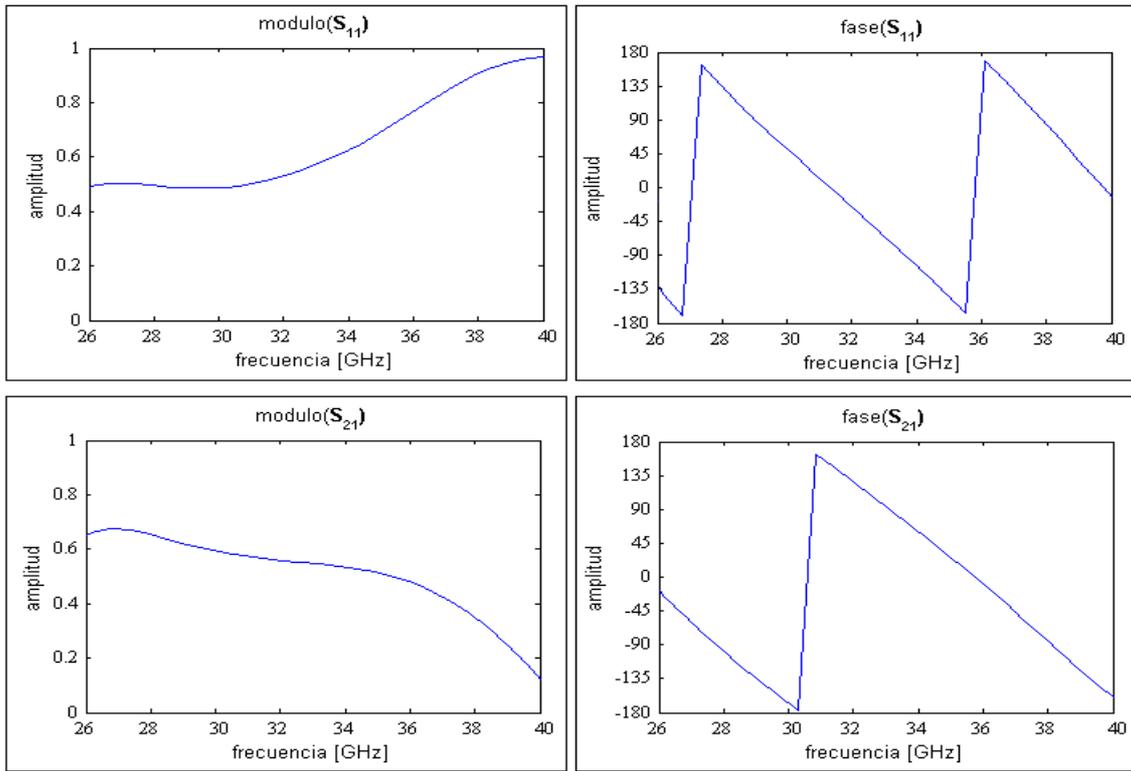


Figura 5.39.a: *Parámetros de scattering S_{11} y S_{21} obtenidos utilizando funciones wavelet D_1 .*

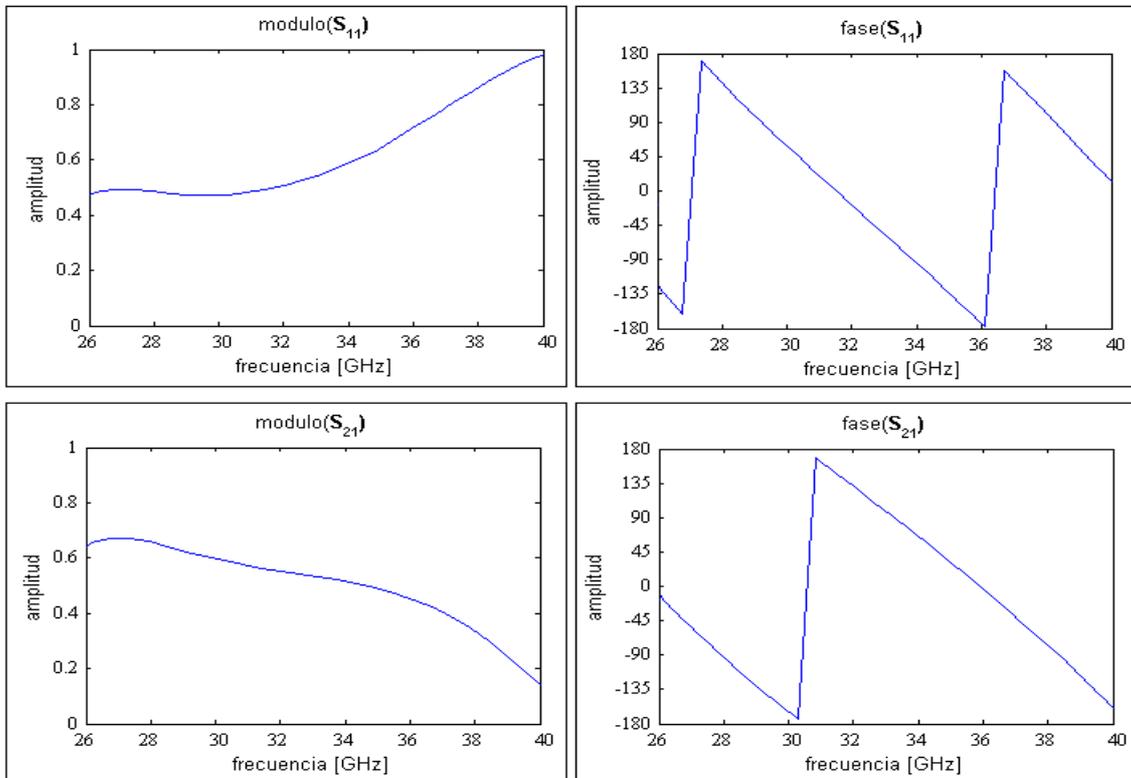


Figura 5.39.b: *Parámetros de scattering S_{11} y S_{21} obtenidos utilizando funciones wavelet D_2 .*

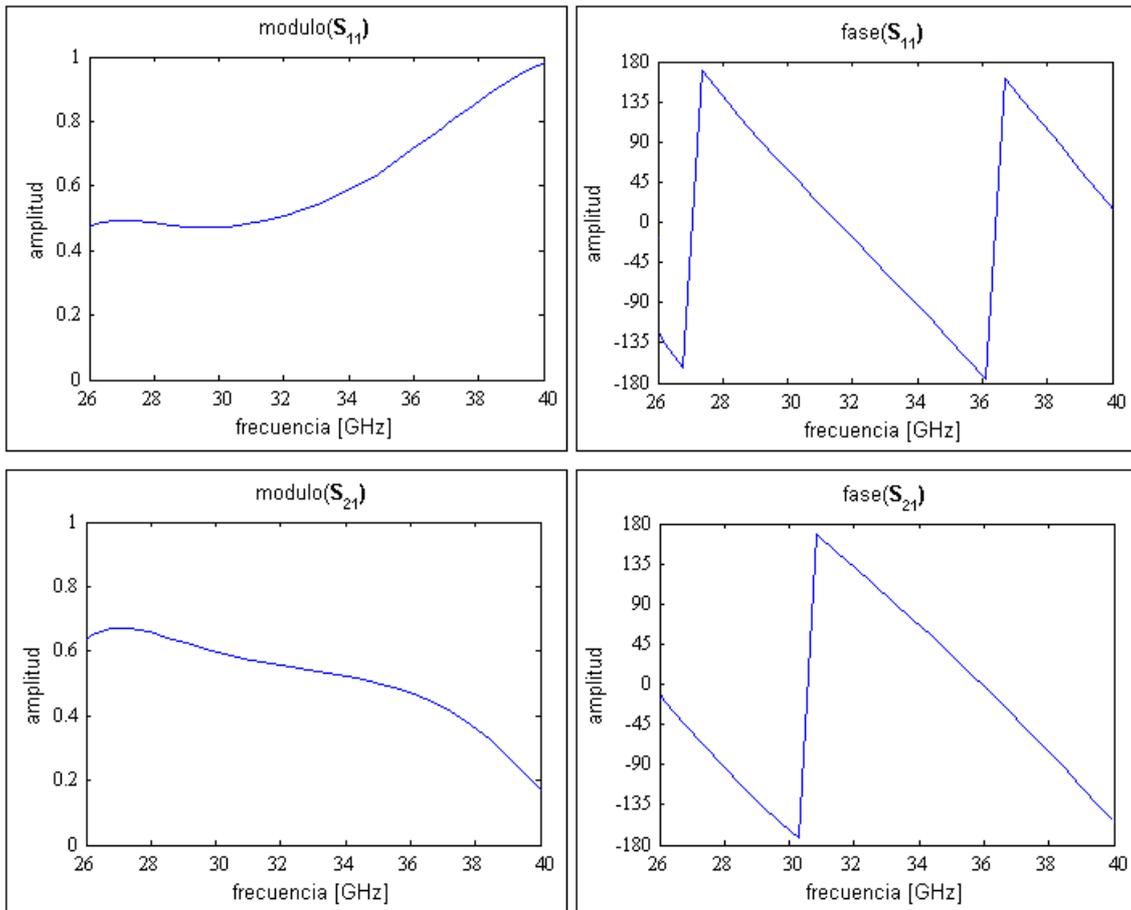


Figura 5.39.c.: Parámetros de scattering S_{11} y S_{21} obtenidos utilizando funciones wavelet D_3 .

Observando las figuras 5.39 se puede apreciar que el resultado obtenido con cada uno de los diferentes tipos de función wavelet es prácticamente idéntico. Vemos además que el parámetro $S_{11} \neq 0$ en todo el rango de operación, a pesar de que los tres brazos de la unión son idénticos, y que por lo tanto presentan la misma impedancia. Esto nos confirma el hecho establecido teóricamente de que es imposible diseñar un dispositivo recíproco sin pérdidas de tres puertas perfectamente adaptado.

Este resultado se ha comparado con el obtenido utilizando un simulador TLM comercial. En la figura 5.40 se han representado los parámetros de *scattering* S_{11} y S_{21} obtenidos de esta forma, y se puede apreciar, en cuanto al módulo de ambos parámetros, una variación con la frecuencia similar (en la simulación con el método TLM aparece un ruido que no se apreciaba con el método MRTD). En cuanto a la fase de dichos parámetros, se aprecian diferencias entre los resultados obtenidos por los dos métodos, que pueden ser debidas, en principio, a que los puntos donde se muestrean los campos

están situados en posiciones relativas diferentes (respecto a las dos simulaciones), y también debido a diferencia en las características de dispersión de ambos métodos.

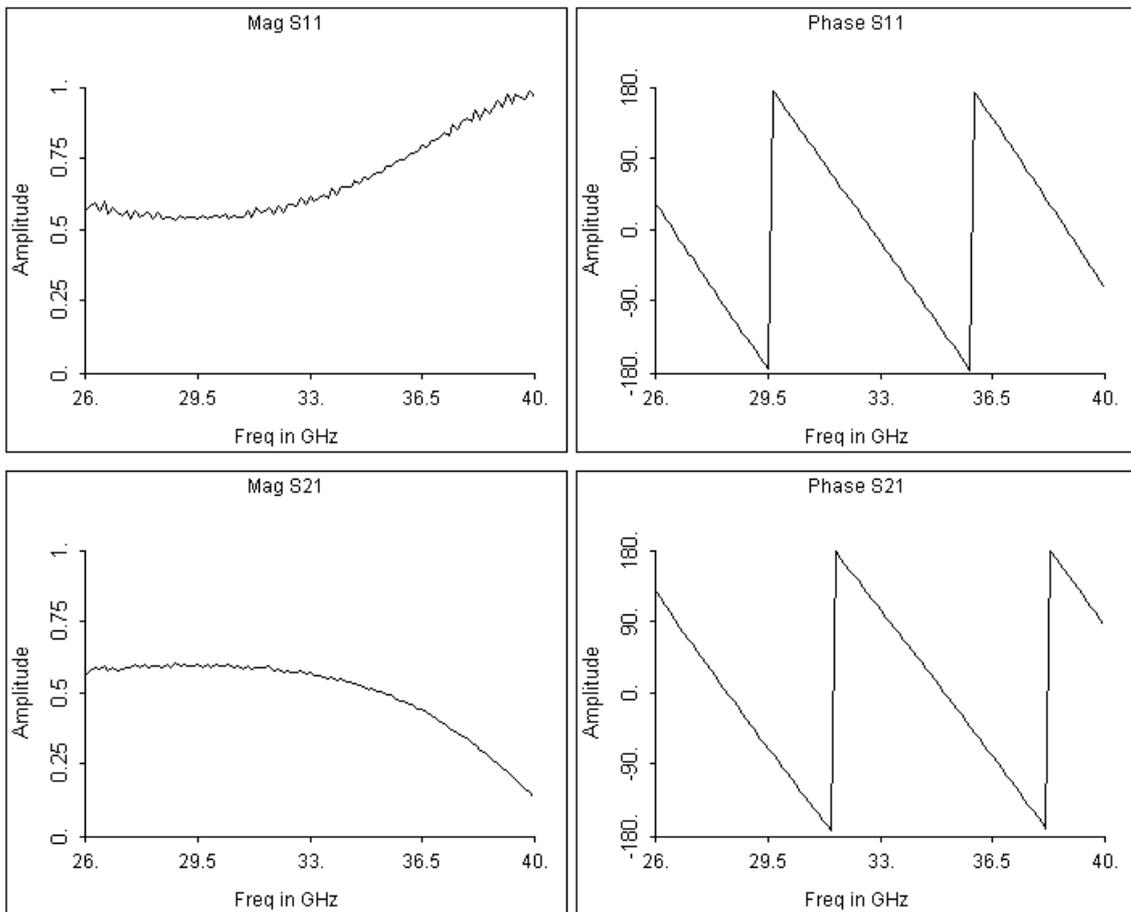


Figura 5.40.: Parámetros de scattering S_{11} y S_{21} obtenidos utilizando un simulador TLM.

Observemos ahora el comportamiento del campo eléctrico de un modo TE que se propaga en un dispositivo como el que acabamos de estudiar. Para ello vamos a excitar un modo TE_{10} a 50 GHz, asignando a la componente E_y del campo eléctrico una distribución en forma de medio seno en la dirección transversal z , y de medio seno cuadrado en la dirección de propagación x . Sobre esta distribución aplicamos una variación temporal correspondiente a una señal sinusoidal a la frecuencia de 50 GHz. En la serie de secuencias de la figura 5.41 se ha representado el valor de la componente E_y en distintos instantes de la simulación, en la que se han utilizado funciones wavelet del tipo D_2 .

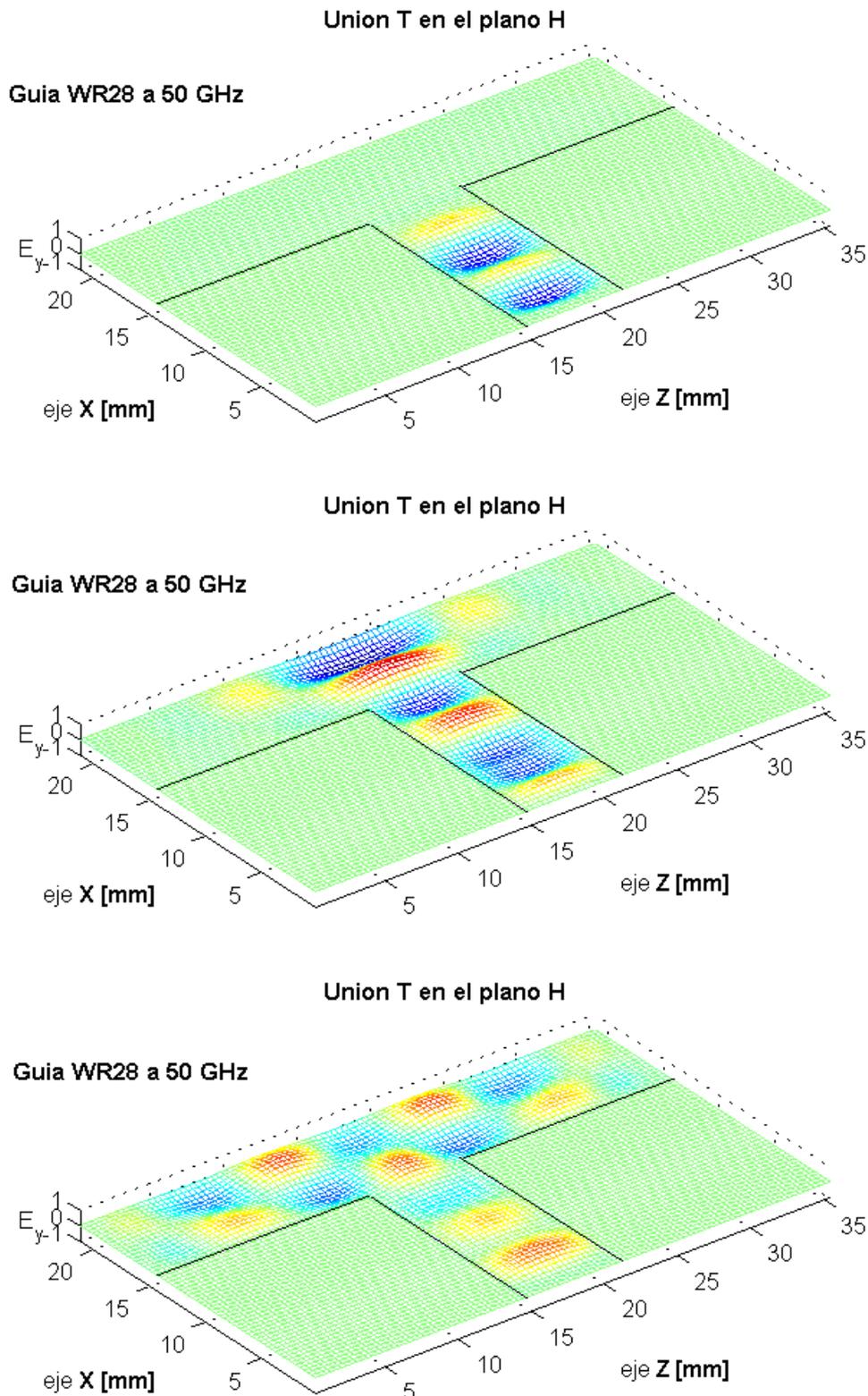


Figura 5.41.: Valor en diferentes instantes de tiempo de la componente E_y del campo eléctrico de un modo TE propagándose en una guía rectangular WR28 con una unión-T en el plano H.

En esta serie de figuras se puede observar la aparición de modos superiores en la distribución transversal del campo, es decir, ya no es una distribución sinusoidal pura, y esto es debido a que la propagación se ha realizado a 50 GHz y por lo tanto es posible la existencia de modos superiores al fundamental. De acuerdo con las distribuciones del campo mostradas en la figura 5.33, se puede apreciar que el patrón transversal que aparece en los brazos transversales de la unión corresponden a un modo TE_{20} , cuya frecuencia de corte es de 42 GHz.

5.5.- APLICACIÓN DE LA TÉCNICA MRTD 3D

Como validación de la técnica empleada en tres dimensiones se van a analizar diferentes cavidades resonantes, vacías y cargadas con dieléctricos, utilizando distintos tipos de función wavelet para desarrollar los campos y se van a comparar los resultados obtenidos con los proporcionados por otras técnicas y con el valor teórico cuando éste sea conocido. También veremos la propagación en una guía de ondas rectangular WR90.

5.5.1.- Cavidades resonantes

El propósito de las líneas de transmisión y las guías de ondas es transmitir de forma eficiente la energía electromagnética de un punto a otro. Por otro lado, un *resonador o cavidad resonante* es un dispositivo que permite almacenar dicha energía. En una cavidad resonante, dado que no es posible la propagación de los campos en el espacio debido a las condiciones de frontera impuestas en las tres direcciones, esos campos se van a distribuir de forma que se satisfagan las mismas, es decir, la reflexión en las paredes de la cavidad dará lugar a la aparición ondas estacionarias que corresponderán a valores característicos y específicos de las frecuencias de oscilación [62]. Se pueden entonces considerar los campos resultantes como la superposición de estos modos normales.

Consideremos una cavidad rectangular vacía, formada por paredes conductoras, como la representada en la figura 5.42.

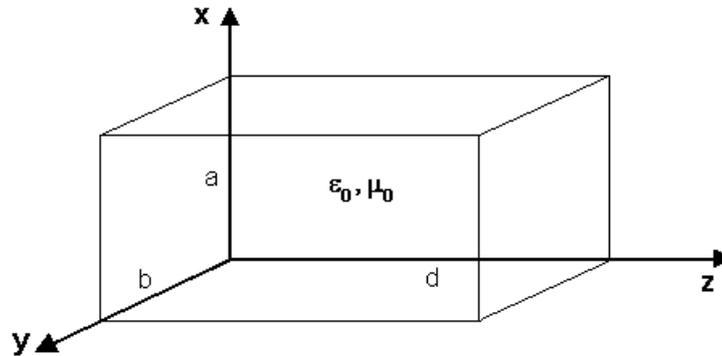


Figura 5.42.: Cavidad resonante rectangular.

Para que se cumplan las mencionadas condiciones de frontera, las distintas componentes de los campos eléctrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ y magnético $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ deben ser combinación de expresiones de este tipo [62]:

$$E_x = E_1 \cos k_1 x \cdot \text{sen } k_2 y \cdot \text{sen } k_3 z \cdot e^{-j\omega t} \quad (5-38.1)$$

$$E_y = E_2 \text{sen } k_1 x \cdot \cos k_2 y \cdot \text{sen } k_3 z \cdot e^{-j\omega t} \quad (5-38.2)$$

$$E_z = E_3 \text{sen } k_1 x \cdot \text{sen } k_2 y \cdot \cos k_3 z \cdot e^{-j\omega t} \quad (5-38.3)$$

$$H_x = -jH_1 \text{sen } k_1 x \cdot \cos k_2 y \cdot \cos k_3 z \cdot e^{-j\omega t} \quad (5-38.4)$$

$$H_y = -jH_2 \cos k_1 x \cdot \text{sen } k_2 y \cdot \cos k_3 z \cdot e^{-j\omega t} \quad (5-38.5)$$

$$H_z = -jH_3 \cos k_1 x \cdot \cos k_2 y \cdot \text{sen } k_3 z \cdot e^{-j\omega t} \quad (5-38.6)$$

donde las constantes k_1 , k_2 , y k_3 son:

$$k_1 = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{m}}{a} \quad (5-39.1)$$

$$k_2 = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{b} \quad (5-39.2)$$

$$k_3 = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{d} \quad (5-39.3)$$

y están relacionadas entre sí por la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\mathbf{w}}{c}\right)^2 = \left[\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{m}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{d}\right)^2\right] \quad (5-40)$$

donde c es la velocidad de la luz ($c = 1/\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0}$). Esto significa que las posibles frecuencias de oscilación permitidas dentro de la cavidad estarán dadas por:

$$\mathbf{w} = c\mathbf{p} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2} \quad (5-41)$$

y se conocen como “frecuencias de resonancia de la cavidad”.

Si definimos los siguientes vectores:

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \quad (5-42)$$

$$\mathbf{E}_0 = (E_1, E_2, E_3) \quad (5-43)$$

$$\mathbf{H}_0 = (H_1, H_2, H_3) \quad (5-44)$$

también se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad (5-45)$$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\mathbf{w}\mathbf{m}} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \quad (5-46)$$

En principio, cada \mathbf{k} corresponde a un modo dado, es decir, a un conjunto dado de enteros n , m y p de acuerdo con (5-40). Así, el campo es una combinación de funciones diferentes, cada una con un valor de \mathbf{k} , y a cada una de esas funciones la conocemos como “modo”.

Las cavidades resonantes o resonadores pueden ser construidos a partir de secciones de una guía de ondas. Debido a las pérdidas por radiación que se producen en las guías con terminaciones abiertas, generalmente los resonadores se construyen a partir de secciones cortocircuitadas en los dos extremos, formando una caja cerrada o cavidad. De esta forma, los modos de resonancia en una cavidad se suelen designar, a partir de los modos TE o TM que se propagan en la guía, como TE_{mnp} o TM_{mnp} , donde los índices m , n , y p se refieren al número de variaciones en el patrón de onda estacionaria del campo en la dirección x , y , z , respectivamente. Así, un modo TE_{10} en una guía de ondas dará lugar si cortocircuitamos esa guía, a los modos de resonancia TE_{10p} en el propio resonador. En la figura 5.43 se han representado las distribuciones del campo eléctrico en una cavidad rectangular correspondientes a dos modos de resonancia.

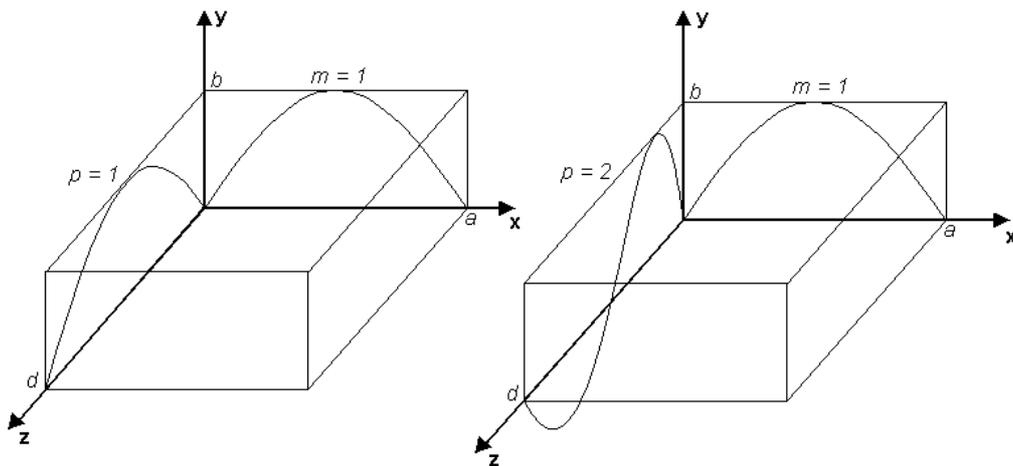


Figura 5.43.: Distribución dentro de una cavidad rectangular del valor del campo eléctrico E_y para los modos resonantes TE_{101} y TE_{102} (no hay variación respecto de la coordenada y).

Vamos ahora a calcular las frecuencias de resonancia para un modo TE_{m0p} en una cavidad rectangular de dimensiones normalizadas $0.5\sqrt{2} \times 0.2 \times 0.5\sqrt{2}$, que tendrá, según la ecuación (5-41), una frecuencia de resonancia dominante normalizada de 1·c Hz (siendo c la velocidad de la luz). Según (5-39), el vector \mathbf{k} tendrá las siguientes componentes:

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{m}}{a}, 0, \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{d} \right) \quad (5-47)$$

siendo $a = d = 0.5\sqrt{2}$ m.

Esto implica que, según la ecuación (5-45), el vector de componentes \mathbf{E}_0 sea:

$$\mathbf{E}_0 = (0, E_2, 0) \quad (5-48)$$

es decir, los modos TE_{m0p} tendrán como única componente del campo eléctrico la componente E_y .

Discretizamos nuestro dominio de simulación dividiéndolo en 16 celdas de ancho por 8 celdas de alto y 16 celdas de largo ($16 \times 8 \times 16$), con lo que se obtiene una resolución espacial $\Delta x = \Delta z = 0,0442$ m y $\Delta y = 0,0250$ m. Vamos a realizar la simulación utilizando funciones de escala correspondientes a tres tipos distintos de funciones de Daubechies, D_1 , D_2 y D_3 . Para que las simulaciones se puedan realizar en las mismas condiciones con los tres esquemas utilizados, escogemos un factor de estabilidad $s = 1$, asegurando de este modo la estabilidad para todos ellos. De esta forma, el intervalo temporal queda determinado y es $\Delta t = 65,117$ ps

Para excitar los modos TE_{m0p} actuaremos sobre la componente H_z del campo magnético, asignándole una distribución espacial de medio seno cuadrado en la dirección del eje \mathbf{x} , con un ancho de $|x_2 - x_1| = 0,2652$ m (con $x_l = 2\Delta x$), constante en el eje \mathbf{y} , y medio seno cuadrado de $|z_2 - z_1| = 0,2652$ m de ancho (con $z_l = 2\Delta z$) en la dirección del eje \mathbf{z} . La distribución temporal será la de un pulso gaussiano con un ancho de $5\Delta t$ (que corresponde a un ancho de banda normalizado de $3,5 \cdot c$ Hz) y un retardo de $10\Delta t$. Dado que en los modos TE_{m0p} sólo tenemos la componente E_y ($\mathbf{E} = E_y$), el muestreo se realizará sobre dicha componente. Una vez fijados todos los parámetros, dejamos evolucionar el sistema durante 2048 iteraciones.

Tras obtener la secuencia temporal correspondiente al valor del campo eléctrico en un punto de la estructura, aplicamos una transformada rápida de Fourier para extraer

su contenido en frecuencia. La resolución en frecuencia normalizada en nuestro caso es de $\Delta f = 0,025 \cdot c$ Hz. En la figura 5.44 se ha representado la respuesta en frecuencia de la señal analizada en un punto en el cual la componente del campo muestreada E_y es distinta de cero para un mayor número de modos. En esta figura se pueden apreciar las frecuencias de resonancia de los seis primeros modos.

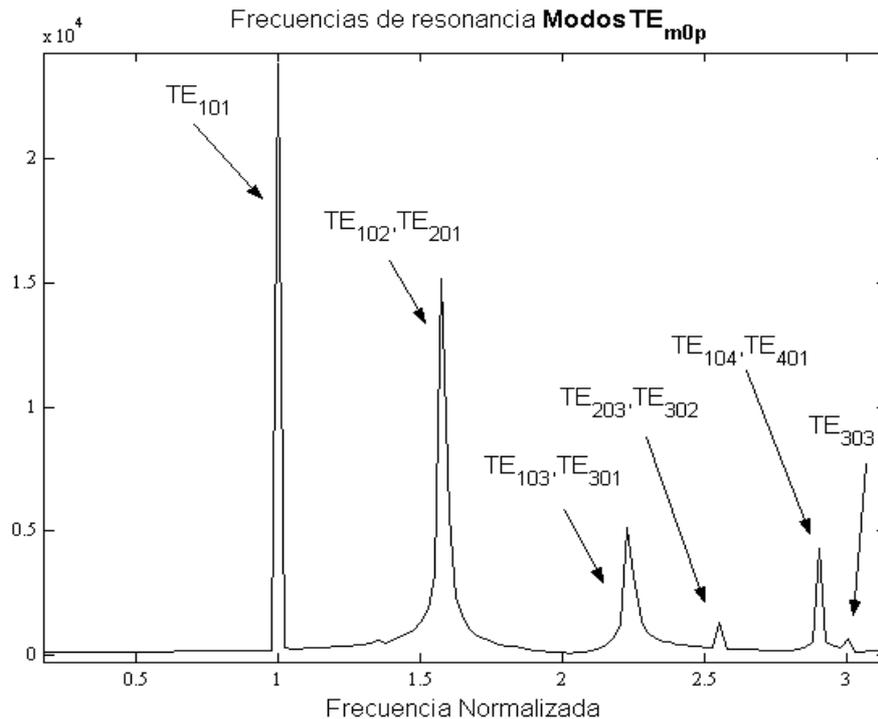


Figura 5.44.: Contenido espectral de la señal analizada (frecuencia en unidades normalizadas).

En la tabla X se muestran las frecuencias de resonancia que hemos obtenido para los distintos tipos de función wavelet empleados, junto con el valor teórico y el obtenido mediante la técnica Haar-MRTD [27]. Nuevamente se observa una diferencia entre los valores obtenidos utilizando wavelets D_1 y los obtenidos utilizando wavelets D_2 y D_3 , siendo la precisión para estas últimas mucho mayor, con un error respecto del valor teórico del 0,6% en el peor de los casos (modos TE₁₀₄/TE₄₀₁) frente a errores del orden del 5% con las wavelets D_1 . También se puede apreciar una mayor precisión utilizando las wavelets D_2 y D_3 que la obtenida mediante la técnica Haar-MRTD.

TABLA X					
<i>Frecuencias de resonancia (modos TE_{m0p})</i> (unidades normalizadas $\Delta f = 0,025 \cdot c$ Hz)					
	D_1 f_r error	D_2 f_r error	D_3 f_r error	<i>Haar – MRTD[27]</i> f_r error	<i>Analítico</i>
TE ₁₀₁	1,000 +0%	1,000 +0%	1,000 +0%	0,999 -0,1%	1
TE ₁₀₂ / TE ₂₀₁	1,550 -1,9%	1,575 -0,4%	1,575 -0,4%	—	1,5811
TE ₁₀₃ / TE ₃₀₁	2,125 -5%	2,225 -0,5%	2,250 +0,6%	2,216 -0,9%	2,2360
TE ₂₀₃ / TE ₃₀₂	2,425 -5%	2,550 +0,02%	2,550 +0,02%	—	2,5495
TE ₁₀₄ / TE ₄₀₁	2,850 -2%	2,900 -0,5%	2,925 +0,3%	—	2,9154
TE ₃₀₃	—	3,000 +0%	3,000 +0%	2,976 -0,8%	3

Como segundo ejemplo para validar el esquema tridimensional utilizado, se ha calculado el valor de la frecuencia de resonancia del modo dominante (TE₁₀₁) de cuatro cavidades no homogéneas, con dieléctricos de diferentes dimensiones y permitividades, y situados en posiciones distintas [18]. En la figura 5.45 se muestra la geometría de dichas estructuras con las dimensiones de las mismas. Este cálculo se ha realizado utilizando funciones de escala correspondientes a tres tipos distintos de wavelets de Daubechies (D_1 , D_2 y D_3). Los resultados obtenidos se han comparado con su valor teórico y con los obtenidos por otros métodos.

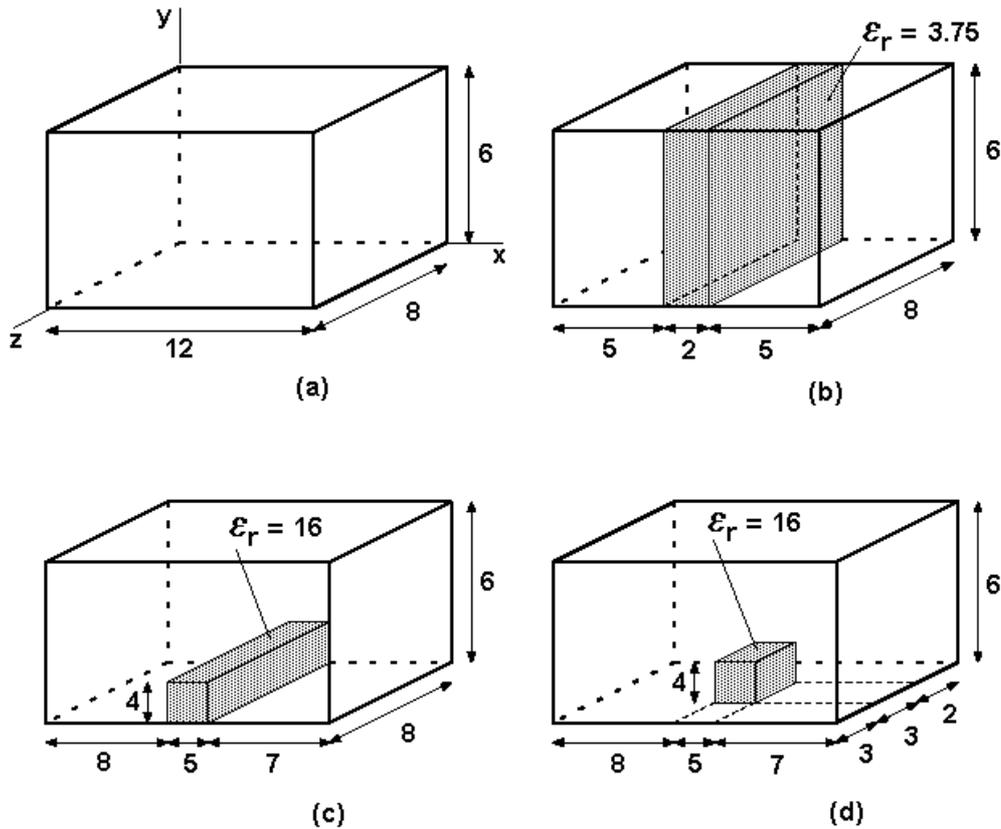


Figura 5.45.: Diferentes cavidades resonantes analizadas.

La discretización se ha realizado dividiendo el dominio en $(12 \times 6 \times 8)$ celdas en los casos (a) y (b) y en $(20 \times 6 \times 8)$ celdas en los casos (c) y (d), con lo que se obtiene para todos ellos una discretización espacial normalizada de $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta = 1$ m. El factor de estabilidad escogido ha sido $s = 1$ con el cual se satisface el criterio de estabilidad para los tres tipos de wavelets empleados. El intervalo de tiempo queda pues fijado a $\Delta t = 1,926$ ns. La excitación en las cuatro cavidades se ha realizado actuando sobre la componente H_z del campo asignándole distribución espacial de medio coseno en la dirección del eje x , sin dependencia respecto del eje y , y medio seno cuadrado de anchura $|z_2 - z_1| = 6$ m (con $z_l = 2\Delta z$) en la dirección del eje z , con el fin de introducir la excitación de forma suave dentro de la estructura. La distribución temporal será la de un pulso gaussiano con un ancho de $6\Delta t$ (que corresponde a un ancho de banda normalizado de $2,8 \cdot c$ Hz) y un retraso de $12\Delta t$. Dado que el modo TE_{101} posee como componente no nula la componente E_y del campo eléctrico, se almacenará su valor en un punto arbitrario durante la simulación. Tras 2048 iteraciones, se analiza el contenido

espectral mediante una transformada rápida de Fourier, obteniendo resultados con una resolución en frecuencia normalizada de $\Delta f = 8'451 \cdot 10^{-4} \cdot c$ Hz.

La frecuencia de resonancia del modo TE_{101} obtenida utilizando las diferentes funciones wavelet se muestra en la tabla XI. En ella se puede apreciar la característica habitual obtenida a lo largo de todas las simulaciones, esto es, que los valores calculados utilizando funciones D_2 y D_3 presentan cotas de error inferiores a las obtenidas con las funciones D_1 . Además, estas cotas de error son inferiores a las obtenidas mediante otros métodos como FDTD y Haar-MRTD tradicional.

TABLA XI						
Frecuencia de resonancia del modo dominante TE_{101}						
(unidades normalizadas $\Delta f \approx 8 \cdot 10^{-4} \cdot c$ Hz)						
cavidad	D_1 malla error	D_2 malla error	D_3 malla error	FDTD [18] malla error	Haar- MRTD [27] malla error	Analítico [18]
(a)	0,0735 12×6×8 -2%	0,0752 12×6×8 +0,13%	0,0752 12×6×8 +0,13%	0,0749 12×6×8 -0,3%	0,0754 6×4×3 +0,4%	0,0751
(b)	0,0482 12×6×8 -8%	0,0507 12×6×8 -3%	0,0516 12×6×8 -1,2%	0,0523 12×6×8 +1,3%	0,0530 5×4×3 +1,5%	0,0522
(c)	0,0245 20×6×8 —	0,0254 20×6×8 —	0,0254 20×6×8 —	0,0266 20×6×8 —	0,0276 10×4×3 —	—
(d)	0,0367 20×6×8 —	0,0364 20×6×8 —	0,0372 20×6×8 —	0,0391 20×6×8 —	0,0383 10×5×3 —	—

5.5.2.- Propagación en una guía de ondas rectangular WR90.

Como ejemplo de simulación de la propagación del campo electromagnético en una guía de ondas, se ha considerado la propagación de un modo TE_{10} en una guía rectangular WR90 (figura 5.46).

Para realizar esta simulación se ha discretizado el dominio dividiéndolo en 20 celdas de ancho por 20 celdas de alto y 100 celdas de largo ($20 \times 20 \times 100$), obteniéndose una discretización espacial de $\Delta x = \Delta y = 1,143$ mm y $\Delta z = 1,0$ mm. El desarrollo de los campos se ha realizado utilizando funciones D_2 con un único nivel de resolución, es decir, sólo funciones de escala, incluyendo condiciones de contorno absorbentes PML en los extremos del eje z . Como espesor de la zona PML se han tomado 10 celdas en la dirección z ($10\Delta z$) y un coeficiente de reflexión de 10^{-4} . El factor de estabilidad escogido para realizar la simulación ha sido $s = 1$, con lo que el intervalo de tiempo obtenido ha sido de $\Delta t = 2,0967$ ps.

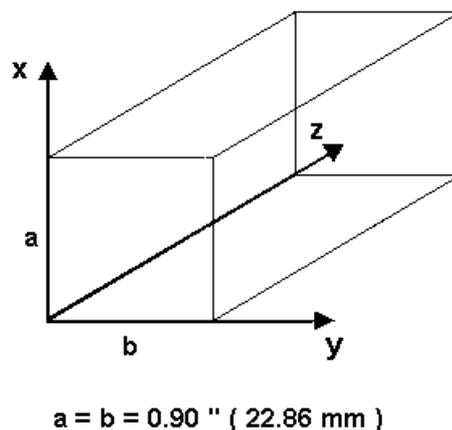


Figura 5.46.: Guía de ondas rectangular WR90.

Con el fin de simular la propagación de un modo TE_{10} , teniendo en cuenta que la frecuencia de corte del modo TE_{10} es 6,56 GHz y la frecuencia de corte del siguiente modo es de 13,12 GHz, se ha excitado la componente H_z del campo magnético con una característica temporal correspondiente a una señal sinusoidal de 10 GHz, y con una distribución espacial de medio coseno en la dirección transversal x , constante en la

dirección y , y con forma de medio seno cuadrado de longitud $|z_2 - z_1| = 6 \text{ mm}$ (con $z_1 = 30\Delta z$) en la dirección del eje z .

En las figuras 5.47 se ha representado el valor de la componente E_y del campo eléctrico en diferentes secciones de la guía, correspondiente a distintos instantes de tiempo. En ellas se puede apreciar la forma de onda propagante que adquiere el campo a lo largo del eje longitudinal y cómo se verifican las condiciones de contorno en los ejes transversales de la guía. En las vistas correspondientes a los planos YZ y XY se observa que la señal no varía a lo largo del eje y , lo que demuestra que se trata de un modo $m0$. Por otro lado, en las vistas de las secciones XY y XZ se observa que la dependencia respecto de la coordenada x tiene la forma de medio seno, lo que demuestra que es un modo $1n$. El conjunto de estas características nos muestra que, efectivamente, se propaga sólo un modo TE_{10} . En la figura 5.47.c se puede notar la zona de excitación, a partir de la cual se generan dos ondas propagándose en sentidos contrarios, debido a la presencia de dos máximos contiguos que no están distribuidos regularmente.

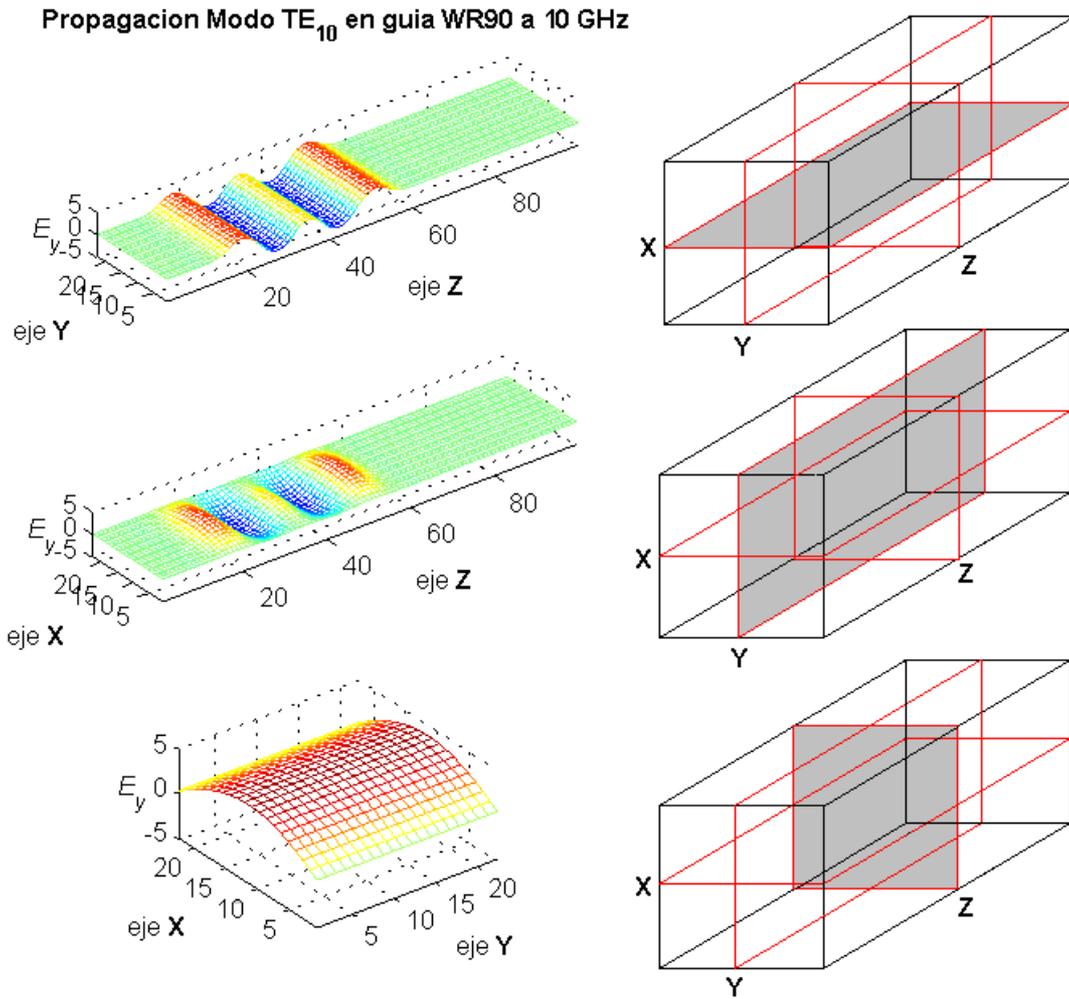


Figura 5.47.(a): Distribución espacial del valor de la componente E_y en diferentes secciones de la guía WR90, transcurridas 40 iteraciones desde el comienzo de la simulación.

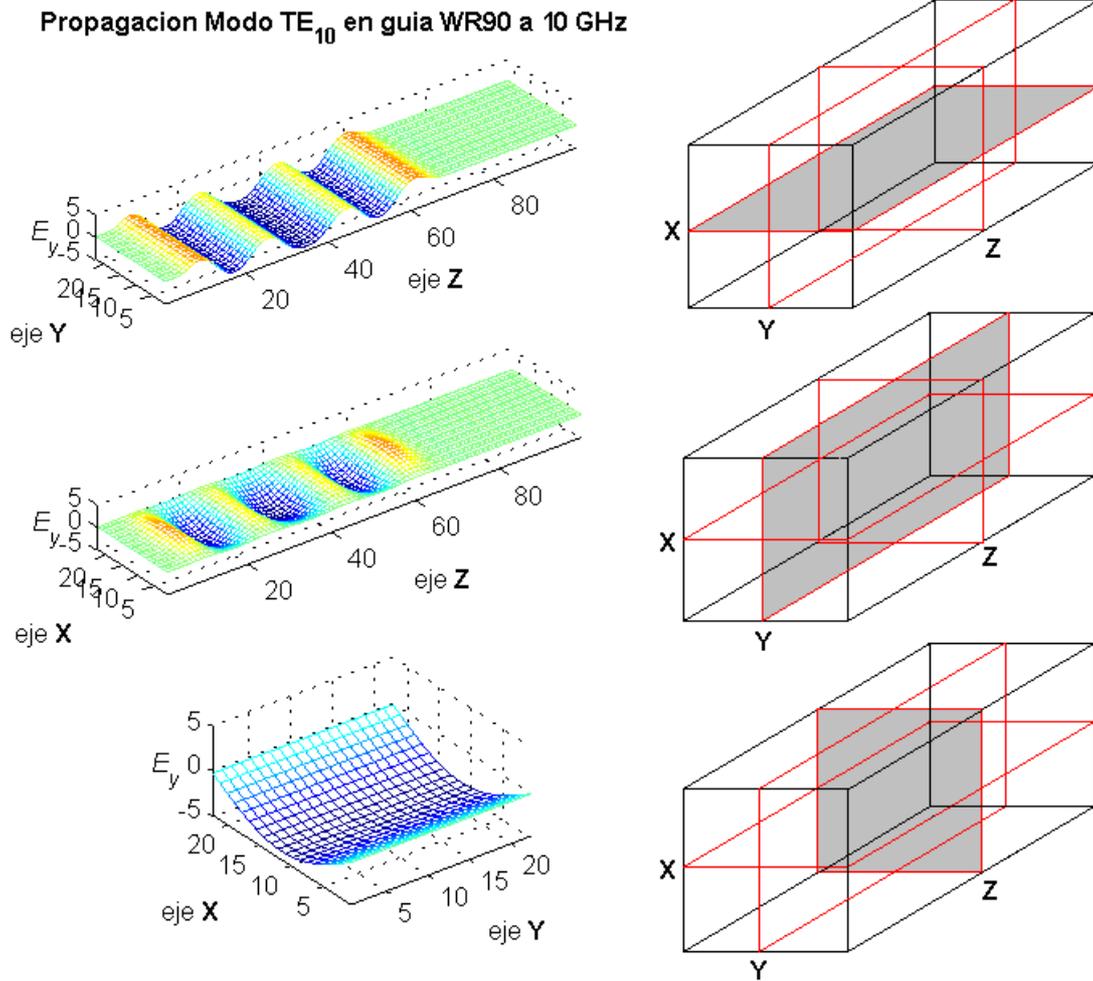


Figura 5.47.(b).: *Distribución espacial del valor de la componente E_y en diferentes secciones de la guía WR90, transcurridas 60 iteraciones desde el comienzo de la simulación.*

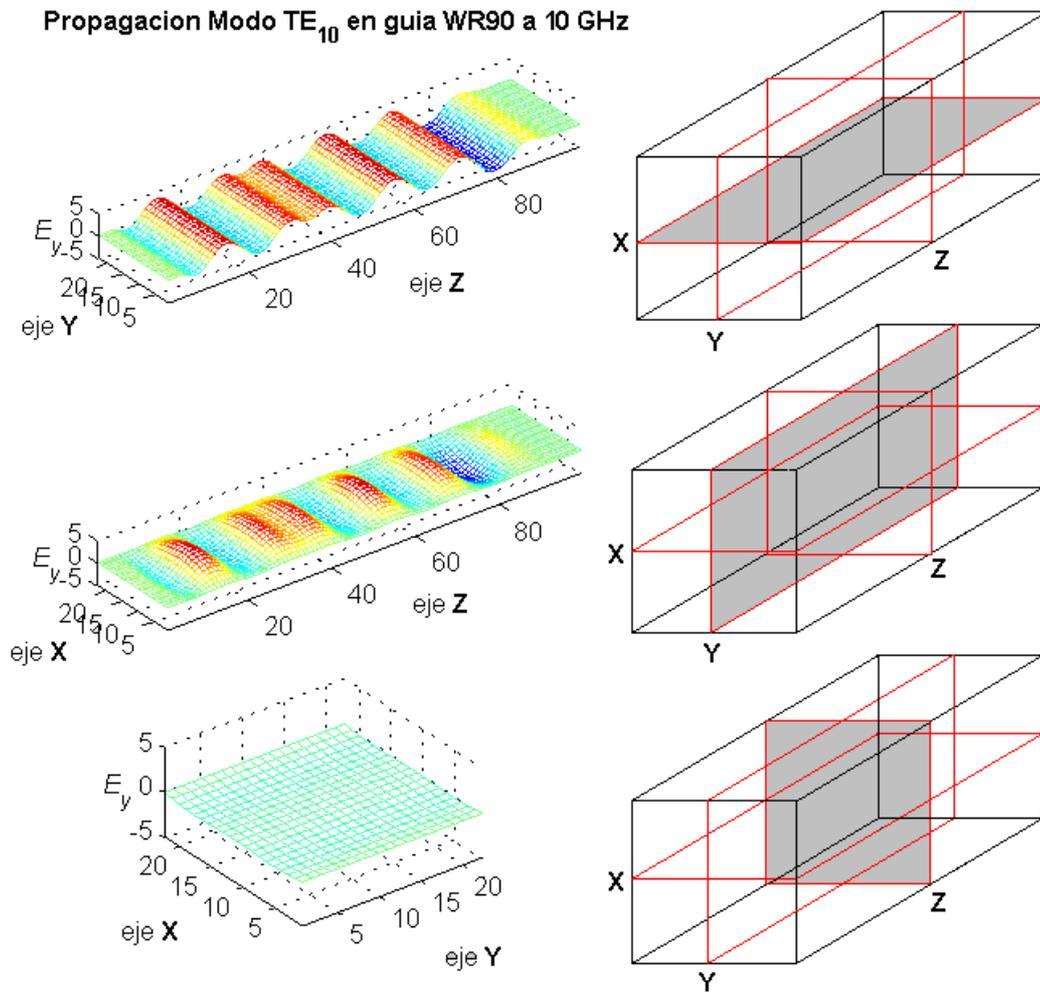


Figura 5.47.(c): *Distribución espacial del valor de la componente E_y en diferentes secciones de la guía WR90, transcurridas 100 iteraciones desde el comienzo de la simulación.*

CONCLUSIONES

Como conclusiones y principales aportaciones del trabajo presentado en esta memoria se pueden mencionar los siguientes aspectos:

Se ha desarrollado un esquema en multirresolución en el dominio del tiempo (MRTD) que presenta como principal ventaja sobre otras técnicas la posibilidad de utilizar en los algoritmos cualquier función wavelet de tipo Daubechies, lo que permite tener un algoritmo abierto y poder emplear las wavelets que más se ajusten al problema particular. Además, se ha logrado una multirresolución efectiva al no tener que modificar los algoritmos cada vez que se quiera aumentar la resolución de los resultados, ya sea en toda la estructura o en una parte de la misma, gracias a la utilización de una matriz derivativa. También se ha introducido un método eficaz para reconstruir los campos a partir de los coeficientes de sus desarrollos utilizando la Transformada Discreta en Wavelets (*DWT*).

Se ha realizado un estudio pormenorizado de las condiciones de estabilidad necesarias en nuestro esquema. Como resultado, se ha comprobado que una misma resolución espacial permite un amplio rango de valores para la discretización temporal, mayor que en otras técnicas como FDTD, con lo que se puede llegar a obtener una disminución del 50% en el tiempo de ejecución.

Se ha analizado la dispersión numérica de los algoritmos utilizando diferentes tipos de wavelets de Daubechies, obteniéndose una mejora considerable en los resultados, con cotas de error por debajo del 0,2% respecto del caso ideal, cuando se emplean funciones de Daubechies D_M de orden $M \geq 2$. En los casos bidimensionales estudiados se ha comprobado la influencia del ángulo de propagación en el error de dispersión, observando que para las funciones de Daubechies D_M de orden $M \geq 2$ este error es muy pequeño.

Finalmente se han desarrollado diversos ejemplos como validación de las técnicas utilizadas, encontrando que los resultados obtenidos con las funciones wavelet de Daubechies D_M de orden $M \geq 2$ presentan cotas de error muy pequeñas, superando en la mayoría de los casos a los resultados obtenidos mediante otros métodos. También se

han presentado ejemplos de simulación de propagación guiada, en los que se puede apreciar la validez de esta técnica como herramienta para visualizar las características de propagación de las ondas.

Como futuras líneas de investigación se plantea la posibilidad de incluir nuevas condiciones de contorno que permitan modelar estructuras más complejas tales como discontinuidades, ángulos, irises, ... también la presencia de medios heterogéneos, avanzando en el estudio del comportamiento con niveles superiores, la implementación de un criterio para la asignación dinámica de los niveles de resolución, etc.

Apéndice

ESTRUCTURA DE LA SIMULACIÓN

A.1.- ESTRUCTURA DE LA SIMULACIÓN

En este apéndice vamos a presentar un esquema con las etapas generales que hemos seguido a la hora de realizar una simulación.

A.1.1. Definición del Sistema Físico

Como en toda simulación, en primer lugar hay que describir la geometría del sistema físico donde se pretende resolver el problema y establecer las dimensiones de la estructura. También se debe hacer una descripción de los materiales que la constituyen en cuanto a sus características electromagnéticas (generalmente permitividad ϵ , permeabilidad μ , conductividad σ).

En este paso también escogemos el tipo de función wavelet que se va a utilizar para desarrollar los campos, y en principio se puede decidir el nivel de resolución que se desea y la zona del espacio donde se va a aplicar, aunque este paso podría hacerse dinámicamente, esto es, dado que el valor numérico de los coeficientes de wavelet nos da idea de la “bondad” de la aproximación que hemos obtenido, se puede considerar un valor umbral de dichos coeficientes a partir del cual se puede decidir aumentar o disminuir el nivel de resolución posteriormente, a lo largo de la simulación. Aquí se decide, por tanto, el número de celdas en que se divide el espacio de simulación, obteniéndose el valor de los incrementos espaciales (Δx , Δy , Δz) correspondientes al nivel base.

Una vez decidido el tipo de función wavelet y el valor de los incrementos espaciales, se debe fijar el incremento temporal Δt , para lo cual se escoge un *factor de estabilidad* dentro de un rango característico para cada función wavelet. No obstante, dada la relación que existe entre los diferentes parámetros, se podría aplicar el criterio inverso, es decir, nuestras exigencias en resolución espacial y temporal podrían obligar

a tener un límite en el factor de estabilidad que, a su vez, nos obligara a utilizar el tipo de función wavelet, y el nivel, que permitiera ese factor.

A.1.2. Condiciones de la Simulación

Una vez establecidos los parámetros característicos del mallado, se comienza por iniciar todas las variables que van a intervenir en la simulación. En este punto se construyen las matrices derivativas de acuerdo con las dimensiones del problema, el tipo de wavelet empleado y el nivel de resolución fijado.

En este paso también se establece el tipo de excitación que se va a utilizar en la simulación. Para ello, además de sus características temporales, como la forma (excitación gaussiana, sinusoidal, pulso modulado ...), la frecuencia central, su duración, etc, se debe especificar su distribución espacial y la zona de la estructura donde se desea introducir la señal.

Otro aspecto importante a decidir antes de comenzar con la simulación son las condiciones de contorno. Se deben fijar los límites de nuestro dominio computacional imponiendo condiciones de contorno “duras” (conductores perfectos PEC o PMC) o bien condiciones absorbentes (“PML”). En el caso de tener condiciones absorbentes del tipo “PML” también hay que fijar las dimensiones de esta zona y ciertos parámetros característicos como por ejemplo el coeficiente de reflexión deseado.

El número de iteraciones es otro parámetro que se puede escoger dependiendo del problema que se quiera abordar. Por ejemplo, la posible existencia de transitorios que se desean eliminar implicaría un aumento en el número de iteraciones para lograr estudiar el estadio estacionario, o bien, si deseamos obtener resultados en frecuencia, el valor máximo y la resolución de la frecuencia que queremos resolver también nos impone condiciones sobre dicho número de iteraciones, el tamaño de la estructura, etc.

A.1.3. Iteración del Algoritmo

Una vez definidos todos los parámetros necesarios comienza el proceso de simulación durante el número de iteraciones escogido.

Durante la marcha del algoritmo se van actualizando los coeficientes del campo electromagnético en todos los puntos del mallado, de forma que los coeficientes del campo eléctrico en un instante temporal dado $[\mathbf{E}]^n$ se calculan en función de sus valores almacenados en un instante anterior $[\mathbf{E}]^{n-1}$ y de los valores de los coeficientes del campo magnético correspondientes a medio intervalo temporal anterior $[\mathbf{H}]^{n-\frac{1}{2}}$ y en posiciones espaciales contiguas. Lo mismo sucede con los coeficientes del campo magnético, cuyo valor en un instante de tiempo $[\mathbf{H}]^{n+\frac{1}{2}}$ se calcula en función de los valores obtenidos en la iteración anterior $[\mathbf{H}]^{n-\frac{1}{2}}$ y de los valores recién calculados para el campo eléctrico $[\mathbf{E}]^n$. En el cálculo de estos coeficientes se utilizan las condiciones de contorno definidas antes del comienzo de la simulación así como el valor de la excitación en la zona del espacio donde ha sido definida.

A.1.4. Salida del Algoritmo: Análisis de Resultados

Una vez alcanzado el número total de iteraciones, el tiempo de simulación ha concluido y el programa abandona el bucle. En este momento se pueden extraer los resultados buscados a partir de los datos recogidos y almacenados durante la simulación (aunque también pueden ser calculados dinámicamente), como por ejemplo parámetros de *scattering*, cálculo de frecuencias de resonancia, cálculo de potencia, etc.

Antes de procesar los datos, se debe tener en cuenta el nivel de resolución empleado para desarrollar los campos. Si la simulación se ha realizado utilizando únicamente funciones de escala, el valor de los coeficientes de escala proporcionados por el algoritmo corresponde al valor “real” de los campos, y por lo tanto el análisis se puede realizar sin necesidad de ninguna manipulación adicional de los mismos. Por el contrario, si se han utilizado varios niveles de resolución, se debe reconstruir el valor

real de los campos a partir de los coeficientes de escala y de wavelet dados por el algoritmo mediante la Transformada Inversa en Wavelets (*IDWT*).

Si se desean obtener resultados en función de la frecuencia, dado que nuestro algoritmo proporciona el valor de los campos a lo largo del tiempo, se puede realizar una transformada de Fourier que traslade la información del dominio temporal al dominio de la frecuencia. Para ello se puede utilizar bien la Transformada Discreta de Fourier (*DFT*), o bien la Transformada Rápida de Fourier (*FFT*) [60].

Es importante tener en cuenta ciertos aspectos a la hora de trabajar con las versiones discretizadas de la Transformada de Fourier. En primer lugar, debido a que los datos almacenados con el valor de los campos corresponden a muestras tomadas en intervalos discretos de tiempo Δt , la señal en frecuencia obtenida al aplicar la Transformada de Fourier se convierte en una repetición periódica en la que la transformada original se repite cada $1/\Delta t$. Esto provoca que, en el caso de que la función original que queremos transformar tenga componentes frecuenciales por encima de $1/(2\Delta t)$, las réplicas se solapan dando lugar al fenómeno conocido como *aliasing*. Para evitar este problema, hay que utilizar un intervalo Δt lo suficientemente pequeño como para que se tomen al menos dos muestras de la componente de mayor frecuencia (*criterio de estabilidad de Nyquist*) [60]:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2 \cdot f_{max}} \quad (\text{A-1})$$

Otro problema viene originado por el hecho de tener un conjunto finito de muestras almacenadas, correspondiente al número de iteraciones llevados a cabo en la simulación N . El tiempo finito de simulación $T=N\Delta t$ provoca un efecto de rizado en la señal frecuencial obtenida, que podría llegar a enmascarar los resultados buscados. Una forma de reducir este rizado consiste en aumentar el número de muestras temporales N , con el inconveniente del aumento en los requerimientos de memoria y tiempo de simulación. Otra solución más eficiente para evitar este efecto consiste en utilizar “funciones ventana” para introducir los datos, siendo las más habituales las ventanas de Hamming, Hanning y Blackman [40].

El punto clave a la hora de recoger los resultados del análisis de la señal en frecuencia obtenida es la resolución frecuencial de los mismos, es decir, estos resultados corresponden a valores discretos en el dominio de la frecuencia, y la resolución viene determinada por el tiempo total de simulación. La resolución en frecuencia será por tanto:

$$\Delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta t} \quad (\text{A-2})$$

Cuanto mayor sea el número de muestras utilizado, mejor será la resolución frecuencial, pero con los inconvenientes mencionados antes acerca del aumento en los requerimientos de memoria y del tiempo de simulación.

En la figura A.1 se muestra el diagrama de bloques correspondiente a los pasos seguidos para realizar una simulación. De acuerdo con la descripción que acabamos de hacer de dichos pasos, la introducción de los datos necesarios en el primer bloque se puede dejar “abierta”, es decir, el propio algoritmo podría “decidir” el nivel de resolución adecuado.

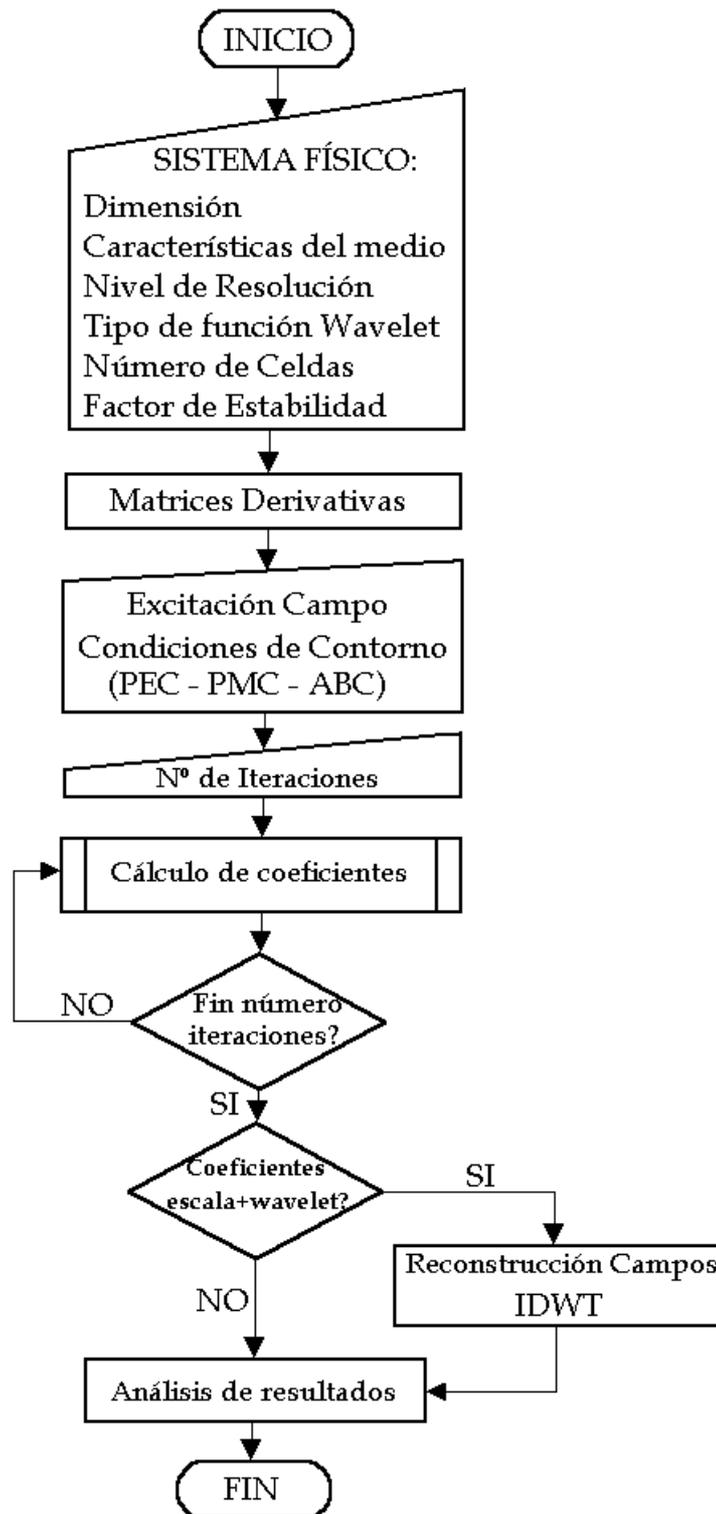


Figura A.1.: Diagrama de Bloques del Algoritmo.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] E. Bacry, S. Mallat and G. Papanicolau. A wavelet based space-time adaptative numerical method for partial differential equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 1992; **26**(7):793-834.
- [2] Z. Baharav and Y. Leviatan. Wavelets in Electromagnetics: The impedance matrix compression (IMC) method. *Int. J. Numerical Modelling*. 1998; **11**:69-84.
- [3] S. Barmada and M. Raugi. A general tool for circuit analysis based on wavelet transform. *Int. J. Circuit Theory and Applications*. 2000; **28**:461-480.
- [4] G. Battle. A block spin construction of ondelettes. *Comm. Mathematical Physics*. 1987; **110**:601-615.
- [5] J.J. Benedetto and M. W. Frazier. *Wavelets: Mathematics and Applications*, CRC Press, Boca Raton 1994.
- [6] J. P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetics waves. *J. Computational Physics*. 1994, **114**:185-200.
- [7] J. P. Bérenger. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetics waves. *J. Computational Physics*. 1996, **127**:363-379.
- [8] J. P. Bérenger. Evanescent waves in PML's: Origin of the numerical reflection in wave-structure interaction problems. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 1999, **47**(10):1497-1503.
- [9] G. Beylkin, R. Coifman and V. Rokhlin. Fast wavelet transform and numerical algorithms I. *Comm. Pure and Applied. Mathematics*. 1991, **44**:141-183.
- [10] G. Beylkin. On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets. *SIAM J. Numerical. Analysis*. 1992; **6**(6):1716-1740.

- [11] C. S. Burrus, R. A. Gopinath and H. Guo. *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*, Prentice Hall, New Jersey 1998.
- [12] G. Carat, R. Guillard and J. Wiat. An efficient analysis of planar microwave circuits using a DWT-based Haar-MRTD scheme. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*. 2000; **48**(12):2261-2270.
- [13] R. E. Collin. *Field Theory of Guided Waves*. McGraw-Hill: New York 1960.
- [14] J. M. Combes, A. Grossmann and Tchamitchian, editors. *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*. Springer-Verlag: Berlín 1989. Proceedings of International Colloquium on Wavelets and Applications, Marseille, France, Dec. 1987.
- [15] T. Cooklev, G. I. Berbecel and A. N. Venetsanopoulos. Wavelets and differential dilation equations. *IEEE Trans. Signal Processing*. 2000; **48**(8):2258-2268.
- [16] Y. W. Cheong, Y. M. Lee, K. H. Ra, and C. C. Shin. Wavelet-Galerkin scheme of time-dependent inhomogeneous electromagnetic problems. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. 1999, **9**(8):297-299.
- [17] W. C. Chew, J. Jin, E. Michielssen and J. Song. *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Artech House 2001.
- [18] D. H. Choi, and W. J. R. Hoefer. The finite-difference time-domain method and its applications to eigenvalue problems. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*. 1986; **34**(12):1464-1469.
- [19] C. Christopoulos. *The Transmission-Line Modelling Method: TLM*. IEEE MTT: New York 1995.
- [20] C. K. Chui. *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Boston 1992.
- [21] C. K. Chui. *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, Boston 1992.

- [22] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Applied Mathematics*. 1988; **41**:909-996.
- [23] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Ser. App. Math. 61, SIAM: Philadelphia 1992.
- [24] T. Dogaru, and L. Carin. Multiresolution time-domain using CDF biorthogonal wavelets. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techiques*. 2001; **49**(5):902-912.
- [25] B. Engquist and A. Madja. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics Computation*. 1977; **44**:629-651.
- [26] M. Fujii and W.J.R. Hoefer. A 3-D Haar-Wavelet-Based Multiresolution Analysis Similar to the FDTD Method – Derivation and Application –. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techiques*. 1998; **46**(12):2463-2475.
- [27] M. Fujii. *A Time-Domain Haar-Wavelet-Based Multiresolution Technique for Electromagnetic Field Analysis*. Tesis doctoral, Universidad de Victoria, Canadá 1999.
- [28] M. Fujii and W.J.R. Hoefer. Dispersion of Time Domain Wavelet Galerkin Method Based on Daubechies' Compactly Supported Scaling Functions with Three and Four Vanishing Moments. *IEEE Microwave Guided Wave Letters*. 2000; **10**(4):125-127.
- [29] M. Fujii and W.J.R. Hoefer. Time-domain wavelet Galerkin modelling of two-dimensional electrically large dielectric waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techiques*. 2001; **49**(5):886-892.
- [30] J.C. Goswami. An application of wavelets bases in spectral domain analysis of transmission line discontinuities. *Int. J. Numerical Modelling*. 1998; **11**:41-54.

- [31] K. Goverdhanam, E. Tentzeris, M. Krumpholtz and L. P. B. Katehi. An FDTD multigrid based on multiresolution analysis. *Proc. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 1996*; 352-355.
- [32] K. Goverdhanam, L. P. B. Katehi, and Cangellaris. Application of multiresolution based FDTD multigrid. *1997 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*; 333-336.
- [33] K. Goverdhanam, E. Tentzeris and L. P. B. Katehi. Treatment of boundaries in multiresolution based FDTD multigrid. *Proc 14th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics*. 1998; 127-134.
- [34] W. Greiner. *Classical Electrodynamics*. Springer-Verlag, New York 1998.
- [35] S. Grivet-Talocia and F. Canavero. Wavelet-based adaptative solution for the nonuniform multiconductor transmission lines. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. 1998; **48**(8):287-289.
- [36] S. Grivet-Talocia. On the Accuracy of Haar-Based Multiresolution Time-Domain Schemes. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. 2000; **10**(10):397-399.
- [37] N. Guan, K. Yashiro and S. Ohkawa. On a choice of wavelet bases in the wavelet transform approach. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 2000; **48**(8):1186-1191.
- [38] A. Haar. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Mathematische Annalen*. 1910; **69**:331-371.
- [39] R. F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. IEEE Press: New York 1992.
- [40] F. J. Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the Discrete Fourier Transform. *IEEE Proceedings*. January 1978; **66**:51-83.

-
- [41] M. A. Hernández. *Análisis de la propagación electromagnética mediante el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo*. Tesis doctoral, Universidad de Salamanca 1999.
- [42] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, 3rd ed. 1998.
- [43] L. Jameson. *On the Daubechies-based wavelet differentiation matrix*. ICASE Report no. 93-95: NASA Langley Res. Cent. 1993.
- [44] B. Jawerth and W. Sweldens. An overview of wavelet based multiresolution analyses. *SIAM Review*. 1994; **36**(3):377-412.
- [45] G. Kaiser. *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhäuser: Boston 1994.
- [46] G. Karlsson and M. Vetterli. Extension of finite length signals for subband coding. *IEEE Trans. Signal Processing*. 1989; **17**(2):161-168.
- [47] J. D. Kraus. *Electromagnetics*. WCB McGraw Hill 1984.
- [48] J. D. Kraus and D. A. Fleisch. *Electromagnetics with Applications*. WCB McGraw Hill 1999.
- [49] M. Krumpholtz and L. P. B. Katehi. New prospects for time domain analysis. *IEEE Microwave and Guide Wave Letters*. 1995; **5**(11):382-384.
- [50] M. Krumpholz and L.P.B. Katehi. MRTD: New Time-Domain schemes based on multiresolution analysis. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techiques*. 1996; **44**(4):555-571.
- [51] Y. H. Lee and Y. Lu. Accelerating numerical electromagnetic code computation by using de wavelet transform. *IEEE Trans. Magnetics*. 1998; **34**(5):3399-3402.
- [52] P. Lemarié. Ondelettes a localisation exponentielles. *J. Math. pures et appl.* 1988; **67**:227-236.
-

- [53] S. G. Mallat, Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$. *Transactions of the American mathematical society*. 1989; **315**(1):69-87.
- [54] S. G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1989; **11**(7):647-693.
- [55] K. K. Mei and J. Fang. Superabsorption - A method to improve absorbing boundary conditions. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 1992; **40**(9):1001-1010.
- [56] Y. Meyer. L'analyses par ondelettes. *Pour la Science*. September 1987.
- [57] Y. Meyer. *Wavelets: Algorithms and applications*. SIAM: Philadelphia 1993.
- [58] G. Mur. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximations of the time-domain electromagnetics field equations. *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*. 1981; **23**(4):377-382.
- [59] W. K. H. Panofsky and M. Phillips. *Classical Electricity and Magnetism*. Addison - Wesley 1972.
- [60] A. Papoulis, *Sistemas Digitales y Analógicos, Transformadas de Fourier, Estimación Espectral*. Marcombo 1986.
- [61] A. Peterson, S. L. Ray and R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*. IEEE Press: New York 1998.
- [62] D. M. Pozar. *Microwave Engineering*. Addison-Wesley: Reading, Massachusetts 1993.
- [63] R. M. Rao, and A. S. Bopardikar, *Wavelet Transforms*, Addison Wesley, 1998.

- [64] J. Represa, C. Pereira, M. Panizo, F. Tadeo. A Simple Demonstration of Numerical Dispersion under FDTD. *IEEE Trans. Education*. 1997; **40**(1):98-102.
- [65] R. Robertson, E.M. Tentzeris, M. Krumholz and L.P.B. Katehi. Modelling of dielectric cavity structures using multiresolution time-domain analysis. *Int. J. Numerical Modelling*. 1998; **11**:55-68.
- [66] J. O. A. Robertsson *et al.* Galerkin-wavelet modeling of wave propagation: Optimal finite-difference stencil design. *Mathematical and Computer Modelling*. 1994; **19**(1):31-38.
- [67] K. Sabetfakri and L. P. B. Katehi. Analysis of integrated millimeter wave and submillimeter wave using orthonormal wavelet expansion, *IEEE Trans Microwave Theory and Techniques*. 1994; **42**(12):2412-2422.
- [68] C. D. Sarris, L. P. B. Katehi and J. F. Harvey. Application of multiresolution analysis to the modeling of microwave and optical structures. *Optical and Quantum Electronics*. 2000; **32**:657-679.
- [69] Y. Shiyou, N. Guangzheng, Q. Jingen and L. Ronglin. Wavelet-Galerkin method for computations of electromagnetics fields. *IEEE Trans. Magnetics*. 1998; **34**(5):2493-2496.
- [70] M.J.T. Smith and T.P. Barnwell. Analysis/Synthesis techniques for subband image coding. *IEEE Trans Acoustics, Speech and Signal Processing*. 1990; **38**(8):1446-1456.
- [71] B. Z. Steinberg and Y. Leviatan. On the use of wavelet expansion in the method of moments. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 1993; **41**(5):610-619.
- [72] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley - Cambridge Press 1997.
- [73] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill: New York 1941.

- [74] A. Taflove and M.E. Brodwin. Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techiques*. 1975; **23**(8):623-630.
- [75] A. Taflove, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House 1995.
- [76] A. Taflove, *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House 1998.
- [77] C. Taswell and K. C. McGill. Algorithm 735: Wavelet transform algorithms for finite-duration discrete-time signals. *ACM Trans. Mathematical Software*. 1994; **20**(3):398-412.
- [78] E.M. Tentzeris, R.L. Robertson, M. Krumpholz and L.P.B. Katehi. Application of MRTD to printed transmission lines. *1996 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*; 573-576.
- [79] E.M. Tentzeris, R.L. Robertson, J.F. Harvey and L.P.B. Katehi. PML absorbing boundary conditions for the characterization of open microwave circuits components using MRTD. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 1999; **47**(10):1709-1715.
- [80] E.M. Tentzeris, J.F. Harvey and L.P.B. Katehi. Time adaptative time-domain techniques for the design of microwave circuits. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. 1999; **9**(3):96-98.
- [81] E.M. Tentzeris, R.L. Robertson, J.F. Harvey and L.P.B. Katehi. Stability and Dispersion Analysis of Battle-Lemarie-Based MRTD Schemes. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techiques*. 1999; **47**(7):1004-1013.
- [82] E.M. Tentzeris, A. Cangellaris, L.P.B. Katehi and J.F. Harvey. Multiresolution time-domain (MRTD) adaptative schemes using arbitrary resolutions of wavelets. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techiques*. 2002; **50**(2):501-516.

- [83] A. Teolis. *Computational Signal Processing with Wavelets*. Birkhäuser: Boston 1998.
- [84] L. A Vielva. *Caracterización de discontinuidades y dispositivos en guías de onda mediante el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo*. Tesis doctoral, Universidad de Cantabria 1997.
- [85] M. Werthen and I. Wolff. A novel wavelet based time-domain simulation approach. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. 1996; **6**(12):438-440.
- [86] Z. Xian and Y. Lu. A study of the Fast Wavelet Transform method in computational electromagnetics. *IEEE Trans. Magnetics*. 1998; **34**(5):3323-3326.
- [87] J.C. Yang and K. R. Shao. Wavelet-Galerkin method in solving dynamic electromagnetic field problems. *IEEE Trans. Magnetics*. 1997; **33**(5):4122-4124.
- [88] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 1966; **14**(5):302-307.