

## Sistemas de ecuaciones como trabajo cooperativo.

---

*José Mariano Bajo Benito. Universidad de Sevilla (España).*

*Rafael Calvo de León. Universidad de Burgos (España).*

### 1. Introducción.

Hace tiempo que nuestros alumnos de secundaria se cansan o aburren en las clases, al ser espectadores pasivos de su aprendizaje, es el momento que los profesores promovamos estrategias y actividades que favorezca un aprendizaje activo en nuestros alumnos, con el fin de que sean protagonistas de su propio aprendizaje.

El trabajo cooperativo debe ser un tema tratado de forma progresiva en estos niveles de enseñanza, partiendo de los conceptos más sencillos para poder avanzar según el ritmo de los alumnos, teniendo en cuenta el progreso de aprendizaje de cada uno de ellos y pudiendo adquirir los conocimientos necesarios para que puedan ser llevados a cabo en el día a día.

Según estos autores Yus (1997), Pujolás (2009), Johnson et al. (1991) y Morales et al. (2018), que basan la mayoría de sus investigaciones en un aprendizaje colaborativo o cooperativo, donde declaran que el uso de este tipo de aprendizaje refuerza y favorece las habilidades cognitivas, por un lado, y por otro estimula el aprendizaje al estar trabajando en grupos pequeños donde se ayudan entre sí para sacar el mayor rendimiento a su trabajo, potenciando las habilidades sociales y de relación entre ellos favoreciendo el clima de clase.

Por todo esto, nos planteamos la necesidad de una enseñanza basada en la cooperación para que los niños adopten unas actitudes sociales que lleven a un trabajo entre semejantes con beneficios mutuos y comunes para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás.

Para nuestro entorno educativo, es fundamental basar una parte de la enseñanza y aprendizaje en un trabajo cooperativo donde, desde el aula, se les enseñe la importancia de un trabajo en equipo y evitar la confrontación como medio para alcanzar sus objetivos individuales además de elevar el rendimiento de todos sus alumnos, incluidos tanto los alumnos más brillantes como los que tienen dificultades de aprendizaje, este trabajo entra en consonancia con las investigaciones de Santos et al. (2020) en las que tienen en cuenta una serie de variables que inciden sobre el logro académico de los alumnos, como son su autoimagen y la percepción del centro educativo en el que estudian.

Desde esta perspectiva surge esta actividad, pues es importante trabajar con una metodología basada en la motivación, que sea activa y participativa, y más concretamente en segundo de la eso, en el área de matemáticas en el tema de resolución de sistemas de ecuaciones.

### 2. Participantes.

Se propone una actividad para un grupo de alumnos de secundaria en la clase de matemáticas de segundo de eso y se pretende trabajar la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas desde las distintas formas de resolverlos: sustitución, igualación, reducción y gráfico.

### 3. Metodología.

El planteamiento se basa en la actuación de grupos colaborativos o cooperativos, mediante la estrategia de los cuatro colores de la siguiente forma: Se separa la clase en grupos de cuatro alumnos, asignándole a cada alumno del grupo uno de los cuatro métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (tarjetas).

A continuación, se separan los grupos y cada alumno se agrupa con su método (tarjeta asignada al grupo) que se llamará el comité de expertos del tema, en ese grupo se pone de manifiesto el método y tienen que sacar una conclusión común sobre el método (15 minutos).

Posteriormente se reúne cada grupo con sus cuatro integrantes, con el fin de que cada experto del tema que le ha tocado se lo explique a sus tres compañeros con el objetivo de que todos sepan sobre todos los métodos (20 minutos).

Por último, el profesor pregunta en cada grupo a un alumno que no sea experto de su tema con el propósito de saber si se han enterado correctamente los integrantes del grupo, y si aún no han logrado comprenderlo completamente, el profesor actúa.

Introducción común que el profesor debe mostrar antes de la actuación:

#### 3.1. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Se llama sistema de ecuaciones lineales a un conjunto de dos o más ecuaciones que tienen idéntica solución, es decir, que las soluciones satisfacen a cada una de las ecuaciones dadas y el grado de cualquier monomio de la ecuación es como máximo 1.

La Solución de un sistema de ecuaciones requiere de tantas ecuaciones independientes como incógnitas se tengan que determinar; así un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas constará de dos ecuaciones independientes; así un sistema de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas constará de tres ecuaciones independientes; etc.

Dos ecuaciones con dos incógnitas forman un sistema, cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

La solución de un sistema es un par de números  $x_1, y_1$ , tales que reemplazando  $x$  por  $x_1$  e  $y$  por  $y_1$ , se satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

#### 3.2. Criterios de equivalencia.

- Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una misma expresión, el sistema resultante es equivalente.
- Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de las ecuaciones de un sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante es equivalente.
- Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema, el sistema resultante es equivalente al dado.
- Si en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos, resulta otro sistema equivalente al primero.
- Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente.

A continuación, se reparten las descripciones de las diferentes formas de resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se reparten las 4 definiciones a cada grupo, es decir, una tarjeta a cada integrante del mismo:

Método de sustitución	Método de igualación
<p>1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.</p> <p>2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.</p> <p>3. Se resuelve la ecuación.</p> <p>4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.</p> <p>5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.</p>	<p>1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.</p> <p>2. Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.</p> <p>3. Se resuelve la ecuación.</p> <p>4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.</p> <p>5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.</p>
Tarjeta 1	Tarjeta 2

Figura 1. Descripción de las diferentes formas de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Método de reducción	Método Gráfico de resolución de sistemas
<p>1. Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.</p> <p>2. La restamos, y desaparece una de las incógnitas.</p> <p>3. Se resuelve la ecuación resultante.</p> <p>4. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.</p> <p>5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.</p>	<p>Cada una de las ecuaciones que forman un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es la de una función de primer grado, es decir, una recta. El método gráfico para resolver este tipo de sistemas consiste, por tanto, en representar en unos ejes cartesianos, o sistema de coordenadas, ambas rectas y comprobar si se cortan y, si es así, dónde. El proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el método gráfico se resume en las siguientes fases:</p> <p>1. Se despeja la incógnita y en ambas ecuaciones.</p> <p>2. Se construye, para cada una de las dos funciones de primer grado obtenidas, la tabla de valores correspondientes.</p> <p>3. Se resuelve la ecuación resultante. Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados.</p>
Tarjeta 3	Tarjeta 4

Figura 2. Descripción de las diferentes formas de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Disposición de los grupos en clase:

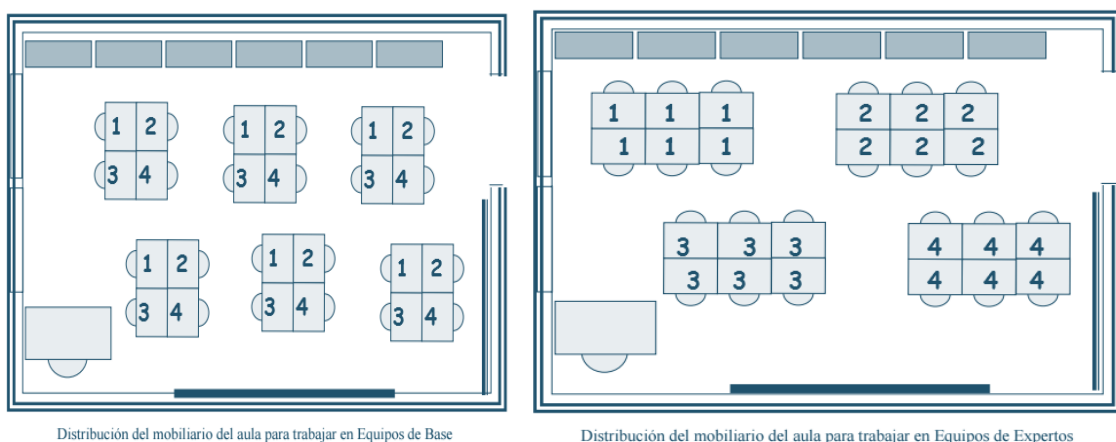


Figura 3. Disposición de los grupos en clase:

Cada Grupo tiene un alumno que es especialista en una forma de resolver el sistema, se concentran en un lugar para informarse y sacar una idea común que luego llevan al grupo donde cada individuo debe explicarlo a los demás integrantes y por último el profesor pregunta a los integrantes del grupo por el método del que no es especialista.

#### 4. Resultados.

Los resultados que presentamos a continuación es una muestra de las notas una clase de 30 alumnos de segundo de enseñanza secundaria obligatoria correspondiente al año 2014, a los que se les había introducido la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas desde una manera tradicional, es decir, el profesor es el que lleva la responsabilidad del aprendizaje, y posteriormente se muestran las notas de una clase con 31 alumnos del mismo curso un año posterior, año 2015, a los que se les había introducido el mismo contenido con el trabajo cooperativo mostrado anteriormente en este trabajo.

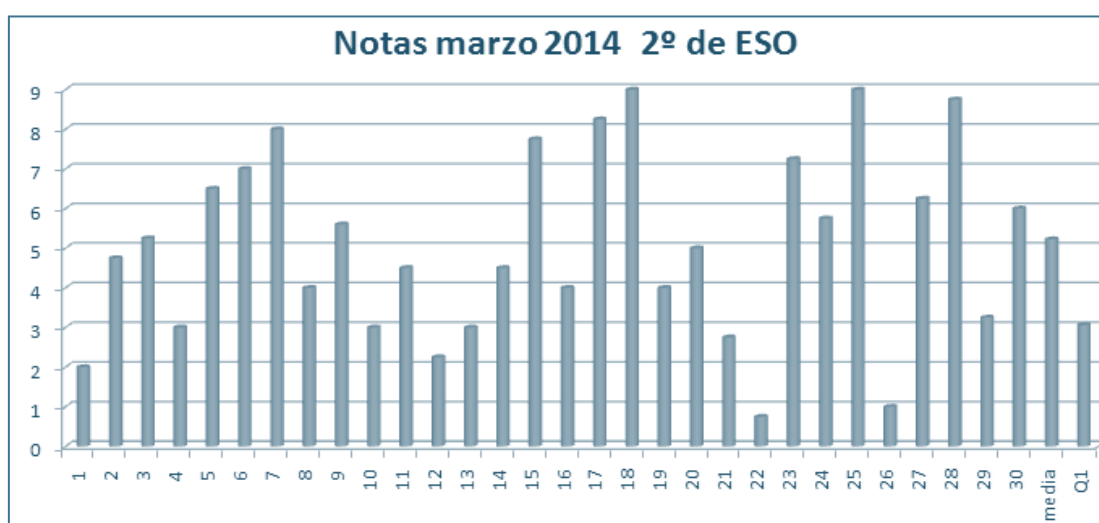


Figura 4: Notas alumnos 2014, enseñanza tradicional.

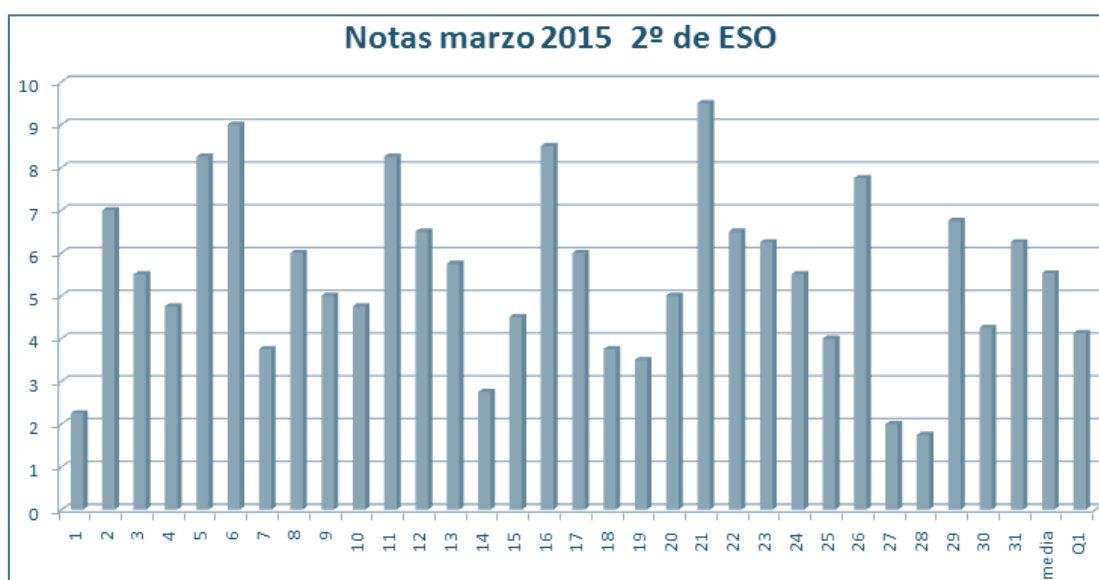


Figura 5: Notas alumnos 2015 trabajo cooperativo.

La media no es muy concluyente ya que son cursos distintos, pero creemos que es bastante relevante el corte del primer cuartil puesto que hay unas notas mínimas más altas.

Y por otro lado la varianza nos muestra que hay un nivel más homogéneo entre los alumnos del trabajo cooperativo de marzo de 2015.

	Marzo de 2014	Marzo de 2015
Media	5,16	5.53
Cuartil 1º ( Q1)	3.06	4.12
Varianza	5.6	4.2

Tabla 1: Medidas estadísticas datos del trabajo

## 5. Discusiones.

A partir de nuestros resultados, vemos la idoneidad de estas prácticas, las cuales están en consonancia con las investigaciones de Santos et al. (2020), donde concluyen que el aprendizaje cooperativo ayudara al alumnado y también al profesorado, estableciendo diferentes canales comunicativos y simbólicos para la mejora de los procesos didácticos.

Por otro lado, se promueve como en la investigación de Morales et al. (2018), la construcción colectiva del aprendizaje, favoreciendo la construcción de conocimientos útiles y significativos para el estudiante, así como la generación de ambientes positivos y motivantes adecuados para un proceso educativo de calidad. Al igual que en sus investigaciones, en nuestro trabajo los estudiantes lograron comprender y utilizar la estrategia de resolución de sistemas de ecuaciones problemas, así como motivarse y mostrar una participación activa en el desarrollo de las actividades didácticas de la clase.

## 6. Conclusiones.

Dada la práctica, los resultados son favorables en cuanto a motivación y entendimiento, pues según argumentas los alumnos, los compañeros le han explicado cada una de las definiciones con sus mismas palabras, es decir, con un lenguaje más coloquial y menos formal para abordar estos nuevos conceptos.

A nivel de resultados académicos parece que hay un aumento de la media con respecto al año anterior, pero este dato no es del todo concluyente puesto que los alumnos son diferentes y debemos hacer la práctica con varias muestras para valorar los resultados.

A partir de la práctica llevada a cabo en el aula, aporta un mayor beneficio al desarrollo de las habilidades sociales, fomenta la integración por parte de todos los alumnos y ayudando a mejorar la discriminación en el aula, pues cada alumno se siente importante ya que lleva una responsabilidad dentro del grupo.

Finalmente pensamos que se puede llegar a lograr un mejor aprendizaje, a través de la comunicación entre iguales, la crítica y la investigación, y así fomentar un compromiso hacia ellos mismos y hacia los demás.

## Referencias bibliográficas.

- Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Barcelona: Paidós.
- Pujolàs, P. (2009). *El aprendizaje cooperativo. 9 ideas clave*. Barcelona: Graó.
- Yus, R. (1997). *Temas transversales hacia una nueva escuela*. Barcelona: Graó.
- Morales, M. L.; García, M. O.; Torres, R. A. y Lebrija, T. A. (2018). Habilidades Cognitivas a través de la Estrategia de Aprendizaje Cooperativo y Perfeccionamiento Epistemológico en Matemáticas de Estudiantes de Primer Año de Universidad. *Formación Universitaria [Revista en Línea]*, 11 (2) 45 – 56. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000200045>

Santos Rego, M., Lorenzo Moledo, M., Godás Otero, A., y Sotelino Losada, A. (2020). Aprendizaje cooperativo, autoimagen y percepción del ambiente de aprendizaje en educación secundaria. *Bordón. Revista De Pedagogía*, 72(4), 117-132. <https://doi.org/10.13042/Bordon.2020.77726>