Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

TRABAJO FIN DE MASTER: IDENTIFICACIÓN Y ANÁLISIS DE CURVAS SINGULARES EN LA CIUDAD DE BURGOS.

CURSO 2020-2021

SANTAMARÍA VICARIO, DAVID

ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

DIRECTOR: SANTIAGO RUIZ MIGUEL

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

En un mundo en el que todo evoluciona muy deprisa y en el que la sociedad demanda personas competentes, capaces y flexibles al cambio casi continúo, en entornos en los que el mayor valor es la capacidad de cooperación y de integración dentro de grupos de trabajo, el profesor de matemáticas debe promover actividades en las que el alumno interactúe con la realidad que le rodea, como mejor garantía de un aprendizaje que perdure a largo plazo. Estas actividades también deben promover en el alumno la capacidad para analizar e interpretar la realidad que le rodea, para desarrollar procesos matemáticos como formular conjeturas, argumentar, realizar deducciones,….

En este TFM se propone una línea de trabajo basada en un aprendizaje cooperativo de la Geometría (Lugares geométricos. Cónicas) en un grupo de 1º de Bachillerato, en donde la interacción con el entorno y su matematización dentro de una educación matemática realista serán los mejores aliados del docente para la enseñanza, ya que estimulan la curiosidad, la atención y el interés de los alumnos, predisponiéndolos para el aprendizaje.

Palabras clave: Geometría, matematización, cónicas, Burgos, autoconcepto

ABSTRACT

In a world where everything evolves very quickly and society demands competent, capable and flexible people to face continuous changes, in environments in which the greatest value is the capacity for cooperation and integration within work groups, a mathematics teacher must promote activities in which the student interacts surrounding reality, as the best guarantee of a long term learning. These activities should also provoke the student into analyzing and interpreting the reality that surrounds him, with the objective of developing mathematical processes such as formulating conjectures, arguing, making deductions,….

A line of work based on a Cooperative Learning of Geometry (Geometric places. Conics) is proposed in this TFM in a group of 1st year college-preparatory students, where interactions with the environment and its mathematizacion within a realistic mathematical education will be the best allies of the professor for teaching, since they stimulate the curiosity, attention and interest of the students, predisposing them for learning.

Keywords: Geometry, mathematization, conics, Burgos, selfconcept

1. INTRODUCCIÓN.

En el presente documento se establece una propuesta de intervención en el aula, con una línea didáctica basada en la transformación del conocimiento científico e institucional contenido en el currículo para que pueda ser aprendido y asimilado por los alumnos, en base a una línea metodológica basada en un aprendizaje cooperativo, planteando trabajos y actividades en las que una vez el docente ha realizado la presentación de los contenidos matemáticos a tratar (lugares geométricos. Cónicas: elipse, hipérbola y parábola) y facilitado al alumno la conexión con sus conocimientos previos, éste pueda explorar e interpretar el mundo que le rodea, formular hipótesis, trabajar con material manipulativo y recursos digitales para llegar a matematizar y modelizar su entorno (una auténtica educación matemática realista) integrando los conceptos explicados en el aula y mejorando su desempeño y competencia matemática. Las actividades diseñadas van a tratar de despertar la curiosidad del alumno en primer lugar, estimulando su atención y atrayendo su interés hacia la geometría y hacia las distintas áreas de las matemáticas.

Se ha escogido este tema porque conecta las matemáticas en general y la geometría en particular con lo que percibe el alumno en su día a día, con elementos que le son familiares, y con los que sin duda se siente identificado. Las curvas del entorno de la ciudad de Burgos acercan el saber matemático y científico al alumno y le van permitir avanzar en su proceso de aprendizaje. El alumno analizará su ciudad desde una perspectiva nueva, aprenderá a “mirar con otros ojos” monumentos, fuentes, fachadas, construcciones y sistemas que le son familiares, examinará las curvas que conforman estos espacios y ampliará su estudio a otras curvas en entornos lúdicos y de ocio que transformarán su manera de concebir la realidad que le rodea.

A través del documento se irá recorriendo la ciudad, para ir abordando los distintos tipos de cónicas y lugares geométricos que el alumno puede identificar en la ciudad, las cuales se van a analizar con GeoGebra. También se van a presentar una serie de actividades de enriquecimiento curricular, analizando algunas curvas que, si bien exceden el ámbito del bachillerato, suponen un reto para alumnos con altas capacidades, como son la cicloide, la catenaria y la clotoide. De igual forma, se van a incluir una serie de actividades para trabajar de manera transversal desde el bloque de Geometría, en combinación con otras materias de secundaria, como son Física y Química, Historia del Arte, Tecnología, Música y Educación Física.

1.1 ESTADO DE LA CUESTIÓN. ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA.

Los resultados de las pruebas PISA 2018 y TIMSS 2019 (*Trends in International Mathematics and Science Study*) de la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) ponen de relieve la importancia de formar alumnos competentes en Matemáticas y en Geometría, para lo cual es necesario revisar y actualizar permanentemente el proceso de enseñanza aprendizaje de las mismas. A través de una *Educación Matemática Realista* (Freudenthal, 1991, como se citó en Lara et al., 2019) mediante actividades de modelización, reflexión, simbolización y algebrización se puede no sólo mejorar competencias y capacidades en el área de Geometría sino además mejorar en otras áreas de las matemáticas (Villarroel y Sgreccia, 2011).

En el seminario para el "*análisis y propuestas sobre el currículo de matemáticas en Bachillerato*" (Diez, 2020) se incide en la necesidad de dirigir la enseñanza de las Matemáticas en general hacia la "*indagación, la experimentación, la argumentación y la formulación de conjeturas*", así como acercar la realidad que rodea al alumno al aula de Matemáticas, fomentando una enseñanza competencial de las mismas, en detrimento de lo rutinario, buscando el apoyo de la tecnología y haciendo un uso adecuado de ésta. También se señala en este seminario el gran condicionante que supone para el docente el exceso de contenido del actual currículo, e invita a racionalizar la extensión y profundidad del mismo, reduciendo la presión institucional para permitir implantar metodologías y estrategias constructivistas, que eliminen de manera efectiva lo rutinario y lo memorístico del aula.

En muchas ocasiones el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría se ha caracterizado por una tendencia a la memorización de conceptos, que frecuentemente se iban apoyando en otros conceptos previos que no habían sido bien comprendidos por los alumnos, siendo también memorizados en un espiral poco eficiente (Barrantes et. al. 2014). Otros estudios señalan también que la clase expositiva y la metodología tradicional, en la que el alumno se limita a replicar, siguen presentes en muchas de las aulas al impartir Matemáticas en general, y en el bloque concreto de Geometría en particular (Fabres, 2016). Por esta razón, se señala la importancia de los escenarios de exploración para lograr la comprensión matemática, favoreciendo la integración del conocimiento y la interdisciplinariedad (García, 2019).

En general, existe acuerdo entre docentes y didactas de las matemáticas en cuanto a la conveniencia de aplicar metodologías y actividades educativas que fomenten la indagación y faciliten el aprendizaje por descubrimiento de los alumnos siguiendo la línea constructivista propuesta por Bruner. Pero, generalmente, al presentar un concepto geométrico nuevo se da más importancia a las definiciones que a los ejemplos, cuando son precisamente éstos los que facilitan la comprensión y lo que mejor entiende el alumno, produciendo un aprendizaje duradero (Gutiérrez y Jaime, 2012).

Diversos autores señalan la necesidad de orientar la enseñanza de la Geometría a través de procedimientos y conceptos contextualizados en la realidad, reduciendo el enfoque abstracto de ciertas propuestas curriculares (Díaz, 2015), realizando un abordaje de la misma de manera progresiva, evolucionando desde un nivel de razonamiento visual hacia otros niveles de mayor complejidad, acorde a la propuesta de Van Hiele, el cual plantea un modelo que ayuda a los docentes a planificar el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría. Para este autor el aprendizaje consiste en la acumulación de *"experiencias adecuadas"* en número suficiente (el docente debe trabajar para que las experiencias resulten efectivas y adecuadas). Por sí solos, los estudiantes no van a lograr un aprendizaje eficaz ni eficiente (al contrastar resultados y tiempo), por lo que el profesor debe procurar diseñar actividades de forma que los alumnos construyan su propia red de relaciones mentales entre los diferentes contenidos matemáticos. Aunque muchos profesores suelen dar la definición matemática del nuevo concepto y luego proceden a representarla con ejemplos es imprescindible que el docente realice un diagnóstico de conocimientos previos y del nivel de razonamiento de sus alumnos (Gutiérrez et al., 2012). El modelo de Shlomo Vinner (1991, como se citó en Gutiérrez et al., 2012) explica cómo se aprenden conceptos matemáticos geométricos (con un contenido visual elevado) y también da pautas para corregir o prevenir errores de aprendizaje. Al oír un concepto matemático se forma en la mente una representación visual de dicho concepto, pero no de la definición, ya que el aprendizaje de la Geometría puede estar muy condicionado por un desajuste en la representación verbal del alumno, por lo que se insiste en la importancia de buscar buenos ejemplos, y los mejores ejemplos son los que el alumno puede encontrar en el mundo que le rodea.

1.2 DIAGNÓSTICO DE NECESIDADES. ANÁLISIS DAFO.

En las pruebas PISA 2018 y en el estudio TIMSS 2019 se valora el dominio de conceptos y procedimientos matemáticos. Los resultados alcanzados en estas pruebas deben servir de base para la toma de decisiones en materia de política educativa.

En España, el nivel alcanzado en las pruebas PISA 2018 en la materia de matemáticas (483) fue inferior a la media de la UE (489) y a la media de los países de la OCDE (490), y si bien la diferencia no es grande, sí que es cierto que se invierte la tendencia respecto a las pruebas de 2012 y sobretodo de 2015, en las que prácticamente fue igual. En estas pruebas también se señala el alto porcentaje de absentismo de los alumnos en esta materia, así como que estos consideran que el clima del aula no es el más adecuado para el aprendizaje (39%).

En cuanto a las pruebas TIMSS 2019, España también se sitúa por debajo de la media de la UE y de la OCDE, añadiéndose en el informe además que hay una diferencia significativa en el rendimiento por géneros (esta afirmación en el documento es bastante seria, y considerando que debería someterse a contraste y actuar en consecuencia cuanto antes).

A parte de estas pruebas, en varios estudios se señala el problema que supone la desmotivación de los alumnos de secundaria para estudiar y aprender matemáticas, tal y como indica Gómez-Chacón (2010, como se citó en Ricoy et., al, 2018), subrayando la necesidad de analizar y entender el componente afectivo para conseguir una mejor comprensión en las matemáticas, y tener en cuenta los factores y aspectos que intervienen en las emociones, las actitudes, el afecto o incluso en las creencias ya que cuidar todas estas consideraciones puede emplearse de forma provechosa para la enseñanza de las matemáticas (Ricoy et., al, 2018). Muchas veces los alumnos se muestran desinteresados porque vienen percibiendo las matemáticas como una materia árida sin mucha relación con el mundo exterior, en la que el interés del alumno va disminuyendo a través de las distintas etapas educativas (Mato et al., 2014), y se van perfilando sentimientos de rechazo que se agravan con el tiempo, asociados a un autoconcepto bajo y a una autoestima negativa (Hidalgo et al, 2004).

González y Reidl, (2015, como se citó en Ricoy et al., 2018) consideran que la motivación en la materia de Matemáticas se relaciona directamente con el rendimiento académico, y que aumenta en el alumnado cuando se incrementa su satisfacción con las actividades llevadas a cabo en el aula (Lim y Chapman, 2013, como se citó en Ricoy et. Al., 2018).

En este trabajo se plantea una intervención educativa contextualizando en la realidad y en el entorno una parte del bloque de Geometría (Lugares Geométricos. Cónicas), con un objetivo principal de mejorar el resultado académico, pero considerando y encarando las situaciones emocionales descritas anteriormente, de forma que esta intervención también ayude a mejorar el clima de convivencia en el aula (mejorando las opciones de aprendizaje), gracias a la formación de grupos cooperativos en los que los alumnos se sientan integrados, en los que se fomente una relación de respeto y colaboración entre todos los miembros.

MATRIZ DAFO.

Se plantea un análisis DAFO a partir del estado de la cuestión para realizar un diagnóstico de la situación inicial, del nivel del que se parte y también para valorar la problemática que pueden tener lugar al llevar a cabo la actividad planteada en este TFM.

	ASPECTOS NEGATIVOS	ASPECTOS POSITIVOS
FACTORES INTERNOS	***Debilidades*** • Tiempo para desplazarse por la ciudad y analizar el entorno. • Disposición de recursos tecnológicos por el alumnado y sus familias.	***Fortalezas*** • Actividad contextualizada: situar conceptos matemáticos en lo cotidiano • Carácter práctico: facilitar la matematización y modelización al alumno. • Actividad innovadora y creativa. • Sencillez y facilidad su implantación. • Economía.
FACTORES EXTERNOS	***Amenazas*** • Presión del centro y de la comunidad educativa para cumplir con la programación didáctica. • Alumnos con sobrecarga de trabajo • Descompensación de grupos: alumnos muy activos frente a alumnos pasivos. • Alumnos con un nivel de conocimientos previos bajo. • Disponibilidad del aula de informática para llevar a cabo la modelización. • Participación del alumnado: motivación. Combinar adecuadamente el sentido matemático (modelizar) del alumno con su percepción del entorno. • Reticencia familiar a realizar una actividad en el exterior. • Complejidad de algunos recursos para el tratamiento transversal con otras materias (papel cebolla, papel de colores, tubos e hilos, espejo…)	***Oportunidades*** • Mejorar de la competencia matemática (en Ciencia y Tecnología) y competencia digital. • Mejorar del autoconcepto de los alumnos. • Mejorar del clima de convivencia en el aula. • Disminuir la diferencia del desempeño matemático entre sexos. • Mejorar el desempeño en otras materias.

Tabla 1. Análisis DAFO.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL.

- Emplear la interacción con el entorno para mejorar la competencia matemática particularmente la relativa al bloque de Geometría (Lugares geométricos y cónicas)y competencias básicas en ciencia y tecnología,

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Crear climas de aprendizaje favorables mejorando la convivencia en el aula, y mejorar el autoconcepto de los alumnos en relación a sus capacidades y a su potencial en la materia de Matemáticas.
- Mejorar el desempeño de los alumnos en otras áreas matemáticas.
- Desarrollar y mejorar otras competencias clave, fundamentalmente:
  - Competencia digital: analizar curvas del entorno urbano a través de las TIC (fundamentalmente Geogebra y Google Earth).
  - Competencia de Conciencia y expresiones culturales: fomento del respeto del entorno y del medio ambiente urbano a través del conocimiento del patrimonio histórico, cultural y artístico de su ciudad.
  - Competencia social y cívica: fomento del trabajo en equipo a través de un aprendizaje cooperativo.
- Relacionar contenidos de la materia de matemáticas con la vida cotidiana.
- Plantear actividades para abordar una enseñanza transversal de las matemáticas con otras materias, a través del trabajo interdisciplinar.
- Plantear actividades de ampliación para el enriquecimiento curricular, orientado a alumnos de altas capacidades.

2.3 HIPÓTESIS DEL TFM.

Con el trabajo planteado se establece la siguiente hipótesis:

"Una enseñanza contextualizada de la geometría, utilizando como objetos matemáticos monumentos, fuentes, arcos….del entorno urbano de la ciudad, ayuda a los alumnos a alcanzar un aprendizaje matemático de mayor calado, consolidable a largo plazo"

3. MARCO TEÓRICO

En este apartado se van analizar modelos que dan pautas sobre cómo aprende el alumno, para planificar actividades e implantar con garantías este proyecto didáctico en el aula, considerando aspectos relativos a la transformación del saber matemático por el docente para que sea asimilable por el alumno (transposición didáctica). También se va a analizar en qué consiste la metodología propuesta (factores y recursos a considerar para éxito de la misma) para implantar en el aula las actividades indicadas en el TFM y alcanzar los objetivos.

3.1 LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA. DEL SABER SABIO AL SABER ENSEÑADO.

Para que un alumno pueda pasar del “no saber” al “saber” requiere un gran trabajo por parte del docente en cuanto a la forma en la que va a presentar un contenido a sus alumnos. Michel Verret, considerado el padre del transposición didáctica, define la didáctica como “la transmisión de conocimientos de aquellos que saben (profesores) a aquellos que no saben (alumnos). Yves Chevallard, a partir de la obra de Verret, e incorporando elementos de autores Bernau y Brouesseau, enuncia la *teoría antropológica de lo didáctico*. Según este autor, tenemos tres tipos de saberes (Chevallard, 1991):

- Saber erudito, saber sabio (Científico): es el conocimiento científico, contiene el concepto a enseñar.
- Saber programado (Legislativo): el saber sabio sufre una primera transformación a través de las disposiciones y los marcos normativos y legislativos (RD, CCAA, PEC…), integrados en los distintos currículos.
- Saber enseñado (Didáctico): El docente ha modificado un contenido del saber y lo ha adaptado a su enseñanza, a partir de lo indicado en el currículo autonómico y a partir de los conocimientos previos de los alumnos.

En la didáctica de las matemáticas nos encontramos con una terna: alumno-profesor y saber. Aplicando un enfoque constructivista a la enseñanza de los lugares geométricos y las cónicas, tendremos las siguientes consideraciones:

- Piaget: el alumno aprende por su interacción con el entorno, pasando por distintas etapas conceptuales (desde lo físico a lo abstracto). Dicho de otra forma, el alumno recorre la ciudad e identifica formas en el entorno que luego analizará.
- Vygostky: el alumno aprende a través de la interacción con el medio, con su grupo de compañeros (iguales) y con el docente.

- Ausubel: el alumno aprende si puede relacionar un conocimiento previo que ya posee con el nuevo conocimiento. Lógicamente, si un alumno no sabe lo que es una circunferencia, o tiene errores conceptuales importantes, no podrá integrar el concepto de elipse o parábola.

En la transposición didáctica (TD) el docente selecciona un contenido matemático y lo modifica o adecua para que lo puedan aprender sus alumnos (lo cual no significa hacer una simplificación o reducción burda de dicho contenido). Divide a su vez la transposición en transposición didáctica *stricto sensu*, esto es, imaginar una versión didáctica del contenido para ser enseñado, y *sensu lato*, que es la creación de un objeto de enseñanza, una contextualización, un puente entre los saberes (entorno).

Antes de transmitir el conocimiento, el docente también debe dar respuesta a una serie de cuestiones. Situándonos dentro de la propuesta de este TFM se tienen las siguientes:

- *¿Qué se va a enseñar?* Lugares geométricos y curvas cónicas. Interpretación y análisis con programas de Geometría Dinámica (GeoGebra).
- *¿Para qué se va a enseñar?* Para alcanzar un aprendizaje significativo del bloque de geometría, mejorando la competencia matemática y en ciencia y tecnología y otras competencias clave.
- *¿Cómo se va a enseñar?* Analizando curvas de su entorno (indicadas por el profesor), a través de una experiencia de aprendizaje cooperativo con el resto de sus compañeros, guiado por el profesor. Realizando un modelo de las mismas en un programa informático.

3.2 EL MODELO DE VAN HIELE.

El modelo Van Hiele es un modelo para la enseñanza de la geometría aplicable a cualquier nivel educativo, que tiene su origen en la tesis doctoral de Pierre Van Hiele. Resulta de utilidad para ver el grado de desarrollo cognitivo de los alumnos en geometría, así como para explicar las dificultades que muestran algunos estudiantes para realizar demostraciones y desarrollar procesos cognitivos de alto nivel (Barrera y Reyes, 2015). El modelo se sustenta en dos aspectos fundamentales:

- Descriptivo: explica cómo razonan los alumnos a través de cinco niveles de razonamiento (desde lo intuitivo hasta lo simbólico y abstracto). Orientado a analizar el estado de desarrollo en que se encuentra un estudiante.
- Orientativo preceptivo: indica las pautas a seguir en la organización de la enseñanza de la Geometría por medio de fases de aprendizaje.

Los niveles de razonamiento no tienen que ver con la edad del alumno, y dependen del aprendizaje y desarrollo individual de cada uno. De acuerdo al modelo, no se puede pasar a un nivel superior si no se tiene dominio del nivel inferior, y para el aprendizaje significativo de la Geometría se requiere avanzar en el orden establecido, construyendo relaciones significativas con los conocimientos previos para que el alumno pueda ir incorporando los nuevos conocimientos. Cada nivel cuenta con un *lenguaje y simbología particular*, por lo que avanzar entre niveles requiere asimismo de *avanzar en la competencia lingüística*. Los niveles se articulan en fases orientadas a señalar pautas y sugerencias a la acción docente, constituyendo una de los principales atractivos del modelo.

3.2.1 NIVELES DE PENSAMIENTO GEOMÉTRICO.

El modelo nos indica cómo se produce el desarrollo en el razonamiento geométrico del alumno, que evoluciona de manera secuencial conforme a los siguientes niveles:

- *Nivel 1: Reconocimiento o visualización*. El alumno reconoce a través de los sentidos, fundamentalmente vista y tacto. Ve formas y figuras individuales, no generaliza y no reconoce partes, si no que percibe elementos en su totalidad. Solo percibe propiedades físicas-geométricas, formas.
- *Nivel 2: Análisis*. Percibe clases de formas. Reconoce propiedades matemáticas y *diferencia partes* en lo que ve. Detecta propiedades deducidas de la observación pero no es capaz de relacionar propiedades y tampoco puede realizar clasificaciones lógicas.
- *Nivel 3: Ordenación y clasificación (deducción informal).* El alumno puede describir figuras mediante definiciones concretas, identifica las condiciones necesarias y suficientes en geometría, y cómo unas propiedades se derivan de otras. Reconoce propiedades y es capaz de realizar justificaciones informales pero no comprende del todo el significado de axiomas y teoremas.
- *Nivel 4: Razonamiento o deducción formal*. El alumno puede llegar a un resultado y resolver una situación-problema por varios caminos, argumentando y explicando lo que han hecho. Razonan y relacionan las propiedades geométricas de los objetos, pero aún requiere de la representación gráfica para realizar sus demostraciones.
- *Nivel 5: Formalismo matemático*. Pueden trabajar con diferentes situaciones axiomáticas, comprenden la geometría de manera abstracta y no tienen necesidad de representar los objetos geométricos

Propiedades de los niveles de Van Hiele:

- <u>Secuencialidad</u>: no se puede alterar el orden para alcanzar los distintos niveles.
- <u>Recursividad y adyacencia</u>: el pensamiento implícito de un nivel se vuelve explícito en el nivel siguiente (y el éxito de un nivel dependerá del grado de asimilación de los conceptos del anterior nivel)
- <u>Lenguaje específico</u>. Distinción de símbolos y lenguaje. Cada nivel conecta y relaciona los objetos y los conceptos geométricos de manera diferente, dando un significado particular para los símbolos matemáticos y el lenguaje. Para que personas que razonan en niveles distintos se entiendan (docente-alumno), debido a esta diferenciación por niveles, es muy conveniente que el profesor cuide el lenguaje empleado.
- <u>Continuidad y progresividad</u>: El paso entre los niveles es progresivo y puede darse el caso de que no llegue a alcanzarse un nivel nunca (la edad no determina el paso de niveles).
- <u>Localidad</u>: un alumno puede razonar en niveles distintos en distintas partes de la geometría. Pero como señalan Gamboa y Vargas (2013), alcanzado un nivel en un aspecto geométrico es más accesible el alcanzar dicho nivel en otros campos de la geometría.

3.2.2 FASES DE ENSEÑANZA APREDIZAJE DE LA GEOMETRÍA.

El modelo también establece una serie de pautas o fases de enseñanza-aprendizaje que sirven de guía al docente para diseñar actividades adecuadas para que el alumno progrese de un nivel a otro. Estas fases son las siguientes: información, instrucción dirigida, explicitación, instrucción libre e integración.

El avance entre niveles se produce de manera progresiva, pero si las actividades que se plantean no permiten al alumno ir desarrollando de manera secuencial su razonamiento geométrico no alcanzará un aprendizaje significativo, siendo por el contrario memorístico. En el siguiente diagrama se resumen niveles, fases y etapas del modelo de Van Hiele.

NIVELES DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO.	PROPIEDADES DEL MODELO.	FASES DE PROCESO ENSEÑ.-APRENDIZ.
NIVEL 1. VISUALIZACIÓN NIVEL 2. ANÁLISIS NIVEL 3. CLASIFICACIÓN. NIVEL 4. RAZONAMIENTO FORMAL. NIVEL 5. ABSTRACCIÓN	▪ SECUENCIALIDAD ▪ RECURSIVIDAD ▪ PARTICULARIDAD DEL LENGUAJE ▪ PROGRESIVIDAD. ▪ LOCALIDAD.	FASE 1. INFORMACIÓN FASE 2. INSTRUCCIÓN GUIADA FASE 3 .EXPLICITACIÓN. FASE 4. INSTRUCCIÓN LIBRE FASE 5. INTEGRACIÓN

Figura 1. Niveles, fases y propiedades del modelo de Van Hiele. Elaboración propia

3.3 MATEMATIZAR EL ENTORNO EN LA BASE DE LA PIRÁMIDE EDUCATIVA.

La competencia matemática se refiere a la capacidad de un individuo para organizar los procesos matemáticos: formular, emplear e interpretar/evaluar. *Matematizar* la realidad es el proceso de construcción de un modelo matemático, o como consideraba Galileo, leer la naturaleza (Gómez y Maestre, 2008). Supone pasar de una situación real, puramente física, a una estructura matemática, puramente conceptual, y de esta forma se presenta dentro de las pruebas de PISA 2018, en las que se incluye como una de las siete capacidades matemáticas fundamentales (OECD, 2019). A su vez, Freudenthal (1991, como se citó en Lara et al., 2019) dentro de una educación matemática realista (basada en la interacción con el entorno) distinguió entre matematización horizontal, en la que se pasa del mundo físico al mundo de los símbolos (abstracción), y la matematización vertical, en la que se pasa del planteamiento del problema al resultado y viceversa, dentro del mundo de los símbolos (Lara et al., 2019).

La Geometría es un área dentro del conocimiento matemático integrada en la categoría de espacio y forma, de tal forma que a través de un proceso de abstracción se transforma un ente físico en un lenguaje simbólico (matematización horizontal: pasamos de un estímulo visual a una descripción algebraica), lo cual permite describir sus atributos y propiedades, así como su relación con el resto del mundo físico. Todo este sistema de relaciones se articula a través del dominio de los procesos matemáticos descritos en la figura 2 (formular, emplear, interpretar y evaluar). Dominar esta categoría supone la "*descodificación y codificación de la información visual, la navegación e interacción dinámica*". La geometría se relaciona con las funciones y el álgebra, ya que se necesitan para analizar la trayectoria de un punto que se mueve en un lugar geométrico (no basta con la simple visualización).

Diversos autores (Alsina, 2010) sitúan la matematización del entorno [(*)] en la base de la pirámide educativa, a partir de la cual, a través de sucesivas fases o etapas, se puede construir el razonamiento geométrico de una persona.

La Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas (CEMat) realizó un seminario para el análisis del currículo de bachillerato (Castro Urdiales, 6-7-8 Marzo 2020), con profesores y profesoras de las asociaciones que la componen, entre ellas la RSME. Se concluyó que los docentes de matemáticas en bachillerato deberían disponer de más tiempo para llevar a cabo de manera efectiva una metodología constructivista, con mayor dedicación a la indagación, al planteamiento de conjeturas, así como a experimentar, argumentar y realizar demostraciones (Diez, 2020) planteando problemas y situaciones matemáticas en contextos realistas, incorporando la tecnología al aula con un "*enfoque más conceptual y* *competencial y menos rutinario y memorístico*" y haciendo, no obstante, especial énfasis en el razonamiento y el rigor, que se ha ido perdiendo con los distintos cambios curriculares.

Ser competente en matemáticas significa poseer los conocimientos y destrezas necesarios para hacer frente, fuera del aula, a los desafíos y a la diversidad de situaciones que se plantean, e identificar los conceptos matemáticos que subyacen al mundo que nos rodea. Estas situaciones no vienen acompañadas de un manual en el que se indique cómo se ha de resolver o enfrentar el problema (OECD, 2019). En la siguiente figura se puede ver el *"modelo de competencia matemática en la práctica"*, adaptado a partir de los informes PISA de 2018 (Lara et al, 2019)

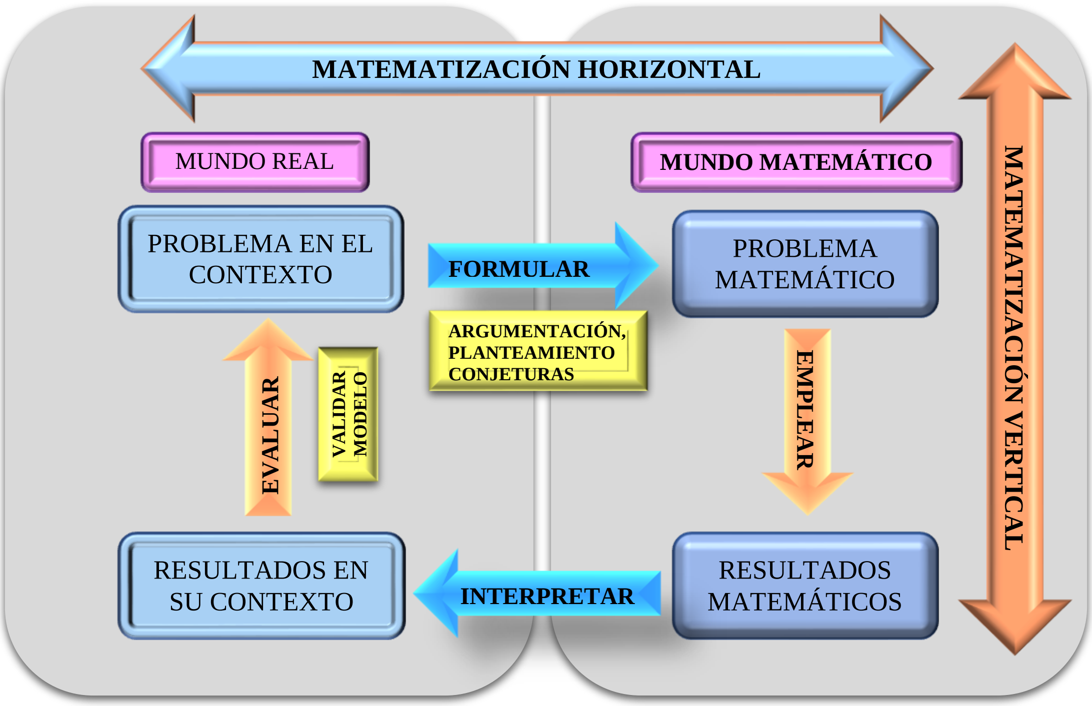


Figura 2 Proceso de matematización de un problema real (Adaptado de Lara et al. 2019 y OCDE (2018). Marco y pruebas de evaluación PISA 2015)

(*) La OCDE da una definición amplia de matematización, ya que es el propio hecho de pasar de una realidad física a un lenguaje simbólico matemático, planteando un modelo que describa y se ajuste a dicha realidad.

3.4 APRENDIZAJE COOPERATIVO: EL GRUPO COMO RECURSO METODOLÓGICO.

La cooperación es básicamente trabajar en equipo para cumplir unos objetivos comunes. El aprendizaje cooperativo es una metodología educativa basada en el trabajo en equipo, a través de la formación de grupos heterogéneos y mixtos cuyo objetivo final es la construcción del conocimiento individual y grupal y la adquisición de competencias.

Los alumnos trabajan de forma coordinada en grupos pequeños, en base a unos objetivos vinculados entre sí, de forma que cada individuo sólo consigue su objetivo si los demás también lo consiguen. Es cooperativo porque la actividad está orientada y dirigida muy de cerca por el profesor. En este TFM se plantean el aprendizaje cooperativo a través de una técnica similar a los *grupos de investigación*.

En el marco legislativo, dentro de las distintas leyes y órdenes educativas se remarca la conveniencia emplear este metodología de aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas.

Este tipo de aprendizaje consta de varias características esenciales (Lobato, 2018): interdependencia positiva (alcanzar un objetivo depende de la colaboración, se pone en valor los éxitos del grupo), responsabilidad individual y grupal, interacción estimuladora y habilidades emocionales.

El profesor debe especificar claramente los objetivos, diseñar una actividad realista adecuada al grupo al que va dirigida, explicar dicha actividad a los alumnos, supervisar el desarrollo y seguimiento de la actividad y realizar la evaluación del aprendizaje (Johnson et al., 1999). Para garantizar el éxito de la intervención se debe realizar un diagnóstico inicial para conformar los grupos (es una parte vital) y terminar de planificar y detallar la actividad antes de presentársela a los alumnos.

Los resultados de esta metodología bien implantada son un mayor rendimiento académico, un fortalecimiento de autoconcepto individual y unas mejores y más positivas relaciones entre alumnos (Johnson et al., 1999). El aprendizaje cooperativo se presenta, por tanto, como una propuesta que ayuda a cumplir el objetivo general y varios de los específicos señalados en este trabajo.

A continuación se presenta de manera esquemática las claves de esta metodología (Mapa de la Cooperativa de Enseñanza José Ramón Otero. Colegio Ártica (Madrid):

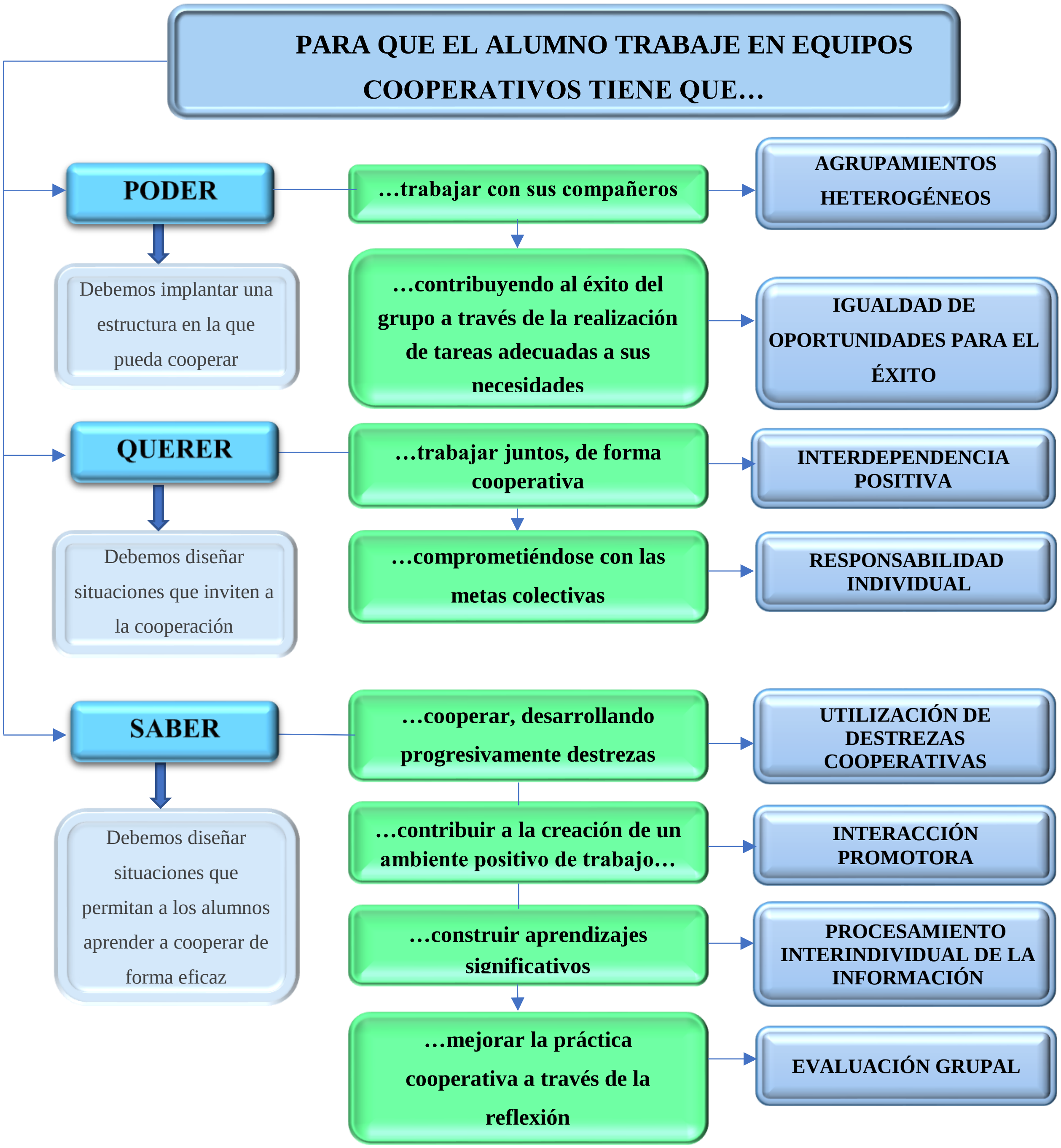


Figura 3. Mapa conceptual para el trabajo cooperativo. Cooperativa de Enseñanza José Ramón Otero. Colegio Ártica (Madrid) Obtenido de: https://www.jrotero.com/nuestro-centro/

3.5 MATERIAL MANIPULATIVO COMO RECURSO DIDÁCTICO.

"*El alumno tiene la inteligencia en la mano*" Con esta frase de María Montessori, médica y educadora de referencia en Europa, se pueden resumir los beneficios relativos al empleo de material manipulativo en el aula.

Podemos definir como *material manipulativo* cualquier recurso físico, comprado o hecho a mano, que sirva al alumno para comprender conceptos, representar ideas y establecer relaciones matemáticas, visualizando, tocando y experimentando con éste.

Cada vez es más frecuente el empleo de materiales manipulativos en el proceso de enseñanza de la geometría debido a que comporta números beneficios para el aprendizaje de los alumnos. Entre ellos, podemos destacar que:

- Fomentan la reflexión sobre los conceptos matemáticos y ayudan a comprender procesos, lo cual permite ir construyendo y modelizando ideas matemáticas propias.
- Permiten visualizar de una forma dinámica lo que el libro de texto expone de forma estática y que, en ocasiones, puede llevar a errores de interpretación.
- Estimulan el interés por el área de matemáticas, despiertan la curiosidad de los alumnos y potencian su creatividad.
- Potencian el trabajo en grupo, ya que pueden crear situaciones de intercambio de ideas y contraste de ellas entre los miembros de este.
- Ayudan a visualizar la resolución de problemas matemáticos.
- Fortalecen la autoestima, ya que ayudan a superar dificultades y/o barreras interpuestas por el propio alumno hacia la materia, favoreciendo así un aprendizaje más autónomo y seguro.

Uno de los recursos que se propone emplear en este TFM es el origami o papiroflexia, ya que a través de esta técnica se puede aprender Matemáticas, trabajando conceptos como giros, simetrías y traslaciones, desarrollándose también otras habilidades (constancia y perseverancia en el trabajo, capacidad de observación y de análisis…). Además tanto neurólogos como psicólogos aconsejan su uso porque se ha demostrado que los movimientos para el doblado y plegado de papel movilizan y estimulan más zonas del cerebro que cuando se trabaja con regla y compás. (Garrido, 2015).

3.6 MEJORA DEL AUTOCONCEPTO Y MEJORA DEL DESEMPEÑO MATEMÁTICO.

El autoconcepto es la imagen que tenemos de nosotros mismos, es decir, cómo nos percibimos, estando directamente relacionado con la autoestima y con factores emocionales y afectivos. Es uno de los constructos a los que más tiempo se les ha dedicado por su influencia en el rendimiento, y muchos estudios demuestran una correlación positiva entre ambos, además de tener una influencia directa en la conducta de los estudiantes. Como señala la profesora Gómez-Chacón (MEyC, 2005) en el proceso de aprendizaje de un estudiante uno de los factores que mayor peso tiene es precisamente el autoconcepto, y alumnos con mayor ansiedad tienen un menor rendimiento académico y menor confianza en sus capacidades matemáticas, es decir, autoconcepto y rendimiento en matemáticas se retroalimentan.

Además de lo anterior, nuestro cerebro necesita ser estimulado, y sentir curiosidad para dirigir nuestra atención y poner todas nuestras capacidades al servicio del aprendizaje (Lázaro, 2018). De lo contrario, filtros en nuestros cerebro hacen que descartemos una actividad por considerarla intrascendente. Dicho de otra forma, clasificamos los estímulos según los percibimos y los desechamos (95% veces) o seguimos indagando sobre ellos si sentimos curiosidad.

La propuesta de intervención planteada comienza por despertar la curiosidad del alumno, lo predispone para la acción (indagar y construir su aprendizaje) movilizando el sistema de recompensas del cerebro para que el sistema se retroalimente. Si se logra implantar con éxito se consigue mejorar el rendimiento matemático del alumno, mejorando también su autoconcepto y su autoestima (el alumno se ve competente y ve que puede aprender). En el siguiente esquema se resumen lo indicado anteriormente, partiendo del estímulo exterior

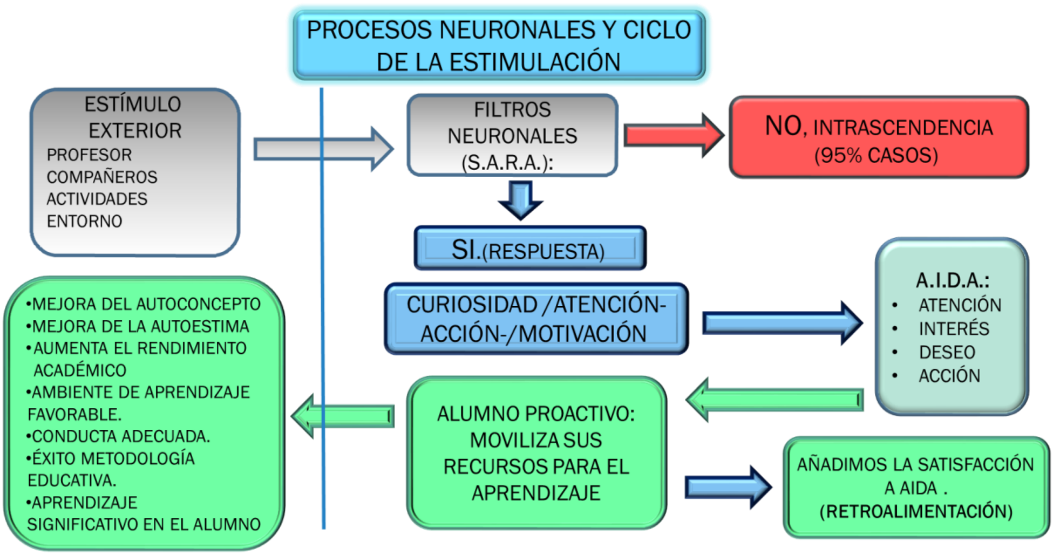


Figura 4 Reacción del cerebro ante un estímulo. Elaboración propia (Adaptado de Lázaro 2018)

4. PROPUESTA METODOLÓGICA.

La línea de trabajo planteada en el TFM se sustancia en llevar a cabo una experiencia en un grupo de bachillerato para matematizar la realidad del entorno urbano de la ciudad de Burgos (educación matemática realista), a través de un aprendizaje cooperativo guiado por el profesor, en el cual se plantea a los alumnos el análisis e identificación de una serie de curvas distribuidas por la ciudad, las cuales tendrán que ser estudiadas y modelizadas desde un punto de vista geométrico y matemático por los alumnos. La propuesta consta de nueve sesiones de trabajo, que se describen en el punto 4.2 "Sesiones de trabajo".

4.1 JUSTIFICACIÓN CURRICULAR DEL MODELO PLANTEADO

El currículo y las especificaciones que regulan la implantación del bachillerato en Castilla y León se indican en la ORDEN EDU/363/2015 de 4 de Mayo y en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, en la cual se indica que "*las actividades que se diseñen en esta etapa capacitarán al alumnado para el autoaprendizaje y el trabajo en equipo*" (Artículo 8. Principios pedagógicos), fomentándose la motivación e integrándose el uso de las TIC´s dentro de las mismas, implantando dichas actividades con una *metodología participativa que favorezca el trabajo individual, cooperativo y en equipo*. El artículo 22 de la misma Orden habla de los "*Materiales y recursos de desarrollo curricular*", de forma que se añadirán a materiales tradicionales otros de carácter innovador, integrados en diferentes soportes (se encuadran aquí los materiales señalados en el punto 4.3), señalando además que *el docente elaborará sus propios recursos de desarrollo curricular* (aprobados no obstante por el departamento didáctico y supervisado por la inspección educativa).

Respecto a los principios metodológicos de la etapa se considera la inclusión de competencias clave un aspecto esencial de los mismos. Por lo tanto, se deben planificar los nuevos aprendizajes en base a los conocimientos previos del alumno, con "*conceptos puente*" que permitan a las estructuras cognitivas del alumno adaptarse para ir incorporando y consolidando los nuevos aprendizajes, *evitando aprendizajes memorísticos* (Diez, 2020). Dentro de esta línea metodológica por competencias se señala la importancia de estimular y mantener la motivación como un elemento esencial del aprendizaje, siendo un factor clave en el rendimiento académico, en la cual se integran factores cognitivos y emocionales. En casi todos los ámbitos educativos se aconseja el empleo de metodologías contextualizadas en las que se fomente el interés del alumno y se facilite su participación para la adquisición y puesta en práctica de conocimientos en *entornos reales* (fomentar tareas auténticas, que supongan un reto al alumno para que movilice todos sus recursos y capacidades intelectuales, incrementando su autonomía de cara a mejorar el aprendizaje y su autoconcepto). Se sitúa al *aprendizaje cooperativo* como la estructura en la que apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje en el aula, de forma que se proceda por parte de toda la clase, de forma conjunta, a la resolución de las actividades planteadas, constituyendo el intercambio de ideas uno de los ejes principales para la construcción del conocimiento. De igual forma se remarca la *importancia del grupo en el logro académico*, considerándose incluso como un recurso metodológico indispensable para un clima de convivencia adecuado. El trabajo cooperativo, convenientemente estructurado, favorece la capacidad de trabajo individual y en equipo, y genera un estímulo motivacional y afectivo. Teniendo en cuenta todo lo anterior, el profesor debe plantear secuencias y actividades de enseñanza aprendizaje para que los alumnos desarrollen al máximo habilidades, capacidades, actitudes y pongan en práctica los conocimientos adquiridos, es decir, la formación de un alumno competente que integre de manera natural el uso de las TIC en el desarrollo de las tareas propuestas, capaz de expresar sus ideas adecuadamente en público.

Dentro de los objetivos señalados para la materia de Matemáticas, se pone de relieve el carácter instrumental de la misma y su importancia para facilitar la adquisición de conocimientos de otras materias gracias al desarrollo del razonamiento, del pensamiento lógico-deductivo, geométrico y espacial y de la creatividad. Es importante que la metodología permita al alumno apoyarse en lo que ya conoce (la "zona de desarrollo próximo" de Vygotsky y conocimientos previos de Ausubel) para ir ampliando progresivamente con nuevos conocimientos y capacidades, para una formación conceptual y procedimental adecuada, que se puede resumir en saber qué y porqué y saber cómo.

4.1.1 CONTENIDOS, CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES EVALUABLES.

La actuación va dirigida a alumnos de 1º Bachillerato de Ciencias, dentro del bloque de geometría (en una reflexión final se plantea la posibilidad para ampliarlo a otros grupos).

MATEMÁTICAS I. 1º CURSO. BLOQUE DE GEOMETRÍA		
CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
Lugares geométricos del plano. Cónicas. Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. Ecuación y elementos	5.- Manejar el concepto de lugar geométrico en el plano. Identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos usuales, estudiando las ecuaciones reducidas de las cónicas y analizando sus propiedades métricas.	5.1.-Conoce el significado de lugar geométrico, identificando los lugares más usuales en geometría plana así como sus características. 5.2.-Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos en las que hay que seleccionar, estudiar posiciones relativas y realizar intersecciones entre rectas y las distintas cónicas estudiadas.

Tabla 2 Currículo relativo a lugares geométricos de la orden EDU363/2015.

4.1.2 TRABAJAR PARA ADQUISICIÓN DE LAS COMPETENCIAS CLAVE.

Con las actividades planteadas también se van a trabajar las siguientes competencias clave, señaladas en la orden EDC/65/2015 de 21 de Enero, de acuerdo a la siguiente tabla:

COMPETENCIA CLAVE	DESCRIPTOR	DESEMPEÑO/INDICADOR DE LOGRO
Competencia en comunicación lingüística	Comprender el sentido de los textos escritos y orales.	Identifica los datos y deduce la situación problemática planteada por la lectura del enunciado. Expone oralmente ideas con orden y coherencia sin apoyo visual durante, al menos, 5 minutos.
Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología	Resolver los problemas planteados, identificando a partir de los datos las estrategias oportunas.	Comprende la importancia de la Geometría para modelizar el entorno que le rodea. Integra los conocimientos previos de Geometría, de Matemáticas y de otras materias.
Competencia digital	Manejar con solvencia herramientas digitales para la construcción progresiva de conocimiento.	Manejo de Google Earth, Google Maps y programas de Geometría dinámica como GeoGebra para matematizar el entorno. Uso de calculadora y hoja de cálculo (Excel) como herramientas de apoyo.
Conciencia y expresiones culturales	Mostrar respeto hacia el patrimonio cultural se su entorno, en sus distintas variantes. Conocer el origen de algunos monumentos de su ciudad.	Aprecio de distintas expresiones artístico culturales, del entorno urbano y social a través del análisis geométrico de algunas de sus manifestaciones.
Competencias sociales y cívicas	Respetar opiniones distintas a la suya, ser capaz de llegar a acuerdos y comprender las virtudes del trabajo cooperativo. Mostrar tolerancia a las personas y haca las ideas, gustos…diferentes a los suyos	Se relaciona con sus compañeros adecuadamente, respeta y tiene en consideración sus opiniones, las contrasta con sus ideas de manera equilibrada, y es flexible para reconocer errores en sus argumentaciones, y se muestra tolerante con las de sus compañeros. Se integra en distintos grupos de trabajo y se involucra en el éxito colectivo, sin mostrarse individualista.
Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor	Mostrar confianza en las posibilidades para cumplir los objetivos y entusiasmo por las actividades	Es capaz de trabajar de manera autónoma, mostrando iniciativa y equilibrio para organizar su propio trabajo. Se involucra en la resolución de actividades propuestas y se muestra confiado y decidido para resolverlas.
Competencia para aprender a aprender	Ser consciente y objetivo en relación a su situación académica y es capaz de valorar objetivamente sus opciones.	Se moviliza y planifica los recursos a su alcance, materiales e intelectuales, de cara a buscar la mejora continua de sus conocimientos y capacidades. Busca información, se interesa y es capaz de relacionarla con las explicaciones vistas en clase. Poco a poco va dando pasos hacia un aprendizaje autónomo.

Tabla 3. Integración de las competencias clave en la enseñanza de la Geometría. Elaboración propia.

4.1.3 ABORDAJE DE ELEMENTOS TRANSVERSALES.

Señalados en el RD 1105/2014, son aquellos elementos para trabajar en varias materias, de forma interdisciplinar. Con las actividades propuestas en este TFM, se van a trabajar fundamentalmente de la siguiente manera:

ELEMENTO TRANSVERSAL	CÓMO SE TRABAJA/PLANTEA
Comprensión lectora, expresión oral y escrita y manejo de TIC.	Los alumnos tienen que escuchar las actividades que plantea el profesor y comprenderlas. Entregarán un informe con los resultados y análisis de su investigación, y lo expondrán ante el resto de la clase, en público.
Igualdad efectiva entre hombres y mujeres, prevención contra la violencia de género o contra personas con discapacidad y fomento de la igualdad de trato y no discriminación. Desarrollo sostenible y medio ambiente, protección ante emergencias y catástrofes.	Se han planteado grupos heterogéneos de aprendizaje cooperativo, formados por ambos sexos. Trabajarán desde el respeto. El análisis conjunto del patrimonio urbano es una tarea que fomenta la igualdad, ya que comparten una experiencia académica conjunta, innovadora y enriquecedora que les permitirá establecer lazos afectivos. Analizarán diversas fuentes de la ciudad. El objeto matemático será la parábola y el elemento transversal será el medio ambiente, destacando la importancia del agua como generador de vida, y la necesidad de cuidar este recurso tan necesario.
Desarrollo y afianzamiento del espíritu emprendedor. Fomento de la autonomía, la iniciativa y el trabajo en equipo.	La actividad propuesta lleva al alumno a comprender que un escenario en el que todos suman aporta más que aquellos en los que se fomenta el individualismo.
Fomento del ejercicio físico y de la práctica del deporte, así como de hábitos de vida saludables.	Se van a analizar algunas curvas, dentro del enriquecimiento curricular, relacionadas con el patinaje, el ciclismo y el skate (cicloide y clotoide). También se analizarán otras en las que se remarcará la importancia de una alimentación saludable.
Seguridad vial. Mejora de la convivencia y de la prevención de los accidentes de tráfico.	En la misma línea del punto anterior, se van a conocer mejor algunas infraestructuras de su ciudad, y cómo las Matemáticas en general y la Geometría en particular nos ayudan a prevenir los accidentes de tráfico.

Tabla 4 Trabajar los elementos transversales desde la Geometría. Elaboración propia.

En el apartado 5 de este TFM se indica cómo se abordan los elementos transversales en combinación con el análisis del entorno urbano y la identificación de curvas singulares.

4.1.4 CUMPLIR CON LOS OBJETIVOS DE ETAPA.

Con la actividad propuesta también se busca que los alumnos desarrollen capacidades para que puedan cumplir con estos objetivos, señalados en el RD 1105/2014.

4.2 SESIONES DE TRABAJO.

DIAGNÓSTICO Y FORMACIÓN DE GRUPOS DE TRABAJO.

La técnica a emplear para llevar a cabo esta intervención propuesta es similar a la técnica de los *grupos de investigación* guiada por el profesor, que indicará a cada grupo el entorno de la ciudad que van a investigar (las temáticas en principio las escoge el profesor, pero en función de los grupos concretos y su grado de implicación se podrían analizar otras temáticas). Los alumnos, una vez identificado el tema de investigación se planifican y organizan su trabajo para realizar la investigación de campo: recorrer la ciudad y mirarla con ojos geométricos, buscando elementos relacionados con las cónicas presentadas en las primeras sesiones. Identificarán y reconocerán objetos matemáticos del entorno y los matematizarán: los fotografiarán y los modelizarán con un programa de geometría dinámica, como GeoGebra, y establecerán su ubicación con Google Earth o Google Maps.

Lo primero que se ha de realizar es un diagnóstico y evaluación de conocimientos previos para plantear la actividad y adecuarla al nivel observado. El profesor también debe pensar en cómo conformar los grupos de trabajo, para que sean equilibrados, heterogéneos y mixtos (que se establecerán en la sesión 5). Esta parte la debe realizar como trabajo previo, antes de llevar a cabo la actividad propuesta en sí misma, pero es una parte fundamental para llevarla a cabo con garantías.

SESIONES DE TRABAJO.

A continuación se explican las líneas maestras de cada sesión

4.2.1 SESIÓN 1. (FAMILIARIZACIÓN Y TOMA DE CONTACTO).

Se propone una sesión de aula, a través de la técnica expositiva, en la que se presenten y expliquen algunos conceptos generales (anexos I y II): definición de lugar geométrico, como el conjunto de puntos que cumplen una propiedad, poniendo ejemplos que ya conocen los alumnos: mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo y circunferencia (conectar con los conocimientos previos). Antecedentes históricos de las cónicas: en esta sesión también se daría una pincelada histórica para *contextualizar los contenidos* que se van a trabajar en grupo, dándose una descripción general de las curvas pero partiendo de algunos ejemplos notables de cada una en la vida cotidiana, sin entrar de momento en la definición matemática y formal. Posteriormente se realizaría la construcción y representación de las cónicas no degeneradas, y se visualizarían con el proyector, identificándose los elementos característicos de cada una. En esta primera toma de contacto se plantea el empleo de espejos parabólicos para estimular la curiosidad y el interés de los alumnos (ver punto 4.3). En esta sesión se trabaja la fase 1 del modelo de Van Hiele: familiarización, toma de contacto y debate sobre los nuevos objetos geométricos. El profesor también realiza algunas preguntas para determinar los conocimientos previos del alumno. Se introduce el *vocabulario particular* de las cónicas. El alumno comienza a ser consciente de la situación-problema en el mundo real, un problema contextualizado, se va iniciando el proceso de matematización a nivel cognitivo.

4.2.2 SESIÓN 2. (INSTRUCCIÓN DIRIGIDA).

Se ponen ejemplos cotidianos de las cónicas que se van a estudiar en las próximas sesiones. A continuación se realiza una profundización en los conceptos matemáticos Construcción con cuerdas de una elipse (la elipse del jardinero) y a partir de dos familias de circunferencias concéntricas. Definición de elipse. Construcción a partir de la semidistancia focal y del semieje mayor. Concepto de excentricidad. Ecuación reducida de la elipse. Construcción de una hipérbola con familias de circunferencias concéntricas. Definición de hipérbola. Construcción a partir de la semidistancia focal y del semieje. Ecuación reducida de la hipérbola. Construcción de una parábola a partir del foco y la directriz (circunferencias concéntricas y rectas paralelas). Definición de parábola. Ecuación reducida de la parábola. Semejanza entre cónicas. (Detallado en el Anexo I)

En esta sesión se entra en la segunda fase del modelo de Van Hiele, planteando un desarrollo en el aula que encamina al alumno hacia el aprendizaje de los conceptos del nuevo nivel, y que comience a construir relaciones entre los mismos. Se abordan cuestiones breves de respuesta concreta, que invitan al alumno a reflexionar. Se profundiza en la matematización horizontal, se traduce el problema en su contexto a un problema matemático y comienza el proceso de formular.

4.2.3 SESIÓN 3 (INSTRUCCIÓN DIRIGIDA).

Como continuación de la sesión 2 se realiza por parte del docente, con el proyector, una modelización con Geogebra de las distintas curvas cónicas. Se continúa con la profundización en conceptos matemáticos: recta tangente y normal a las curvas cónicas por un punto. Explicación de las propiedades de cada una. Contextualización de estas propiedades con ejemplos como la antena parabólica, y empleo de material manipulativo: análisis y explicación de lo visualizado en la sesión 1.

4.2.4 SESIÓN 4 (FINAL FASE INSTRUCCIÓN DIRIGIDA).

Uso en el aula de materiales manipulativo de apoyo, como herramientas, útiles y artefactos caseros para representar las cónicas. También se emplea el origami (papiroflexia) para construir las cónicas: empleo del proyector para explicar cómo a partir de otros lugares geométricos conocidos (mediatriz y bisectriz) se establece una relación entre los pliegues realizados y las cónicas estudiadas. Se dan las instrucciones para la construcción de un paraboloide a partir de un cuadrado de papel, para analizar en las sesiones 8 y 9 las cónicas que se integran en dicha construcción, representando en el proyector porqué sucede lo acaban de construir con papel. Se inicia la *matematización vertical* en las estructuras mentales del alumno, comienza a entender el proceso de cómo llegar al resultado a partir del problema matemático planteado a los resultados del mismo. Se inicia al proceso de emplear conceptos, razonamientos y procedimientos matemáticos.

4.2.5 SESIÓN 5. FORMACIÓN DE LOS GRUPOS DE TRABAJO.

Repaso conjunto e interactivo de los conceptos vistos hasta el momento. Planteamiento de la actividad cooperativa a llevar a cabo: *Identificación y análisis de curvas singulares en la ciudad de Burgos*. El profesor comunica los grupos de trabajo, y se visualiza en el aula la modelización realizada por el profesor de alguna fachada o arco de interés para los alumnos, como el arco de Santa María, los arcos del puente de San Pablo o la fachada de entrada a la Big Bolera (construcción de la cónica que mejor se adapta a la construcción, y tanteo de curvas que podrían adaptarse: como la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola, comprobando la curva de la que efectivamente se trata). También se realiza la identificación de elementos singulares de las cónicas (focos, vértices y ejes de simetría fundamentalmente).

4.2.6 SESIONES 6 Y 7. EXPLICITACIÓN.

Sesiones en el *aula de informática*: los alumnos, tras fotografiar los elementos urbanos planteados por el profesor, dedican dos sesiones de trabajo a preparar un pequeño informe con la modelización realizada, las pruebas hechas, la identificación de los elementos de las distintas cónicas etc. Situarán las curvas con las que han trabajado mediante la aplicación Google Earth, Google Maps o similar, insertando un vínculo en el propio informe a entregar. El profesor entrega 3 ejercicios a realizar en casa y a entregar en la última sesión. Son relativos a la construcción de cónicas en Geogebra (Anexo III: elipse, parábola y hipérbola). También entregarán, de forma individual, las construcciones en papel de las mismas, señalando e identificando las simetrías de los focos respecto de la tangente y la normal.

El alumno entra en una nueva fase, en la que demuestra que ya comprende y es capaz de expresar (de manera oral o por escrito) las propiedades de los objetos geométricos, y las relaciones entre éstos. Asimila e interioriza el lenguaje específico presentado por el docente en las primeras sesiones. El alumno pasa del mundo matemático al mundo real, en un camino inverso al iniciado en la sesión 2, contextualizando los resultados que ha obtenido Interpreta los resultados (matematización horizontal) y evalúa su validez para explicar el problema.

4.2.7 SESIONES 8 Y 9. EXPLICITACIÓN. INICIO INSTRUCCIÓN LIBRE.

En estas sesiones se realizará una exposición en grupo del trabajo realizado y se presentará ante el resto de la clase, indicando aspectos relativos al entorno en el que se encuentra. Se entablarán debates para discutir y analizar ideas, la corrección de las distintas matematizaciones y modelizaciones realizada así como de los elementos transversales propuestos a cada grupo (están explicados para cada curva en el punto 5). El alumno supera la fase 3, y se va adentrando en la cuarta, en la que poco a poco se va consolidando el aprendizaje de las fases anteriores, las tareas propuestas son abiertas y tienen diferentes soluciones, en la misma línea que plantean algunos autores de no dar siempre todos los datos para fomentar el pensamiento crítico de los alumnos. Las relaciones entre los distintos conceptos planteados se hacen explícitas y el alumno construye una asociación entre el concepto matemático y el proceso seguido.

Con la actividad diseñada en este TFM se considera adecuado llegar a esta cuarta fase (no se considera realista poder pasar de la cuarta fase a la quinta, incluso llegar a la cuarta sería un éxito). Para alcanzar la última fase (requeriría significativamente más tiempo, más sesiones y más dedicación que lo señalado) el docente pasaría a resumir los conceptos tratados para que el alumno los integre definitivamente, pero sin que aparezcan elementos geométricos nuevos, y las actividades de esta fase se orientan para comprobar que el alumno ha superado el nivel de razonamiento y está listo para el nivel siguiente (podría ser una exposición a un público no especializado, un examen, un trabajo no tan guiado, …)

Nota: La intervención descrita cumple también con los objetivos del II PAD (Plan de Atención a la Diversidad) ya que hay varias actividades que emplean materiales manipulativos, adecuados para personas con discapacidad visual. La papiroflexia también es adecuada para alumnos con TDAH, ya que no solo estimula los procesos mentales sino que también corrige el déficit atencional y su empleo en alumnos con problemas emocionales, como déficit de atención o hiperactividad, se está extendiendo cada vez más.

4.3 MATERIAL MANIPULATIVO.

Como se ha indicado en el marco teórico, se plantea el empleo de este tipo de material por la facilidad que presenta para el alumno de cara a integrar nuevos conceptos haciendo uso de él, desde estimular su curiosidad y predisponerlo para el aprendizaje de forma activa hasta facilitar la visualización del concepto matemático que se esté tratando.

En este caso, se trabajará con tres tipos de materiales englobados en esta categoría:

- Cuenco parabólico con espejos, para estimular al alumno y captar su interés. Empleo en sesiones 1 y 3.
- Papiroflexia: construcción de las cónicas por tangentes (sesión 4)
- Uso del útil casero para formar sucesivos hiperboloides de una hoja, visualizar la formación de hipérbolas, y su evolución hacia el cono. Empleo de un faro parabólico de bicicleta (sesión 4).

Uno de los materiales manipulativos sería el cuenco parabólico con espejos, que se analizaría con los alumnos empleando GeoGebra. Un efecto que se explica a través de las parábolas es la proyección (invertida) de objetos encerrados en un doble cuenco parabólico de espejos, como se indica en la siguiente figura:

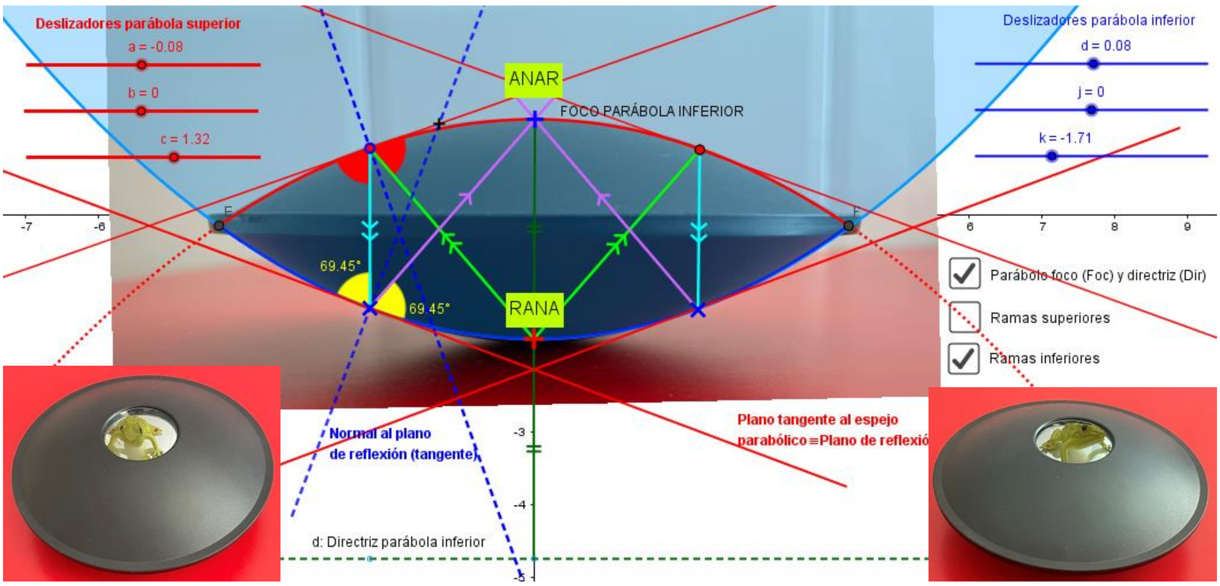


Figura 5 Esquema de la proyección de la rana al foco del cuenco parabólico. Elaboración propia.

Como se puede apreciar en la construcción anterior, los rayos de luz se reflejan entre ambos espejos, siendo finalmente proyectados al foco de la parábola inferior. Esto es debido a las propiedades de la tangente y la normal de esta cónica.

Otro de los materiales propuestos en este TFM para visualizar las cónicas es un útil casero que representa un hiperboloide de una hoja. En él los alumnos van a poder apreciar cómo se forman distintas hipérbolas al ir girando un sencillo cabezal móvil. En el siguiente punto se plantea construirlo en la materia de Tecnología.

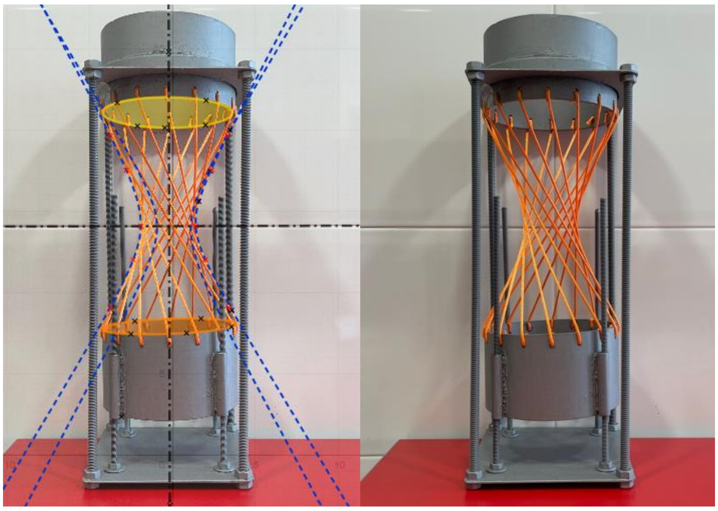


Figura 6 Hiperboloide casero. Elaboración propia.

También se ha propuesto la construcción de cónicas con origami o papiroflexia. Estas construcciones serían analizadas en GeoGebra, como se indica en el anexo III:

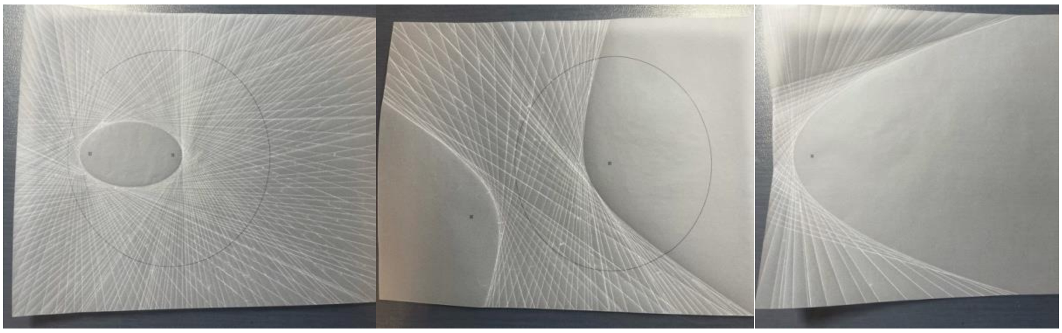


Figura 7 Construcción de elipse, hipérbola y parábola con papiroflexia. Elaboración propia.

Otros recursos manipulativos propuestos son el faro de una bicicleta y la construcción también con papiroflexia de un paraboloide hiperbólico. También serían analizados en GeoGebra, como se indica en el punto 5 de este documento.

Figura 8 Paraboloide construido con papel Faro de bicicleta. Elaboración propia.

4.4 ABORDAJE TRANSVERSAL DE LA GEOMETRÍA.

Uno de los objetivos específicos señalados en este TFM es abordar la enseñanza transversal de las Matemáticas, esto es, junto a otras materias, para lo que se plantean las siguientes experiencias:

- Física y Química → Análisis de la reflexión y emisión de ondas de luz y sonoras. Propiedades de las curvas cónicas y empleo para describir fenómenos gravitacionales y el movimiento y comportamiento de cuerpos celestes.
- Historia e Historia del Arte → A través del análisis del patrimonio cultural y artístico de la ciudad, monumentos y principales enclaves, profundizar en el conocimiento de la historia y la evolución de la técnica.
- Tecnología → Trabajo con materiales manipulativos: construcción de un hiperboloide casero con dos tubos de plástico o de cartón e hilo. Construir un paraboloide hiperbólico con palitos, y compararlo con el construido con papel.
- Música + Física y Química→ Propiedades acústicas de la elipse. Profundizar en el análisis de la reflexión de ondas sonoras en superficies con esta forma elipsoidal. Las curvas cónicas también nos ayudan a explicar el funcionamiento de los algunos instrumentos como el handpan (modelizado en el Anexo IV). De esta forma, Música y Matemáticas se relacionan no sólo a través del bloque de números (Pitagóricos) sino a través del bloque de Geometría.
- Educación Física + Física y Química→ Conocer los principios y propiedades de algunas curvas cíclicas como la cicloide (curva tautócrona y braquistócrona), y estudio en deportes como el ciclismo o el skate

4.5 PLAN DE RIESGOS.

A continuación se exponen varias medidas para tratar de evitar o reducir las posibles amenazas que surjan al llevar a cabo esta metodología en el aula, o para tratar de reducir su impacto en caso de no poder evitarse.

- Presión del centro y de la comunidad educativa para cumplir con la programación didáctica. La actividad se ha diseñado para poder implantarse en un número adecuado de sesiones, pero se podría tratar de reducir las sesiones 3, 4 y 5 a dos sesiones, eliminando alguna actividad o planteándola de manera más sencilla.
- Alumnos con sobrecarga de trabajo. Comunicarse con otros profesores para tener en cuenta la carga de trabajo de los alumnos, procurando combinar las actividades propuestas con las de otras materias.
- Descompensación de grupos: alumnos muy activos frente a alumnos pasivos. Seguimiento diario del avance de los alumnos, incluso intervención para dividir o mezclar algún grupo.
- Alumnos con un nivel de conocimientos previos bajo. Plantear una actividad menos ambiciosa, centrándonos en algún aspecto concreto (analizar sólo una tipología de curvas). Ofrecer material de apoyo para reforzar el estudio en casa de los temas tratados.
- Disponibilidad del aula de informática para llevar a cabo la modelización. Solicitar a la dirección del centro con la suficiente antelación las necesidades de usar dicho aula. Tratar de adaptar su uso con otras materias, planteando incluso un cambio o encaje de horarios.
- Participación del alumnado: motivación. Combinar adecuadamente el sentido matemático (modelizar) del alumno con su percepción del entorno.
- Reticencia familiar a realizar una actividad en el exterior. Informar a las familias de la actividad que se va a llevar a cabo. En caso extremo, se podría realizar la modelización buscando una foto en la red, pero lo cierto es que en este caso se desvirtuaría la idea central del trabajo, que es matematizar el entorno.
- Complejidad de algunos recursos para el tratamiento transversal con otras materias (papel cebolla, papel de colores, tubos e hilos, espejo…)
- Tiempo para desplazarse por la ciudad y analizar el entorno. Reducir la ambición de la propuesta, señalando explícitamente el lugar de la ciudad en el que tienen que realizar la modelización.
- Disposición de recursos tecnológicos por el alumnado y sus familias. Ofrecer horarios alternativos para poder acceder a los recursos del centro, incluso hacerlo en 7º hora.

4.6 EVALUACIÓN.

La evaluación de los alumnos se dividirá en dos partes, según los tipos de saberes

Valorar el "*Saber*" y el "*Saber hacer*".

Aspectos conceptuales → "Saber". Se evaluará si el alumno conoce los conceptos matemáticos de la unidad, si conoce y domina las definiciones de los distintos lugares geométricos y si diferencia la formulación de una elipse, una parábola y una hipérbola (evaluar cómo las analiza desde un punto de vista matemático). Valorar su capacidad para evolucionar en la matematización horizontal y vertical (pasar del problema en su contexto al problema matemático, y conocer la teoría para llegar al resultado).

Aspectos procedimentales → "Saber hacer". Se valorará la competencia para aplicar los conceptos y conocimientos presentados en las sesiones de teoría, desenvolviéndose y manejándolos con soltura para analizar matemáticamente las curvas modelizadas, así como la capacidad para matematizar el entorno y realizar modelizaciones de las curvas que observa en su entorno (modelizar adecuadamente las curvas, y emplear bien los conceptos matemáticos para realizar cálculos sobre las curvas: posiciones de los elementos característicos, posicionamiento de ejes, …). Se da más importancia a la evaluación del camino seguido para su resolución que a la solución en sí misma, ya que el alumno demuestra que sabe lo que tiene que hacer y cómo proceder para llegar al resultado del problema (completar el proceso de matematización vertical) aunque se equivoque en los cálculos. También se evalúa la adquisición de competencia digital para modelizar curvas con GeoGebra.

Esta parte se evalúa con las siguientes herramientas, y en los siguientes hitos:

- Una prueba escrita individual, tras la última sesión. Un examen, junto con alguna otra unidad del bloque, evaluándose su desempeño en los saberes anteriores. Esta prueba será un indicador del éxito de la actividad cooperativa (si los resultados son muy malos sería una clara señal de que hay que tomar medidas para reenfocar la actividad planteada).
- Evaluación del informe grupal de la actividad cooperativa. Antes de la sesiones 8 y 9 corresponde una primera valoración, y tras la exposición se realizará la evaluación completa, para comprobar el logro conseguido por los alumnos (en la exposición surgen debates y charlas que clarifican conceptos).
- Evaluación individual de actividades en formato digital y entrega de ejercicios planteados para hacer en casa (sesiones 6 y 7). Tras la presentación se evaluarán los problemas planteados por el profesor para hacer en casa (Anexo III). Los alumnos deberán entregarlos antes de realizar la presentación.

- Evaluación de los modelos en papel (elipse, hipérbola, parábola y paraboloide). Los alumnos lo entregarán al profesor al comienzo de la sesión 6 (les debe servir de base para realizar la modelización con el ordenador, por lo que no tendría mucho sentido que lo entregaran en un momento posterior). Se valorará el análisis que hacen de lugar geométrico.

Valorar el "*Saber ser*".

Aspectos actitudinales → "Saber ser". Se evaluará la actitud de los alumnos, su grado de implicación y compromiso con las tareas propuestas, la integración dentro del grupo y la relación con sus compañeros (actitud cooperativa frente a actitudes individualistas).

Se valorarán, en una escala numérica del 3 al 10 los siguientes aspectos:

- Voluntariedad y grado de participación.
- Creatividad y originalidad en las presentaciones y en las construcciones.
- Capacidad para resolver conflictos y mediación entre compañeros.
- Escucha activa, comunicación y empatía con el grupo.
- Capacidad para trabajar en equipo y capacidad organizativa.
- Iniciativa y liderazgo.

Estos aspectos se valorarán a lo largo de todas las sesiones, mediante la observación en las distintas actividades en el aula, y durante la presentación se analizará el grado de cohesión y compenetración del grupo.

4.7 PRESUPUESTO.

La intervención propuesta es muy económica, y como materiales consumibles únicamente requiere unas cuantas hojas en papel cebolla y papel para construir las cónicas (no se considera el material para el trabajo transversal con otras materias). También necesita hacer uso de los equipos informáticos, pero es algo normal dentro de cualquier rutina.

Concepto	Nº Uds	Precio	Importe (€)
Papel translúcido (cebolla) de 95 gr/m2	100	0,10	10,0
Papel para el resto de construcciones	500	0,01	5,0
Cuenco parabólico	1	12,00	12,0
Otros conceptos	1	8,00	8,0
Total coste directo intervención			***35,0 €***

Tabla 5. Coste directo de la intervención propuesta.

5. IDENTIFICACIÓN Y ANÁLISIS DE CURVAS SINGULARES EN BURGOS

5.1 PARÁBOLAS EN EL ENTORNO DE LA CIUDAD DE BURGOS.

5.1.1 ARTE Y PATRIMONIO.

La ciudad de Burgos cuenta con una gran riqueza patrimonial, cultural y artística, donde son sobresalientes la Catedral, que este año celebra su octingentésimo aniversario, y el complejo de la Evolución Humana. Monumentos como la estatua del Cid Campeador en la plaza del Mío Cid, la estatua de los Gigantillos junto a la Plaza de España o la estatua de Carlos III en la Plaza Mayor adornan la ciudad y le otorgan personalidad propia. Pero a parte de estas notables esculturas, existen otros monumentos que también identifican la ciudad, y que están relacionados directamente con las curvas analizadas dentro del currículo de 1º Bachillerato. En el Paseo del Empecinado existe una escultura, el Monumento a las Américas, caracterizada por un entramado de tubos metálicos, bastante ordenados.

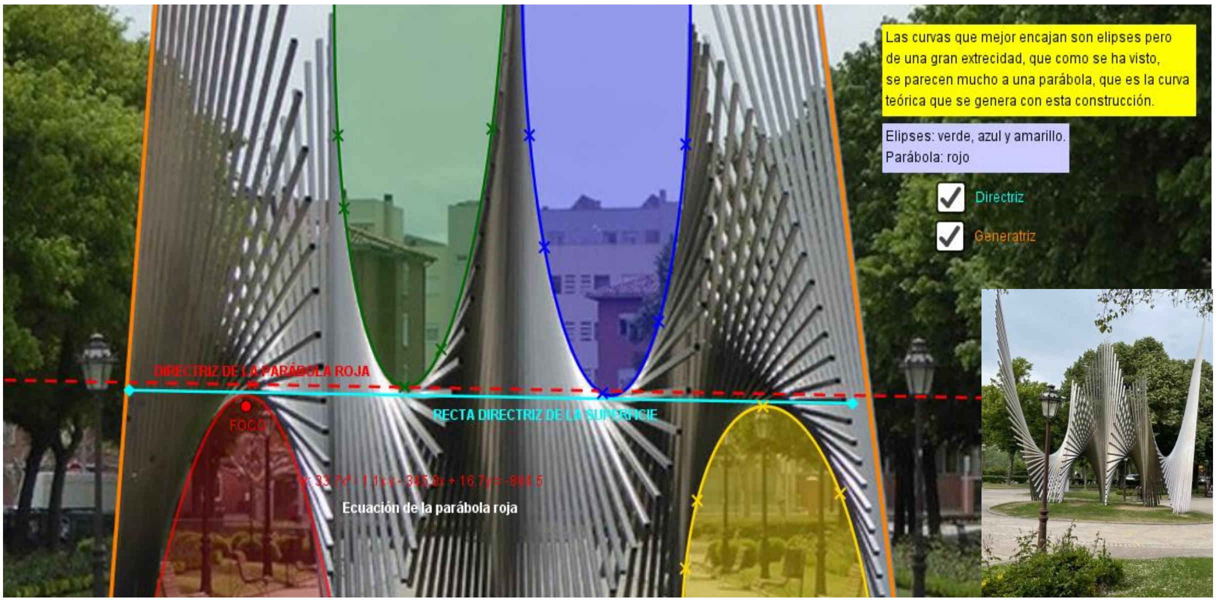


Figura 9: Monumento a las Américas. Paseo del Empecinado. Paraboloide hiperbólico. Elaboración propia. HAZ CLICK AQUÍ PARA VERLO EN GOOGLE MAPS

A simple vista ya parecen seguir algún tipo de esquema y analizado con un poco de detenimiento nos lleva de nuevo a las cónicas, puesto que la figura que el autor ha representado coincide muy bien con un paraboloide hiperbólico, que es una superficie reglada que se puede obtener por una recta generatriz que va avanzando y girando sobre otra recta llamada directriz. También se puede obtener a través de una parábola (generatriz) que se va desplazando paralela a sí misma sobre otra parábola directriz de curvatura opuesta, integrada en el plano que contiene al eje de simetría (Geolab ETSEM, 2021).

Esta escultura es obra del artista Andreu Alfaro, y fue instalada en 1985.

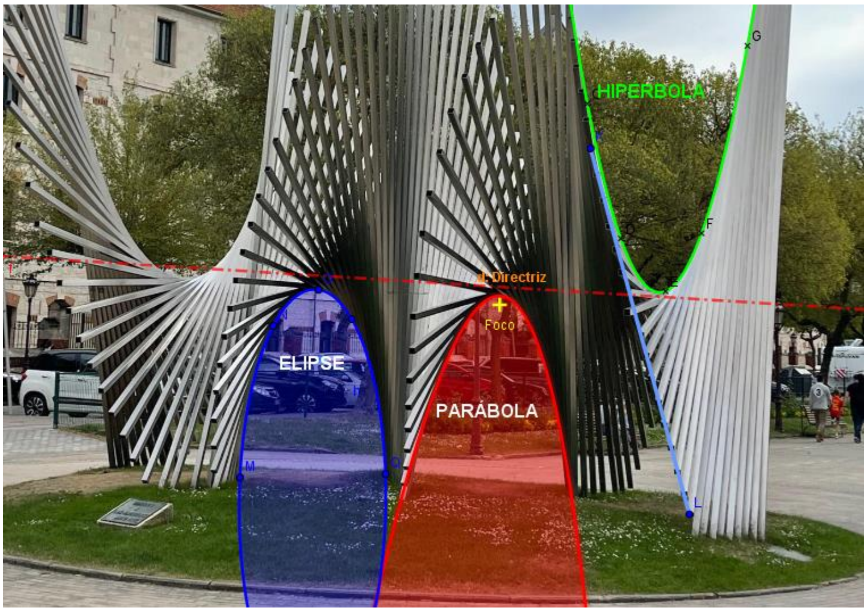


Figura 10. Otra perspectiva de la escultura. Aparecen una elipse y una hipérbola, muy excéntricas, lo cual quiere decir que la construcción es muy próxima a una parábola. Elaboración propia.

<u>Tratamiento de elementos transversales</u> Fomento del respeto y tolerancia entre los individuos de distintas nacionalidades y prevención contra cualquier forma de violencia, racismo o xenofobia. La temática del monumento es el descubrimiento de América: pueblos hermanados a ambos lados del océano. Pregunta para el alumnado de 1º de Bachillerato ¿El monumento al Cid Campeador es una estatua o una escultura? ¿Qué diferencias hay?

La figura que hay detrás de esta escultura, el *paraboloide hiperbólico*, es interesante porque integra dos de las cónicas estudiadas: ciertas familias de planos generan parábolas al intersecarlo y otra familia de planos, perpendiculares a los anteriores, generan hipérbolas. Coloquialmente se conoce esta superficie como silla de montar, y es una figura que se puede construir fácilmente con papiroflexia para analizar lo comentado.

La imagen de la página siguiente muestra un paraboloide de este tipo, modelizado con Geogebra, en el cual se puede ver claramente la parábola superior (sería la intersección con un plano vertical. Si se interseca la figura mostrada con un plano perpendicular al anterior que contenga al eje de simetría el resultado sería una parábola de curvatura opuesta a la señalada. Ambas parábolas tendrían el vértice en el mismo punto). Nuevamente se ha construido la parábola de dos formas: con el trinomio (deslizadores rojos) y situando el foco y la directriz (en azul).

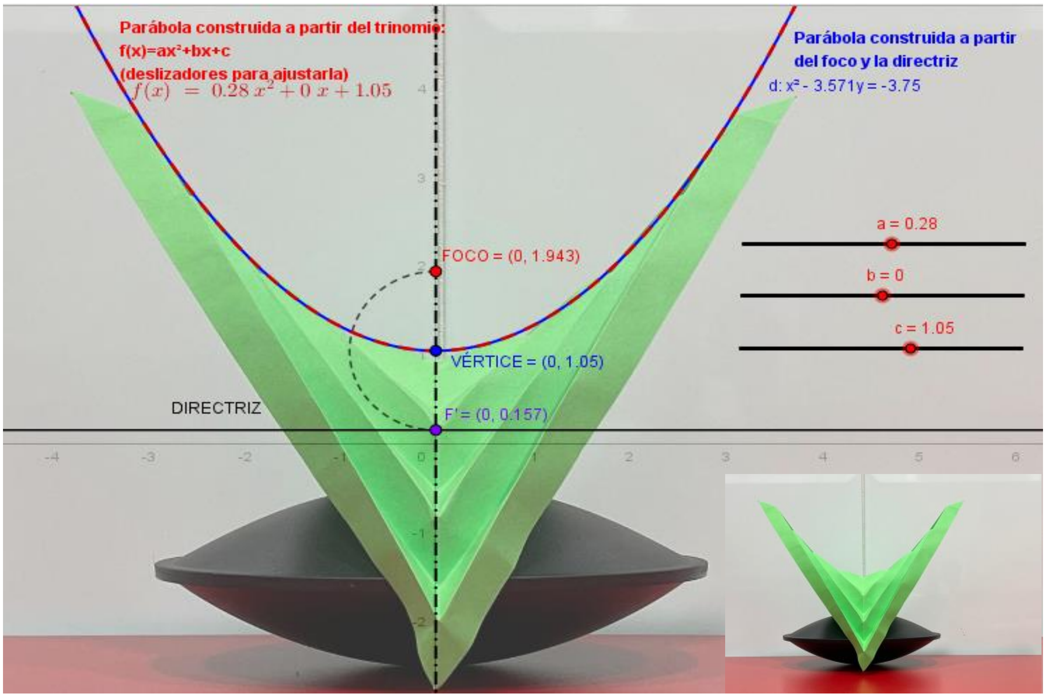


Figura 11 Construcción de un paraboloide hiperbólico con papel. Elaboración propia.

Monumento a las fuerzas armadas.

Se trata de una escultura formada por tres piezas idénticas de hormigón, apoyadas entre sí en el centro, formando unos 120º entre sí. Se ha modelizado mediante 3 curvas, una parábola (rojo), una elipse (naranja) y una catenaria (verde y azul). En este caso la parábola no encaja, pues una de dos, o se ajusta bien en la zona del vértice o se ajusta en las bases, no siendo posible un buen encaje en ambas posiciones a la vez. En cuanto a las otras dos curvas, la elipse se adapta bien al interior (en negro), salvo la zona del vértice. El contorno exterior se ajuste muy bien a una catenaria (verde)

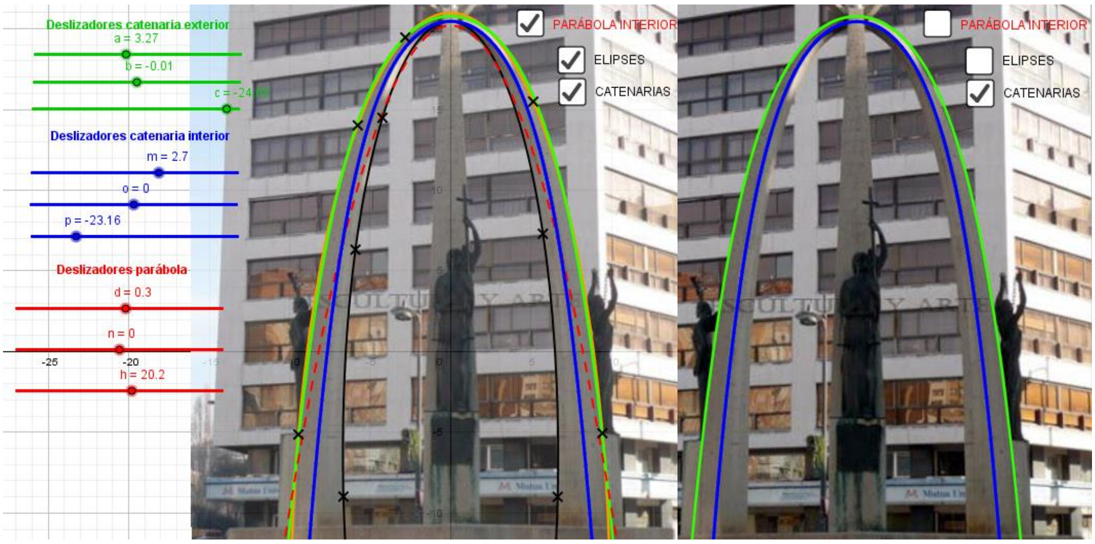


Figura 12 Monumento a las fuerzas armadas, junto a la plaza España. Elaboración propia Foto tomada de la web www.esculturayarte.com

HAZ CLICK AQUÍ PARA VERLO EN GOOGLE MAPS

5.1.2 ARQUITECTURA Y CONSTRUCCIÓN.

Es relativamente frecuente encontrar parábolas en arcos empleados en construcción, tanto para resistir cargas verticales, como en puentes y pórticos de iglesias, y también para resistir cargas horizontales, como en las presas arco-bóveda, que suelen tener un trazado horizontal compuesto por tramos de circunferencia y en el alzado suelen ser conformadas por arcos parabólicos. El arco parabólico es un elemento que resiste mejor las cargas que los arcos de medio punto (trazados con circunferencias), ya que debido a su forma reduce en gran medida la aparición de esfuerzos cortantes o de cizalla (con la consecuente reducción de la aparición de flexión en el mismo) y prácticamente está sometido únicamente a esfuerzos de compresión, fácilmente soportables por materiales como la piedra o el hormigón. Esta característica de los arcos parabólicos es debido a que las parábolas se aproximan mucho a una catenaria, que es la forma realmente óptima para resistir cargas, como se indica en el anexo V. A continuación se presentan varias figuras de la ciudad en la que se pueden ver parábolas. (HAZ CLICK AQUÍ PARA VERLO EN GOOGLE MAPS)

Figura 13 Arco del puente sobre el río Arlanzón en la Avenida de la Universidad. Detalle del mismo: en rojo arco parabólico, y en verde arco circular. Elaboración propia.

5.1.3 CENTRO DE CREACIÓN MUSICAL EL HANGAR

El Hangar es uno de los espacios más representativos del Bulevar ferroviario. Concebido inicialmente como depósito de locomotoras al servicio de la antigua estación de ferrocarril, la expansión urbana de la ciudad provocó la necesidad alejar el ferrocarril de la ciudad e integrar zonas como el barrio de San Pedro y San Felices, que se mantenía como un barrio bastante marginal de Burgos por la barrera que suponía el propio ferrocarril. Las obras de desvío terminaron a finales de 2008, y desde entonces el centro fue reconvertido como espacio artístico y musical, donde se ofrecen conciertos habitualmente.

El entorno contiene un intercambiador de vía, donde las locomotoras cambiaban de dirección. Se ha modelizado el complejo con GeoGebra, ya que en el conjunto se pueden apreciar varias cónicas, así como en el edificio, cuya cubierta está formada por varias bóvedas parabólicas que convergen hacia el intercambiador.

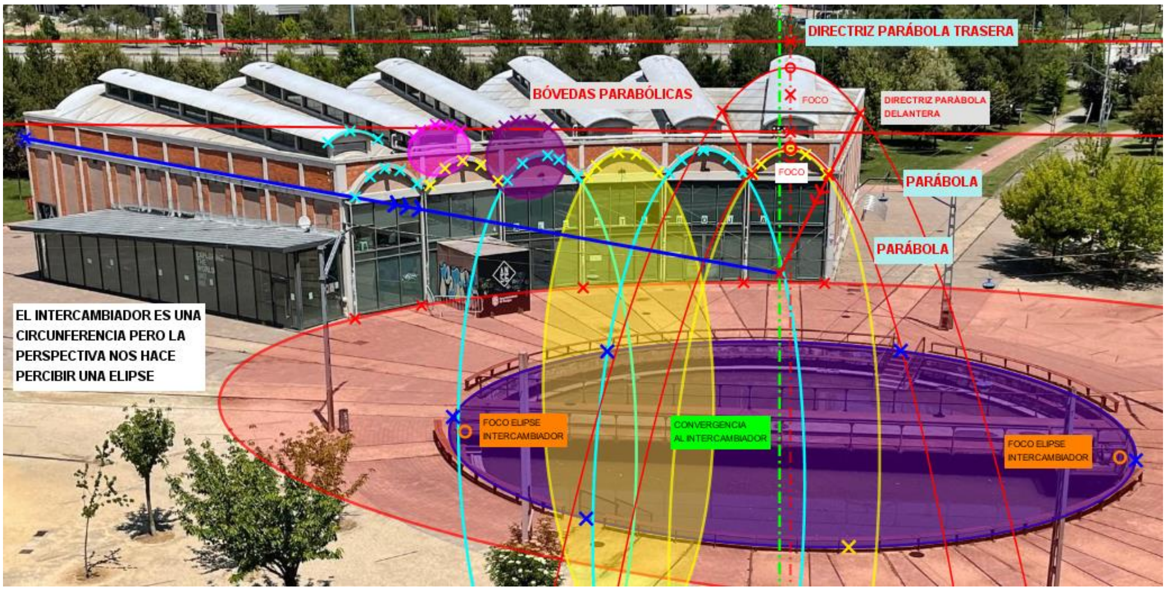


Figura 14 Modelización del Hangar, con elipses y parábolas. Elaboración propia.

En la siguiente imagen se ha modelizado el arco trasero. El arco es casi una parábola perfecta, (una transición entre una hipérbola y una elipse). El parque del entorno cuenta con luminarias cuyas cubiertas están formadas por parábolas.

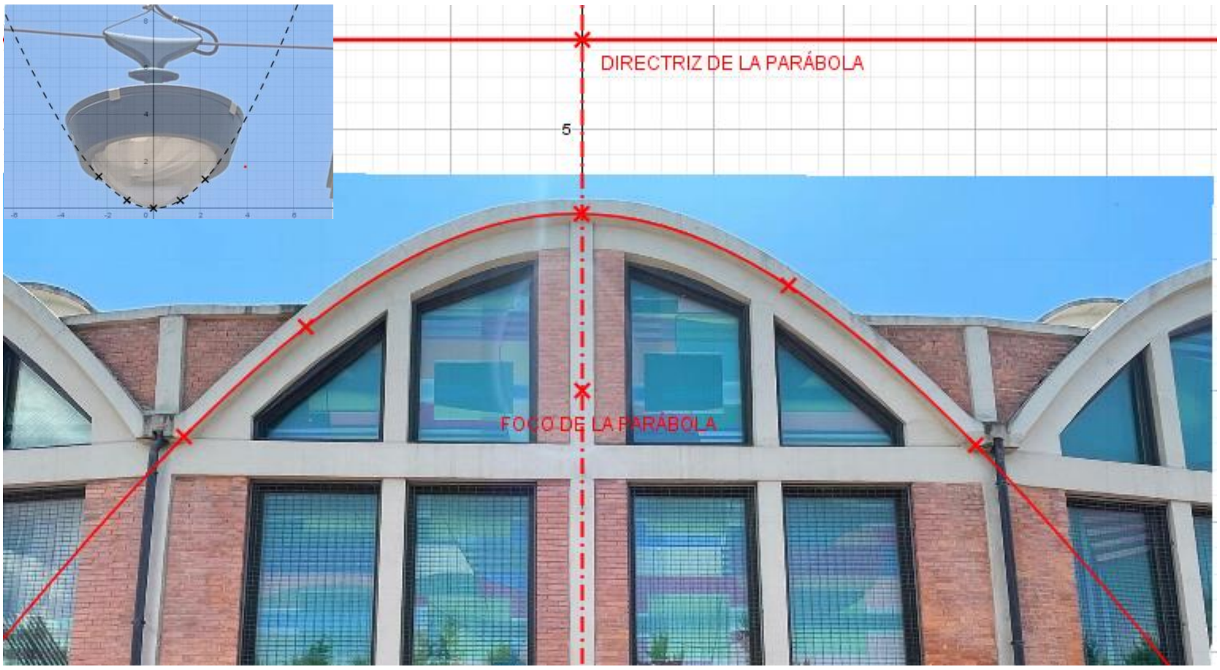


Figura 15 Modelización de uno de los arcos de la fachada trasera del Hangar. Elaboración propia.

[HAZ CLICK AQUÍ PARA VERLO EN GOOGLE MAPS]

5.1.4 EL TIRO PARABÓLICO.

Un objeto sometido a un campo gravitatorio, lanzado con una velocidad inicial v_0 y formando un ángulo con la horizontal α, seguirá una trayectoria parabólica, fruto de la combinación dos movimientos, uno rectilíneo y uniforme en dirección horizontal (MRU: no actúan otras fuerzas si despreciamos el rozamiento con el aire) y otro uniformemente acelerado, de forma que el objeto irá ascendiendo, disminuyendo su velocidad de manera uniforme por acción de la gravedad hasta llegar a un punto máximo, momento en el que se anula su velocidad vertical, y comienza a descender de manera acelerada. Este fenómeno lo podemos observar en las diversas fuentes de la ciudad. En la siguiente imagen se modelizado el chorro de la fuente de San Agustín. (HAZ CLICK AQUÍ PARA VERLO EN GOOGLE MAPS)

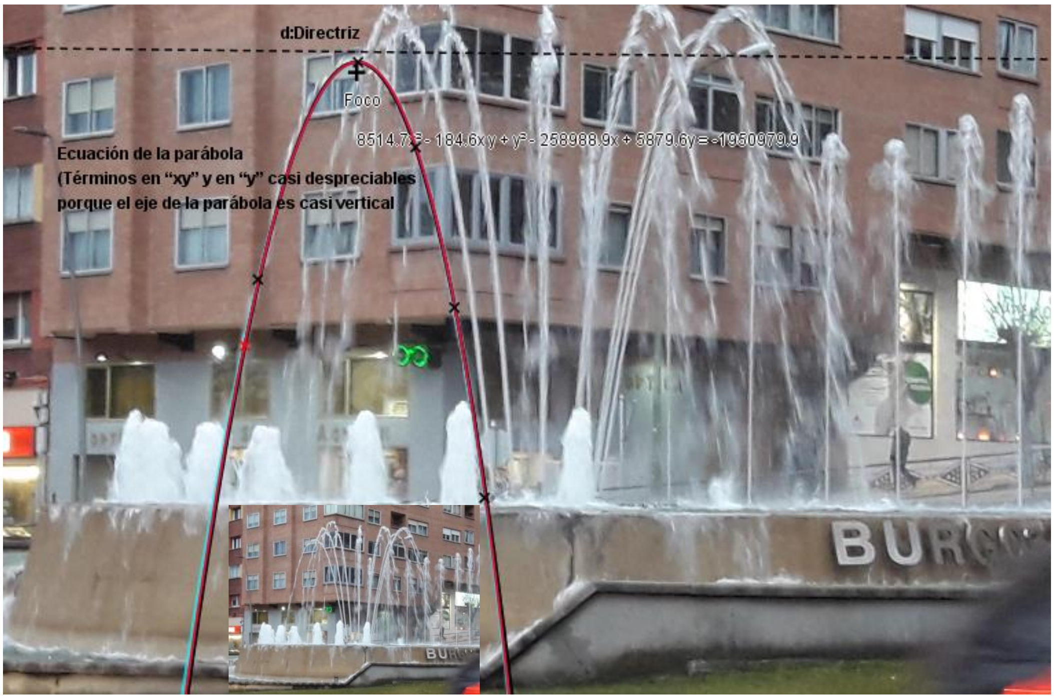


Figura 16 Chorro "parabólico" de agua en la fuente de San Agustín. Representadas otras dos cónicas: *hipérbola* en color azul ciano y *elipse* en rojo. Como se ve, la parábola es la transición entre ambas cónicas. Elaboración propia.

Tratamiento de elementos transversales: resaltar la importancia del agua como recurso indispensable para el desarrollo de la vida y la necesidad de luchar con el cambio climático, la desertización y la sobreexplotación de recursos naturales, y la importancia de moldear una sociedad que sea capaz de satisfacer sus propias necesidades sin comprometer las necesidades de las generaciones futuras (Definición del protocolo de Kyoto de desarrollo sostenible). Consultar el consumo de agua medio de un habitante de Burgos y compararlo con un habitante medio de Sudán (países en vías de desarrollo)

5.2 ELIPSES EN EL ENTORNO DE LA CIUDAD DE BURGOS.

En la ciudad de Burgos también se pueden encontrar varias elipses relacionadas con la construcción, el arte, la mecánica y el ocio.

5.2.1 FACHADAS.

Junto a la Avenida Reyes Católicos se encuentra la Big Bolera, un centro de ocio. Tiene una peculiar fachada, que se va ha analizado con Geogebra. En la foto superior se presenta la fachada del edificio, con dos arcos diferenciados (no se ha modelizado la coronación). Se señalan los puntos con los que se han construido las cónicas de ambos arcos. La imagen intermedia izquierda es una modelización mediante parábolas (rojo y marrón), que no encaja correctamente y tiene bastantes diferencias (tiene sentido al tratarse de un arco estético, y no estructural). La imagen de la derecha se ha modelizado con elipses, y como se puede apreciar encajan a la perfección. Incluso hay una barra inferior, hasta el suelo, que sigue el mismo arco elíptico, como se puede ver en la imagen inferior, en la que se han solapado todas las curvas. La elipse del arco superior se ha construido con los puntos señalados en negro y hallando sus focos y señalando un punto conocido.

El arco azul ciano es una elipse de baja excentricidad, por lo que podría ser realmente una circunferencia y que estuviera deformada por la perspectiva de la foto. [HAZ CLICK AQUÍ PARA VERLO EN GOOGLE MAPS]

Figura 17 Big Bolera Elipses en la fachada. Elaboración propia.

5.2.2 MONUMENTOS.

En la Avenida de la Paz se encuentra la Rotonda Rotary Internacional, con un monumento dedicado a la paz en el medio, compuesto por dos cilindros elípticos que se entrecruzan. Es obra del artista Javier Soto, y fue instalada en 2007. La rotonda cuenta con un olivo en el medio (plantado posteriormente), como símbolo de la paz, y las banderas son representadas por los colores de los paneles que conforman los cilindros.

Figura 18 Rotonda Rotary Internacional. Modelizado con elipses la base superior. Elaboración propia

<u>Tratamiento de elementos transversales</u>. Prevención contra cualquier tipo de violencia. Investigación del número aproximado de exiliados y refugiados por las guerras que hay actualmente en el mundo. Señalar un conflicto armado y describir brevemente sus orígenes y cuáles están siendo las consecuencias. Señalar el papel asimismo importante del Ministerio de Defensa y de las Fuerzas Armadas como garantes de la paz.

HAZ CLICK AQUÍ PARA VERLO EN GOOGLE MAPS

5.2.3 LOGOTIPOS.

La siguiente modelización es del logotipo de una famosa marca comercial de comida rápida, uno de cuyos establecimientos está en la Calle Juan Ramón Jiménez. Aparentemente podría pensarse que se trata de parábolas o catenarias. En las bases se observa que la curva es prácticamente vertical, por lo que la parábola se descarta. Se tantea una catenaria para el interior y otra para el exterior (en rojo y azul) pero se ve que la catenaria interior no ajusta bien en el entorno del vértice, y la del exterior no ajusta bien en la base. Se tantean elipses, construyendo las exteriores con cinco puntos y la interior de dos formas: una con puntos y otra señalando los focos y un punto de la cónica. Se comprueba que se ajusta perfectamente.

El motivo de señalar esta modelización es por la belleza matemática de su diseño original, que fue realizado por Jim Schindler en 1962, y en el cual está involucrado el número de oro y la proporción áurea, como se comprueba en la siguiente imagen:

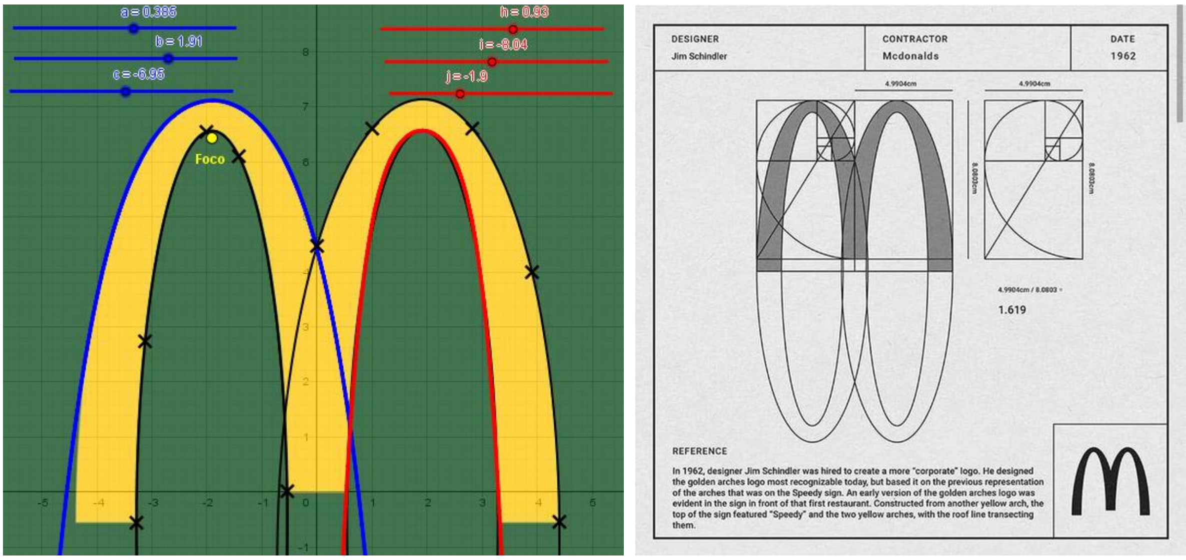


Figura 19. Logotipo modelizado y diseño inicial de Jim Schindler. Elaboración propia. Imagen obtenida de https://mcdonalds.es/

Las dudas iniciales con la curva que mejor se podría adaptar a este modelo se suscitan porque la elipse es muy excéntrica (tiene el foco casi en el vértice), por lo que se parece mucho a una parábola (dicho de otra forma, su excentricidad se acerca mucho a 1). Y la parábola, como se puede ver en el anexo V es la curva que más se parece a una catenaria si se toman los dos primeros de la serie de Taylor.

<u>Tratamiento de elementos transversales</u>: incidir en la importancia de los hábitos saludables, así como en que se practique deporte de forma moderada pero con alta frecuencia, se eviten el alcohol y el tabaco y se lleve una alimentación sana y equilibrada, y para ello el consumo de comida en este tipo de establecimientos tiene que ser totalmente esporádico.

HAZ CLICK AQUÍ PARA VERLO EN GOOGLE MAPS

5.3 HIPÉRBOLAS EN EL ENTORNO DE LA CIUDAD DE BURGOS.

Aunque es una tipología de arco mucho menos frecuente que otros, la ciudad de Burgos también cuenta con algunas hipérbolas en su paisaje urbano.

5.3.1 ESCAPARATES.

En el barrio de Gamonal, junto a la plaza Roma existe un escaparate muy original, que actualmente es una tintorería. Se ha probado la modelización con arcos circunferenciales, elípticos, parabólicos e hiperbólicos, siendo este último el que mejor se ajustaba a la forma del escaparate. Las hipérbolas se han construido por puntos, y el detalle del ajuste ha sido casi milimétrico, mientras que la parábola se han construido por con deslizadores. Como puede observarse, la parábola se ajusta bastante mal en la zona del vértice. Si se observa bien, corta a la hipérbola en 4 puntos, de forma que presenta menor curvatura en el vértice (por lo que se adapta peor) y luego, cuando va alejándose de éste también (la hipérbola tiende hacia infinito más despacio que la parábola, en ambos signos). Si sólo cortara por 3 puntos esto no sería posible. (HAZ CLICK AQUÍ PARA VERLO EN GOOGLE MAPS)

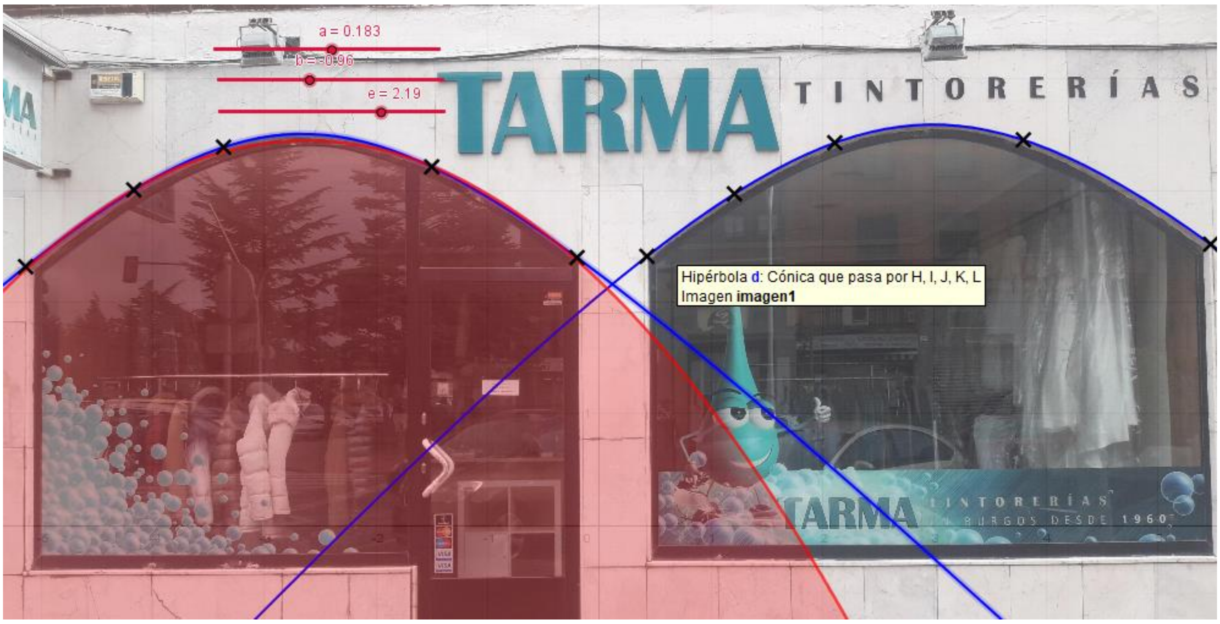


Figura 20. Vista general. Comparación parábola-hipérbola del escaparate. Elaboración propia.

Tratamiento de elementos transversales: *desarrollo y afianzamiento del espíritu emprendedor, respeto al emprendedor y al empresario, y ética empresarial*. Investigar cuál es la diferencia entre una gran empresa y una PYME, así como las categorías de empresa contenidas en este último término. Investigar también el número de trabajadores que emplea cada tipo de empresa en Burgos y en España.

En la siguiente imagen se comparan los arcos de ambas modelizaciones, hipérbola y parábola, y puede apreciarse cómo el primero se ajusta de manera casi perfecta.

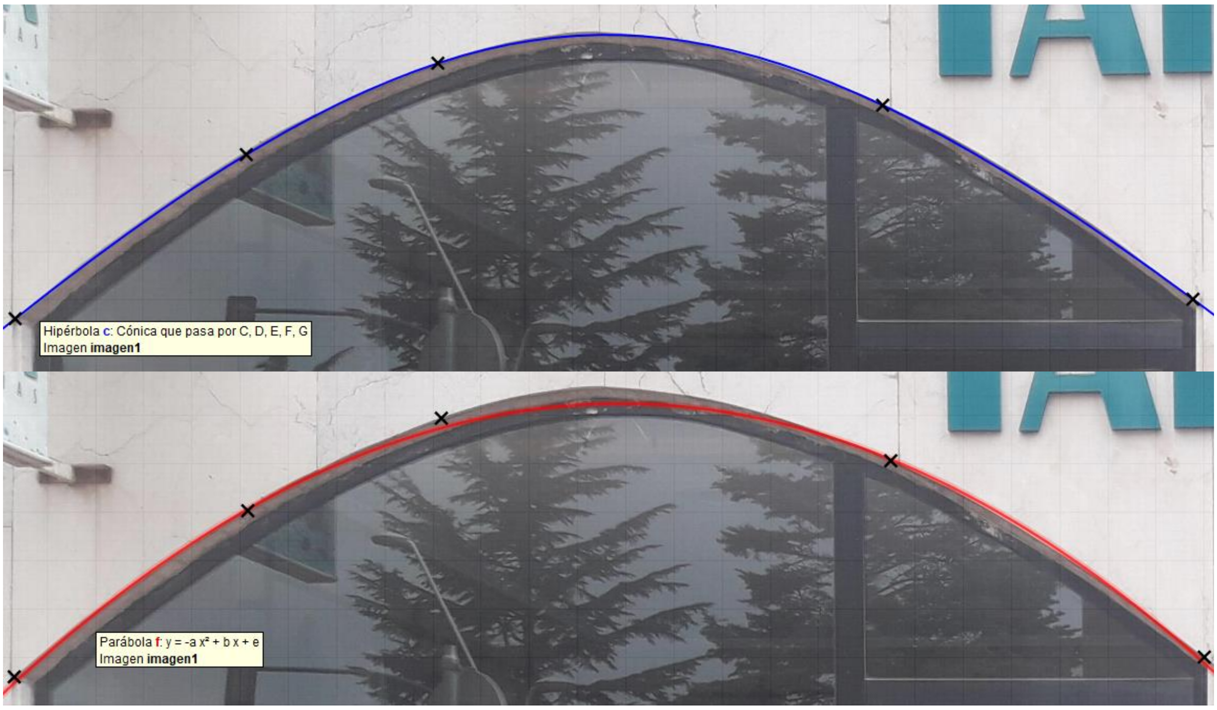


Figura 21 Comparación de los arcos hiperbólico y parabólico en el escaparate. Elaboración propia.

5.3.2 FACHADAS.

El siguiente arco se encuentra en la facultad de Educación, detrás de las banderas. Se ha modelizado con un arco de circunferencia, una elipse, una parábola (verde) y una hipérbola (azul), siendo ésta la que mejor encaja, como se puede apreciar en la siguiente imagen.

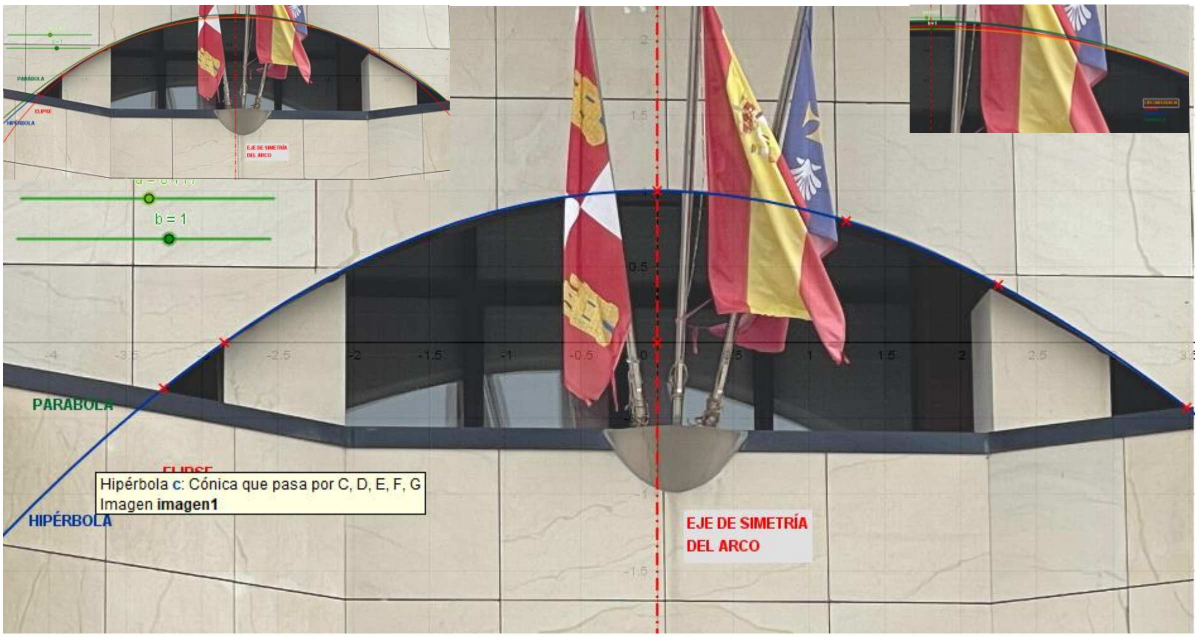


Figura 22 Modelización arco de la Facultad de Educación. Elaboración propia.

HAZ CLICK AQUÍ PARA VERLO EN GOOGLE MAPS

6. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES PERSONALES

La globalización ha transformado el mundo en el que vivimos, dando lugar a la sociedad denominada postmoderna. Las antiguas estructuras no terminan de dar paso a las nuevas, el mundo viejo no termina de morir y el nuevo no termina de nacer (cita atribuida a Gramsci, pero que aún hoy sigue vigente). Uno de los principales retos educativos que se plantean en este contexto es diseñar actividades dentro de un currículo que capacite para desenvolverse en sociedad a una generación que, hiperestimulada, vive en muchas ocasiones bajo el "síndrome de la impaciencia", en lo que se ha denominado "modernidad líquida". En una sociedad que fomenta excesivamente el consumo, en la que el compromiso puede llegar incluso a ser mal visto y en la que lo duradero no se presenta como factor de éxito de un producto, se plantea el conocimiento mismo como una mercancía más (Bauman, 2007). Por ello, el principal reto del sistema educativo y de un docente es formar a un individuo desde un punto de vista competencial, y se verá obligado para ello a competir con ese macrosistema de estímulos que rodean al alumno.

Coloquialmente se suele decir "ya lo veo" cuando se entiende algo, es decir, ver para entender y comprender (Teixidor, 2019). Esta es la idea que subyace en la propuesta realizada en este TFM, que combina la esencia de las principales corrientes constructivistas para el aprendizaje (Piaget, Vygotsky y Ausubel) de forma que el alumno aprenderá por interacción con el entorno (educación matemática realista), pasando por distintas etapas conceptuales que van desde lo físico a lo abstracto. También aprenderá gracias a la interacción con su grupo (profundizará en el proceso modelización matemática o matematización de la realidad) y con el profesor, que a través de las actividades planteadas ha creado una situación favorable para que el alumno pueda establecer un nexo entre lo que éste ha visto y lo que va a ser analizado.

A lo largo del documento se han diseñado actividades y planteado situaciones problema que servirán de apoyo al alumno para que mejore su nivel de razonamiento geométrico, guiándole para que asocie los estímulos visuales que recibe del exterior y los transforme en objetos y conceptos matemáticos, en un proceso de formalización de conceptos o matematización vertical, y dentro de una línea metodológica que fomenta el trabajo en grupo, que se presenta como un recurso más del profesor y favorece además la integración del alumno en el grupo.

En la línea de la transposición didáctica de Chevallard, el docente ha ido creando las situaciones propicias para que los alumnos transformen el contenido matemático implícito (formas geométricas) en su ciudad en contenido matemático explícito (geométrico y analítico), indaguen, experimenten y planteen conjeturas, y finalmente expresen y argumenten lo aprendido.

La interacción con la realidad y las actividades de aprendizaje cooperativo empleando elementos del entorno urbano de la ciudad de Burgos como objetos matemáticos (fachadas, monumentos, arcos, fuentes….) mejoran la competencia matemática del alumno y el trabajo en grupo ayuda a crear y mantener climas de aprendizaje favorables.

UNA EXPERIENCIA EN EL AULA. COMENTARIO PERSONAL.

En mi período de prácticas he tenido la oportunidad de llevar a cabo alguna de las actividades planteadas en este TFM, en dos grupos de alumnos (una sesión en cada grupo): un 1º Bachillerato BIE y una 4º ESO Enseñanzas Aplicadas (adaptando las actividades, lógicamente). El primer grupo, de altas capacidades, había estudiado recientemente la unidad didáctica de Lugares Geométricos. Cónicas, por lo que fue fácil relacionarlo con el análisis de las rectas tangente y normal en las cónicas. Fuimos construyendo parábolas y elipses con GeoGebra, y analizando la reflexión en una antena parabólica (la figura 34, del punto 8.2.1 se fue construyendo con los alumnos en clase). También pudieron indagar y experimentar con el material manipulativo presentado en el punto 4.3, y construyeron la elipse con papel cebolla que les proporcioné, para luego analizar juntos con GeoGebra y el proyector porqué al doblar el papel siguiendo un determinado patrón se formaban elipses. Los alumnos se mostraron agradecidos con la experiencia de esta sesión.

Con el grupo de 4ºESO Enseñanzas Aplicadas también pudimos realizar una actividad similar, pero adaptada por el nivel del que partían (conocimientos previos). Los alumnos acababan de estudiar la parábola y la hipérbola como funciones dentro de la unidad didáctica de Funciones. También pudieron practicar con el material manipulativo del punto 4.3, y la curiosidad que despertó en ellos nos llevó a analizar igualmente que sucedía con la reflexión de ondas en las parábolas. Los alumnos siguieron muy bien las explicaciones, y les mostré algunos de los elementos de la ciudad que contienen parábolas e hipérbolas integradas en sus formas. Reconocieron rápidamente el escaparate del punto 5.3.1 (uno de los alumnos señaló que tenía dos arcos porque eran hipérbolas, y es una función que tiene dos ramas. Una bonita deducción). También analizamos las parábolas que hay en el Monumento a las Américas.

En ambos grupos la experiencia de ver cómo seguían los conceptos que les planteaba, la cantidad de preguntas que me hacían, los debates que se entablaban entre los propios alumnos, sobre espejos, curvas, faros… fue muy gratificante. Toda una experiencia vital.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ley Orgánica de Educación (LOE) (Ley Orgánica 2/2006, 3 de mayo). Boletín Oficial del Estado, núm. 106, 2006, 4 de mayo. Referencia: BOE-A-2006-7899

Ley Orgánica para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) (Ley Orgánica 8/2013, 9 de diciembre). Boletín Oficial del Estado, núm. 295, 2013, 10 de diciembre. Referencia: BOE-A-2013-12886.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre). Boletín Oficial del Estado, núm. 25, 2015, 29 de enero.Referencia: BOE-A-2015-738

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, núm. 3, 2015, 3 de enero Referencia: BOE-A-2015-37.

ORDEN EDU/363/2015 por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León (ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo). Boletín Oficial de Castilla y León, núm. 86, 2015, 8 de mayo. Referencia: BOCYL-D-08052015-5

Alsina, Á. (2010). La "pirámide de la educación matemática", una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa , 189*, 12-16. https://dugi-doc.udg.edu/bitstream/handle/10256/9481/PiramideEducacion.pdf?sequence=1

Barrantes. L., Balletbo, F., y Fernández, M.A. (2013). Enseñar geometría en secundaria. Revista de ciencias de la educación Academicus, *I* (3) 26-33. http://www.ice.uabjo.mx/media/15/2017/04/Art3__3.pdf

Barrera, F., y Reyes, A. (2015). La teoría de Van Hiele: Niveles de pensamiento Geométrico. *Pädi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI*, *3* (5) https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/article/view/554

Bauman, Z. (2007). *Los retos de la educación en la modernidad líquida*. Gedisa.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique.

Colera, J., Oliveira, M.J., Colera, R., y Santaella, E., (2018). Matemáticas I de 1º de Bachillerato. Anaya.

Díaz, N. (2015). Otro enfoque de la geometría afín en Bachillerato. *Revista de Didáctica de las Matemáticas NÚMEROS* 90, 117-135. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/90/Volumen_90.pdf

Diez, N. (6-8 Marzo de 2020). *Propuesta sobre el currículum de matemáticas en Bachillerato*. Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas (CEMat). Castro Urdiales.

https://www.rsme.es/2020/04/propuestas-sobre-el-curriculum-de-matematicas-en-bachillerato/

Fabres, R.,(2016). Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría utilizadas por docentes de segundo ciclo con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos. *Estudios pedagógicos 42* (1) 87–105. https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?pid=S0718-07052016000100006&script=sci_arttext

Fernández, A. (2020). La catenaria y su influencia en la arquitectura de Gaudí. *La gaceta de la RSME, 23* (2) 303-323. https://gaceta.rsme.es/english/abrir.php?id=1582

Gamboa, R., y Vargas, G. (2013). El Modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia, 27* (1), 74-94 https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4945319

García, J. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Revista de Didáctica de las Matemáticas NÚMEROS* 100, 129-133 http://www.sinewton.org/numeros/numeros/100/Articulos_24.pdf

García-Matos, J.; Avilán-Vargas, N. (2019). La espiral de Euler en la montaña rusa. Revista Científica, 35 (2), 225-232. https://doi.org/10.14483/23448350.14775

Garrido, M.B. (2015). Orisangakus. Desafíos matemáticos con papiroflexia. *Real Sociedad Matemática Española y Ediciones SM*.

Gómez-Chacón, I.M., y Maestre, N.A (2008). Matemáticas y modelización. Ejemplificación para la enseñanza obligatoria. *Enseñanza de la Matemática, 17* (1) 107-121 http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/wp-content/uploads/sites/30/2018/03/G%C3%B3mez-Chacon-Maestre.pdf

González, P. (2020). La curva en las pistas de atletismo cubiertas. *La gaceta de la RSME, 23* (1) 93-104. https://gaceta.rsme.es/english/abrir.php?id=1564

Gutiérrez, A., y Jaime, A (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 32*, 55-70. https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/1859/1834

Hawking, S. (2007). *Dios creó los números.* Crítica.

Hidalgo, S. Maroto, A. y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas?. Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación, 334*, 75-95 https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=963460

Johnson, D., Johnson, R. y Holubec., E (1999). El aprendizaje cooperativo en el aula. Paidís SAICF.

Lara, M. L., Lara Freire, M. A., Pacheco, M. A., y Barrazueta, S. G. (2019). La Matematización y su influencia en el aprendizaje de la Matemática. *Ciencia Digital, 3* (3.3), 196-209.

https://doi.org/10.33262/cienciadigital.v3i3.3.795

Lázaro, José María (2018). Del laboratorio al aula (Curso de formación CFIE). Zamora.

Mato, M., Espiñeira, E., y Fernández, R. (2014). Dimensión afectiva hacia la matemática: resultados de un análisis en educación primaria. *Revista de Investigación Educativa, 32* (1), 57-72. https://click.endnote.com/viewer?doi=10.6018%2Frie.32.1.164921&token=WzI5OTc0MTIsIjEwLjYwMTgvcmllLjMyLjEuMTY0OTIxIl0.xKr2Nmlxs6Mh8Pw5MspnRyxInXY

Ministerio de Educación y Ciencia (2005). Motivar a los alumnos de Secundaria para hacer Matemáticas. Inés M. Gómez Chacón, Facultad de CC. Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid. http://www.mat.ucm.es/~imgomezc/almacen/pisa-motivar

OECD (2019), *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework, PISA*, OECD Publishing, Paris. OECD iLibrary | PISA 2018 Assessment and Analytical Framework (oecd-ilibrary.org)

Paulino, P., y Silva, A. (2011). Knowing how to learn and how to teach motivation: Contributions from self - regulation of motivation to a more effective learning. Procedia -Social and Behavioral Sciences, 29, 656-662.

Pérez, A. (2007). El mejor tobogán ...o el ingenio matemático de Johann Bernoulli. *Suma 54*, 95-99. http://platea.pntic.mec.es/aperez4/decabeza/decabeza54.pdf

Ricoy, M-C y Couto, M. J. (2018). Desmotivación del alumnado de secundaria en la materia de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 20* (3), 69-79. https://redie.uabc.mx/redie/article/view/1650

Sáenz de Cabezón, E. (2020). *Apocalipsis Matemático*. Plan B

Teixidor, E. (2019). Visualizar las matemáticas. *Revista de Didáctica de las Matemáticas NÚMEROS* 100, 85-89 http://www.sinewton.org/numeros/numeros/100/Articulos_16.pdf

TIMSS (2019). *Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias. Informe español*. Ministerio de Educación y Formación Profesional. Edita: Secretaria General Técnica. TIMSS 2019 - INEE | Ministerio de Educación y Formación Profesional (educacionyfp.gob.es)

Van Hiele, P.M. (1957) *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. [Tesis de Doctor en Matemáticas y Ciencias Naturales, Universidad Real e Utrech]. Traducción al español realizada en 1990 por el proyecto de investigación Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele (director Ángel Gutiérrez). https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Revista de Didáctica de las Matemáticas NÚMEROS 78*, 73-94. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos_04.pdf

Woolfolk, A. (2006). Psicología Educativa (Cap. 9, pp 305-345). Pearson Educación

WEBGRAFÍA

Canal Academia Internet. (20 de Marzo de 2020). ¿Puedes responder esta pregunta del IME (Instituto militar de ingenieria en Brasil? [Archivo de Vídeo].Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=7dqbIQA0BsI&t=38s

Canal Aprendemos de TODO. (20 de Mayo de 2020). TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA. Yves Chevallard [Archivo de Vídeo].Youtube.

https://www.youtube.com/watch?v=37LruLemGZI

Consejo Superior de Deportes. (26 Mayo 2021). *Instalaciones. Políticas públicas de ordenación. Normativa técnica de instalaciones deportivas. Normas Nide*. Atletismo en pista cubierta. https://www.csd.gob.es/es/csd/instalaciones/politicas-publicas-de-ordenacion/normativa-tecnica-de-instalaciones-deportivas/normas-nide/nide-2-18

Cooperativa José Ramón Otero (4 Mayo 2021). Formación Profesional José Ramón Otero. Formación Profesional José Ramón Otero (jrotero.com)

ETS de Edificación. UPM. (15 Marzo 2021) *Geolab*. *Web de Geometría ETSEM*. Paraboloides e hiperboloides. http://www.edificacion.upm.es/geometria/JPA/Paraboloide%20hiperbolico%2001.html

Lobato, P (13 Abril 2021). *EdInTech* ¿Qué es el aprendizaje cooperativo? Definición y elementos esenciales https://edintech.blog/2018/01/24/aprendizaje-cooperativo-definicion-elementos-esenciales/

Zambrabo, A. (22 Abril 2021). *Slideshare*. Geometria analitica - como hacer un hiperbolografo - how to make a hiperbolografo https://es.slideshare.net/AlejandroZambranoValbuena/geometria-analitica-34780141

8. ANEXOS

I. LUGARES GEOMÉTRICOS Y CÓNICAS: DESARROLLO TEÓRICO EN EL AULA.
II. REFLEXIÓN DE LAS ONDAS EN LAS SUPERFICIES CÓNICAS.
III. ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA TRABAJAR LAS CÓNICAS CON GEOGEBRA.
IV. HANDPAN: MÚSICA Y MATEMÁTICAS.
V. ANÁLISIS DE CURVAS PARA EL ENRIQUECIMIENTO CURRICULAR.

8.1 LUGARES GEOMÉTRICOS Y CÓNICAS: DESARROLLO TEÓRICO EN EL AULA.

Siguiendo el modelo de Van Hiele propuesto para la didáctica de los contenidos de este TFM, independientemente de que haya alumnos que vengan con una base mejor, se va a partir del tercer nivel, el de clasificación, ya que los alumnos han visualizado estas curvas con anterioridad, las han representado gráficamente y construido analíticamente en otros bloques de la materia. También es posible que las hayan representado en otras materias (Dibujo Técnico I). Para que el alumno tome contacto y se familiarice con las cónicas partiremos de los conceptos de mediatriz, bisectriz y circunferencia para introducir el concepto de lugar geométrico. Repasando estos sencillos conceptos se irá avanzando fases, representando geométricamente las cónicas al principio para después a dar sus definiciones como lugar geométrico y realizar el análisis matemático de las mismas.

8.1.1 ¿POR QUÉ SON CÓNICAS? RESEÑA HISTÓRICA DE LAS CÓNICAS.

Una superficie cónica es la superficie que se genera por la revolución de una recta, llamada generatriz, alrededor de un eje con el cual se corta (es el eje de la superficie). Si se corta la superficie por un plano se obtienen las secciones cónicas, que pueden ser una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola (y en determinados casos, un punto→ plano perpendicular al eje por el vértice, una recta → plano tangente a la superficie cónica, o bien dos rectas si el plano contiene al eje).

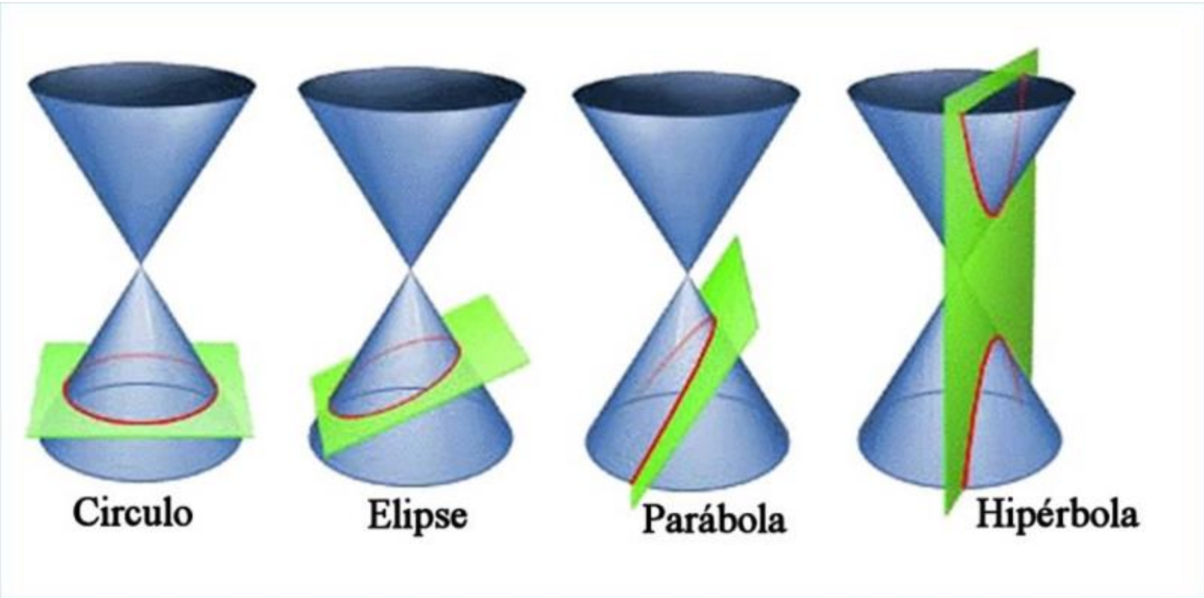


Figura 23. Secciones cónicas. Obtenido de https://cerebrodigital.org/?tags=Geometr%C3%ADa Cortesía de Alan Steve.

Las primeras referencias a las secciones cónicas aparecen en la antigua Grecia, con los trabajos de Menecmo (intentó duplicar el cubo) y sobretodo con Apolonio de Perga, que las recogió en su obra *Sobre las secciones cónicas*, dándoles el nombre con el que las conocemos (elipse, parábola e hipérbola), aunque sin buscar una utilidad práctica. No fue hasta el siglo XVII cuando Kepler las rescató para sus tratados, en los cuales asignó órbitas elípticas a los cuerpos celestes. Posteriormente, célebres matemáticos como Descartes y Newton trabajaron en su definición algebraica y en el análisis de sus propiedades (Hawing, 2006).

8.1.2 EJEMPLOS DE USOS COTIDIANOS.

En la siguiente parte de la primera sesión, antes de hablar de los lugares geométricos, se contextualizan las cónicas en el mundo actual, de forma que los alumnos puedan ver que están ante una tarea auténtica (Woolfolk, 2006). Se ejemplifica cada cónica con una aplicación diferente:

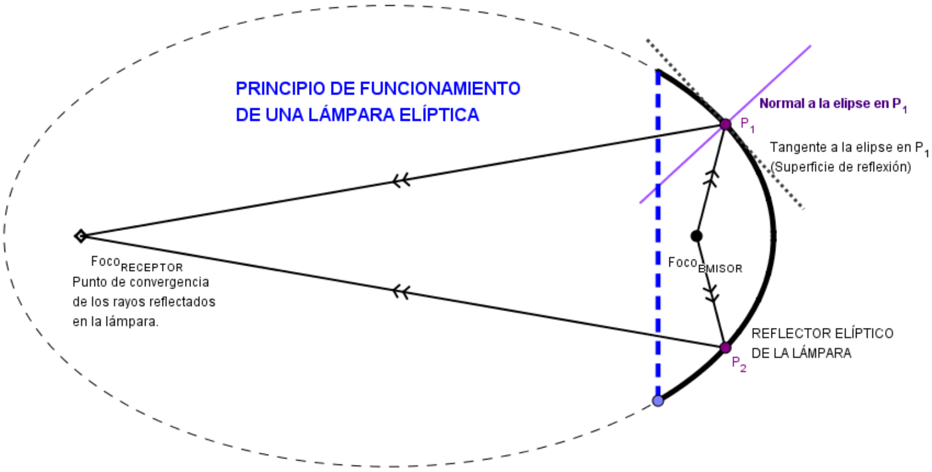


Figura 24: Representación del funcionamiento de una lámpara elíptica. Elaboración propia.

Figura 25: Torre de telecomunicaciones con antenas parabólicas. Fuente: Propia.

8.1.3 LUGARES GEOMÉTRICOS. MEDIATRIZ, BISECTRIZ Y CIRCUNFERENCIA.

Se denomina lugar geométrico al conjunto de puntos que cumplen una cierta propiedad. De esta forma, se pueden definir los siguientes (del dominio de los alumnos):

- *La mediatriz de un segmento AB* → es el lugar geométrico de los puntos P que equidistan de los extremos del segmento (A y B). También se puede definir como el lugar geométrico de los centros de circunferencias que pasan por A y B.
- *La bisectriz de un ángulo* (definido por la intersección de dos rectas r_1 y r_2) → es el lugar geométrico de los puntos P que equidistan de las rectas que definen el ángulo.
- *Circunferencia* (definimos su centro O y su radio r) → Es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia al centro O es constante e igual a r.

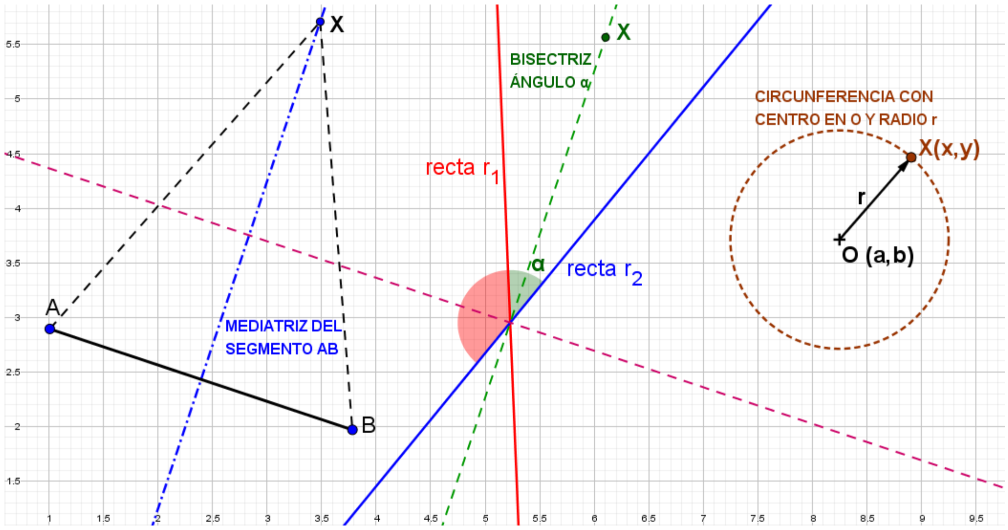


Figura 26: Representación de los lugares geométricos. Elaboración propia

En cuanto a la circunferencia, se puede calcular su ecuación a partir de las coordenadas de su centro O (a,b) y de su radio r:

$$dist(X,O) = r \rightarrow r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 + a^2 - 2ax + y^2 + b^2 - 2bx = r^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2bx + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Se trata de un polinomio de segundo grado en x e y, donde los coeficientes de $x^2 e\ y^2$ son 1, y no tiene término en xy. Si se transforma algo la notación, y se llama

$$-2a = A; \quad -b = B; \quad a^2 + b^2 - r^2 = C \ \rightarrow r^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

Tendremos una expresión (de segundo grado) para definir la circunferencia del tipo:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$$

Nota: Aunque no se haga explícito, nos referimos al lugar geométrico del plano, pues es el incluido en el currículo de 1 Bachillerato. Se omitirá "del plano" al hacer decir "lugares geométricos"

En base a lo anterior:

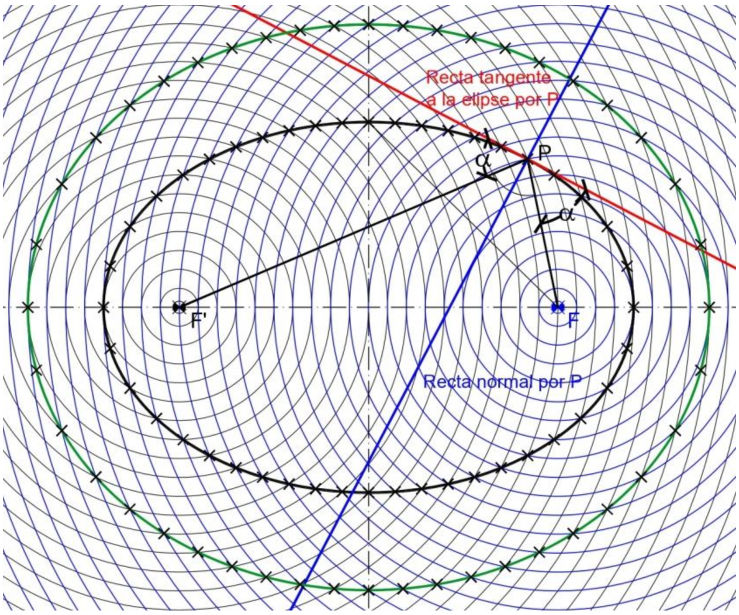
- Si los coeficientes de x e y son 1 (si tuvieran un mismo coeficiente distinto de 1, se divide por él ambos términos).
- Y no hay ningún término en xy
- Y se comprueba que $\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C > 0$

Entonces se tiene una circunferencia de centro $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ y radio $r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$

8.1.4 LUGARES GEOMÉTRICOS: LAS CÓNICAS.

CONSTRUCCIÓN DE UNA ELIPSE. LA ELIPSE DEL JARDINERO.

Este sistema para construir la elipse es habitual en el mundo de la jardinería y la edificación. Se clavan dos estacas en el suelo (o la superficie donde se quiera representar la elipse), se toma una cuerda mayor a la distancia entre estacas, y se tensa. El puntero se va desplazando, formando una elipse, siempre que la cuerda esté tensa. Las estacas son los focos de la elipse.



Con dos familias de circunferencias centradas en las estacas (F' y F) también puede construirse la elipse. Con la representación adjunta se puede ver cómo la suma de las distancias de los puntos "P" (que determinan las elipses) a los focos F' y F suman siempre lo mismo: 28 en el caso de la negra y 36 en el caso de la verde.

Figura 27. Construcción de una elipse con circunferencias centradas en los focos. Elaboración propia.

DEFINICIÓN Y ESTUDIO DE LA ELIPSE.

La elipse es el lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de las distancias a otros dos fijos llamados focos (F' y F) es constante. $dist\ (P, F') + dist\ (P, F) = K\ (cte)$

Esta constante K es igual al eje mayor de la elipse. En el siguiente dibujo se pueden ver los elementos más representativos de la elipse:

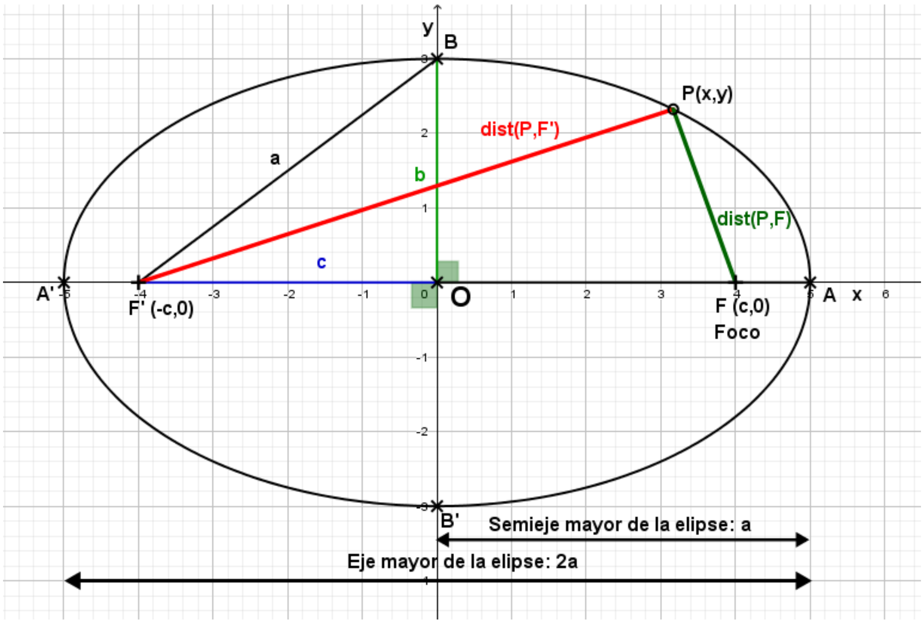


Figura 28 Elementos característicos de una elipse. Elaboración propia.

Una elipse tiene dos focos F’ y F y dos ejes de simetría que se pueden definir a partir de los focos. Los elementos característicos de la elipse son los siguientes:

$Puntos\ A, A', B\ y\ B' \ \ \rightarrow suelen\ ser\ denominados\ como\ \boldsymbol{vértices}\ de\ la\ elipse$

$O \ \rightarrow Centro\ de\ la\ elipse$

$a = \overline{OA} = \overline{OA'} \rightarrow semieje\ mayor$

$b = \overline{OB} = \overline{OB'} \rightarrow semieje\ menor$

$c = \overline{OF} = \overline{OF'} \rightarrow semiedistancia\ focal$

La constante de la elipse, K es igual al eje mayor, 2a, y como B y B’ son puntos de la elipse, se tiene: $K = \overline{AF} + \overline{AF'} = 2a; \quad \overline{BF} = \overline{BF'} = a \quad \rightarrow \overline{BF} + \overline{BF'} = 2a = K$

El triángulo BOF es un triángulo rectángulo de catetos b y c, e hipotenusa a, por tanto:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Se llama excentricidad de una elipse al cociente entre la distancia focal y el eje mayor:

$exc = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ Cuanto más distan los focos, mayor es la excentricidad.

El valor de la excentricidad varía entre 0 y 1, y cuanto menor sea, más se parecerá la elipse a una circunferencia, y cuanto mayor, más se parecerá a una parábola.

Ecuación reducida de la elipse.

Una manera de simplificar la ecuación de una elipse es situar el centro de la misma en el origen de coordenadas, y sus ejes mayor y menor coincidentes con los ejes de coordenadas. De esta forma, a partir de la definición de elipse (lugar geométrico) se puede obtener la ecuación reducida de la misma:

$$K = dist\ (P, F') + dist\ (P, F) = 2a \ \rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos términos se tiene lo siguiente:

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$x^2+c^2-2cx+y^2 = 4a^2+x^2+c^2+2cx+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-2cx = 4a^2+2cx-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \rightarrow 4a^2+4cx = 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Dividiendo por 4 y elevando nuevamente al cuadrado se tiene lo siguiente:

$$a^4+c^2x^2+2ca^2x = a^2(x^2+c^2+2cx+y^2) = a^2x^2+a^2c^2+2ca^2x+a^2y^2$$

Agrupando los términos en x e y, y teniendo en cuenta que $a^2-c^2=b^2$

$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2 = a^2(a^2-c^2) \rightarrow x^2b^2+y^2a^2 = a^2b^2$$

Dividiendo ambos términos por a^2b^2 se tiene finalmente:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Es la ecuación reducida de la elipse

CONSTRUCCIÓN DE UNA HIPÉRBOLA.

De manera similar al caso de la elipse, podemos construir una hipérbola a partir de dos familias de circunferencias concéntricas en dos puntos fijos, F y F'. Si se toma un punto P de cualquiera de las distintas hipérbolas representadas y se halla la diferencia de las distancias del punto a los puntos fijos se obtiene una constante K.

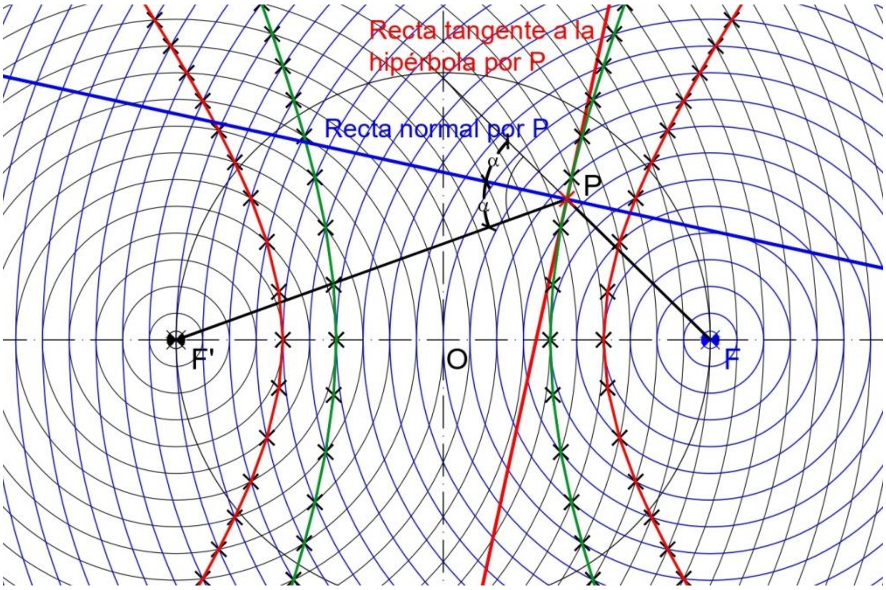


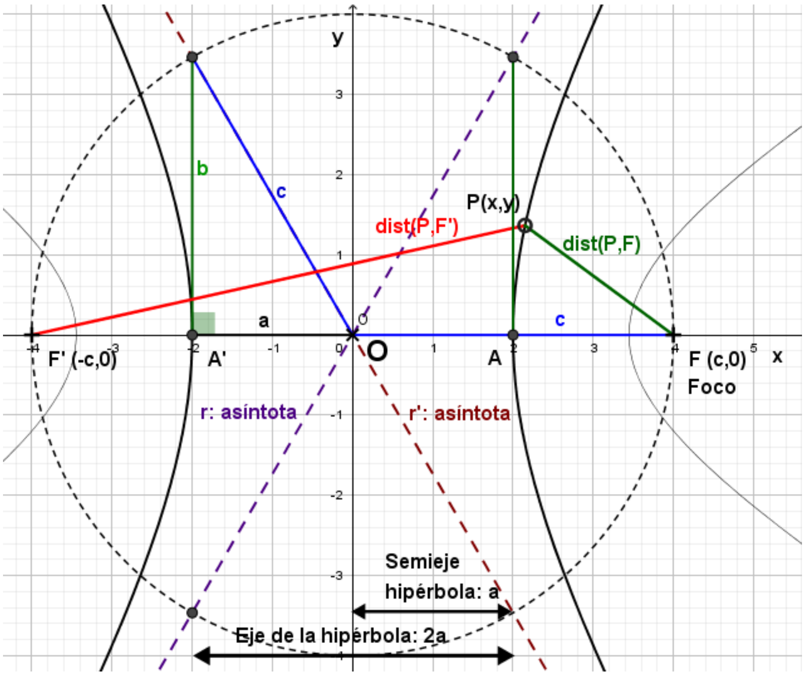
Figura 29 Construcción de una hipérbola con circunferencias centradas en los focos. Elaboración propia.

DEFINICIÓN Y ESTUDIO DE LA HIPÉRBOLA.

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de las distancias a otros dos fijos llamados focos (F' y F), en valor absoluto, es constante.

$$|dist\ (P, F') - dist\ (P, F)| = K\ (cte)$$

Esta constante K es igual al eje mayor de la hipérbola. En el siguiente dibujo se pueden ver los elementos más representativos de la hipérbola:



Ahora la relación entre la distancia focal y el eje de la hipérbola es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c > a$$

$$c = \overline{OF} = \overline{OF'}$$

Si a=b la hipérbola se dice que la hipérbola es equilátera

Figura 30 Elementos característicos de una hipérbola. Elaboración propia.

Una hipérbola tiene dos focos F' y F y dos ejes de simetría que se pueden definir a partir de los focos. Los elementos característicos de la hipérbola son los siguientes:

$$Puntos\ A, A' \ \rightarrow suelen\ ser\ denominados\ como\ \boldsymbol{v\acute{e}rtices}\ de\ la\ hip\acute{e}rbola$$

$$O\ \rightarrow Centro\ de\ la\ hip\acute{e}rbola$$

$$a = \overline{OA} = \overline{OA'} \rightarrow semieje$$

$$c = \overline{OF} = \overline{OF'} \rightarrow semiedistancia\ focal$$

$$r\ y\ r' \rightarrow as\acute{i}ntotas, de\ pendientes \frac{b}{a}\ \ y\ \ -\frac{b}{a}\ respectivamente$$

La constante de la hipérbola, K, es igual al eje de la misma, 2a, por tanto:

$$K = |\overline{AF} - \overline{AF'}| = 2a;$$

La excentricidad de la hipérbola siempre será mayor de 1, ya que $c > a$: $exc = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$

Dividiendo la expresión $c^2 = a^2 + b^2$ por a^2, se tiene:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} \quad \rightarrow exc^2 = 1 + pdte[r, r']^2$$

Cuanto mayor sea la pendiente de la asíntota, mayor será la excentricidad.

<u>Ecuación reducida de la hipérbola.</u>

Procediendo de manera similar a la elipse, para simplificar la ecuación de una hipérbola se puede situar el centro de la misma en el origen de coordenadas, siendo entonces sus ejes de simetría coincidentes con los ejes de coordenadas. De esta forma, a partir de la definición de hipérbola (lugar geométrico) se obtiene la ecuación reducida de la misma:

$$K = |dist\ (P, F') - dist\ (P, F)| = 2a\ \rightarrow \left|\sqrt{(x-(-c))^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

A diferencia de la elipse, al suprimir el valor absoluto en la diferencia de distancias se tiene que contemplar el doble signo en el término $2a$:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Cambiando una raíz de miembro, y elevando al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a\right)^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + c^2 + 2cx + y^2 = x^2 + c^2 - 2cx + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$+4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

El doble signo lo eliminamos al elevar ambos miembros al cuadrado:

$$c^2x^2 + a^4 - 2ca^2x = a^2(x^2 + c^2 - 2cx + y^2) = a^2x^2 + a^2c^2 - 2ca^2x + a^2y^2$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

Agrupando los términos en x e y, y teniendo en cuenta que $b^2 = c^2 - a^2$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo ambos términos por a^2b^2 se tiene finalmente:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ Ecuación reducida de la hipérbola

CONSTRUCCIÓN DE UNA PARÁBOLA.

Como en los casos anteriores, se puede construir una parábola a partir de una familia de circunferencias concéntricas situada en un punto fijo, el foco. Si se toma un punto P cualquiera de la parábola y se calcula la distancia de este punto al foco obtiene una distancia igual a la que hay entre el punto P y una recta, llamada directriz.

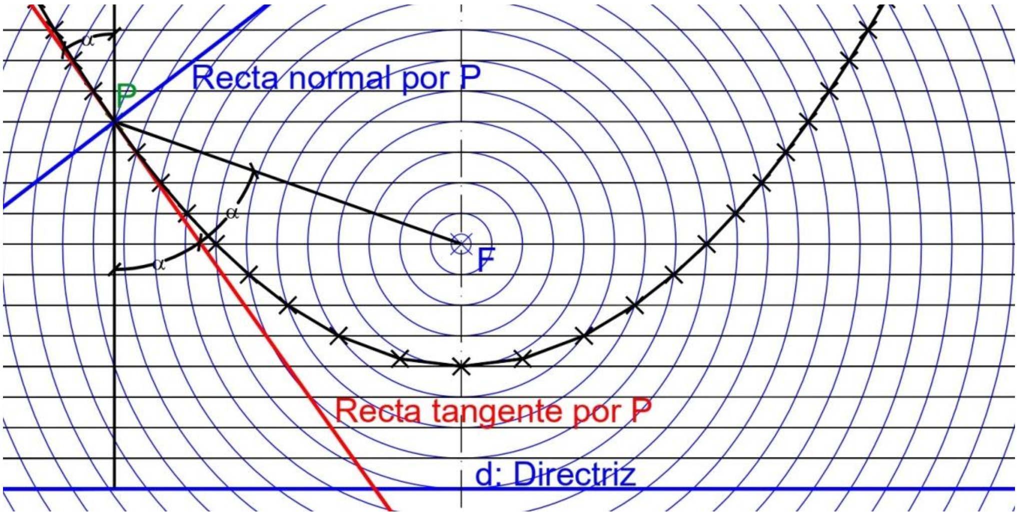


Figura 31 Construcción de una parábola con circunferencias centradas en el foco. Elaboración propia.

DEFINICIÓN Y ESTUDIO DE LA PARÁBOLA.

La parábola es el lugar geométrico de los puntos P tales que la distancia de dicho punto a otro fijo llamado foco es igual a la distancia del punto a una recta llamada directriz.

$$dist\ (P, F) = dist\ (P, d)$$

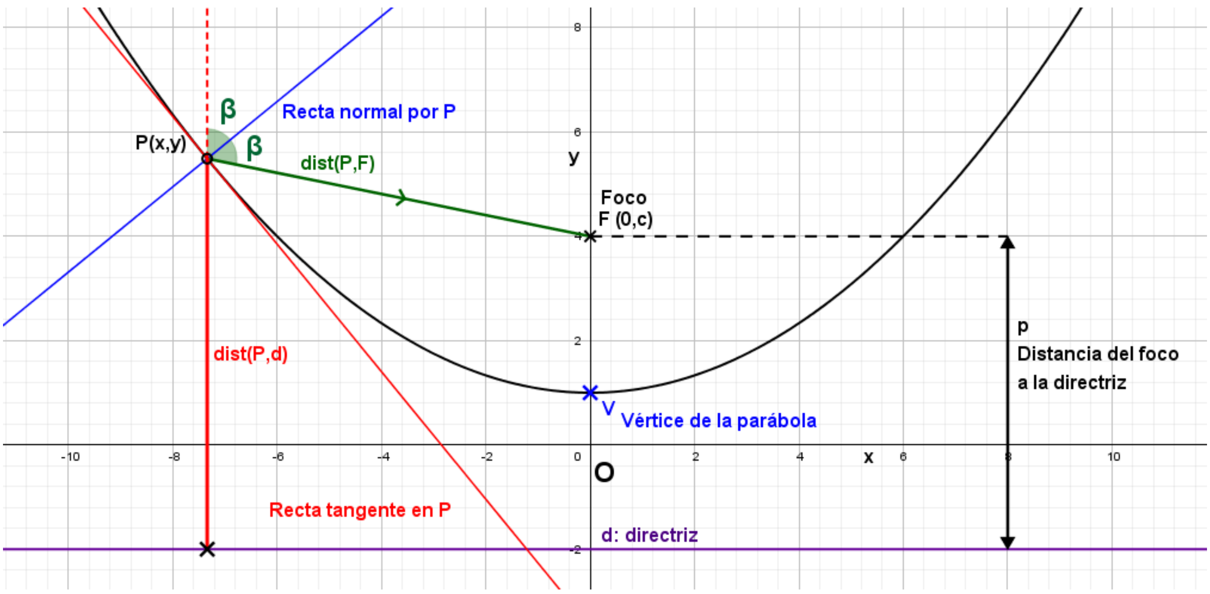


Figura 32. Elementos característicos de una parábola. Elaboración propia.

La parábola sólo tiene un eje de simetría, en el que se encuentran situados el foco y el vértice, y tiene los siguientes elementos característicos:

V → Vértice de la parábola

F → Foco

d → Directriz

p → Distancia del foco a la directriz

$\frac{p}{2}$ → Distancia focal (distancia entre el vértice y la directriz)

<u>Ecuación reducida de la parábola.</u>

A partir de la definición, se iguala la distancia del punto P(x,y) al foco con la distancia del punto P a la recta directriz. En este caso, será una parábola de eje vertical en la que se sitúa el vértice V en el origen O (0,0), de forma que las coordenadas del foco serán: $F(0,c) \rightarrow c = \frac{p}{2} \rightarrow F(0,\frac{p}{2})$:

$$dist\ (P,F) = dist\ (P,d)\ \rightarrow \sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2} = y + \frac{p}{2} \rightarrow x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = y + \frac{p}{2}$$

$x^2 + y^2 + \frac{p^2}{4} - py = y^2 + \frac{p^2}{4} + py \rightarrow x^2 = 2py$. Por tanto, la ecuación reducida es:

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2p}}$$

La excentricidad de todas las parábolas es 1, por lo que todas son semejantes.

<u>Ecuación cartesiana de una parábola de eje vertical. Trinomio de segundo grado.</u>

Debido a la importancia que tiene la ecuación general de una parábola en la parte de Funciones (Bloque de Análisis) y en otras materias, especialmente Física y Química, se va a calcular dicha ecuación en función de las coordenadas del vértice $V(x_V, y_V)$.

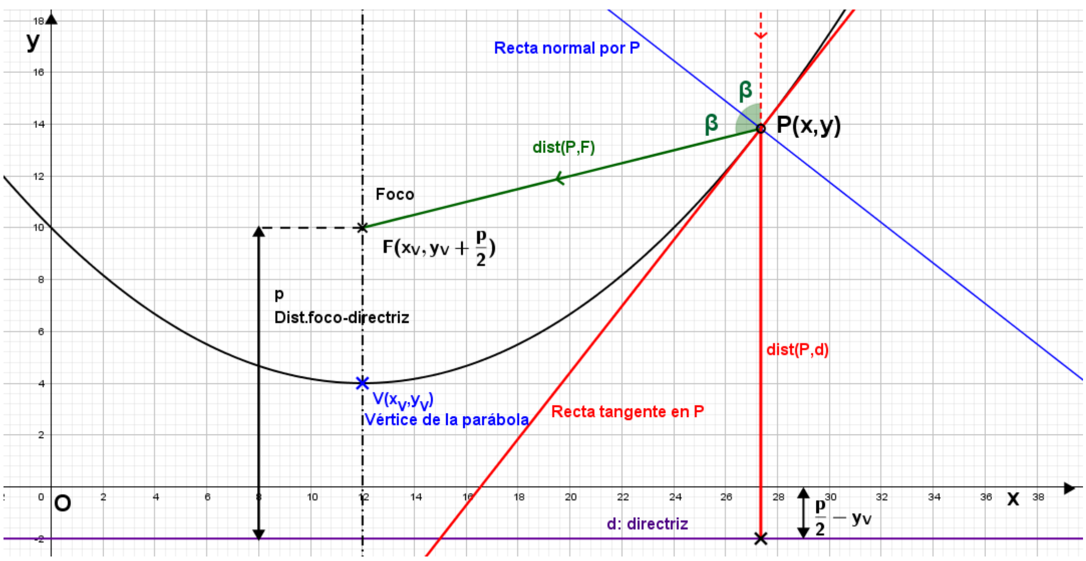


Figura 33 Situación de un punto genérico de la parábola. Ecuación cartesiana. Elaboración propia

El foco se determina a partir de las coordenadas del vértice $F(x_V, y_V + \frac{p}{2})$.

$$dist\ (P, F) = dist\ (P, d)$$

$$\sqrt{(x - x_V)^2 + \left(y - (y_V + \frac{p}{2})\right)^2} = \sqrt{p^2} = \sqrt{\left(y + \frac{p}{2} - y_V\right)^2}\ (x - x_V)^2 + \left(y - (y_V + \frac{p}{2})\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2} - y_V\right)^2$$

$$(x - x_V)^2 + y^2 + y_V^2 + \frac{p^2}{4} - 2y \cdot y_V - 2y\frac{p}{2} + 2y_V\frac{p}{2} = y^2 + y_V^2 + \frac{p^2}{4} + 2y\frac{p}{2} - 2y \cdot y_V - 2y_V\frac{p}{2}$$

$$(x - x_V)^2 - yp + y_V \cdot p = yp - y_V \cdot p \rightarrow 2yp - 2y_V \cdot p = 2p(y - y_V) = (x - x_V)^2$$

$$\boxed{y = \frac{(x - x_V)^2}{2p} + y_V}$$

Desarrollando el cuadrado se relaciona la expresión anterior con el trinomio de 2ºgrado con el que el estudiante está más familiarizado:

$$y = \frac{(x - x_V)^2}{2p} + y_V = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{2x_V}{2p}x + \frac{x_V^2}{2p} + y_V \rightarrow \boxed{y = \left(\frac{1}{2p}\right)x^2 + \left(-\frac{x_V}{p}\right)x + \left(\frac{x_V^2}{2p} + y_V\right)}$$

El trinomio anterior es, como se ha comentado, del tipo $y = ax^2 + bx + c$

$$\left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{2p} \\ b = -\frac{x_V}{p} \\ c = \frac{x_V^2}{2p} + y_V \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las coordenadas del foco son: } \boxed{F(x_V, y_V + \frac{1}{4a})}$$

La utilidad de las expresiones anteriores radica en que a partir de las coordenadas del vértice $V(x_V, y_V)$, dada una distancia focal $\frac{p}{2}$ se puede obtener la ecuación de la parábola.

8.2 REFLEXIÓN DE LAS ONDAS EN SUPERFICIES CÓNICAS.

Hay que indicar antes de describir el comportamiento de las ondas que, en general, tanto en el lenguaje coloquial como en la mayor parte de la bibliografía, al referirse a superficies relativas a cónicas se emplean términos relativos a las curvas que acaban de analizarse. De esta forma, al indicar "antenas parabólicas" o "superficies elípticas" realmente nos estamos refiriendo a las superficies paraboloideas y elipsoidales respectivamente.

Cuando una onda incide sobre una superficie lisa se produce la reflexión de dicha onda en función del plano normal y el tangente a la superficie en el punto de incidencia (si la superficie es rugosa se produce un "rebote" en todas las direcciones y se llama difusión).

A continuación se van a analizar la reflexión de ondas en las curvas cónicas.

8.2.1 REFLEXIÓN EN LAS PARÁBOLAS.

PARÁBOLAS EN LAS ANTENAS PARABÓLICAS.

Cuando un haz de ondas paralelo al eje de una antena parabólica incide sobre la superficie de la misma (en la zona que es encerrada por la antena) el haz es reflejado hacia el foco. Este el motivo por el que son empleadas para amplificar señales electromagnéticas, como en el caso de los telescopios astronómicos o las antenas de televisión, que redirigen toda señal que reciben hacia el foco. En el caso de la investigación astronómica, la señal luminosa procedente de galaxias lejanas es muy débil, prácticamente imperceptible, pero gracias a la forma parabólica de los telescopios y ser concentrada en el foco permite que los científicos analicen dichas señales. Las rectas tangente y normal son las bisectrices de los ángulos que forman los rayos incidentes y reflejado.

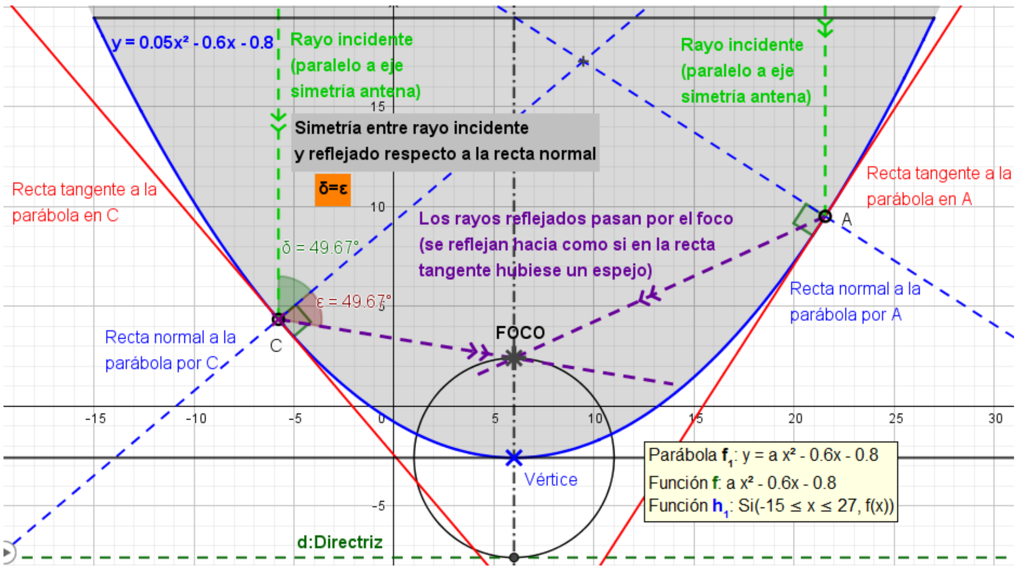
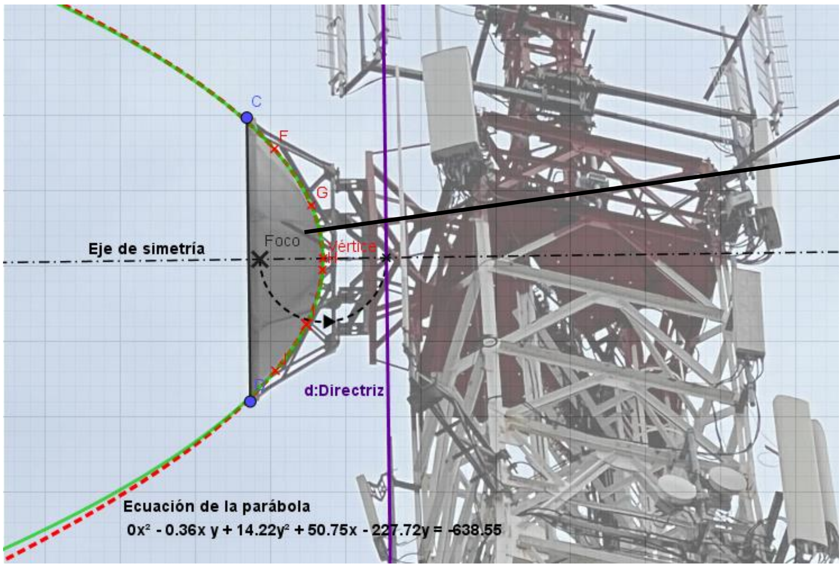


Figura 34 Esquema de la reflexión de ondas que se produce en las antenas parabólicas. Elaboración propia.



Obsérvese la posición del foco en esta antena.

Figura 35 Estudio del foco y directriz de una antena de comunicaciones. Elaboración propia.

FARO DE UNA BICICLETA.

El fenómeno contrario a la antena parabólica lo encontramos cuando se emite un haz de ondas desde el foco y estas son reflejadas en una superficie con forma de parábola (o paraboloide). Es el caso de los faros de un coche, o el de algunas bicicletas antiguas, que mediante un sistema de espejos reflejan el haz de luz emitido. En la siguiente imagen podemos ver el faro de una bicicleta, que se comporta como se acaba de explicar. Se ha construido la parábola de dos formas: una mediante el foco y la directriz (en rojo) y otra a partir del trinomio $y = ax^2 + bx + c$, con deslizadores (en blanco, con un dominio comprendido entre -1,90 y +1,90, ya que a partir de esos puntos se remata el faro, ya no se reflejan más rayos en sentido paralelo al eje y toma otra forma). Se ha representado otra cónica que se forma por el reflejo de la luz que índice sobre el faro (en negro). Es una elipse de gran excentricidad, muy parecida a una parábola.

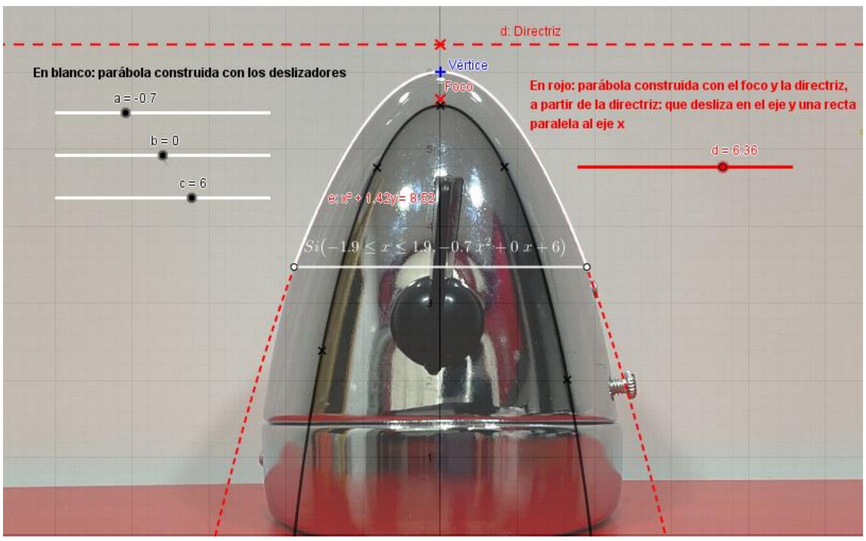


Figura 36 Posición del foco en el faro de una bicicleta. Elaboración propia

8.2.2 REFLEXIÓN EN LAS ELIPSES.

De manera similar al caso a la parábola, las elipses también presentan una peculiaridad con el reflejo de ondas: un haz de ondas que parta de uno de los focos es reflejado hacia el otro foco, como se ha comentado con la lámpara del dentista, que concentra la luz que se proyecta desde el foco emisor y que se refleja en un espejo que la conduce al otro foco, punto donde quiere mirar el dentista. Como se ha comentado, la excentricidad de la elipse es mayor de 0 y menor de 1. El caso exc=1 sería realmente una parábola, pues supone que el semieje mayor coincide con la semidistancia focal, lo cual situaría el segundo foco en el infinito, y por ello los rayos son paralelos al eje de simetría. Otras aplicaciones que aprovechan la forma de la elipse son:

Medicina: el litotriptor: es un reflector elipsoidal que se emplea para descomponer cálculos renales a través de ultrasonidos, y funciona bajo el mismo principio que el comentado anteriormente.

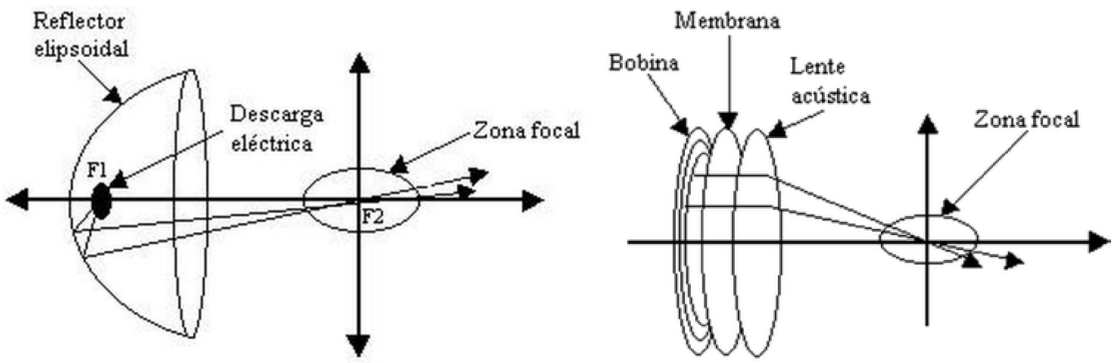


Figura 37. Generador electrohidráulico y electromagnético para destruir cálculos. Foto tomada de la web www.pardel.es .

Eliptipool: es un billar con forma de elipse, en la que el rebote de las bolas seguiría los principios comentados. Se cuenta que una de las excentricidades de Lewis Carroll, autor de Alicia en el país de las maravillas, fue encargar la construcción de este tipo de billar.

Acústica: con las ondas sonoras sucede lo mismo que con las luminosas, y esta circunstancia ha dado origen a las *salas de susurros*, cuyo techo tiene forma de cilindro elíptico, y una persona situada en uno de los focos escucharía a la perfección lo que dice otra persona situada en el otro foco. Hay alguna de estas salas en castillos medievales y también en el Capitolio de Washington.

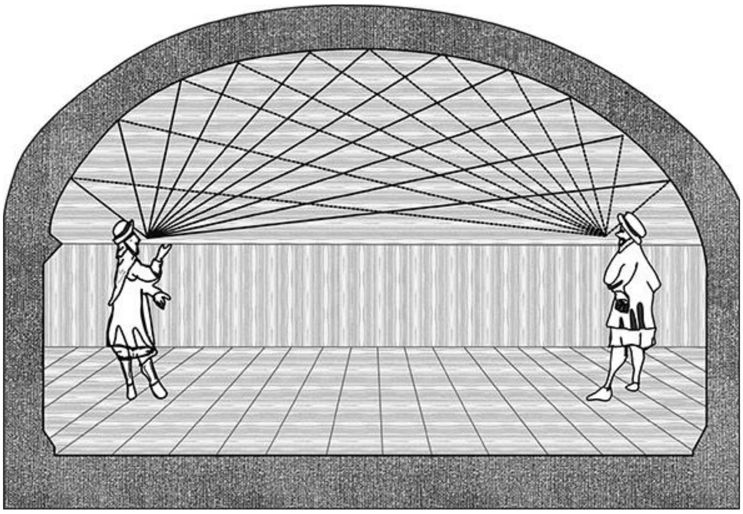


Ilustración 1:Recreación de una sala de susurros. Tomada de www.slate.com (Cortesía de Trevor Cox)

8.2.3 REFLEXIÓN EN LAS HIPÉRBOLAS.

En este caso, un haz de rayos que es proyectado desde uno de los focos al llegar a un reflector hiperbólico es reflejado como si el haz hubiese sido emitido desde el otro foco. Estas propiedades también se usan en la fabricación de telescopios (telescopio de Cassegrain).

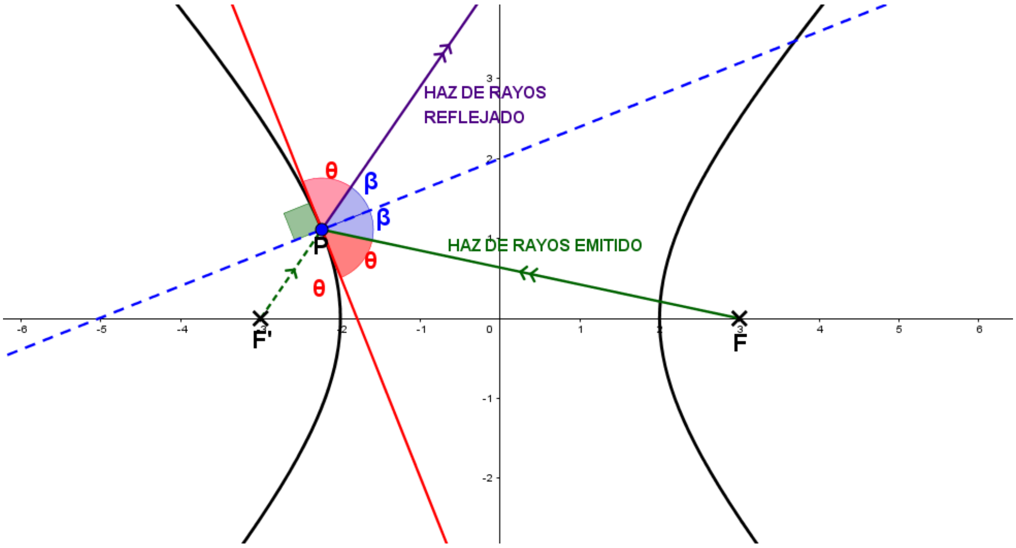


Figura 38 Esquema de la reflexión en una hipérbola. Elaboración propia.

Antes de los modernos sistemas de posicionamiento y la aparición del GPS se aprovechaban las características de la hipérbola en navegación, para posicionar barcos (uso de hipérbolas) y aviones (en navegación aérea uso de hiperboloides). En este caso se medía el tiempo que tardaba en enviarse y recibirse señales entre una nave que estaba moviéndose y dos posiciones conocidas. Era el sistema Loran C (Radionavegación de Largo alcance).

De igual forma, un haz de ondas dirigido hacia uno de los focos se reflejará en la hipérbola y será dirigido hacia el otro foco (se invierten los sentidos de las flechas).

8.3 ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA TRABAJAR LAS CÓNICAS CON GEOGEBRA

ELIPSES.

En el punto 4.3 se ha hablado de material manipulativo, y construir las cónicas con papel. En el caso de la elipse, el problema se plantea con una circunferencia, y dos puntos: el centro de ésta y otro próximo a su perímetro. Una actividad que se va a proponer a los alumnos es que analicen porqué al ir recorriendo el perímetro con el punto se construye una elipse. Para ello se deben valer del concepto de tangente, mediatriz y bisectriz.

Partimos de la elipse, de focos A y B, y trazamos la tangente por un punto D. Se sabe que la suma de las distancias de AD y BD, independientemente de dónde se sitúe D (en el perímetro de la elipse) son siempre iguales. Si se traza el simétrico de A respecto a la tangente (que sería un eje de simetría, y por tanto la mediatriz de A y A’, y bisectriz exterior de los radiovectores BD AD), A’D + BD seguirá siendo igual al eje mayor (2a), pues la distancia de A a la recta tangente es la misma que de A’ a dicha recta. Si el punto D va recorriendo el contorno de la elipse A traza un lugar geométrico que conocen los alumnos: una circunferencia, centrada en B y de radio 2a, eje mayor de la elipse.

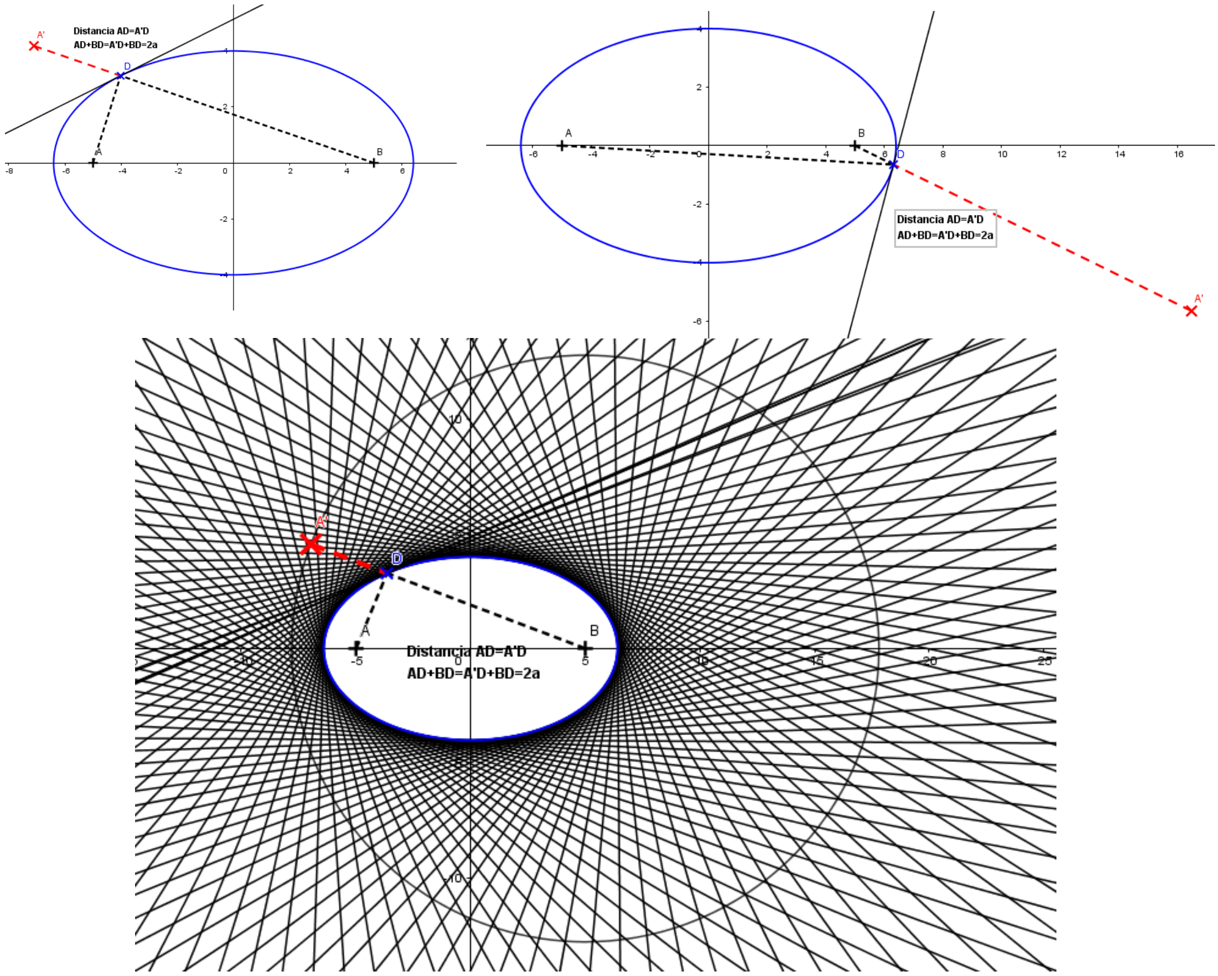


Figura 39. Construcción de la elipse por tangentes. Elaboración propia.

EJERCICIO PARA REALIZAR EN CASA.

Enunciado: sobre una recta r se ubican tres puntos diferentes A, B y C, tal que C es exterior al segmento AB. Determinar el lugar geométrico de las intersecciones de las rectas tangentes de A y B a cualquier circunferencia tangente a la recta r en el punto C.

El siguiente problema se ha adaptado de Academia Internet en la siguiente URL https://www.youtube.com/watch?v=7dqbIQA0BsI&t=38s

La situación de partida es la siguiente, construida con GeoGebra es (un punto P genérico donde se cortan las tangentes desde A y B a las circunferencias que se tracen)

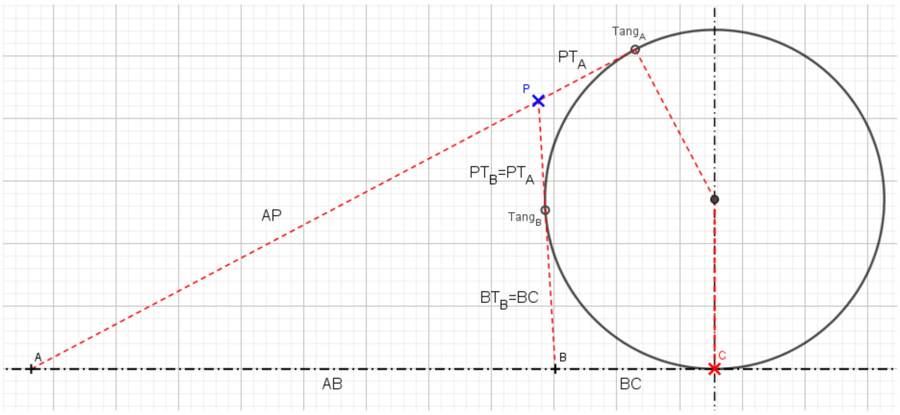


Figura 40. Plateamiento del problema con GeoGebra. Elaboración propia

Si en la figura anterior sumamos las distancias entre los A y P, y B y P, y teniendo en cuenta que la distancia de A a Tang$_A$ es igual a la distancia de A a C (son las tangentes a las circunferencias indicadas en el problema ATang$_A$=AT$_A$=AC=AB+BC= Cte1+Cte2=Cte)

$$AP + BP = (ATang_A - PT_A) + (BT_B + PT_B) = (AB + BC - PT_A) + (BC + PT_A)$$

$$AP + BP = (AB + BC - PT_A) + (BC + PT_A) = AB + 2BC = Constante$$

La expresión anterior nos indica que con independencia de dónde esté el punto P (sea cual sea la circunferencia), la suma de las distancias AP+BP es constante. Por lo tanto, el lugar geométrico pedido es una elipse, cuyos focos son A y B, y C es uno de los vértices:

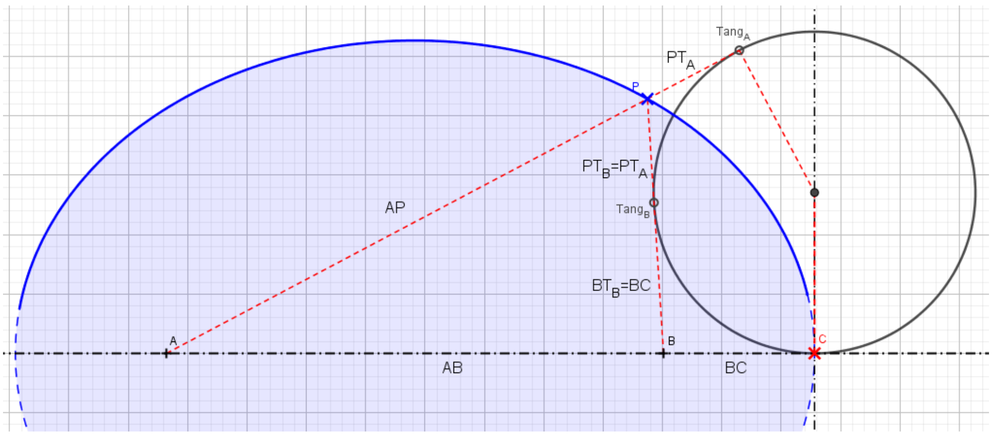


Figura 41. Construcción del problema con GeoGebra. Elaboración propia (Adaptado de Academia Internet)

HIPÉRBOLAS.

En el caso de la hipérbola, de manera similar a la elipse, la tangente es una de las bisectrices (en este caso la interior) de los radiovectores AP y BP (la otra es la recta normal). Si se hace la simetría de uno de los focos, A, respecto de este eje, se obtiene el simétrico A' proyectado sobre el radiovector BP por ser la recta tangente la bisectriz interior, y en este caso se tiene que la diferencia de distancias BP-A'P es igual a BP-AP, que es igual al eje 2a. Si el punto P va recorriendo la hipérbola se obtiene la construcción de la misma por tangentes, como con la construcción en papel. En este caso el punto A' describe otro lugar geométrico: una circunferencia con centro en el foco B y radio el eje 2a →BP-A'P = BP-AP=2a=A'B

En cada pliegue con el papel se dobla por la recta tangente, y se lleva A sobre A' (que va describiendo la circunferencia al ir cambiando la tangente)

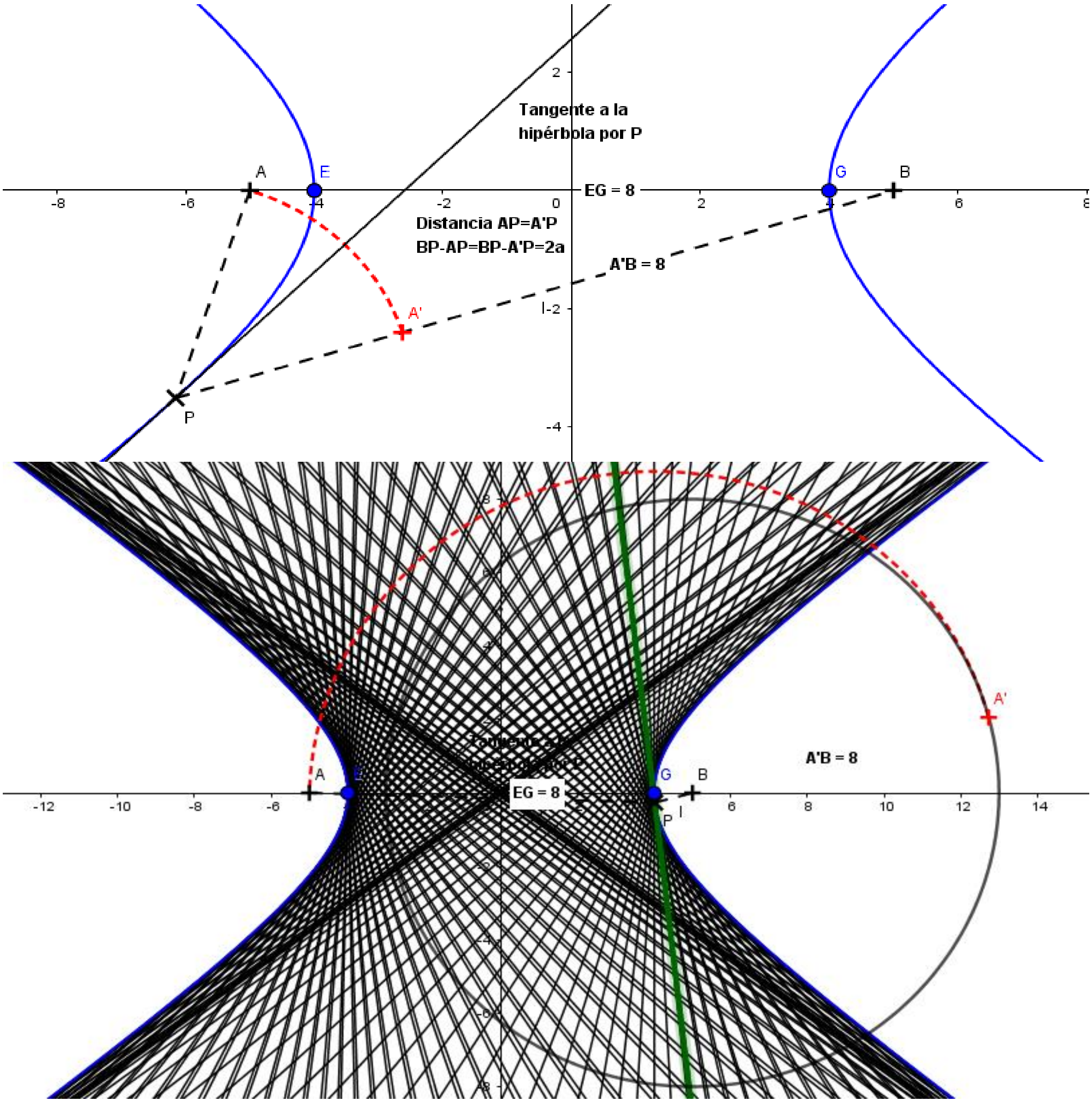
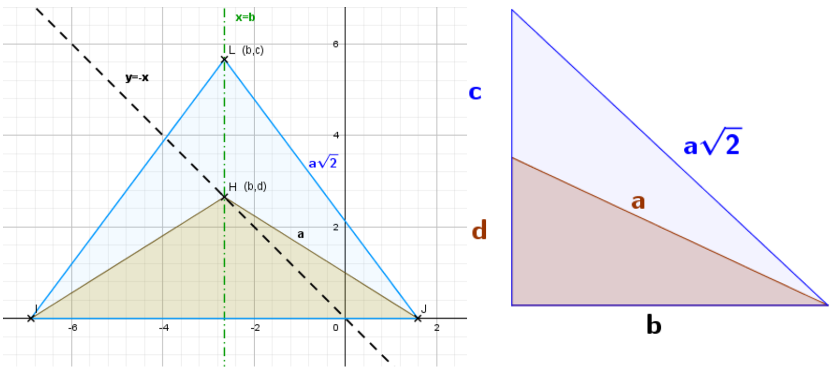


Figura 42. Construcción de la hipérbola por tangentes. Elaboración propia

CONSTRUCCIÓN DE UN HIPERBOLÓGRAFO.

Un *hiperbólografo* sería un útil que nos ayudaría a trazar hipérbolas, al igual que un compás nos permite trazar circunferencias. Es un artefacto en el que la condición que se pone es que la diferencia de dos distancias se mantenga constante. El siguiente ejercicio está obtenido de la siguiente dirección de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, y lo firma Alejandro Zambrano Valbuena. Se incluye porque en él se construye la hipérbola como lugar geométrico pero de forma poco convencional, con otras condiciones

Un punto H, vértice opuesto a la base (situada en el eje x) de un triángulo isósceles de lados congruentes de longitud "a" se mueve sobre a recta $y = -x$. Se pide el lugar geométrico del punto L, vértice de un triángulo isósceles con la misma base y lados de longitud $a\sqrt{2}$.



H se mueve por y=-x

L y H están en la misma vertical

$b = x$

$c = y_L$

$d = y_H = -x$

Figura 43. Planteamiento del problema. Con GeoGebra. Adapatado de Alejandro Zambrano.

otro de hipotenusa $a\sqrt{2}$, y catetos c y b. Por tanto, igualando en b^2 se tiene

$$b^2 = a^2 - d^2 = 2a^2 - c^2 \rightarrow a^2 = c^2 - d^2 \rightarrow \begin{Bmatrix} c = y \\ d = -x \end{Bmatrix} \rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

Que es la ecuación de una hipérbola equilátera. Por tanto, el lugar geométrico que describe el punto L cuando H se mueve por la recta y=-x es una hipérbola (H es deslizante)

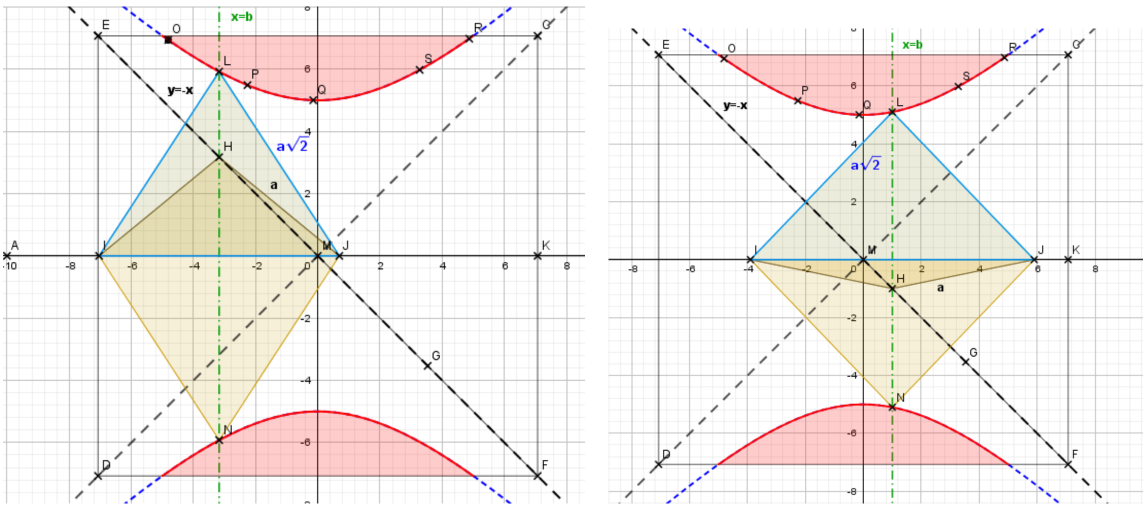


Figura 44. Construcción con GeoGebra de la solución. Adaptado de Alejandro Zambrano.

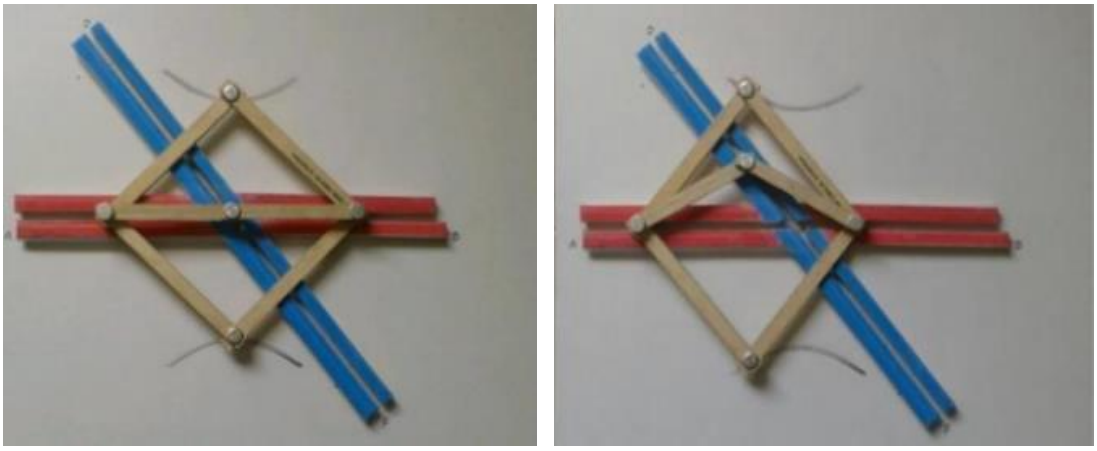


Ilustración 2 Hiperbológrafo, tal y como se ha modelizado con GeoGebra. Fotos obtenidas de https://es.slideshare.net/AlejandroZambranoValbuena/geometria-analitica-34780141

Se ha incluido este ejercicio porque es relativamente fácil de analizar por un alumno de 1º de Bachillerato, se trabajan muchos conceptos con GeoGebra para su construcción y se considera que el resultado es bastante llamativo.

PARÁBOLAS

Vamos a analizas, igual que en la elipse y la hipérbola, qué sucede al plegar el papel con la parábola. En este caso la tangente es la bisectriz del ángulo que forman los segmentos que unen el punto con el foco y el segmento que nos da la distancia el punto al foco. La directriz (rojo) representa el borde inferior del papel. En los pliegues lo que se va haciendo es hacer coincidir la directriz con el foco, y los sucesivos pliegues van dando sucesivas tangentes

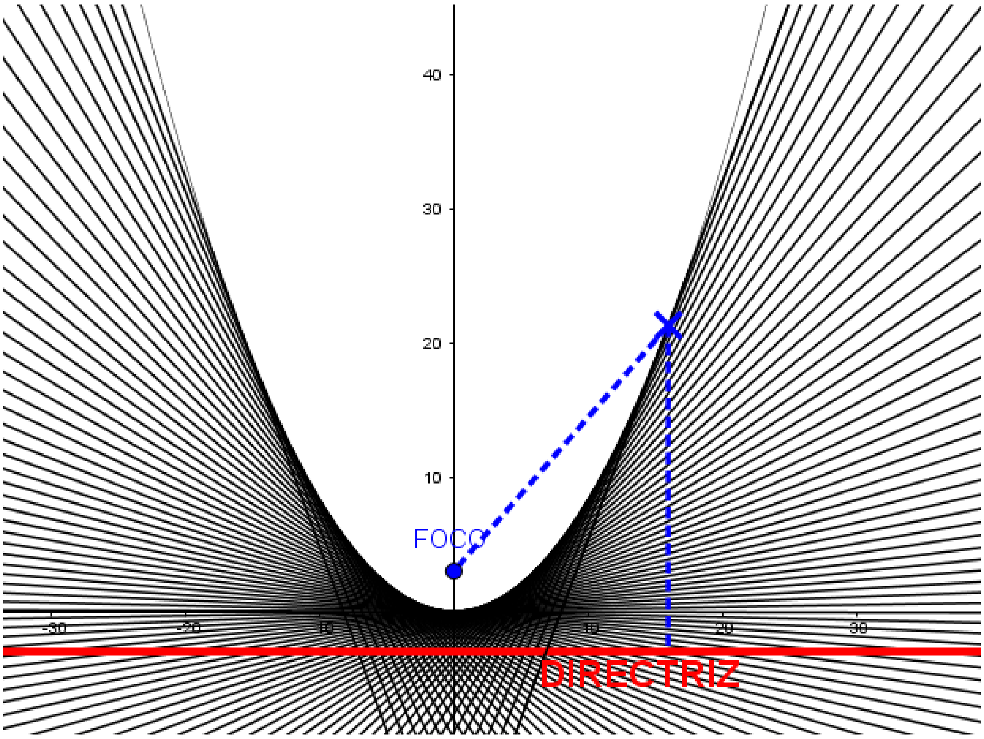


Figura 45. Construcción de la parábola por tangentes. Elaboración propia.

8.4 HANDPAN: MÚSICA, MATEMÁTICAS Y FÍSICA.

Se plantea esta actividad para trabajar transversalmente las Matemáticas junto con la Música y la Física y Química.

El handpan es un instrumento de percusión, que tuvo mucho éxito hace unos años. Es una especie de caja de resonancia en la que se modula el sonido que un artista produce con sus manos al golpear la superficie del instrumento.

Se ha modelizado el instrumento con GeoGebra, que también tiene forma de cuenco parabólico, con una especie de linterna o agujero en la parte inferior, que presumiblemente caracteriza su sonido. Aunque no se ha investigado en profundidad, pues excede el objetivo de este trabajo, parece que sigue los mismos principios de reflexión que las antenas parabólicas o los espejos del faro de una bicicleta. La foto de fondo pertenece a la página articulo.mercadolibre.com.mx (puede obtenerse en esta dirección: https://www.pinterest.com.mx/pin/707909635157333042/)

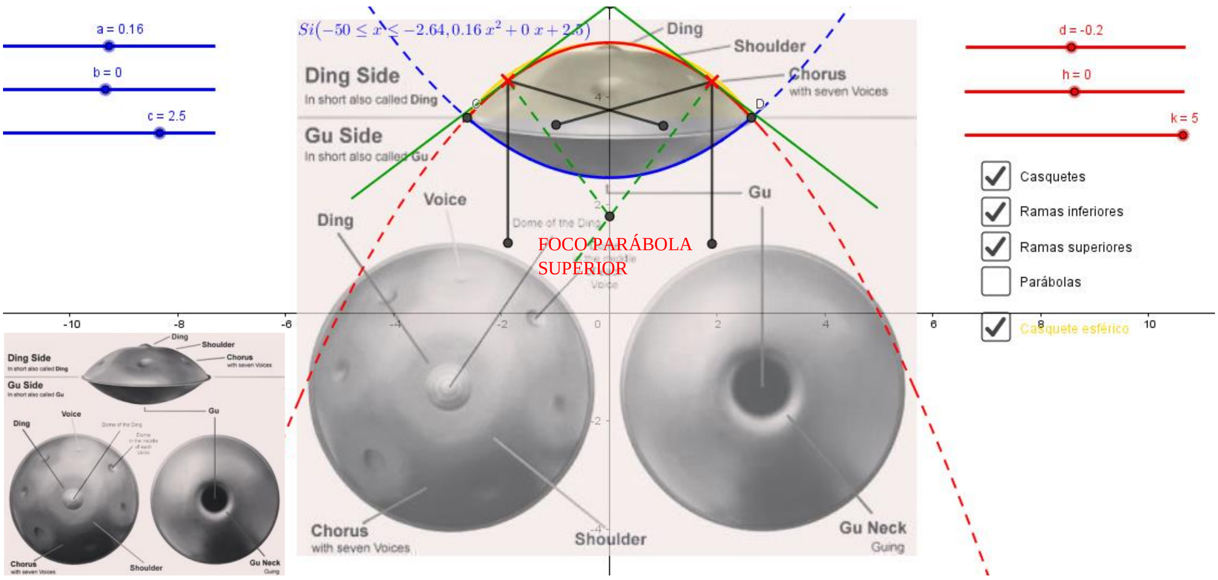


Figura 46. Modelización del Handpan con GeoGebra. Elaboración propia.

Se han obtenido las parábolas del cuenco inferior y superior por puntos y con el trinomio $y = ax^2 + bx + c$.

8.5 ANÁLISIS DE CURVAS PARA EL ENRIQUECIMIENTO CURRICULAR

Se van a analizar a continuación tres curvas que también forman parte de la vida cotidiana de los alumnos, con las que están familiarizados: la cicloide, la clotoide y la catenaria. Si bien la cicloide se encuentra incluida en el currículo de segundo de Bachillerato (dentro de las curvas cíclicas, en Dibujo Técnico), la clotoide y la catenaria exceden el propósito educativo de la etapa, por lo que se plantean como actividades de ampliación y mejora curricular, dentro de una línea de atención a alumnos con altas capacidades. Se han escogido estas tres curvas puesto que en el caso de cicloide se trata de otro lugar geométrico y además el alumno puede operar fácilmente con ella en coordenadas paramétricas, la catenaria es una composición de funciones exponenciales que se estudian en el bloque de análisis, por lo que este tipo de alumnos no tendrá problemas en seguir el desarrollo matemático de estas curvas (veremos que también es otro lugar geométrico). En cuanto a la clotoide, es una curva matemáticamente más compleja, y es necesario hacer un desarrollo mediante una serie de potencias (serie de Taylor), pero la razón de plantear esta curva es por las peculiaridades y usos tan prácticos que tiene, y el estímulo que puede generar en la curiosidad y el interés del alumno, predisponiéndolo para profundizar en su análisis y su estudio.

8.5.1 <u>LA CICLOIDE.</u>

Una definición que podemos dar de cicloide es el lugar geométrico de los puntos que describe un punto de una circunferencia (fijo) cuando ésta gira sin deslizamiento (sin "patinar") a lo largo de una recta. En la siguiente figura se muestra cómo obtener las ecuaciones paramétricas, en un sistema de referencia cartesiano, de la curva a partir del punto P, situado sobre el origen de coordenadas en el instante inicial (cuando la circunferencia no ha empezado a moverse). Se va haciendo girar la circunferencia hasta que P se sitúe de nuevo sobre el eje de abscisas, en la posición ($2\pi r$,0) (la circunferencia habrá dado una vuelta entera)

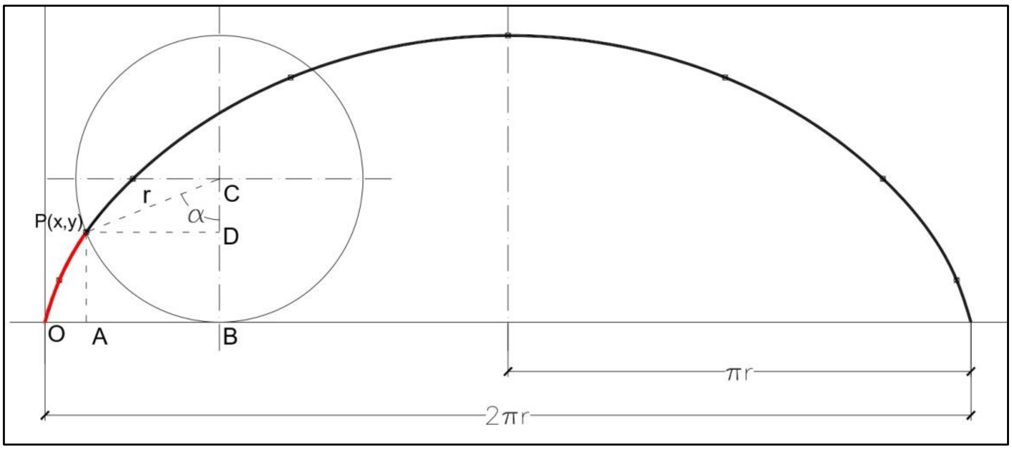


Figura 47 Cálculo de coordenadas de la cicloide. Elaboración propia.

Las coordenadas del punto P dependen de α, que es el ángulo comprendido entre la recta vertical que pasa por C (centro de la circunferencia) y el radio r sobre el que se sitúa el punto P. $0 \leq \alpha \leq 2\pi$:

$$x = r(\alpha - \sin\alpha) \quad \rightarrow x = OA = OB - AB = \overset{\frown}{PB} - AB = r\alpha - r\sin\alpha$$
$$y = r(1 - \cos\alpha) \quad \rightarrow y = PA = CB - DB = r - r\cos\alpha$$

Esta curva, conocida con el sobrenombre de la "Helena de los Geómetras" debido a que generó bastantes disputas entre los matemáticos del SXVII (hay autores que sostienen que es por la belleza de sus propiedades geométricas) tiene la propiedad de ser la curva de descenso más rápida entre dos puntos dados (considerando que sólo actúa la gravedad y no hay rozamiento). Por esta propiedad se la conoce con el nombre de curva braquistócrona. También es una curva tautócrona (es tal que cualquier esfera no sometida a velocidad inicial y que se deje caer en cualquier punto de la curva, llega al punto más bajo en un tiempo que es independiente del punto donde se soltó la esfera).

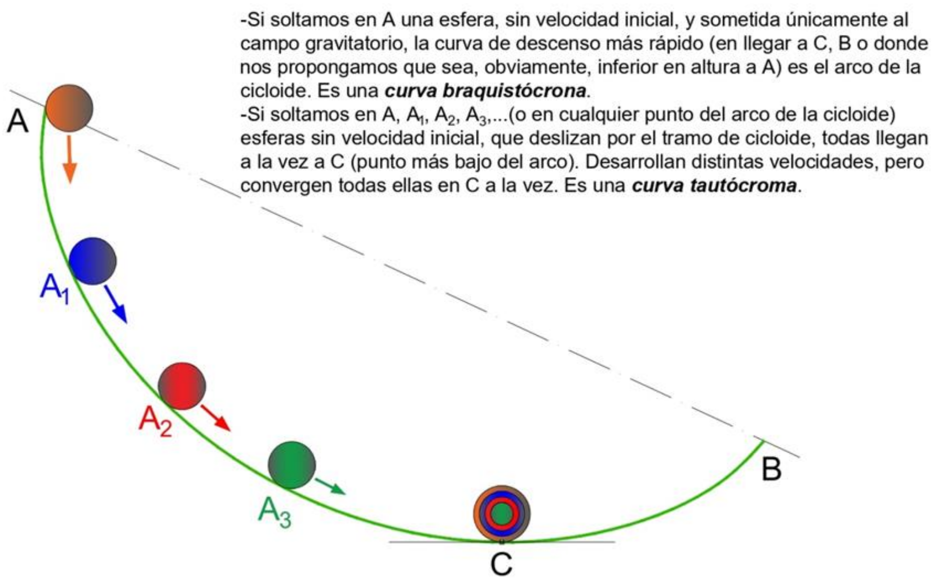


Figura 48 La cicloide como curva tautócrona y braquistócrona. Elaboración propia.

Debido a estas propiedades esta curva tiene muchas aplicaciones en mecánica, arquitectura, arte y también se emplea en usos lúdicos, como toboganes o pistas de skate. En este TFM nos referiremos a las aplicaciones que tiene en las pistas de Skate.

PARQUE DE SAN ISIDRO.

En el cerro de San Isidro se creó un parque en 2016 con una pista de skate para patinaje. Aunque estas pistas de patinaje a veces se hacen también con moldes en forma de circunferencia, se propone como actividad de ampliación a los alumnos de 1º de Bachillerato una modelización con GeoGebra, comparando ambas curvas sobre el trazado de la pista.

Figura 49 Pista de skate en el cerro de San Isidro. (Obtenido de https://elskate.net/skatepark-burgos/)

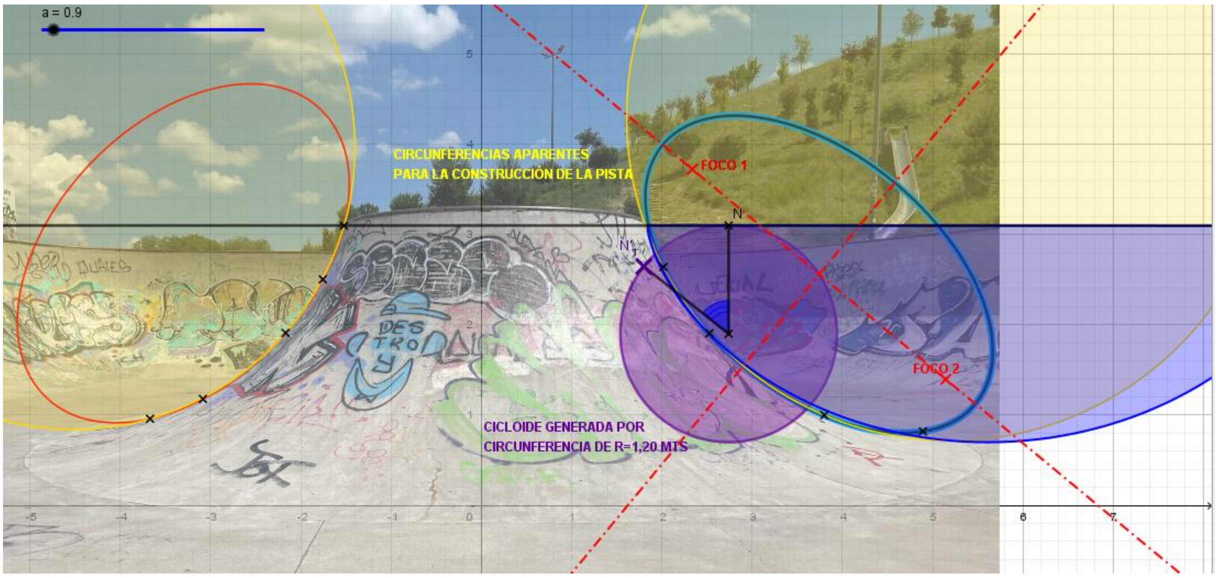


Figura 50. Comparación del ajuste de la pista DE SAKTE con una circunferencia de radio 3 m, una elipse y una cicloide. Elaboración propia

El ajuste de una cicloide en esta pista de skate no es muy bueno. El radio obtenido para generar la curva tiene que ser menor que la mitad del radio de las circunferencias señaladas en amarillo (aproximadamente 3mts frente a 1,20 mts). Las pistas parecen haber sido construidas con circunferencias.

HAZ CLICK AQUÍ PARA VERLO EN GOOGLE MAPS

8.5.2 LA CATENARIA.

La siguiente curva de mejora curricular es la catenaria. Si se coge un cable ideal, totalmente flexible e indeformable, suspendido de los extremos, con la masa distribuida uniformemente, y sometido exclusivamente a la acción de la gravedad la forma que adopta el cable se denomina catenaria. Galileo ya analizó la curva, y creyó que se trataba de una parábola, porque se parece mucho a ella, pero Huygens demostró que no era una parábola, aunque inicialmente no supo deducir su fórmula (Sáenz, 2020). La fórmula de la catenaria es:

$$\boxed{y = a \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)}{2}} \qquad \boxed{a = \frac{T_0}{\gamma} = h}$$

donde T es la tensión en el punto considerado, T_0 es la tensión en el punto más bajo, θ es el ángulo formado por la tensión y la horizontal (pendiente de la recta tangente en ese punto) y γ es la densidad lineal del cable (Fernández, 2020).

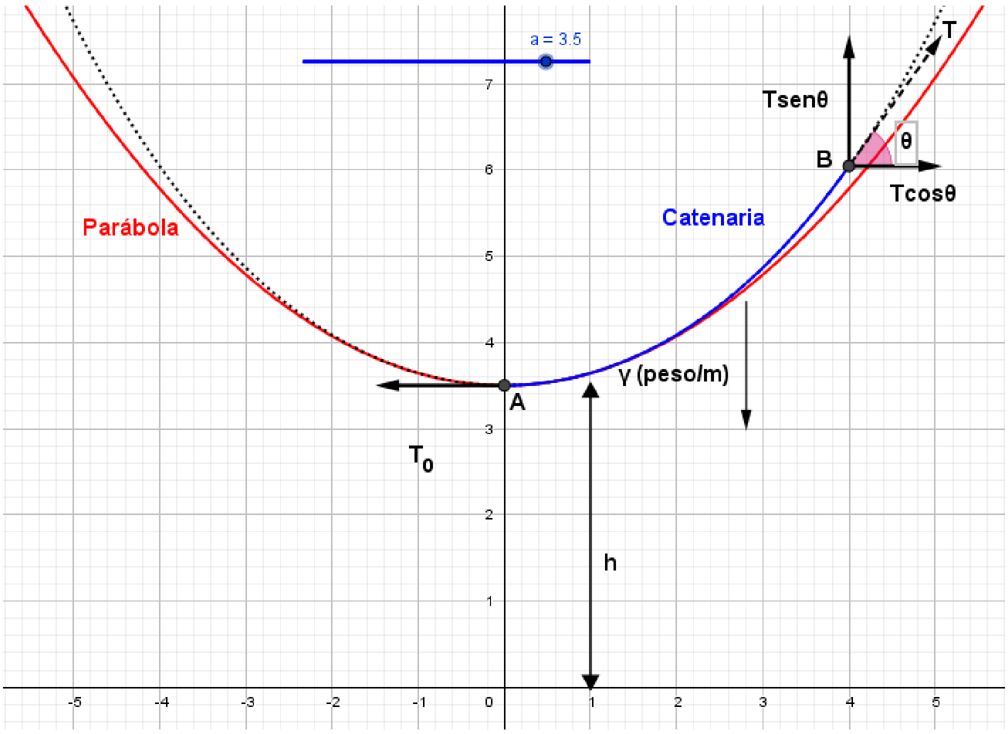


Figura 51. Comparación de una catenaria (azul y negro) y una parábola (rojo). Elaboración propia.

En el cable sólo hay tracciones, y la importancia de esta curva radica en que si le damos la vuelta se comporta de manera inversa, es decir, en vez de tracciones tendremos sólo compresiones, pero no aparecerán en ningún momento esfuerzos de corte (aquellos cuya dirección no está alineada con el eje) que tienden a desestabilizar el arco. La compresión es un esfuerzo estabilizador (Fernández, 2020).

Si desarrollamos el coseno hiperbólico en serie de Taylor se tiene:

$$cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

Vemos que la ecuación de la catenaria se corresponde con la de una parábola más un término de cuarto orden. Galileo estaba cerca de la solución, ya que parábola y catenaria se parecen mucho cerca del origen. Pero cuando nos alejamos del origen, la catenaria crece mucho más rápido (Fernández, 2020). Si se van colgando pesos de la catenaria las curvas que se obtienen se llaman curvas funiculares (Sáenz, 2020).

Pese a las propiedades ideales de ambas curvas para ser empleadas como arcos resistentes en Europa fueron durante muchos años descartadas porque no se consideraban elegantes (Fernández, 2020). No es hasta finales del siglo XIX cuando arquitectos como Gaudí las rescatan para ser empleadas en sus construcciones, como en la Sagrada Familia o la casa Batlló (Sáenz, 2020).

La catenaria, aunque en Europa no se utilizó mucho hasta el siglo XIX, otras civilizaciones llevaban mucho tiempo utilizándolas (desde los esquimales en sus iglús hasta tribus africanas). Un ejemplo notorio de catenaria es el gran arco de Taq-i Kisra, en la actual Irak, arco catenario que pese a los desastres acaecidos a lo largo de los siglos aún sigue en pie.

Un ejemplo destacado de la arquitectura moderna es el arco de Gateway de St. Louis, Misuri, que es el arco más grande del mundo y el monumento más alto del hemisferio norte (Sáenz, 2020). A continuación se muestran imágenes de estas construcciones:

Ilustración 4 gran arco de Taq-i Kisra .

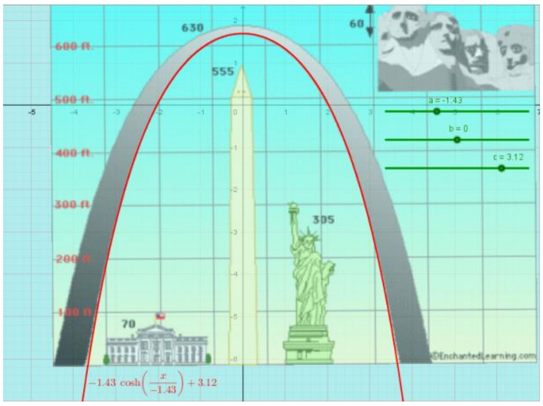


Ilustración 3: Modelización de la catenaria del arco de Gateway de St. Louis con GeoGebra. Elaboración propia.

Imagen ilustración 4: Obtenida de: http://www.bloganavazquez.com/tag/cosroes/

Imagen ilustración 3: Obtenida de https://mytravelwriting.blog/2017/12/29/arch-deco-the-great-gateway-arch-saint-louis-missouri-is-a-beautiful-site-to-visit-2/

HAZ CLICK AQUÍ SI QUIERES VERLO EN GOOGLE MAPS

Tal y como señala Fernández (2020), la importancia de la catenaria en construcción se debe a su estabilidad. Fue *Moseley* en 1835 el que hizo un estudio riguroso del asunto. En un macizo de piedra MNKL, formado por piedras apiladas sin mortero como el de la ilustración 5, tenemos que en cada plano de contacto entre dos piedras hay una resultante equivalente a las cargas que hay por encima de dicho plano. La intersección de cada plano con la resultante que le es de aplicación da un punto que se llama *centro de empuje*. Pues bien, la *catenaria es el lugar geométrico de los centros de empuje* de cada uno de los planos que conforman el macizo. Se define como *línea de empujes*, y sería la trayectoria que siguen los empujes (la resultante en cada plano) hasta llegar a los apoyos (Fernández, 2020). Todo lo anterior ya fue intuido por Hooke en 1970 al decir que "*igual que cuelga un hilo flexible pero invertido así se sostendrá el arco rígido*" (Fernández, 2020). Gregory en 1698 matizaba la afirmación de Hooke, indicando que si un arco rígido es estable es debido a que hay una catenaria contenida en él, en su espesor (Fernández, 2020).

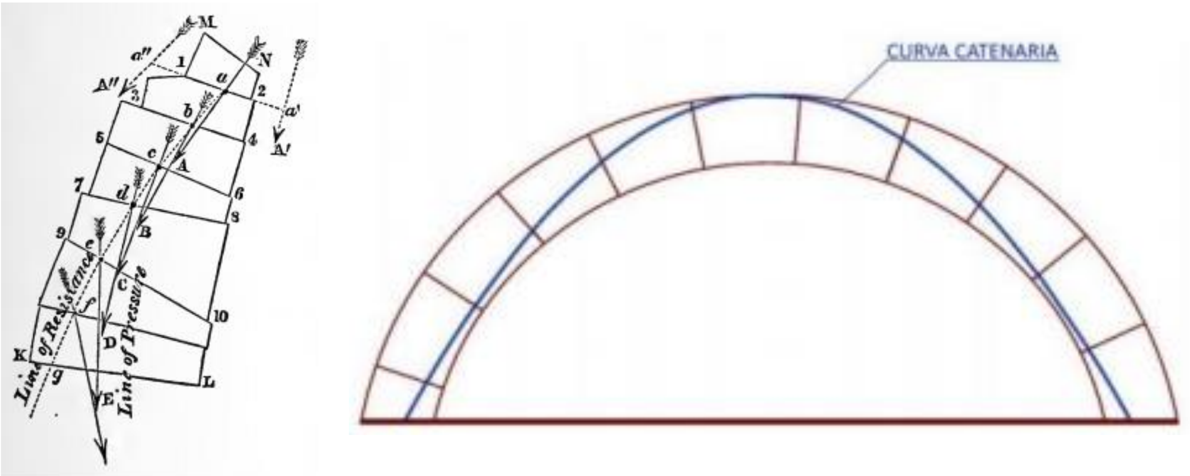


Ilustración 5. Izquierda: líneas de empuje en un macizo de fábrica. Imagen señalada en Fernéndez, A. (2020) y obtenida de [16] H. Moseley, *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture*, John Wiley & Son, Nueva York, 1869.

Derecha: Arco estable si contiene un arco catenario. Imagen de Manuel Cañete y señalada en Fernández, A. (2020)

8.5.3 LA CLOTOIDE.

Para terminar las curvas de enriquecimiento curricular se va a hablar en este apartado de una curva que también forma parte del entorno del alumno de bachillerato. Perteneciente a la familia de las espirales, *la clotoide (también conocida como espiral de Euler o espiral de Cornu)* es una curva de transición entre tramos rectos y curvos de diversas infraestructuras porque permite "*hacer una transición gradual desde un punto de curvatura cero hasta una curvatura cualquiera*" (González, 2020). Es una por tanto una *curva de transición* cuyo radio de curvatura varía de manera inversamente proporcional a la distancia recorrida sobre la curva. Su empleo en infraestructuras se debe a que permite hacer transiciones suaves, sin que haya cambios bruscos de aceleración centrípeta al entrar en una curva. Cuando estamos conduciendo y entramos en una curva, al ir girando el volante lo que hacemos realmente es trazar una clotoide, que va disminuyendo su curvatura pero no de manera indefinida, ya que llega un momento en el que se enrolla, llegado un radio de curvatura dado.

Son varios los matemáticos que la han estudiado y redescubierto de manera independiente (Bernouilli, Euler, Fresnel, Cornu), hasta que Ernesto Cesàro la bautizó como clotoide en 1886, en honor a una de las tres parcas de la mitología griega: "Klotho" (Sáenz, 2020). La ley de curvatura de la clotoide es: $RL = A^2$

> donde A es una constante conocida como parámetro de la clotoide (determinará cómo varía la curvatura desde infinito (en la recta) hasta R, que es el radio de la circunferencia sobre la que se enrollará definitivamente la clotoide. Finalmente, L es la distancia recorrida sobre la curva.

La formulación completa de la curva es más complicada que en los casos anteriores.

Resumiendo todo lo indicado, la clotoide es una curva de radio variable, en la que el radio en un punto es inversamente proporcional a la distancia recorrida sobre la curva y precisamente por esto se emplea en las transiciones recta-curva de las infraestructuras para permitir que la aceleración se movilice de manera gradual, sin ser una molestia para el usuario. En infraestructura viaria, fundamentalmente ferrocarril y carreteras, se emplea en los acuerdos en planta, pero hay una aplicación lúdica en la que se emplea habitualmente: la montaña rusa (Sáenz, 2020). La clotoide es la curva de transición más empleada para hacer los acuerdos en el alzado de las montañas rusas, transición entre alineaciones en el plano vertical cuando se da una vuelta completa (un "loop" en inglés) ya que cuando la vuelta no es completa (el carrito no está vertical completamente, o nuestro cuerpo no estaría horizontal) se emplea una de las cónicas estudiadas: la parábola.

Otro uso de esta curva lo encontramos en las pistas de atletismo. En la construcción de pistas indoor las transiciones recta-curva suelen adaptarse con clotoides por la dificultad técnica añadida que para el atleta conlleva un menor radio de curvatura. (González, 2020).

A continuación se muestran varias imágenes con aplicaciones de la clotoide:

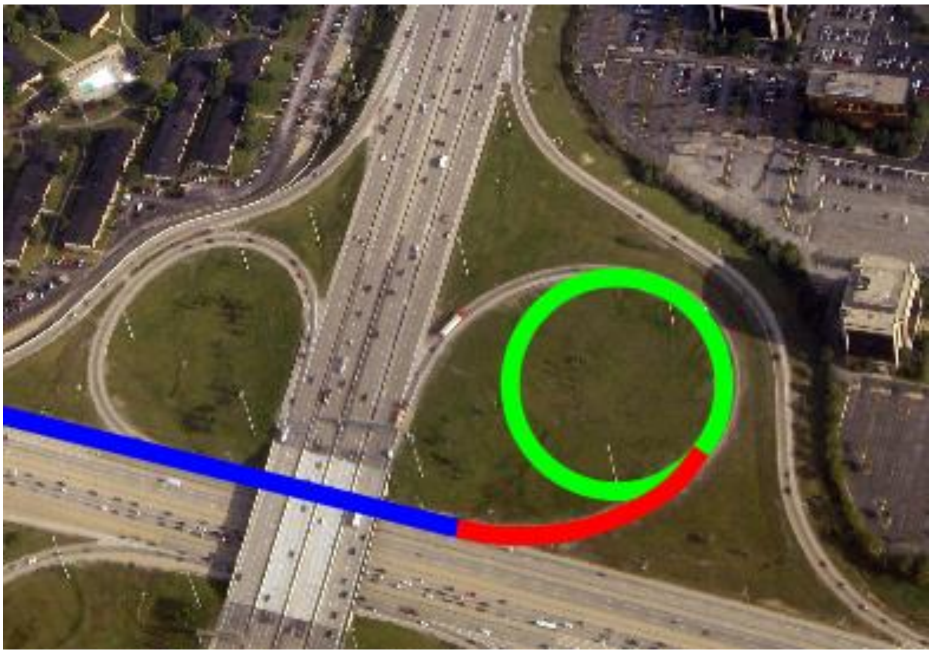
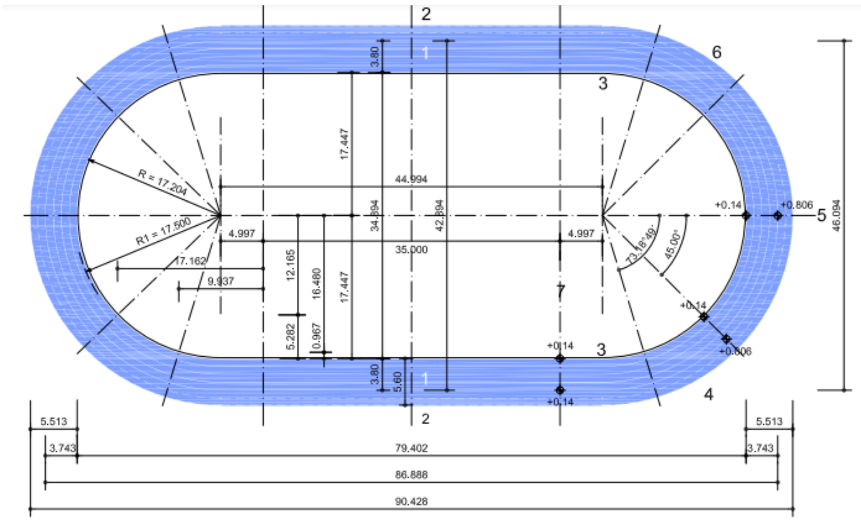


Ilustración 6. Empleo de la clotoide como curva de transición en infraestructura viaria. Obtenido de http://arablogs.catedu.es/blog.php?id_blog=1535&id_articulo=182544



1 RECTA
2 RECTA HORIZONTAL
3 CURVA DE TRANSICION
4 PISTA ASCENDENTE
5 CURVA CON INCLINACION CONSTANTE
6 PISTA DESCENDENTE
7 LINEA DE LLEGADA (Meta)

Nota: En la web del CSD, señalada al pie de la figura se dan detalles de las clotoides a emplear en los distintos tipos de pista.

Ilustración 7. Clotoide en pista de atletismo Obtenida de la página web del CSD (Consejo Superior de Deportes). https://www.csd.gob.es/es/csd/instalaciones/politicas-publicas-de-ordenacion/normativa-tecnica-de-instalaciones-deportivas/normas-nide/nide-2-18

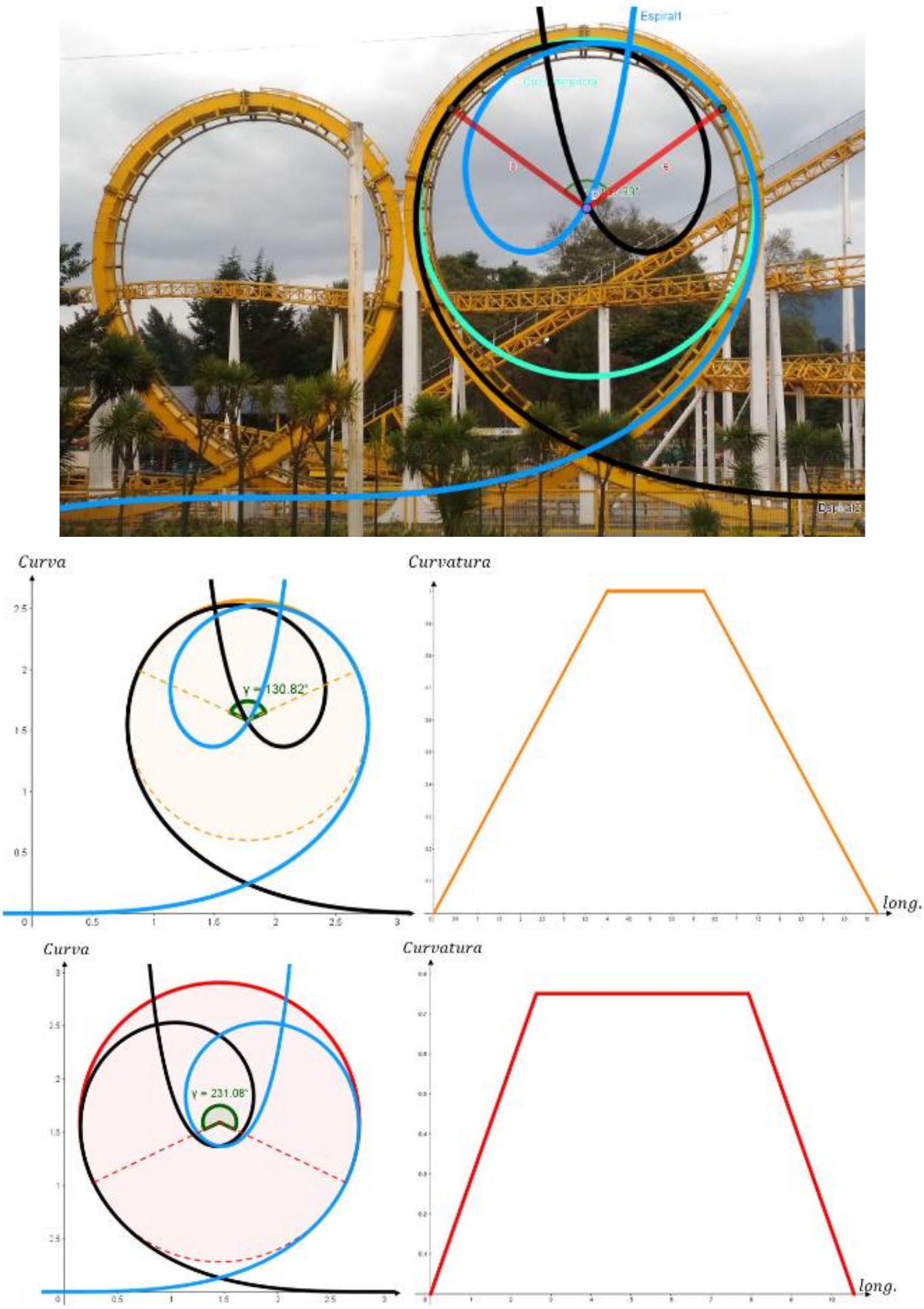


Ilustración 8. Arriba: doble loop de la montaña rusa del parque Salitre Mágico (Bogotá). La transición realizada es →clotoide (negro)- circunferencia (verde) – clotoide (verde). En la parte inferior los diagramas curva (forma)-curvatura (inverso del radio). Los tramos horizontales de la curvatura son circunferencias, donde el radio es constante. Obtenido de García-Matos, J.; Avilán-Vargas, N. (2019). http://www.scielo.org.co/pdf/cient/n35/2344-8350-cient-35-00225.pdf